Шпаргалка по численным методам (экзамен Милюкова)

## Этапы математического моделирования. Математическая корректность задачи

Этапы:  
1. Постановка задачи  
2. Построение математической модели  
3. Выбор численного метода  
4. Реализация (программа)  
5. Анализ результатов  
  
Математическая корректность: решение существует, единственно и устойчиво к малым изменениям входных данных.

## Источники погрешностей при моделировании

1. Модельные — приближение реальности.  
2. Вычислительные — округления, машинная арифметика.  
3. Методические — особенности выбранного метода.  
4. Программные — ошибки кода.  
5. Измерительные — неточность входных данных.

## Методы численного интегрирования. Сфера применения

Методы: прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса, Монте-Карло.  
Применяются при невозможности аналитического вычисления интегралов.

## Метод прямоугольников. Метод трапеций

Прямоугольников: приближение области под графиком прямоугольниками.  
Трапеций: приближение кривой ломаной линией (трапециями), точнее.

## Метод Ньютона-Рафсона для системы нелинейных уравнений

Итерационный метод:  
 xₖ₊₁ = xₖ - J⁻¹(xₖ) · F(xₖ), где J — якобиан.  
Нужен начальный вектор. Может не сходиться при плохом приближении.

## Метод Симпсона с контролем погрешности

Симпсон: ∫ ≈ h/3 [f(x₀) + 4f(x₁) + 2f(x₂) + ... + f(xₙ)].  
Контроль: сравнение результата с разным шагом (метод Рунге).

## Квадратурные формулы Гаусса

Интеграл ≈ сумма значений функции в специальных точках с весами.  
Высокая точность, меньше узлов. Пример: 2-точечная формула: f(-√1/3)+f(√1/3).

## Вычисление интегралов на неравномерной сетке

Сетка с разными шагами. Используют адаптивные методы (трапеции, Симпсон). Полезно при сложной функции.

## Адаптивные методы вычисления интегралов

Шаг интегрирования зависит от поведения функции.  
Где функция меняется резко — маленький шаг.  
Пример: адаптивный Симпсон.

## Методы Монте-Карло

Число интеграл ≈ среднее значение функции по случайным точкам.  
Хорошо работают для многомерных задач. Применяются в физике, экономике и т. д.

## Формулы для повышения устойчивости численного дифференцирования

Используются симметричные разностные схемы, сглаживание данных, специальные аппроксимации для уменьшения влияния шумов и ошибок округления.

## Метод Гаусса решения СЛАУ

Пошаговое исключение переменных (прямой ход), затем обратный ход (обратная подстановка). Требует преобразования матрицы к верхнетреугольному виду.

## Метод Гаусса-Жордана с выбором главного элемента

Преобразование всей матрицы до диагонального вида. Выбор максимального по модулю элемента на шаге исключения повышает устойчивость.

## Итерационные методы решения СЛАУ. Метод Гаусса–Зейделя

Методы последовательных приближений. Гаусс-Зейдель: использует уже вычисленные значения в текущей итерации. Быстрее простого итерационного метода.

## Метод градиентного и наискорейшего спуска решения СЛАУ

Методы минимизации функционала ошибки. Движение по антиградиенту. Наискорейший спуск — шаг выбирается оптимально по направлению градиента.

## Решение плохообусловленных СЛАУ. Регуляризация

Плохо обусловленная система — малая возмущенность входных данных сильно влияет на решение. Регуляризация (например, Тихонова) стабилизирует решение.

## Метод деления отрезка пополам (бисекции), метод золотого сечения

Бисекция: делим отрезок пополам, выбираем половину с нужным знаком функции. Золотое сечение — оптимизация (поиск минимума) без производных.

## Метод Ньютона (касательных) решения НУ

xₙ₊₁ = xₙ - f(xₙ)/f'(xₙ). Быстрая сходимость при хорошем начальном приближении. Требуется производная.

## Метод секущих

xₙ₊₁ = xₙ - f(xₙ)(xₙ - xₙ₋₁)/(f(xₙ) - f(xₙ₋₁)). Не требует производной. Быстрее бисекции, но может расходиться.

## Метод итераций решения НУ

Рекурсия: xₙ₊₁ = φ(xₙ). Метод простой итерации. Требует условия сходимости: |φ'(x)| < 1.

## Системы нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Метод Ньютона

Простая итерация: Xₙ₊₁ = Φ(Xₙ). Ньютон: Xₙ₊₁ = Xₙ - J⁻¹(Xₙ)·F(Xₙ). Нужен якобиан.

## Аппроксимация и интерполяция — отличия и применение

Интерполяция: точное прохождение через заданные точки.  
Аппроксимация: приближенное описание, минимизация ошибки.

## Полиномиальная аппроксимация

Приближение функции многочленом. Используется при сглаживании данных, построении моделей.

## Интерполяция с многочленами Лагранжа

L(x) = Σ yᵢ·lᵢ(x), где lᵢ(x) = произведение (x - xⱼ)/(xᵢ - xⱼ), j≠i. Проходит через все заданные точки.

## Построение кубических сплайнов

Соединение отрезков кубических многочленов, гладких по 1-й и 2-й производной. Хорошо аппроксимируют данные.

## Эрмитовы сплайны. Кривые Безье

Эрмит — сплайн с заданием значений и производных.  
Кривые Безье — аппроксимация на основе контрольных точек.

## Приближение функций: среднеквадратичное, равномерное, рациональное

Среднеквадратичное — минимизация суммы квадратов ошибок.  
Равномерное — минимизация максимальной ошибки.  
Рациональное — дробно-рациональные функции.

## Метод наименьших квадратов. Проблемы численной реализации

Минимизация отклонения аппроксимации. Проблемы: вырождение матрицы, чувствительность к шуму.

## Численное разложение в ряды Фурье

f(x) ≈ a₀/2 + Σ (aₙcos(nx) + bₙsin(nx)). Основано на ортогональности синусов и косинусов.

## Интегралы Фурье. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Интеграл Фурье — непрерывная версия ряда. БПФ — быстрый алгоритм вычисления коэффициентов (FFT).

## Целевая функция. Методы минимизации функционалов

Целевая функция — подлежащая оптимизации. Минимизация: градиентный, координатный спуск и др.

## Координатный, градиентный и наискорейший спуск

Координатный — по одной переменной. Градиентный — по направлению антиградиента. Наискорейший — оптимальный шаг.

## Методы сопряженных направлений

Улучшение градиентных методов. Использует ортогональные направления. Хорошо работает для квадратичных функционалов.

## Симплекс-метод

Решение задач линейного программирования. Движение по вершинам многогранника в сторону улучшения функции.

## Метод ветвей и границ

Для целочисленного программирования. Делит задачу на подзадачи, исключая те, что не могут дать лучший результат.

## Задача коммивояжера

Найти кратчайший путь, проходящий по всем вершинам ровно один раз и возвращающийся в начало. NP-полная задача.

## Численные методы решения ДУ в частных производных

Методы: конечных разностей, конечных элементов, сеточно-характеристические. Основаны на аппроксимации производных.

## Контроль точности по методу Рунге

Сравниваются результаты с шагом h и h/2. Разность — оценка погрешности.

## Суть метода Монте-Карло интегралов

Интеграл ≈ среднее значение функции по случайным точкам.

## Область применимости Монте-Карло

Многомерные, сложно задаваемые аналитически задачи.

## Сравнение: прямоугольники, трапеции, Симпсон

Симпсон — самый точный, затем трапеции, затем прямоугольники.

## Суть метода Симпсона

Комбинация парабол, точнее, чем трапеции. Требует четного числа интервалов.

## Суть Гаусса-Жордана с ведущим элементом

Выбор максимального по модулю элемента для устойчивости.

## Итерационные методы нулевого порядка

Не используют производные, только значения функции.

## Суть градиентных методов СЛАУ

Минимизация ошибки — движение по антиградиенту.

## Суть метода Ньютона для НУ

Использует производную: xₙ₊₁ = xₙ - f(xₙ)/f'(xₙ).

## Суть метода дихотомии

Половинное деление отрезка, где функция меняет знак.

## Проблема систем нелинейных уравнений

Сходимость, чувствительность, множество решений.

## Обратная квадратичная интерполяция

Использует 3 точки и параболу для поиска минимума функции.

## Локальная vs глобальная интерполяция

Локальная — на малом интервале. Глобальная — на всей области.

## Полином Лагранжа

Проходит через заданные точки. Строится на базисных многочленах.

## Аппроксимация функций

Приближенное представление с минимальной ошибкой.

## Интерполяция 5 точек полиномом 4 степени

Да, можно. Количество точек = степень + 1.

## Классический кубический сплайн

Гладкий, непрерывный по второй производной между узлами.

## Повышение точности численного дифференцирования

Центральные разности, уменьшение шага, сглаживание.

## Разложение непериодической функции в Фурье

Да, через интеграл Фурье.

## Проблема вычисления коэффициентов Фурье

Численные ошибки, потеря ортогональности.

## Постановка задачи коммивояжера, рюкзака, расписания

Коммивояжер — кратчайший путь. Рюкзак — оптимальный выбор предметов. Расписание — оптимизация во времени.

## Принцип симплекс-метода

Переход от одной вершины области допустимых решений к другой с улучшением целевой функции.