Шпаргалка по численным методам

# 🟦 1. Методы решения уравнений (НУ и СНАУ)

## 🔹 Метод дихотомии (деления пополам)

Делим отрезок пополам, выбираем половину, где знак функции меняется. Повторяем, пока не приблизимся к корню. Прост, но медленный.

## 🔹 Метод секущих

Как метод Ньютона, но без производной. Строим секущую по двум последним точкам и ищем пересечение с осью X. Быстрее дихотомии.

## 🔹 Метод простой итерации

Преобразуем уравнение к виду x = φ(x) и подставляем x в φ много раз. Сходится, если |φ'(x)| < 1.

## 🔹 Метод Ньютона (касательных)

Ищем корень уравнения, используя касательную. Формула: x\_{n+1} = x\_n - f(x\_n)/f'(x\_n). Быстрый при хорошей начальной точке.

## 🔹 Метод Ньютона–Рафсона (для систем)

Как обычный Ньютон, но для систем: используем якобиан вместо производной и решаем СЛАУ на каждом шаге.

## 🔹 Метод золотого сечения

Для поиска минимума функции. Сужаем интервал, сравнивая значения в точках, делящих отрезок в золотой пропорции. Эффективен без производных.

# 🟨 2. Методы численного интегрирования

## 🔹 Метод прямоугольников (левый, правый, средний)

Делим отрезок и считаем площадь прямоугольников. Средний — самый точный.

## 🔹 Метод трапеций

Заменяем участки трапециями между соседними точками. Более точный, чем прямоугольники.

## 🔹 Метод Симпсона (и адаптивный)

Заменяем функцию параболой через 3 точки. Требует чётного числа интервалов. Адаптивный — делит отрезки, где ошибка велика.

## 🔹 Квадратурные формулы Гаусса

Используют корни полинома Лежандра как точки и спец. веса. Очень точный метод, особенно на −1 до 1.

## 🔹 Методы Монте-Карло

Случайно выбираем много точек и усредняем значения функции. Хорош для многомерных задач.

## 🔹 Адаптивные методы

Делают шаг меньше там, где функция резко меняется. Экономят вычисления.

## 🔹 Интегрирование на неравномерной сетке

Точки неравномерны. Формулы применяются отдельно на каждом отрезке.

# 🟩 3. Решение СЛАУ

## 🔹 Метод Гаусса

Прямой ход: обнуляем нижние элементы. Обратный ход: находим переменные. Основа всех методов.

## 🔹 Метод Гаусса–Жордана

Доводим до диагональной матрицы. Можно сразу получить обратную матрицу.

## 🔹 Метод Гаусса–Зейделя

Итерационный метод. Использует уже найденные значения внутри итерации. Быстрый при диагональном преобладании.

## 🔹 Метод простой итерации (для СЛАУ)

Преобразуем систему к виду x = Bx + c и повторяем подстановку. Сходится при ||B|| < 1.

## 🔹 Градиентный метод

Используется для симметричных положительно определённых матриц. Ищем минимум квадратичной функции.

## 🔹 Метод наискорейшего спуска

Улучшенный градиентный метод. Идём в сторону антиградиента, выбирая лучший шаг.

## 🔹 Метод сопряженных направлений

Быстрее обычного градиента. Использует предыдущие направления для ускорения сходимости.

## 🔹 Регуляризация (метод Тихонова)

Добавляем к СЛАУ член с параметром, чтобы сделать систему устойчивой (при вырожденной или плохо обусловленной матрице).

# 🟧 4. Интерполяция и аппроксимация

## 🔹 Полиномиальная аппроксимация

Приближение функции многочленом. Выбирается степень и коэффициенты подгоняются под данные.

## 🔹 Интерполяция многочленом Лагранжа

Один многочлен проходит через все точки. Формула Лагранжа: сумма произведений базисных полиномов.

## 🔹 Кубические сплайны

Соединяют точки гладко, кусками кубических многочленов. Условия: непрерывность, гладкость, совпадение с функцией в узлах.

## 🔹 Эрмитовы сплайны

Как обычные сплайны, но учитывают значения производных в узлах.

## 🔹 Кривые Безье

Построены на базе контрольных точек. Используются в графике и дизайне.

## 🔹 Среднеквадратичное приближение

Минимизируем сумму квадратов отклонений. Частный случай — метод наименьших квадратов.

## 🔹 Равномерное приближение

Минимизируем максимальное отклонение от функции. Требует равномерной точности.

## 🔹 Рациональное приближение

Используем дробно-рациональные функции вместо многочленов. Лучше работают при разрывах и асимптотах.

## 🔹 Метод наименьших квадратов

Подгонка по критерию: сумма квадратов отклонений минимальна. Прямой способ найти коэффициенты.

# 🟪 5. Ряды и преобразования Фурье

## 🔹 Разложение в ряды Фурье

Представляем периодическую функцию как сумму синусов и косинусов. Основа спектрального анализа.

## 🔹 Интегралы Фурье

Обобщение рядов Фурье для непериодических функций. Получаем непрерывный спектр.

## 🔹 Быстрое преобразование Фурье (FFT)

Алгоритм, ускоряющий расчёт преобразования Фурье. Используется в цифровой обработке сигналов.

# 🟥 6. Оптимизация и функционалы

## 🔹 Целевая функция

Функция, которую нужно минимизировать или максимизировать. Её значение определяет "качество" решения.

## 🔹 Метод координатного спуска

Минимизируем функцию по одной переменной за раз, по очереди.

## 🔹 Метод градиентного спуска

Идём в сторону, противоположную градиенту. Прост, но может быть медленным.

## 🔹 Метод наискорейшего спуска

Выбираем наилучший шаг вдоль градиента на каждом шаге.

## 🔹 Метод сопряженных направлений

Улучшенный градиентный метод, учитывает прошлые направления. Быстрее сходится.

## 🔹 Симплекс-метод

Метод линейного программирования. Идёт по рёбрам многогранника к оптимуму.

## 🔹 Метод ветвей и границ

Разбивает задачу на подзадачи, отбрасывает те, где не может быть лучшего решения. Эффективен для дискретных задач.

# 🟫 7. Дискретная оптимизация и NP-задачи

## 🔹 Задача коммивояжера

Найти кратчайший маршрут, проходящий по всем точкам один раз и возвращающийся в начало. NP-трудная.

## 🔹 Задача о рюкзаке

Выбрать предметы с наибольшей ценностью, не превышая вес. Классическая задача оптимизации.

## 🔹 Задача о расписании

Распределить задачи по времени и ресурсам так, чтобы минимизировать время или конфликт. Сложная комб. задача.