

تیزبین و دقیق

سید عباسی

9933243

① تابع زیر را بر اساس پیچیدگی زمانی مرتب کنید.

$$2^{(2n+1)^c}, n!, 2^n, n!, n^4, n^2, n^3, (5/4)^n, \sqrt{2}^n, (3/2)^n, e^n, 2^{n/2}, 4^n, \sqrt{2}^n, \log n!, \log^3 n, n^2 \log n, \log^3 n = \log \log n, n^3, (1/n)$$

② برای هر زوج تابع $f(n)$ و $g(n)$ مشخص کنید که $f(n)$ از $0, o, \omega, \Omega, \theta$ و Θ نسبت به $g(n)$ چیست یا خیر. (n, c اعدادی مثبت و n بزرگتر از c است.)

$f(n)$	$g(n)$	o	Ω	ω	Ω	θ
$\log n$	$\log^3 n$	x	x	✓	✓	x
2^n	$2^{n/2}$	x	x	✓	✓	x
$\log^2 n$	n^3	✓	✓	x	x	x
n^n	$n!$	✓	✓	x	x	x
$n \log^3 n$	$n^2 \log n$	✓	✓	x	x	x
$\log n^2$	$\log n$	✓	✓	✓	✓	✓
$n 2^n$	e^n	✓	✓	x	x	x
n^k	c^n	✓	✓	x	x	x

③ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید (برای گزاره‌های غلط تمام مسائل نفی می‌کنیم). برای گزاره‌های درست باید آنرا اثبات کنید.

$$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$$

$$\text{False.} \Rightarrow f(n) = 3n, g(n) = n \Rightarrow 3n \in O(n) \text{ but } 2^{3n} \notin O(2^n)$$

$$\log n \in O(\sqrt[3]{n})$$

$\log n$ نسبت به $\sqrt[3]{n}$ مرتبه اول است.

$$\text{False.} \Rightarrow n = 1000 \rightarrow \log n = \log 1000 \approx 3, \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow \log n \notin O(\sqrt[3]{n})$$

$$f(n) \in o((f(n)^2))$$

$$\text{False. } f(n) = 1/n, 1/n \notin o(1/n^2)$$

$$f(n) + o(f(n)) \in \theta(f(n))$$

$$\text{True. } g(n) \in o(f(n)) \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 \Rightarrow g(n) < c \cdot f(n)$$

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 \Rightarrow f(n) < f(n) + g(n) < (c+1) \cdot f(n)$$

$$\forall c_1 = 1, c_2 = c+1 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow c_1 \cdot f(n) < f(n) + g(n) < c_2 \cdot f(n) \Rightarrow f(n) + g(n) \in \theta(f(n))$$

$$f(n) \in O(s(n)), g(n) \in O(r(n)) \Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \in O\left(\frac{s(n)}{r(n)}\right)$$

True.

$$f(n) \in O(s(n)) \rightarrow f(n) \leq c_1 \cdot s(n) \rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \leq \frac{c_1 \cdot s(n)}{g(n)} \rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_1 \cdot \frac{s(n)}{g(n)}$$

$$g(n) \in O(r(n)) \rightarrow g(n) \leq c_2 \cdot r(n)$$

$$c = c_1, n_0 = \max(n_1, n_2) \rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \leq c \cdot \frac{s(n)}{r(n)} \rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} \in O\left(\frac{s(n)}{r(n)}\right)$$

(4) برنامه‌های زیر را با استفاده از تحلیل بار عملیات (بار عملیات) تحلیل کنید.

الف) در داخل تابع main، basic operation، $f(i)$ (که i از 1 تا n می‌باشد) بار عملیات دارد. در تابع $sum += f(i)$ بار عملیات دارد. در تابع $main$ بار عملیات دارد. $O(n \cdot \log n)$ است.

ب) در تابع main، basic operation، $cout \ll f(n)$ است که در تابع $f(n)$ بار عملیات دارد. در تابع $main$ بار عملیات دارد. $O(n)$ است.

ج) در این که basic operation، $cout \ll 1 \ll i$ است که در تابع $pow(i, 2)$ بار عملیات دارد. در تابع $main$ بار عملیات دارد. $O(n^2)$ است.

$$for(int i = 2; i <= n; i++) pow(i, 2)$$

$$pow(i, 2)$$

$$1 \rightarrow i = 2 \rightarrow 4$$

$$2 \rightarrow i = 4 \rightarrow 16$$

$$3 \rightarrow i = 16 \rightarrow 256$$

$$\Rightarrow O(n^2)$$

د) $f(n)$ است که در تابع $main$ ، basic operation، $cout \ll f(n)$ است که در تابع $f(n)$ بار عملیات دارد. در تابع $main$ بار عملیات دارد. $O(n^2)$ است.