

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ساختمان‌های داده

جلسه ۸

مجتبی خلیلی
دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

حل رابطه بازگشتی

○ رابطه‌های بازگشتی را می‌توان به روش‌های زیر حل کرد:

- حدس و استقراء (substitution method)
- بسط دادن (Expanding)
- درخت بازگشت (recursion-tree)
- قضیه اصلی (Master Theorem)

حل رابطه بازگشتی (مثال ۱)

○ حل رابطه بازگشتی زیر:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{if } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 & \text{otherwise (n power of 4)} \end{cases}$$

○ آیا بهترین حدس بود؟

$$T(n) = O(n^2)$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب‌سازی ادغامی)

○ حل رابطه بازگشتی زیر:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{otherwise} \end{cases}$$

○ حدس:

$$T(n) = O(n \log n) \Rightarrow T(n) \leq d n \log n \quad d > 0, n \geq n_0$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب سازی ادغامی)

○ حل رابطه بازگشتی زیر:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{otherwise} \end{cases}$$

○ حدس:

اگر حدس بزرگتر $O(n^2)$ بزنیم؟

$$T(n) = O(n^2) \Rightarrow T(n) \leq c n^2$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب سازی ادغامی)

○ اثبات حکم به کمک فرض:

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$\leq 2c(n/2)^2 + n$$

$$= 2cn^2 / 4 + n$$

$$= 1/2cn^2 + n$$

$$= cn^2 - (1/2cn^2 - n)$$



$$-(1/2cn^2 - n) \leq 0$$

$$-1/2cn^2 + n \leq 0$$

$$cn \geq 2$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب‌سازی ادغامی)

○ حل رابطه بازگشتی زیر:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{otherwise} \end{cases}$$

○ حدس:

اگر حدس اشتباه $O(n)$ بزنیم؟

$$T(n) = O(n) \Rightarrow T(n) \leq c n$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب‌سازی ادغامی)

○ اثبات حکم به کمک فرض:

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$\leq 2cn/2 + n$$

$$= cn + n$$

$$\leq cn$$



حل رابطه بازگشتی (مرتب سازی ادغامی)

○ حل رابطه بازگشتی زیر:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{otherwise (power of 2)} \end{cases}$$

○ حدس:

$$T(n) = O(n \log n) \Rightarrow T(n) \leq d n \log n \quad d > 0, n \geq n_0$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب سازی ادغامی)

○ فرض: برای $n \geq n_0$ و به ازای $k < n$ فرض کنیم رابطه برقرار.

$$T(k) \leq d \ k \log k$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب سازی ادغامی)

○ حکم:

$$T(n) \leq d \ n \log n$$

حل رابطه بازگشتی (مرتب سازی ادغامی)

○ فرض به حکم:

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

$$\leq 2dn/2 \log(n/2) + cn$$

$$\leq dn(\log n - \log 2) + cn$$

$$\leq dn \log n - dn + cn$$

$$\leq dn \log n$$

$$d > c$$

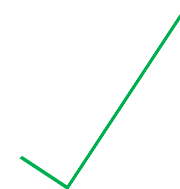
حل رابطه بازگشتی (مرتب‌سازی ادغامی)

○ با فرض $n_0 = 2$ و در نظر گرفتن برای $n=2$:

$$T(2) = 2T\left(\frac{2}{2}\right) + 2c = 2 + 2c$$

$$T(n) \leq d \, n \log n \xrightarrow{n=2}$$

$$1 + c \leq d$$



مثال

○ یافتن کران بالا برای

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1)$$

Let's guess that the solution is $T(n) = O(n) \longrightarrow T(n) \leq cn$ for $n \geq n_0$,

برای اثبات حکم:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c(n/2)) + \Theta(1) \\ &= cn + \Theta(1), \end{aligned}$$

مثال

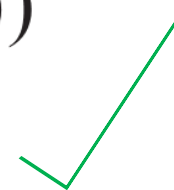
○ اصلاح حدس:

$T(n) \leq cn - d$, where $d \geq 0$ is a constant.

و در نتیجه:



$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(c(n/2) - d) + \Theta(1) \\ &= cn - 2d + \Theta(1) \\ &\leq cn - d - (d - \Theta(1)) \\ &\leq cn - d \end{aligned}$$



حل رابطه بازگشتی

○ رابطه‌های بازگشتی را می‌توان به روش‌های زیر حل کرد:

- حدس و استقراء (substitution method)
- بسط دادن (Expanding)
- درخت بازگشت (recursion-tree)
- قضیه اصلی (Master Theorem)

حل رابطه بازگشتی

○ قضیه اصلی: فرض کنید $a \geq 1$ و $b > 1$ و p یک ثابت باشد.
همچنین فرض کنید $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^p)$
آنگاه:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^p \log(n)) & \text{if } a = b^p \\ O(n^p) & \text{if } a < b^p \\ O(n^{\log_b(a)}) & \text{if } a > b^p \end{cases}$$

مقدار $\frac{n}{b}$ می تواند $\lfloor n/b \rfloor$ یا $\lceil n/b \rceil$ نیز باشد.

