بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه بیست و چهارم _ بخش‌های 5.1 و 5.2 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

نمایش سری فوریه (فرکانسی) دنباله‌های متناوب

Representation of periodic signals as linear combinations of complex exponentials.

$$\underbrace{x[n]}_{\text{ترکیب}} = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \xleftrightarrow{\;\mathcal{FS}\;} \underbrace{a_k}_{\text{تحلیل}} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

This representation can be used in describing the effect of LTI systems on signals.

THE DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM تبدیل فوریهٔ زمان‌گسسته

۱. نمایش فرکانسی دنباله‌های غیرمتناوب (تعمیم سری فوریه)

۲. حالت خاص تبدیل Z (فقط روی دایرهٔ واحد)

Whereas for periodic signals the complex exponential building blocks are harmonically related, for aperiodic signals they are infinitesimally close in frequency, and the representation in terms of a linear combination takes the form of an integral rather than a sum. The resulting spectrum of coefficients in this representation is called the Fourier transform, and the synthesis integral itself, which uses these coefficients to represent the signal as a linear combination of complex exponentials, is called the inverse Fourier transform.

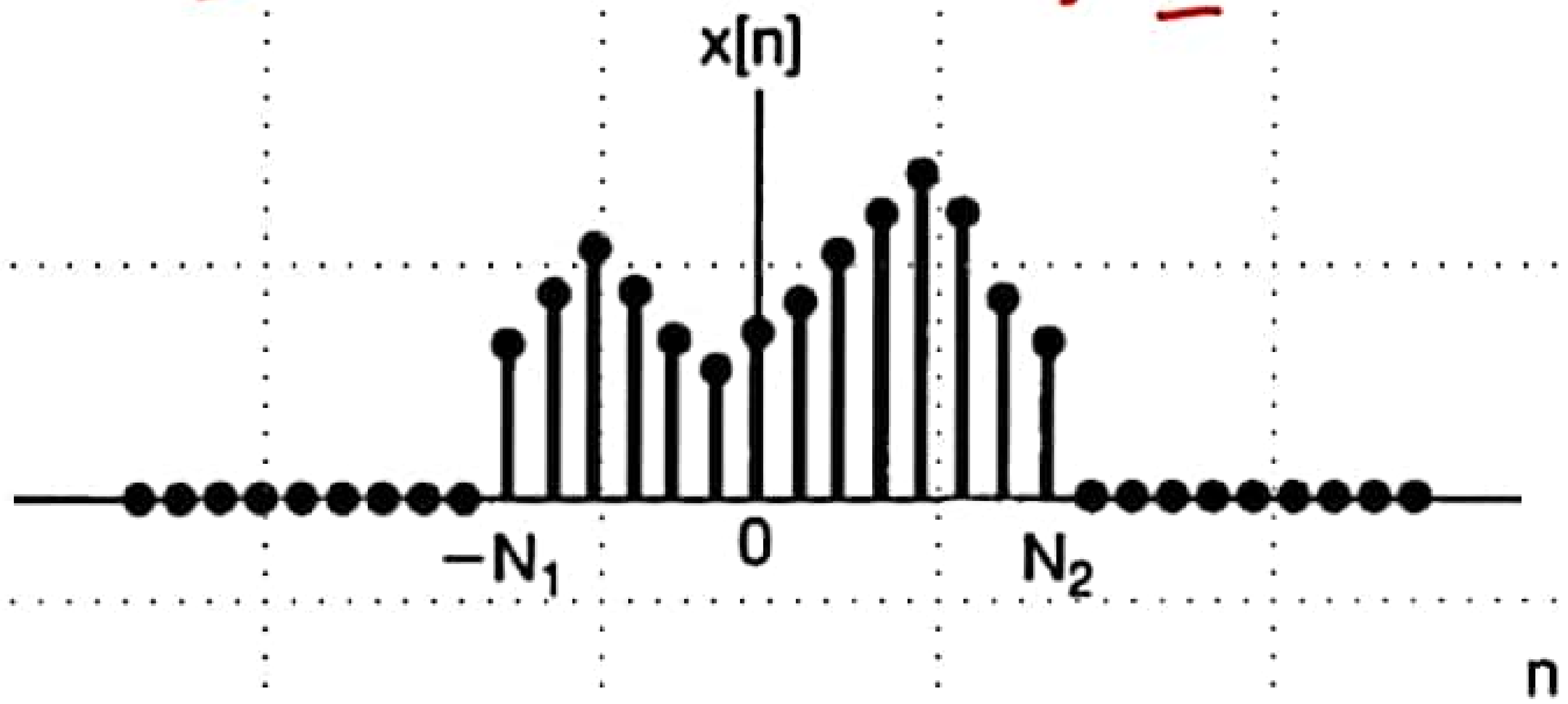
در شرایط غیرتناوبی ، ضرائب سری فوریه تبدیل به یک تابع پیوسته و متناوب از فرکانس می‌شود که به آن طیف فرکانسی یا تبدیل فوریه دنباله گفته می‌شود. همچنین نمایش سری فوریه به جای مجموع تبدیل به یک انتگرال شده که به آن تبدیل فوریه معکوس دنباله گفته می‌شود.

In particular, Fourier reasoned that an aperiodic signal can be viewed as a periodic signal with an infinite period. (شرایط غیرتناوبی : $N \rightarrow \infty$)

More precisely, in the Fourier series representation of a periodic signal, as the period increases the fundamental frequency decreases and the harmonically related components become closer in frequency. As the period becomes infinite, the frequency components form a continuum and the Fourier series sum becomes an integral.

با افزایش دوره تناوب ، فرکانس اصلی کاهش می یابد و مؤلفه های وابسته هارمونیکی در حوزه فرکانسی به هم نزدیک و نزدیک تر شده و در ازای $N \to \infty$ ، یک طیف پیوسته فرکانسی را تشکیل می دهند و نمایش سری فوریه یک دنباله تبدیل به نمایش انتگرالی آن دنباله برحسب طیف فرکانسی آن می گردد.

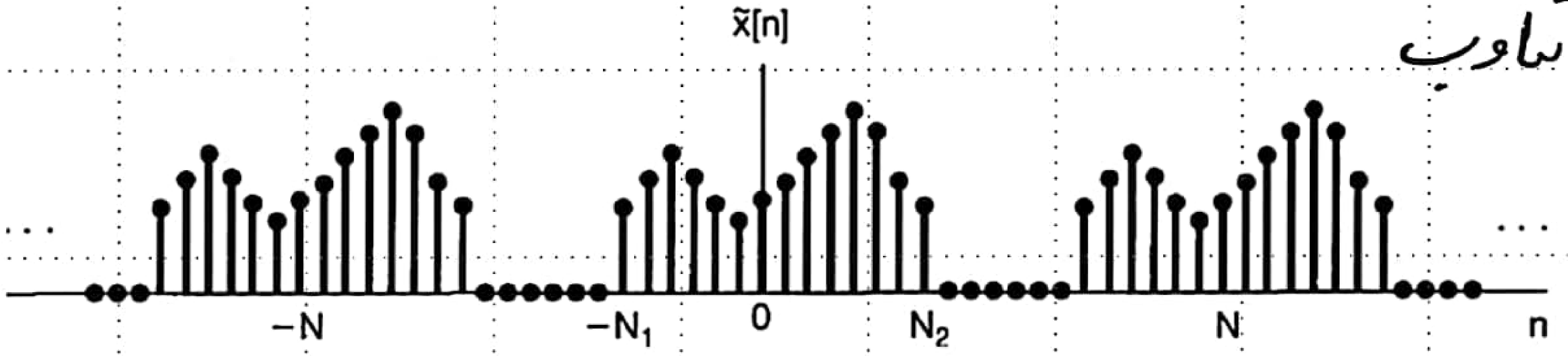
استخراج روابط تبدیل فوریه گسسته با تعمیم سری فوریه برای دنباله‌های غیرمتناوب



(a)

دنباله‌ی نامتناوب $x[n]$ با پهنای زمانی محدود

$$x[n] \neq 0 \quad , \quad -N_1 \leqslant n \leqslant N_2$$



دنباله‌ی متناوب $\tilde{x}[n]$ با دوره‌ی تناوب N (زوج) که $x[n]$ یک دوره‌ی تناوب از آن است.

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & , \; -\frac{N}{2} < n < \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & , \; oth. \end{cases}$$

توجه: $\lim\limits_{N \to \infty} \tilde{x}[n] = x[n]$ حدّ

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}, \quad \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

$$\omega_0 = 2\pi/N$$

Since $x[n] = \tilde{x}[n]$ over a period that includes the interval $-N_1 \leq n \leq N_2$, it is convenient to choose the interval of summation to include this interval, so that $\tilde{x}[n]$ can be replaced by $x[n]$ in the summation. Therefore,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n},$$

Defining the function $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$, $\Rightarrow$ $a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$,

where $\omega_0 = 2\pi/N$ is the spacing of the samples in the frequency domain.

$$\Rightarrow \quad \tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}.$$

Since $\omega_0 = 2\pi/N$, or equivalently, $1/N = \omega_0/2\pi$,

حدّ $\tilde{x}[n] = x[n]$

$N \to \infty \quad (\omega_0 \to 0)$

$$\Rightarrow \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N\rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0.$$

درحدّ با میل کردن ω_0 به سمت صفر، سمت چپ رابطهٔ فوق به $x[n]$ و سمت راست به انتگرال زیر تبدیل خواهد شد.

$$\Rightarrow \quad \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega,}$$

که در آن:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}.}$$

به روابط اخیر، زوج تبدیل فوریه گفته می‌شود.

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}.}$$

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$$

رابطهٔ تحلیل (آنالیز)

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega,}$$

$$x[n] = F^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

رابطهٔ ترکیب (سنتز)

نکته: با توجه به تعریف فوق برای تبدیل فوریه و مقایسهٔ آن با تعریف تبدیل Z داریم:

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} = Z\{x[n]\}\Big|_{Z=e^{j\omega}}$$ (حالت خاص تبدیل Z)

اگر دایرهٔ واحد $z=e^{j\omega}$ در ناحیهٔ همگرایی تبدیل Z دنبالهٔ $x[n]$ باشد، $X(z)$ بر روی دایرهٔ واحد همان $X(e^{j\omega})$ و تبدیل فوریهٔ $x[n]$ خواهد بود.

از سوی دیگر می‌توان گفت که تبدیل Z تعمیم یافتهٔ تبدیل فوریه است، زیرا:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n} \cdot e^{-j\omega n}$$

$$= F\{x[n]r^{-n}\}$$

نکته: مقایسهٔ تبدیل فوریه در حالت زمان پیوسته و زمان گسسته

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad , \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad , \quad -\pi < \omega \leqslant \pi$$

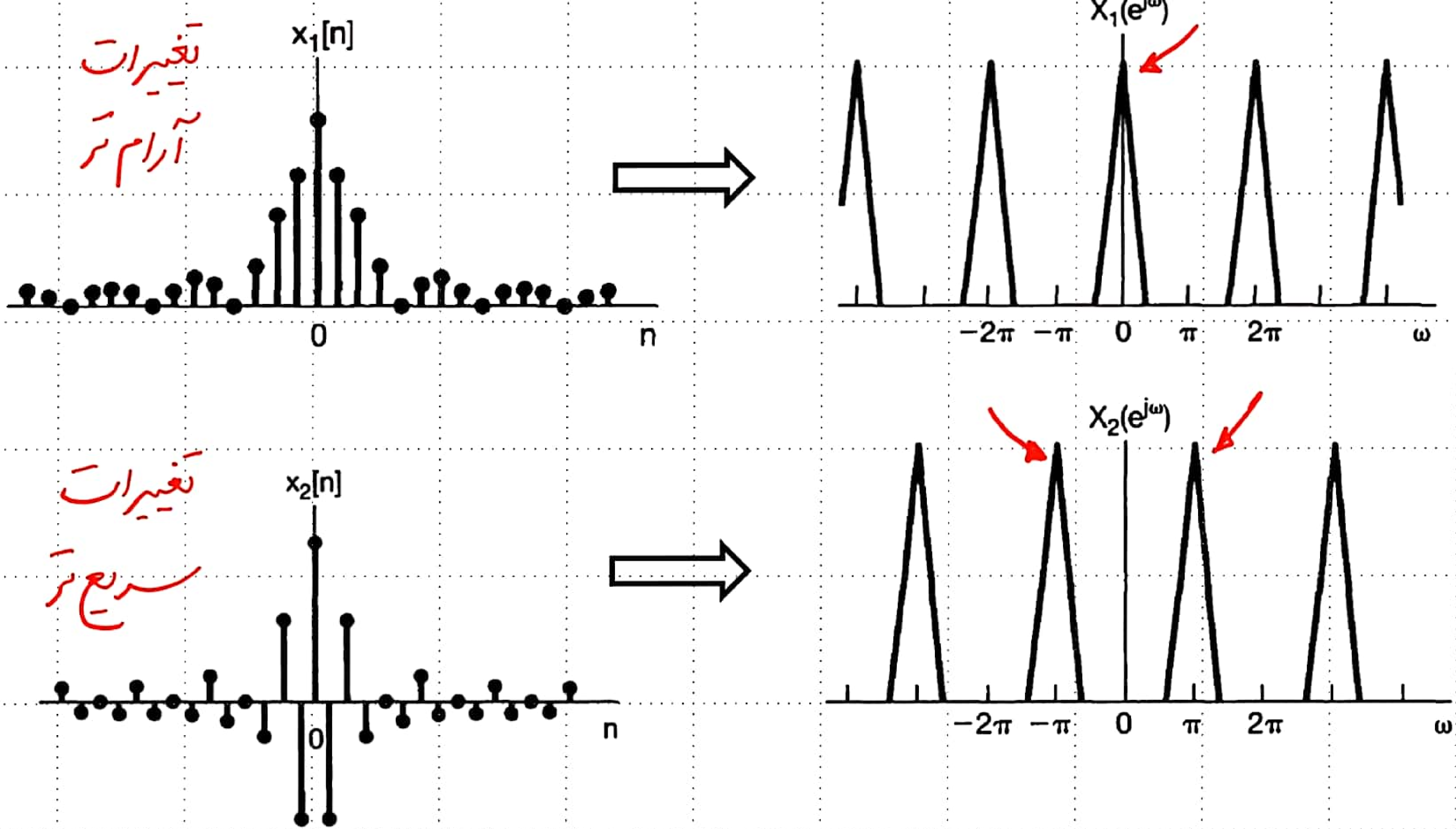
$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega} \cdot e^{j2\pi}) = X(e^{j\omega})$$

در حالت زمان پیوسته فرکانس های پائین حوالی $\omega = 0$ و فرکانس های بالا $\omega \to \pm\infty$ است. در حالی که در حالت زمان گسسته فرکانس های پائین حوالی $\omega = 0$ و فرکانس های بالا در $\omega \to \pm\pi$ است.

مثال)

تغییرات آرام تر

تغییرات سریع تر



همگرایی تبدیل فوریه زمان گسسته

با وجود این که استخراج روابط زوج تبدیلات فوریه بر اساس فرض دنباله‌ای با پهنای زمانی محدود انجام شد، اما این روابط برای دستهٔ گسترده‌ای از سیگنال‌های زمان گسسته برقرار است. سؤال اصلی همگرایی در تبدیل فوریهٔ گسسته، همگرا شدن مجموع نامتناهی

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

در رابطهٔ تحلیل یا تبدیل فوریه است.

شرایط لازم برای $x[n]$ طوری که همگرایی تبدیل فوریه تضمین شود، شبیه حالت زمان پیوسته است.

مشخصاً اگر $x[n]$ دنباله‌ای مطلقاً جمع پذیر (absolutely summable)

یعنی $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$ و یا دارای انرژی محدود

و به عبارت دیگر مربعاً جمع پذیر (square summable) یعنی

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$ باشد، آنگاه $X(e^{j\omega})$ وجود داشته و همگراست.

اما برخلاف شرایط زمان پیوسته، از آنجاکه رابطهٔ سنتز در حالت زمان گسسته

براساس انتگرال‌گیری روی یک بازهٔ محدود به طول 2π تعریف می‌شود، مشکلی در

مورد همگرایی وجود ندارد.

به عبارت دیگر اگر دنباله‌ی $\hat{x}[n]$ با دنباله‌ی دلخواه و غیرمتناوب $x[n]$ در رابطه‌ی

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

تقریب زده شود، در شرایطی که $W=\pi$ ، $\hat{x}[n] = x[n]$ و انطباق

به طور کامل حاصل می‌شود و پدیده‌ی مشابه پدیده‌ی Gibbs در حالت زمان پیوسته

هم مشاهده نمی‌شود.

تبدیلات فوریه برخی از سیگنال‌های مهم

مثال ۱) سیگنال نمایی حقیقی

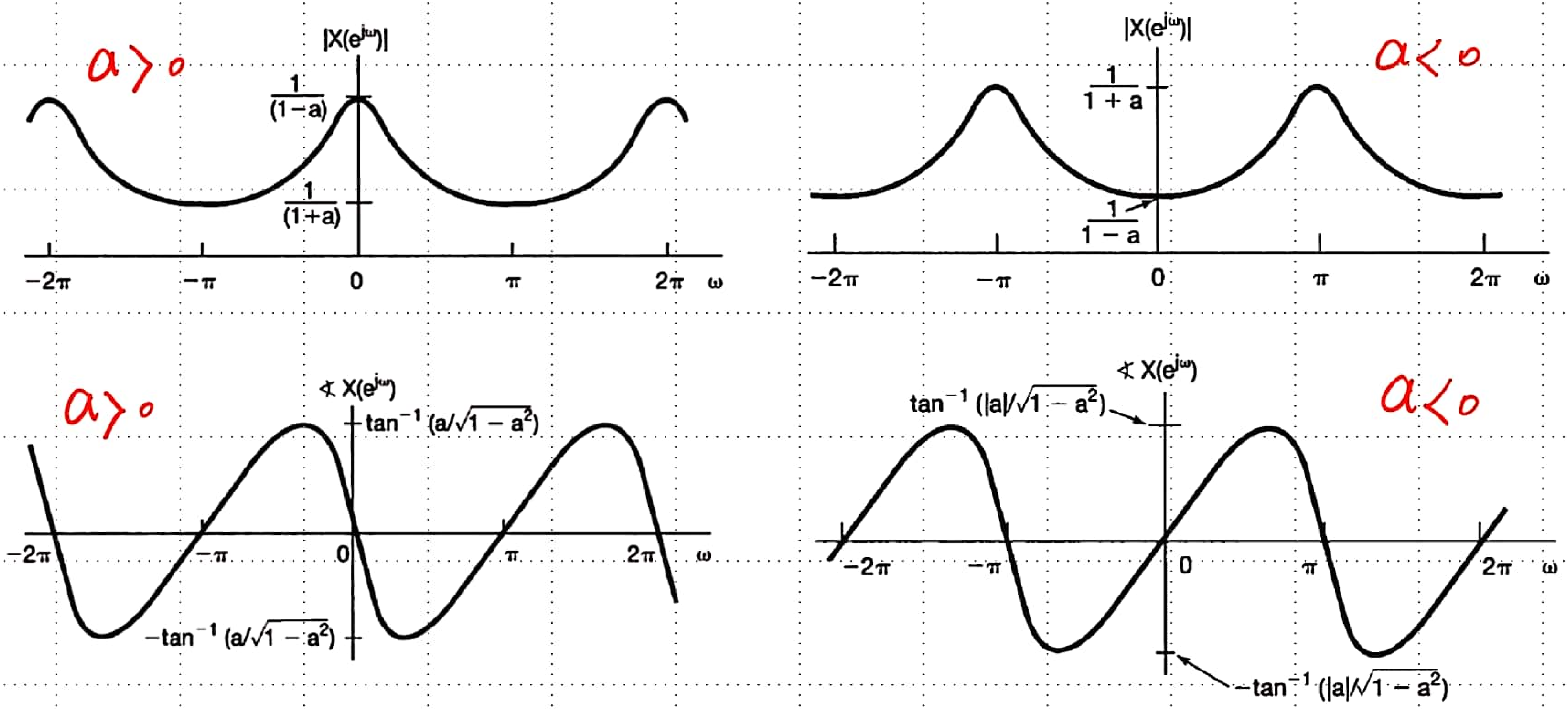
Consider the signal $x[n] = a^n u[n], \qquad |a| < 1.$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a\cos\omega + j a \sin\omega} = |X(e^{j\omega})| e^{j \measuredangle X(e^{j\omega})}$$

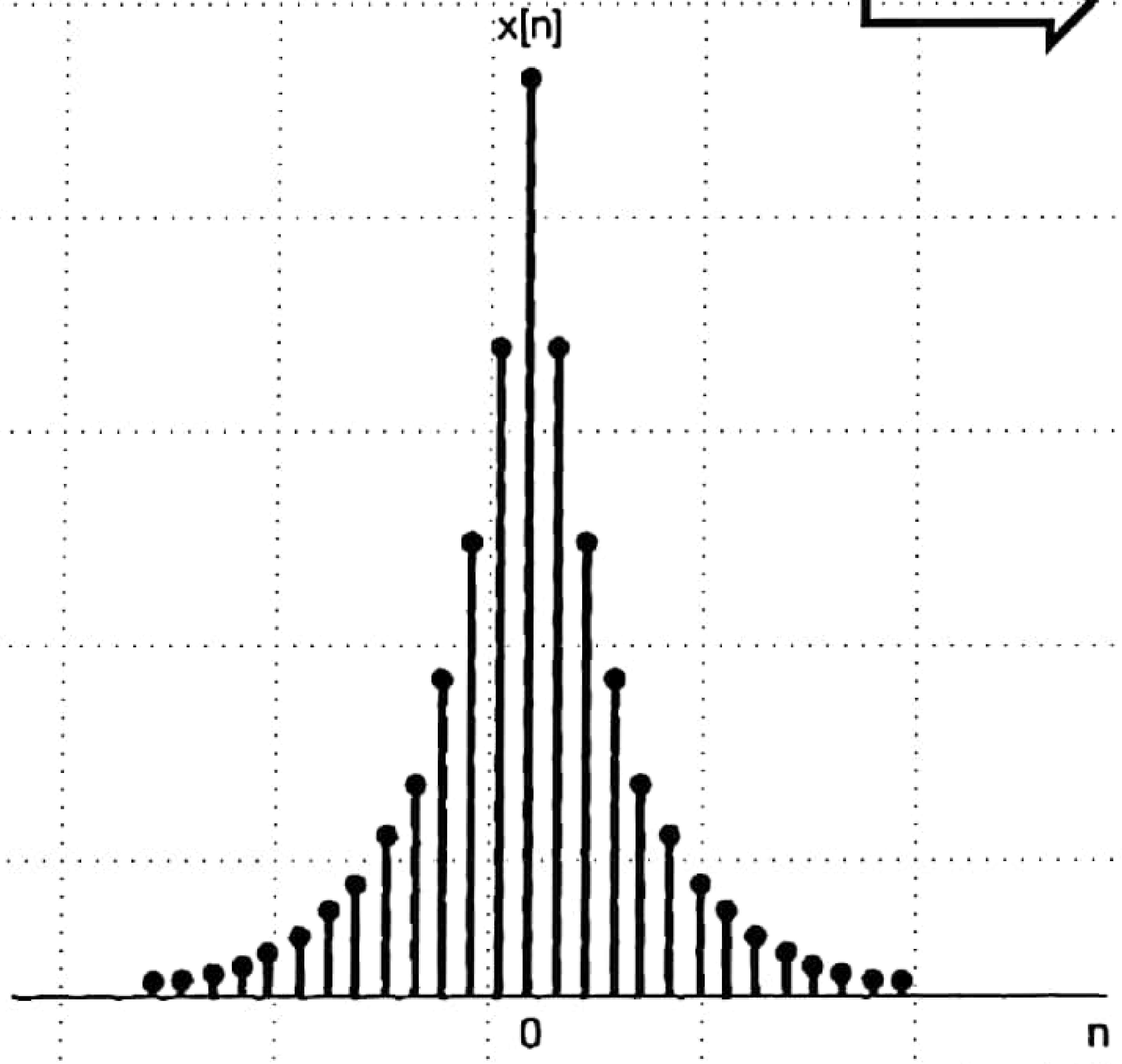
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}} \quad \& \quad \measuredangle X(e^{j\omega}) = -tg^{-1} \frac{a \sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

منحنی‌های اندازه و فاز $X(e^{j\omega})$ در دو حالت $a>0$ و $a<0$



مثال ۲)

Let $x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1.$



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n}.$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}.$$

تابعی حقیقی وزوج

$$X(e^{j2k\pi}) = \frac{1-a^2}{1-2a+a^2} = \frac{1+a}{1-a}$$

$$X(e^{j(2k+1)\pi}) = \frac{1-a^2}{1+2a+a^2} = \frac{1-a}{1+a}$$

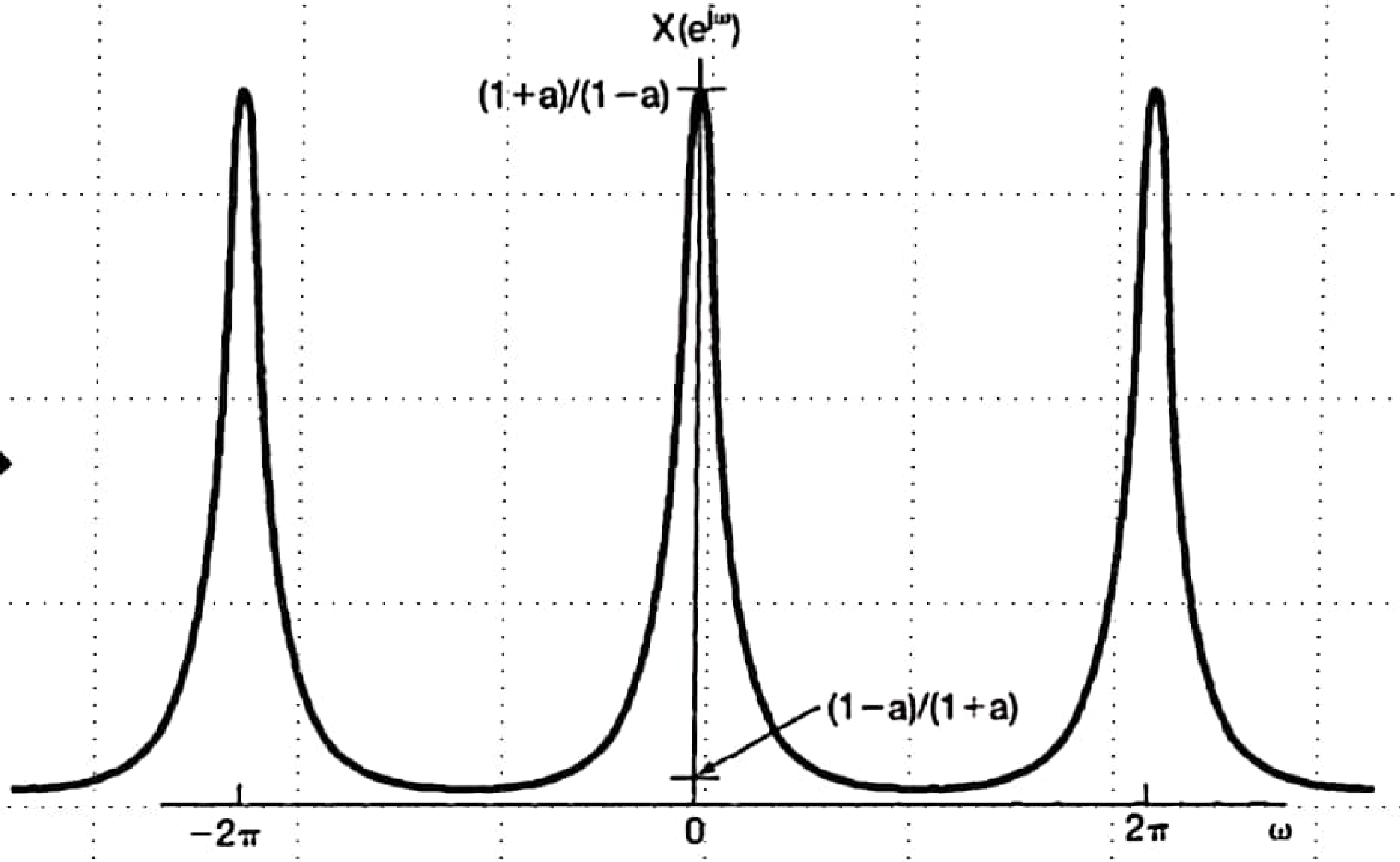
اگر $0<a<1$ ،

ماکزیمم ها در مضارب زوج π

و مینیمم ها در مضارب فرد π

واقع می شوند.

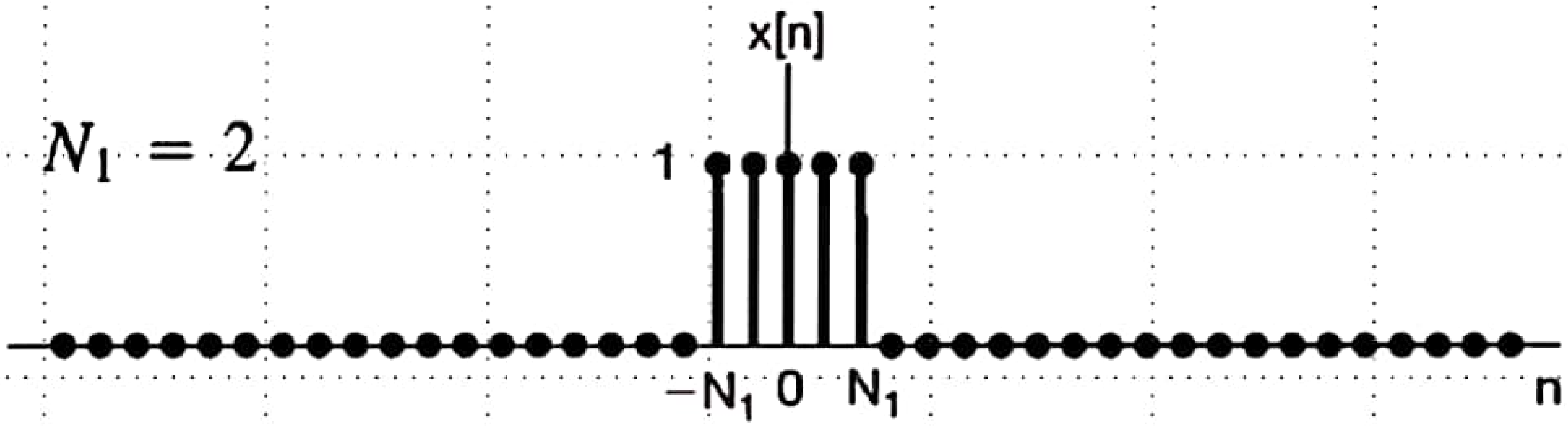
اگر $-1<a<0$ ، بالعکس.



مثال ۳)

Consider the rectangular pulse $x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases},$

$N_1 = 2$



$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}.$$

$$m = n + N_1 \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega(m-N_1)} = e^{j\omega N_1} \cdot \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega m}$$

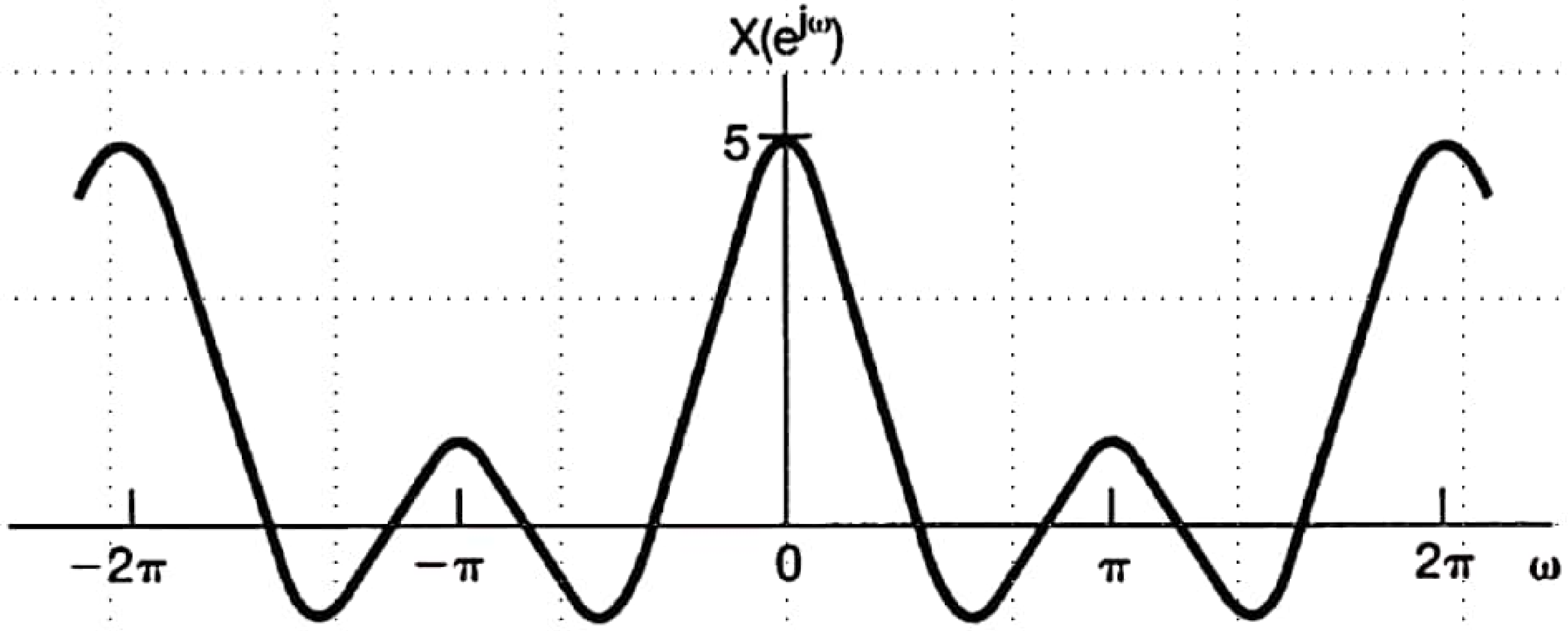
$$= e^{j\omega N_1} \frac{1 - e^{-j\omega(1+2N_1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \cancel{e^{j\omega N_1}} \frac{\cancel{e^{-j\omega(N_1+\frac{1}{2})}}\left[e^{j\omega(N_1+\frac{1}{2})} + e^{-j\omega(N_1+\frac{1}{2})}\right]}{\cancel{e^{-j\omega/2}}\left[e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right]}$$

$$= \frac{2j \sin\omega(N_1+\frac{1}{2})}{2j \sin(\omega/2)}$$

$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)}.$$

$$N_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$



Fourier transform of Rectangular pulse signal for $N_1 = 2$

مثال ۴)

Let $x[n]$ be the unit impulse; that is, $x[n] = \delta[n]$.

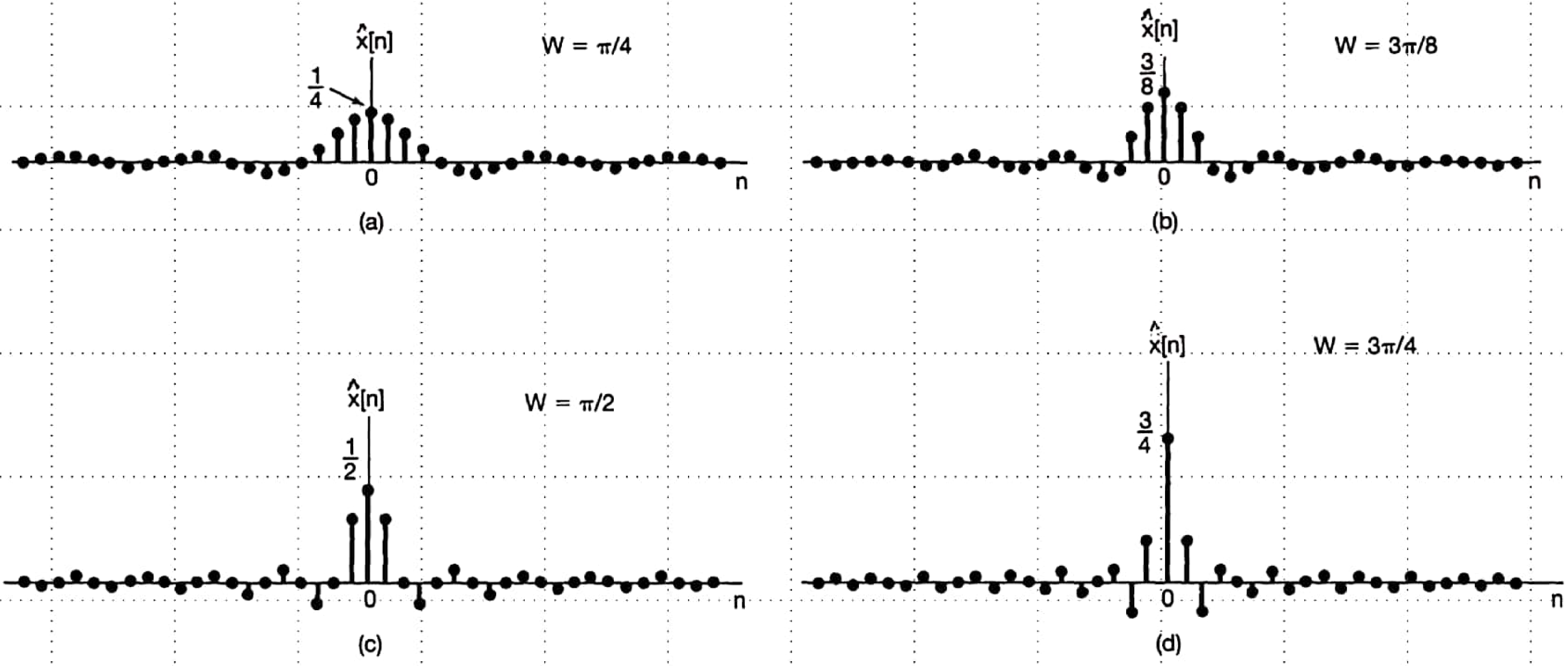
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1 \Rightarrow X(e^{j\omega}) = 1.$$

In other words, just as in continuous time, the unit impulse has a Fourier transform consisting of equal contributions at all frequencies.

نکته: سیگنال ضربه واحد $\delta[n]$ همه مؤلفه‌های فرکانسی از $-\pi$ تا π را در بردارد چرا که $X(e^{j\omega}) = 1$. در رابطه تبدیل فوریه معکوس اگر به جای انتگرال‌گیری از $-\pi$ تا π، از $-W$ تا W انتگرال‌گیری شود، اثر تغییرات W چیست؟

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}.$$

As can be seen, the frequency of the oscillations in the approximation increases as W is increased, which is similar to what we observed in the continuous-time case. On the other hand, in contrast to the continuous- time case, the amplitude of these oscillations decreases relative to the magnitude of $\hat{x}[0]$ as W is increased, and the oscillations disappear entirely for $W = \pi$.


x̂[n]
W = π/4
1/4
0
n
(a)
x̂[n]
W = 3π/8
3/8
0
n
(b)
x̂[n]
W = π/2
1/2
0
n
(c)
x̂[n]
W = 3π/4
3/4
0
n
(d)

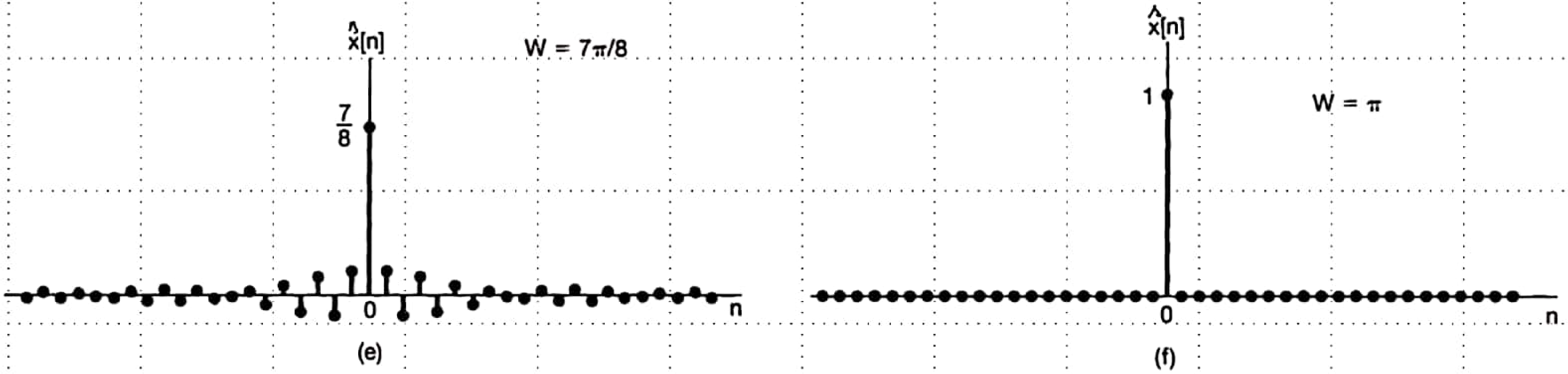


Figure 5.7 Approximation to the unit sample obtained as in eq. (5.16) using complex exponentials with frequencies $|\omega| \leq W$: (a) $W = \pi/4$; (b) $W = 3\pi/8$; (c) $W = \pi/2$; (d) $W = 3\pi/4$; (e) $W = 7\pi/8$; (f) $W = \pi$. Note that for $W = \pi$, $\hat{x}[n] = \delta[n]$.

تبدیل فوریه برای دنباله‌های متناوب

As in the continuous-time case, discrete-time periodic signals can be incorporated within the framework of the discrete-time Fourier transform by interpreting the transform of a periodic signal as an impulse train in the frequency domain.

چگونه می‌توان برای دنباله‌های متناوب که نه مطلقاً و نه مربعاً جمع پذیر نیستند، تبدیل فوریه تعریف کرد؟ در حالیکه سری فوریه دنباله‌های متناوب داشتیم؛

$$x[n] = x[n+N], \qquad N = 2\pi/\omega_0 \quad \Longrightarrow \quad x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\omega_0 n}$$

To derive the form of this representation, consider the signal $x[n] = e^{j\omega_0 n}$.

یادآوری : (در حالت CT)

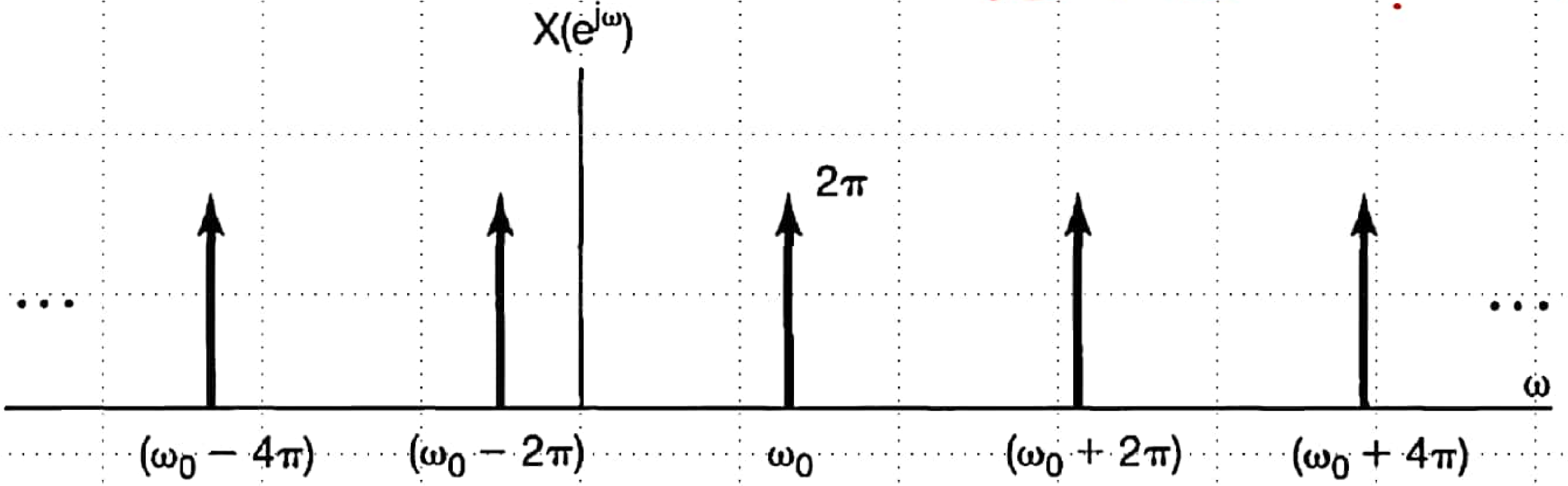
$$F\{e^{j\omega_0 t}\} = ۲\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$$

ثابت می‌کنیم :

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}. \quad \Longrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)e^{j\omega n}\,d\omega.$$

قطار ضربه با دوره تناوب ۲π حول فرکانس ω_0



Note that any interval of length 2π includes exactly one impulse in the summation

Therefore, if the interval of integration chosen includes the impulse located

at $\omega_0 + 2\pi r$, then $$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega = e^{j(\omega_0+2\pi r)n} = e^{j\omega_0 n}.$$

Now consider a periodic sequence $x[n]$ with period N and with the Fourier series

representation $$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

In this case, the Fourier transform is $$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right),$$

so that the Fourier transform of a periodic signal can be directly constructed from its

Fourier coefficients.

بررسی دقیق‌تر رابطهٔ تبدیل فوریه برای دنباله‌های متناوب و مقایسه با حالت پیوسته

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}. \Longrightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0),$$

سری فوریه پیوسته با بی‌نهایت ضریب متمایز

قطار ضربه با فواصل ω_0 و دامنه‌های متفاوت $2\pi a_k$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}. \Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right),$$

سری فوریه گسسته با فقط N ضریب متمایز

قطاری از N ضربه با فواصل $\frac{2\pi}{N}$ و دامنه‌های متفاوت $2\pi a_k$، که در مضارب صحیح 2π روی محور ω تکرار می‌شود.

$F\{a_0\}$

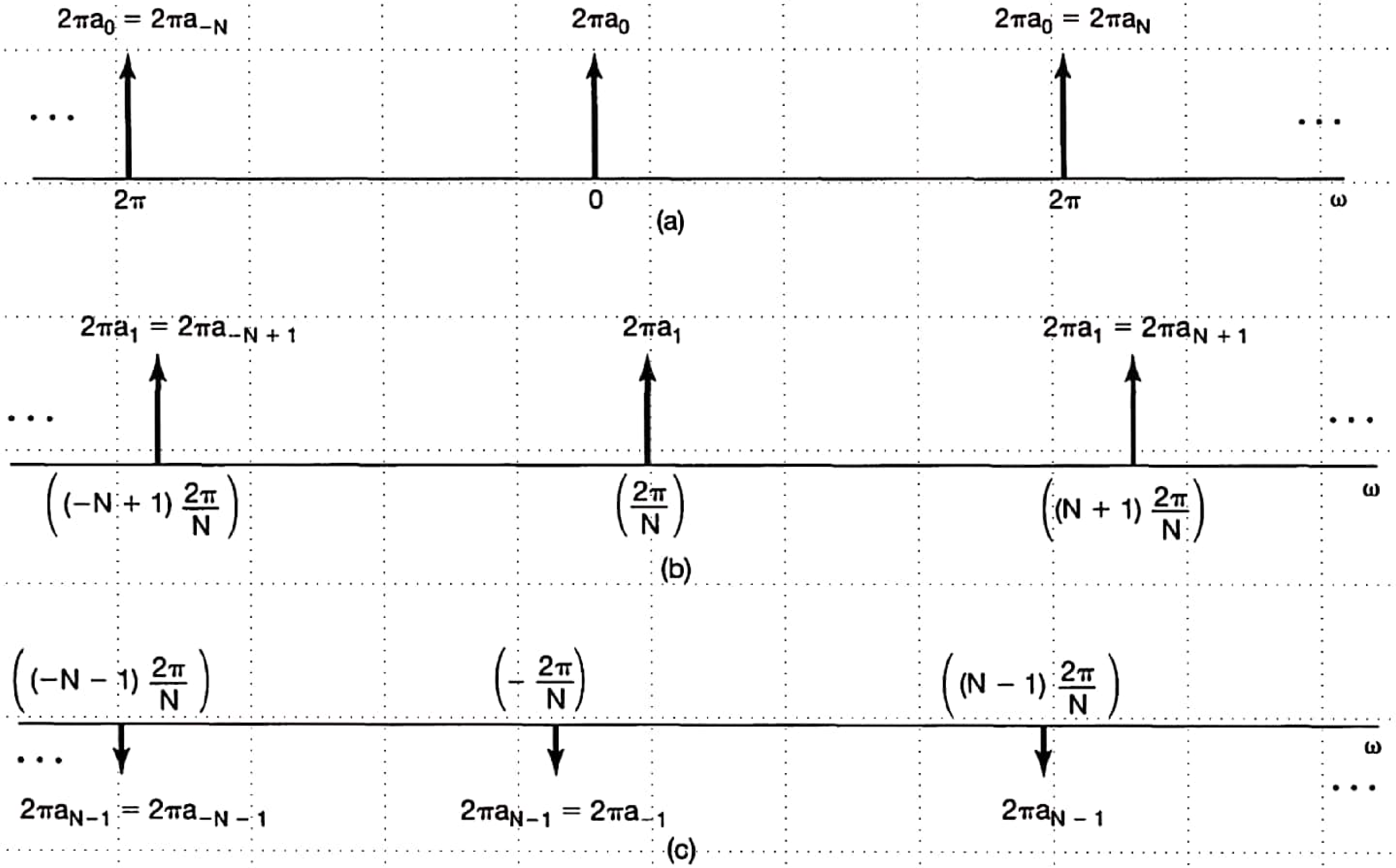
$a_{-N} = a_0 = a_N$

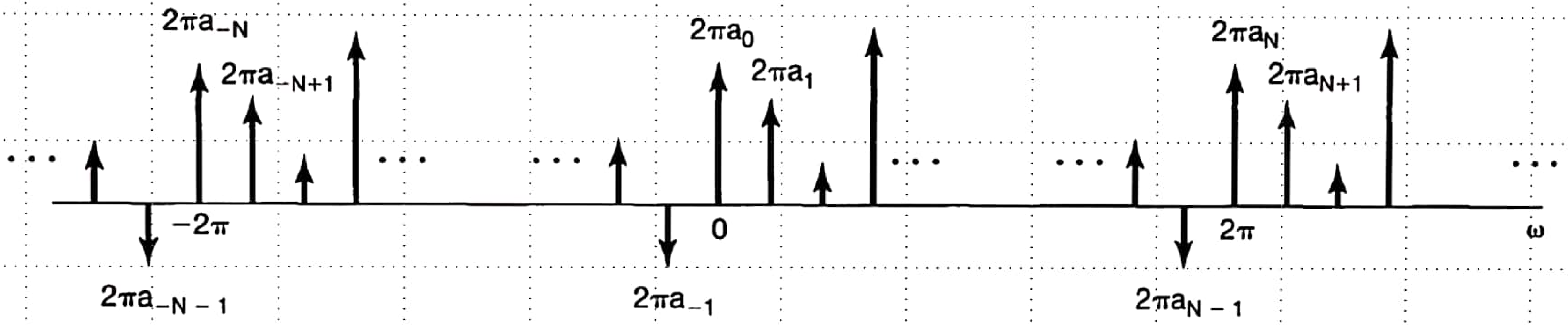
$F\{a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}}\}$

$a_{-N+1} = a_1 = a_{N+1}$

$F\{a_{-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}}\}$

$a_{-N-1} = a_{-1} = a_{N-1}$





(d)

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\} = \sum_{k=\langle N\rangle} F\{a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}\}$$

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} + \cdots + a_{N-1} e^{j(N-1)(2\pi/N)n}.$$

(هر جمله از سری فوریه، یک قطار ضربه با دوره تناوب ۲π در حوزه ω تولید می‌کند.)

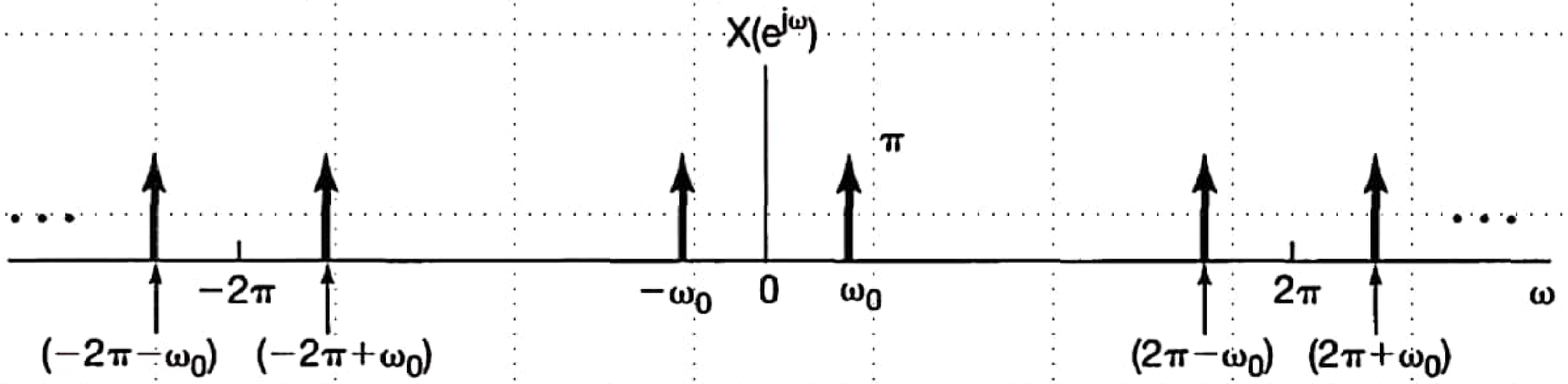
مثال ۱)

Consider the periodic signal

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}, \qquad \text{with} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}.$$

$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right).$$

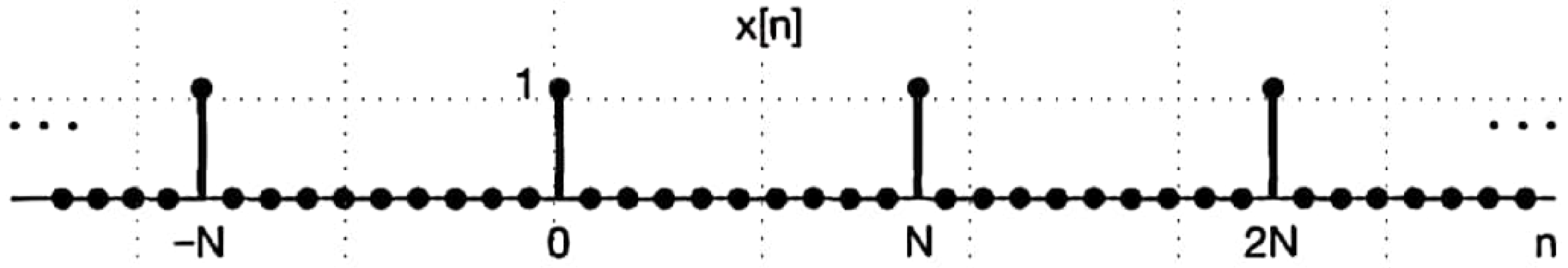
$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right), \qquad -\pi \leq \omega < \pi,$$



مثال ۲)

The discrete-time counterpart of the periodic impulse train

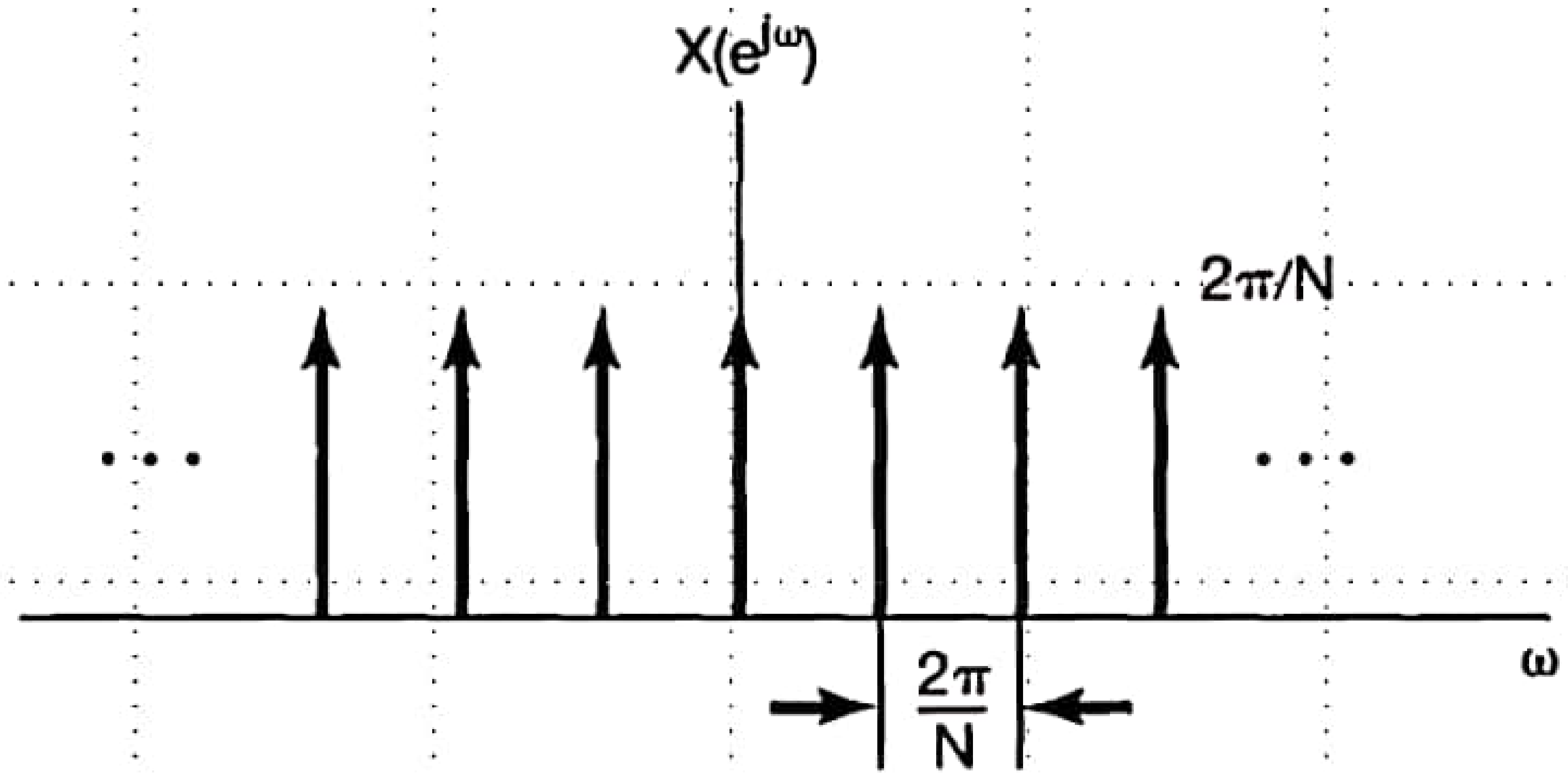
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN],$$



The Fourier series coefficients for this signal $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}.$

Choosing the interval of summation as $0 \le n \le N-1$, we have $a_k = \frac{1}{N}.$

$$\Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right),$$



بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه بیست و پنجم _ بخش‌های 5.3 و 5.4 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

یادآوری: روابط زوج تبدیلات فوریه

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j\omega}).$$

$$X(e^{j\omega}) = F\{x[n]\}$$

تبدیل فوریه، طیف فرکانسی یک سیگنال زمان گسسته را مشخص می کند.

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}.}$$

رابطهٔ تحلیل (آنالیز)

$$x[n] = F^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

تبدیل فوریه معکوس، از روی ویژگیهای فرکانسی یک سیگنال زمان گسسته را بازسازی می کند.

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega,}$$

رابطهٔ ترکیب (سنتز)

خواص تبدیل فوریه زمان‌گسسته

۱. تناوب Periodicity of the Discrete-Time Fourier Transform

The discrete-time Fourier transform is *always* periodic in ω with period 2π; i.e.,

$$\boxed{X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega}).}$$

۲. خطی بودن Linearity

If $x_1[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$ and $x_2[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$, then $\boxed{ax_1[n] + bx_2[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}).}$

$$\Rightarrow \quad F\left\{\sum_{k=1}^{M} a_k x_k[n]\right\} = \sum_{k=1}^{M} a_k F\{x_k[n]\}$$

Time Shifting and Frequency Shifting ۳. انتقال زمانی و انتقال فرکانسی

If $x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, then $\boxed{x[n-n_0] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})}$

اثبات به کمک رابطهٔ تبدیل فوریهٔ معکوس (رابطهٔ سنتز)

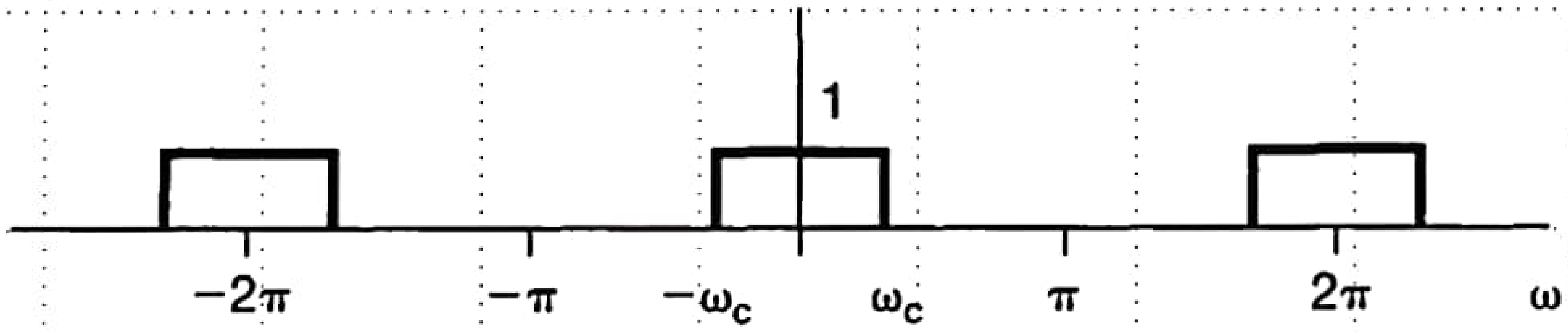
and

If $x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$, then $\boxed{e^{j\omega_0 n} x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)}).}$

اثبات به کمک رابطهٔ تبدیل فوریهٔ (رابطهٔ آنالیز)

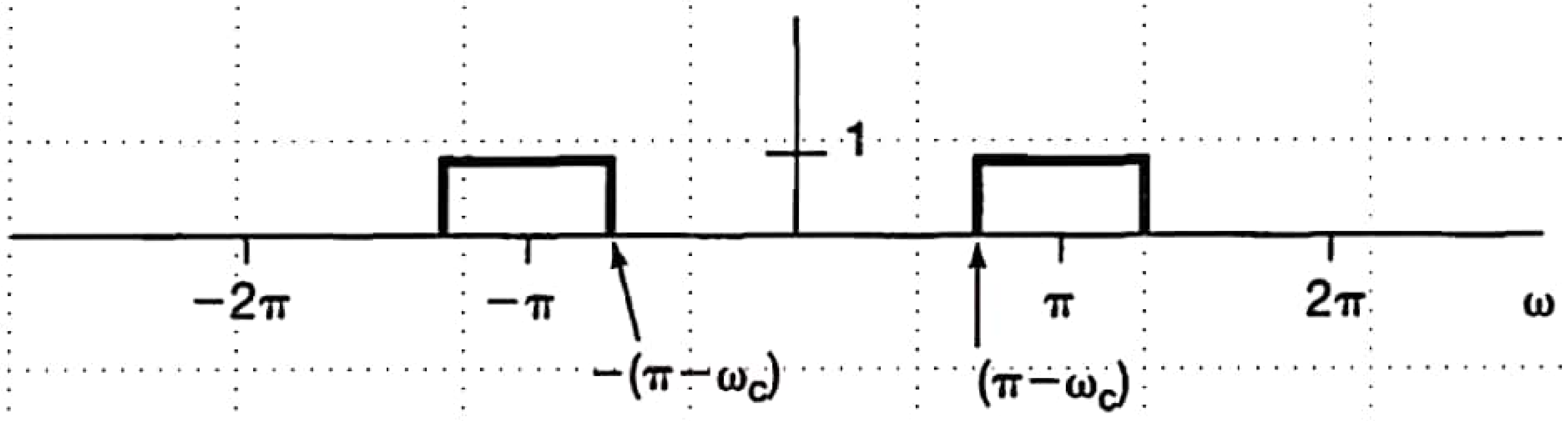
مثال) کاربردی از خاصیت تناوب و انتقال فرکانسی

$H_{lp}(e^{j\omega})$



پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین گذر ایده آل

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$$



پاسخ فرکانسی یک فیلتر بالاگذر ایده آل

$$\Rightarrow \quad h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n].$$

Conjugation and Conjugate Symmetry ۴. مزدوج گیری و تقارن مزدوج

The conjugation property states that if $x[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(e^{j\omega})$, then $\boxed{x^*[n] \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X^*(e^{-j\omega}).}$

اثبات :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$X^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{j\omega n} \Rightarrow X^*(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow \quad F\{x^*[n]\} = X^*(e^{-j\omega}) \quad \checkmark$$

Also, if $x[n]$ is real valued, its transform $X(e^{j\omega})$ is conjugate symmetric. That is,

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad [x[n] \text{real}].}$$

تقارن هرمیتی

نتایج مهم تقارن هرمیتی برای تبدیل فوریهٔ دنباله های حقیقی

$$x^*[n] = x[n] \Rightarrow X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |X^*(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \measuredangle X^*(e^{j\omega}) = -\measuredangle X(e^{j\omega}) = \measuredangle X(e^{-j\omega}) \\ Re\{X^*(e^{j\omega})\} = Re\{X(e^{j\omega})\} = Re\{X(e^{-j\omega})\} \\ Im\{X^*(e^{j\omega})\} = -Im\{X(e^{j\omega})\} = Im\{X(e^{-j\omega})\} \end{cases}$$

تابع اندازه زوج است.

" فاز فرد " .

" بخش حقیقی زوج " .

" بخش موهومی فرد " .

نکته: اگر $x[n]$ حقیقی و زوج باشد، $X(e^{j\omega})$ هم حقیقی و زوج است.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \Rightarrow X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[-m] e^{-j\omega m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}$$

$$= X(e^{j\omega})$$

$\Rightarrow X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \Rightarrow$ $X(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج است.

نکته: اگر $x[n]$ حقیقی و فرد باشد، $X(e^{j\omega})$ موهومی و فرد است.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \Rightarrow X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[-m] e^{-j\omega m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} -x[m] e^{-j\omega m}$$

$$= -X(e^{j\omega})$$

$\Rightarrow X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) = -X(e^{j\omega}) \Rightarrow$ $X(e^{j\omega})$ موهومی و فرد است.

نتیجهٔ مهم: اگر $x[n]$ حقیقی و به صورت $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$ باشد،

$$F\{x[n]\} = F\{x_e[n]\} + F\{x_o[n]\}$$

از طرف دیگر: $X(e^{j\omega}) = Re\{X(e^{j\omega})\} + j\, Im\{X(e^{j\omega})\}$

$x_e[n]$ حقیقی و زوج است. $\Rightarrow F\{x_e[n]\} = Re\{X(e^{j\omega})\}$

$x_o[n]$ حقیقی و فرد است. $\Rightarrow F\{x_o[n]\} = j\, Im\{X(e^{j\omega})\}$

Differencing and Accumulation ۵. تفاضل گیری و انباشتگی

$$x[n] - x[n-1] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}).$$

Next, consider the signal $$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m].$$

Since $y[n] - y[n-1] = x[n]$, we might conclude that the transform of $y[n]$ should be related to the transform of $x[n]$ by division by $(1 - e^{-j\omega})$. This is partly correct, but as with the continuous-time integration property, there is more involved. The precise relationship is

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

مثال)

Let us derive the Fourier transform $X(e^{j\omega})$ of the unit step $x[n] = u[n]$

روش اول: با معرفی تابع علامت $sgn[n] = \begin{cases} 1 & , n \geq 0 \\ -1 & , n < 0 \end{cases}$ داریم:

$$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn[n] \Rightarrow F\{u[n]\} = \frac{1}{2} F\{1\} + \frac{1}{2} F\{sgn[n]\}$$

$$F\{1\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

$$z[n] = sgn[n] \Rightarrow z[n] - z[n-1] = 2\delta[n]$$

$$\Rightarrow (1 - e^{-j\omega}) F\{z[n]\} = 2 \Rightarrow F\{sgn[n]\} = \frac{2}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$F\{u[n]\} = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

روش دوم : استفاده از خاصیت انباشتگی

$$g[n] = \delta[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} G(e^{j\omega}) = 1. \qquad \text{and} \qquad x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} g[m] = u[n]$$

Taking the Fourier transform of both sides and using accumulation yields

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

۶. وارونگی زمانی Time Reversal

If $\quad x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}).\quad$ then $\quad \boxed{x[-n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega}).}$

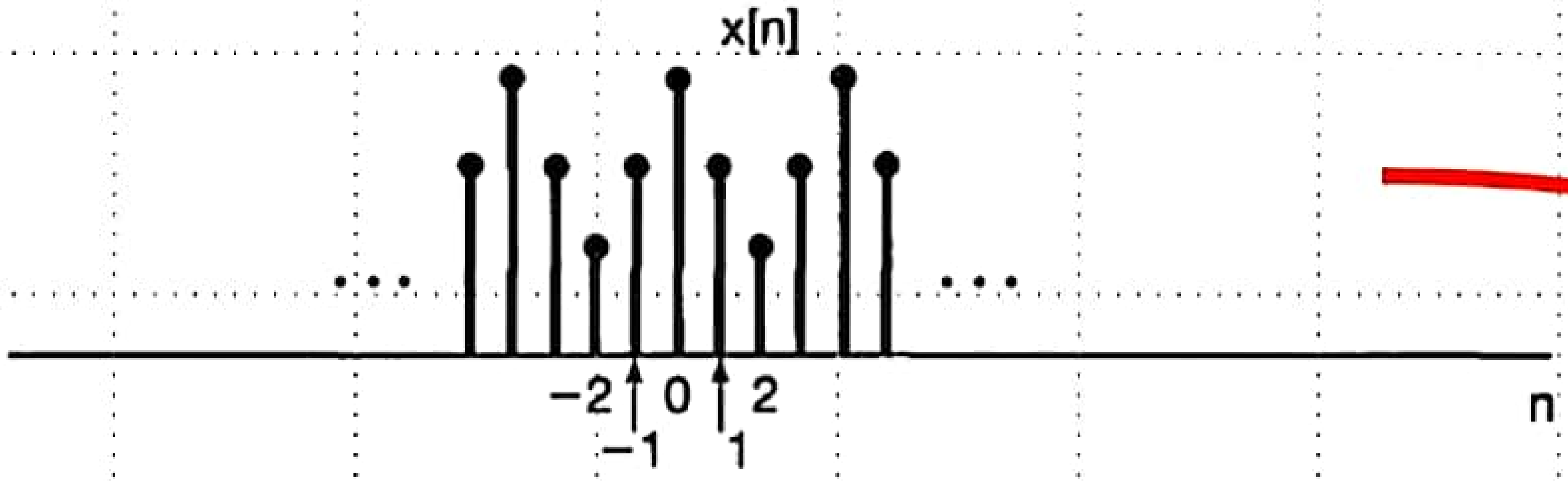
۷. انبساط یا کشیدگی زمانی Time Expansion

Because of the discrete nature of the time index for discrete-time signals, the relation between time and frequency scaling in discrete time takes on a somewhat different form from its continuous-time counterpart. $\quad x(at) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right).$

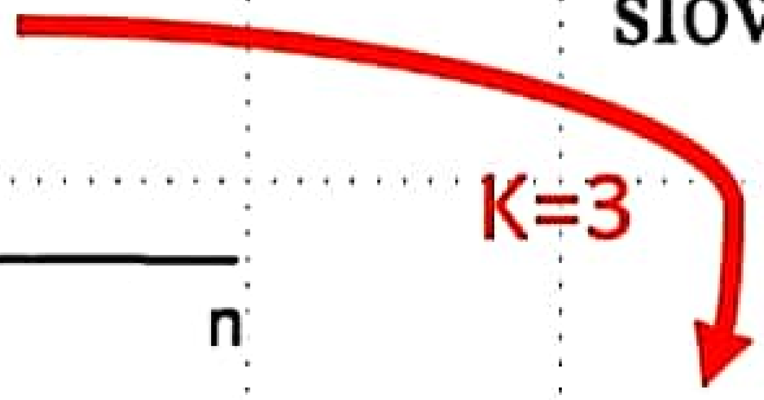
Let k be a positive integer, and define the signal

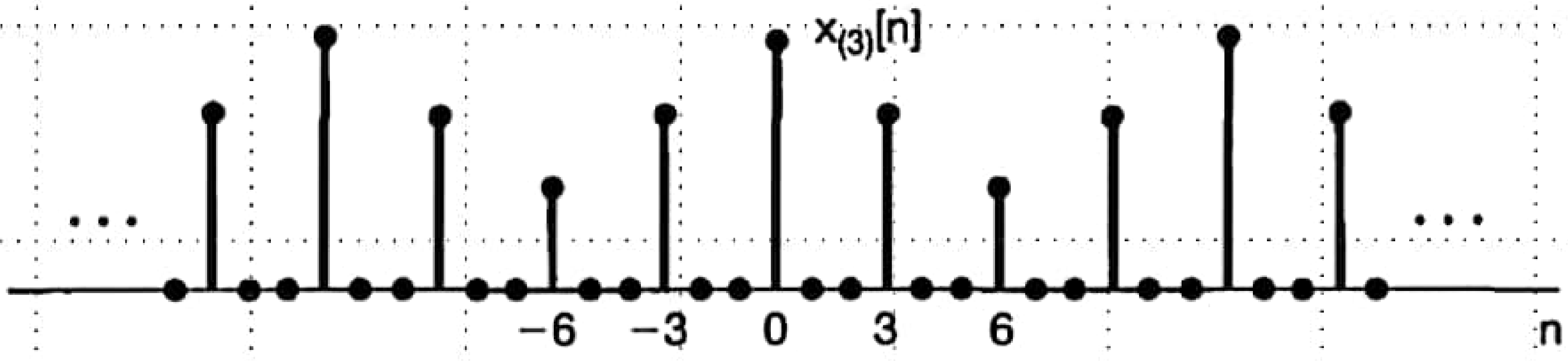
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k. \end{cases}$$

As illustrated in figure for $k = 3$, $x_{(k)}[n]$ is obtained from $x[n]$ by placing $k-1$ zeros between successive values of the original signal.



Intuitively, we can think of $x_{(k)}[n]$ as a slowed-down version of $x[n]$.





Since $x_{(k)}[n]$ equals 0 unless n is a multiple of k, i.e., unless $n = rk$, we see that the Fourier transform of $x_{(k)}[n]$ is given by

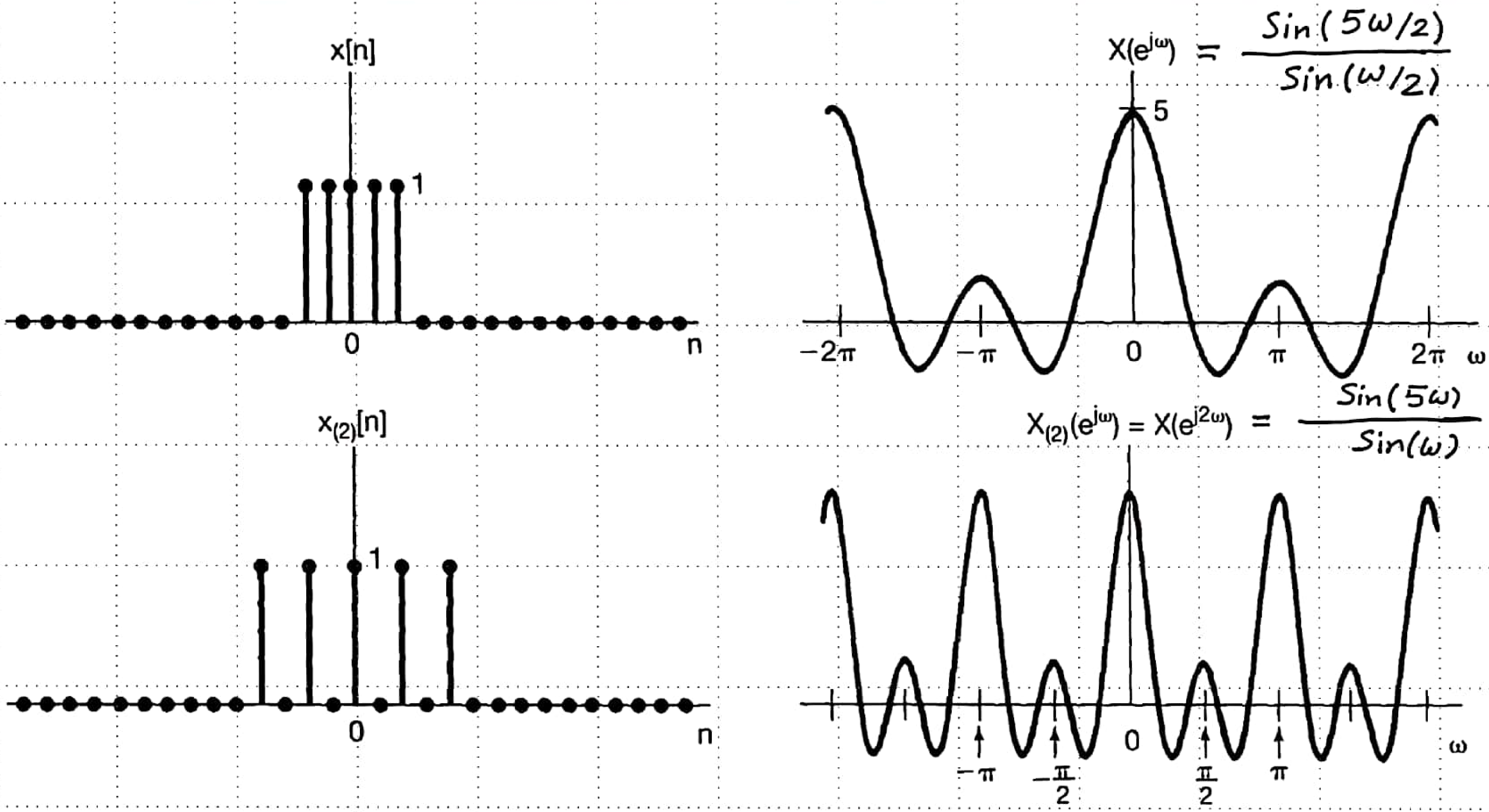
$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk}.$$

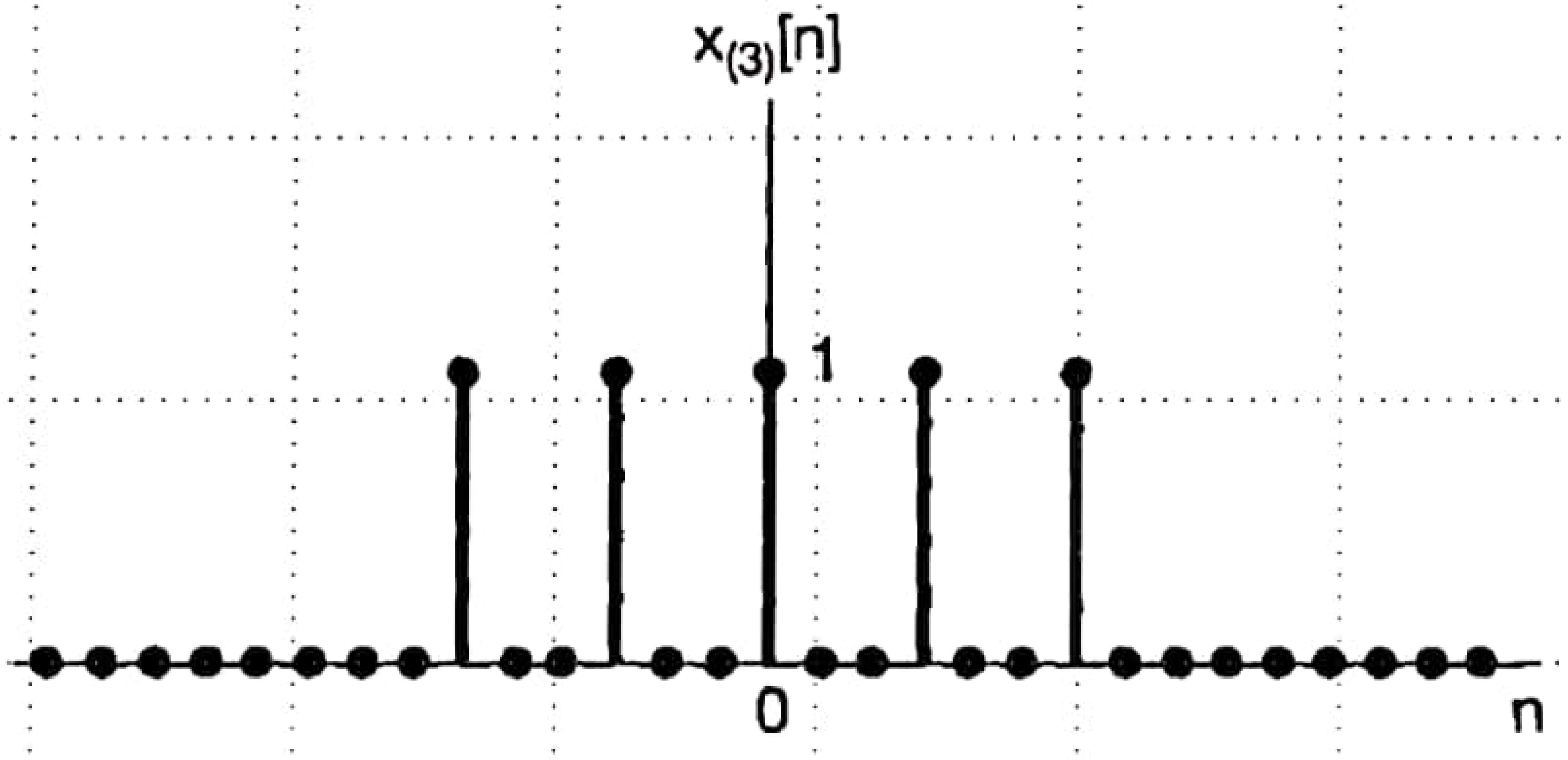
Furthermore, since $x_{(k)}[rk] = x[r]$, we find that

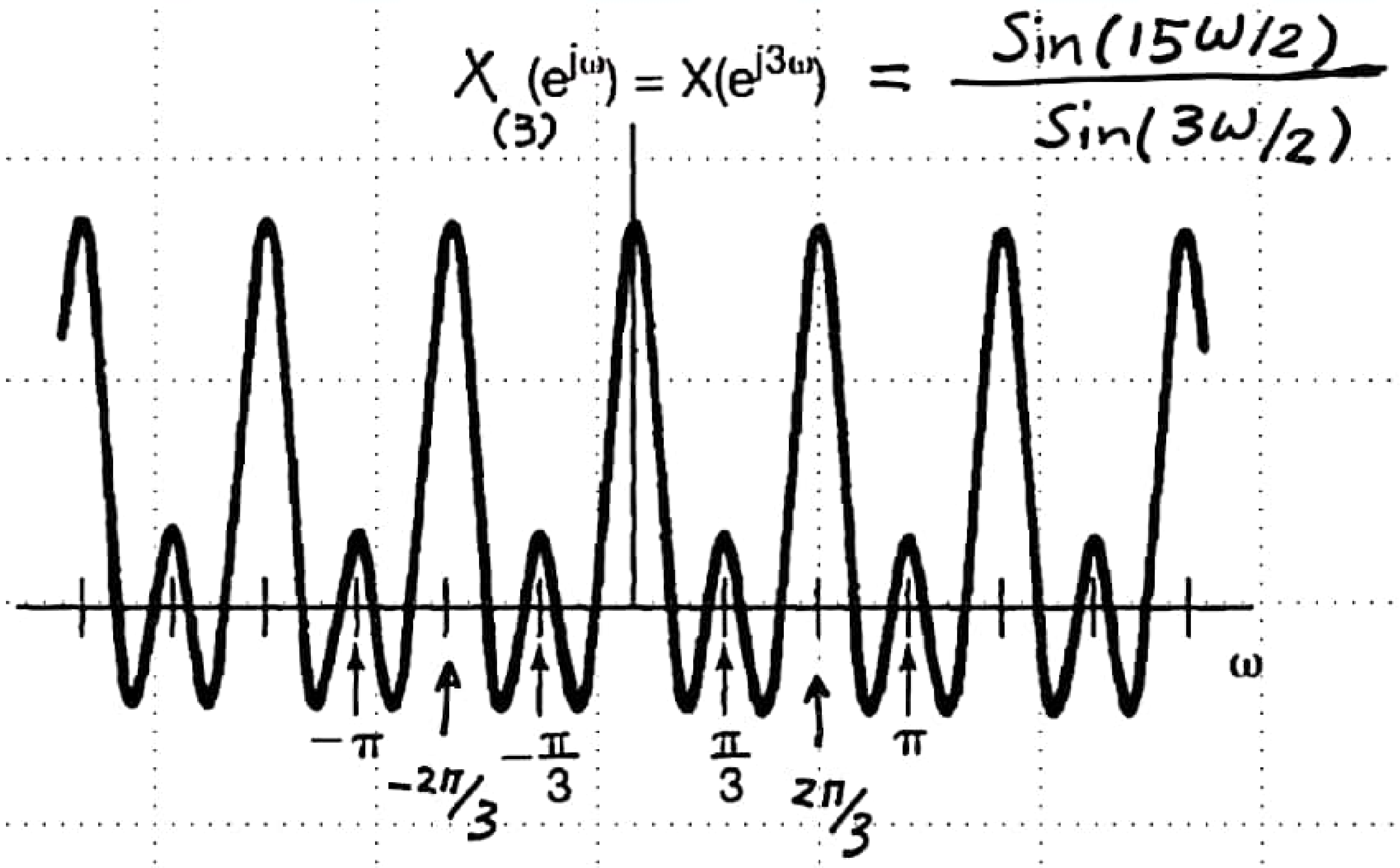
$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega}).$$

That is, $\boxed{x_{(k)}[n] \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega}).}$

Note that as the signal is spread out and slowed down in time by taking $k > 1$, its Fourier transform is compressed.


x[n]
1
0
n
$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$
5
−2π
−π
0
π
2π
ω
$x_{(2)}[n]$
1
0
n
$X_{(2)}(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}) = \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$
0
−π
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
ω

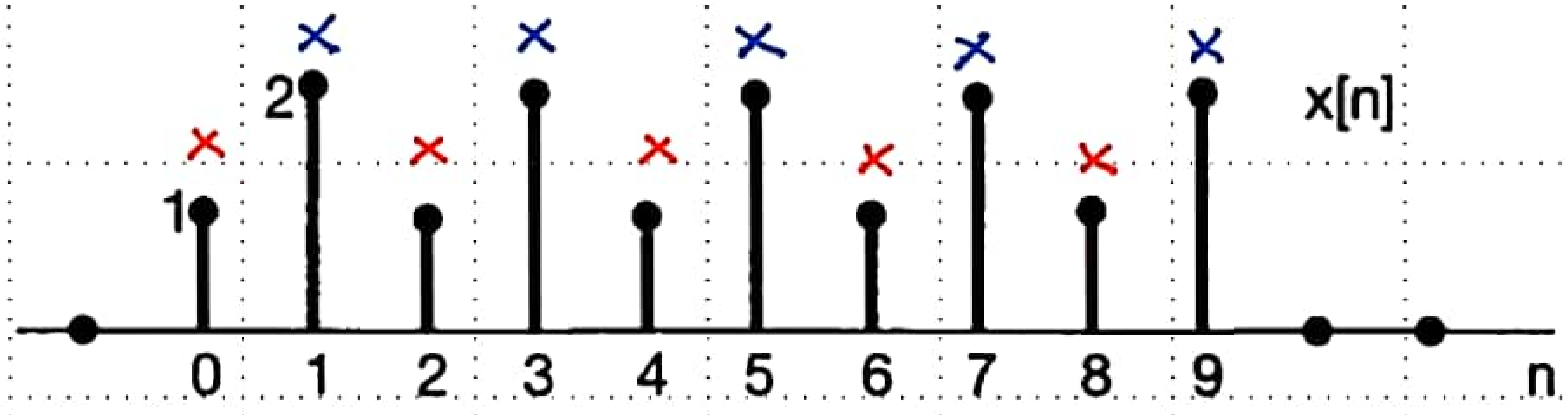




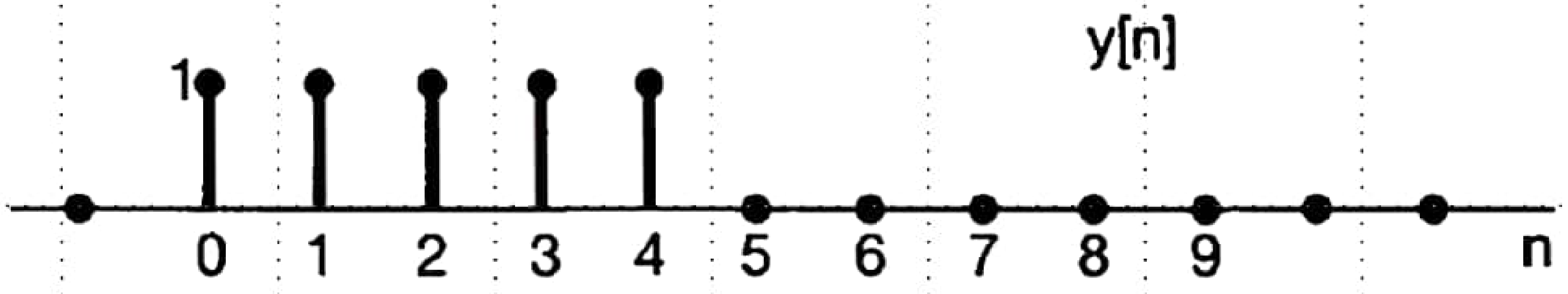
Inverse relationship between the time and frequency domains: As k in creases, $x_{(k)}[n]$ spreads out while its transform is compressed.

An illustration of the usefulness of the time-expansion property in determining Fourier transforms, مثال)

let us consider the sequence $x[n]$

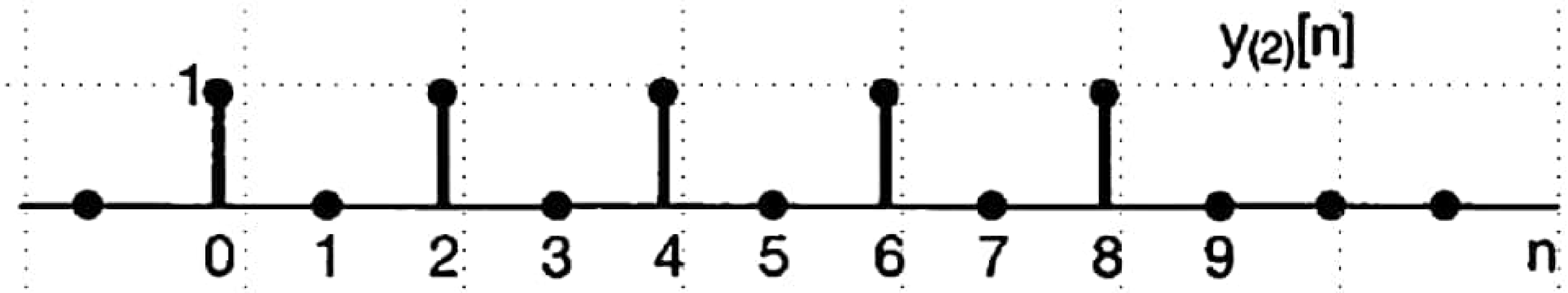


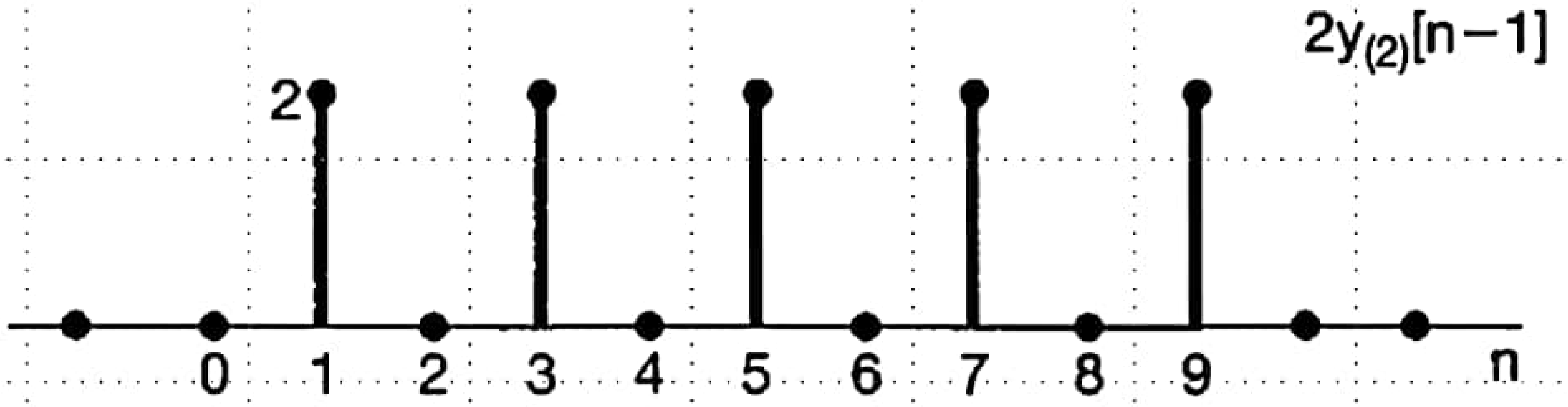
This sequence can be related to the simpler sequence $y[n]$



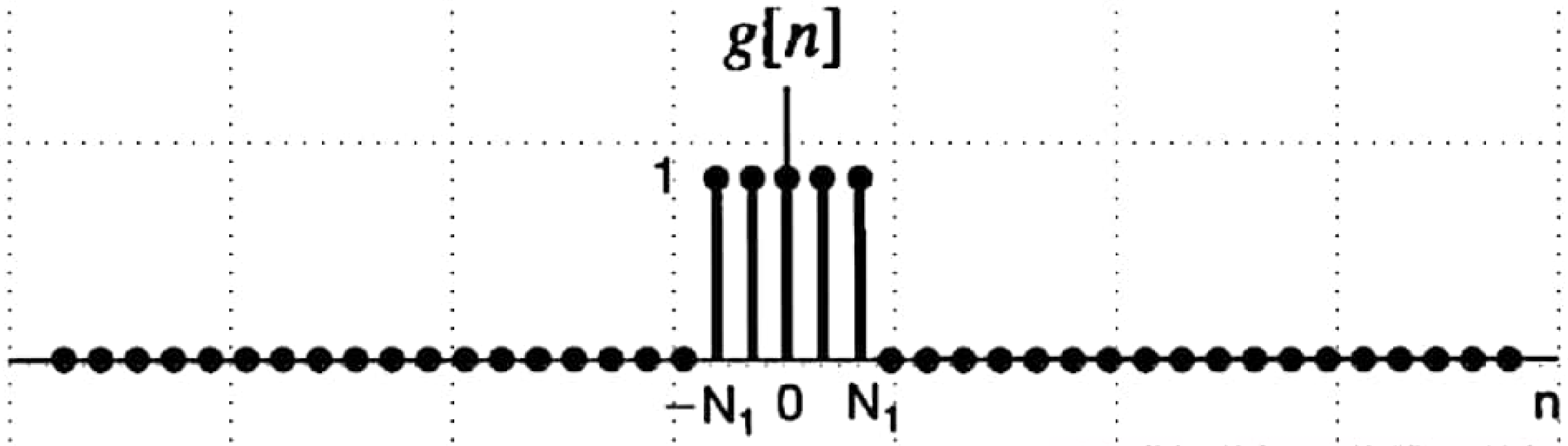
In particular $x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$, where

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & \text{if } n \text{ is even} \\ 0, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$





Next, note that $y[n] = g[n-2]$, where $g[n]$ is a rectangular pulse



$$\Rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}.$$

Using the time-expansion property, we then obtain

$$y_{(2)}[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j4\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)},$$

and using the linearity and time-shifting properties, we get

$$2y_{(2)}[n-1] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2e^{-j5\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}.$$

Combining these two results, we have

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}(1 + 2e^{-j\omega})\left(\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}\right).$$

Differentiation in Frequency ۸. مشتق گیری در حوزهٔ فرکانس

Again, let $x[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$. $\Longrightarrow$ $\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}$.

$$\Longrightarrow \boxed{nx[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.}$$

Parseval's Relation ۹. رابطهٔ پارسوال

If $x[n]$ and $X(e^{j\omega})$ are a Fourier transform pair, then

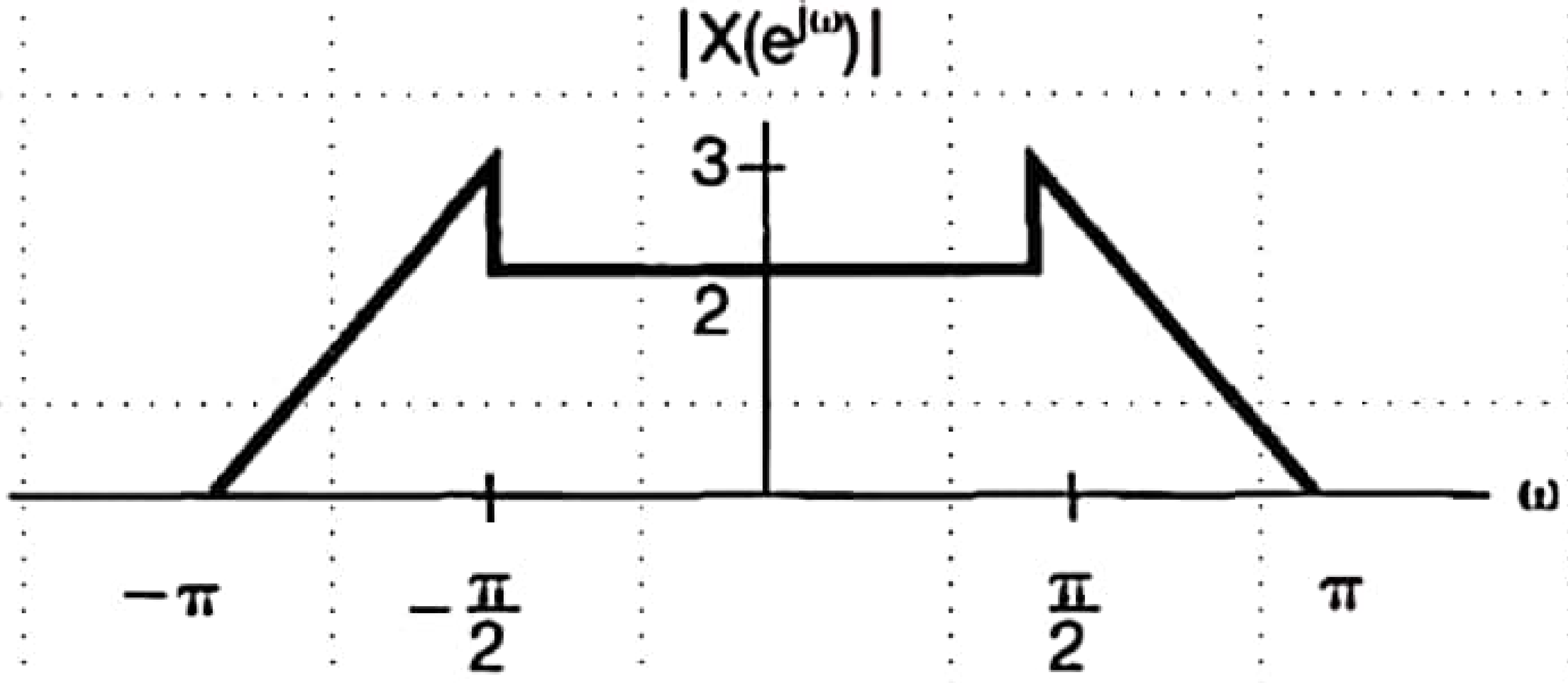
$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.}$$

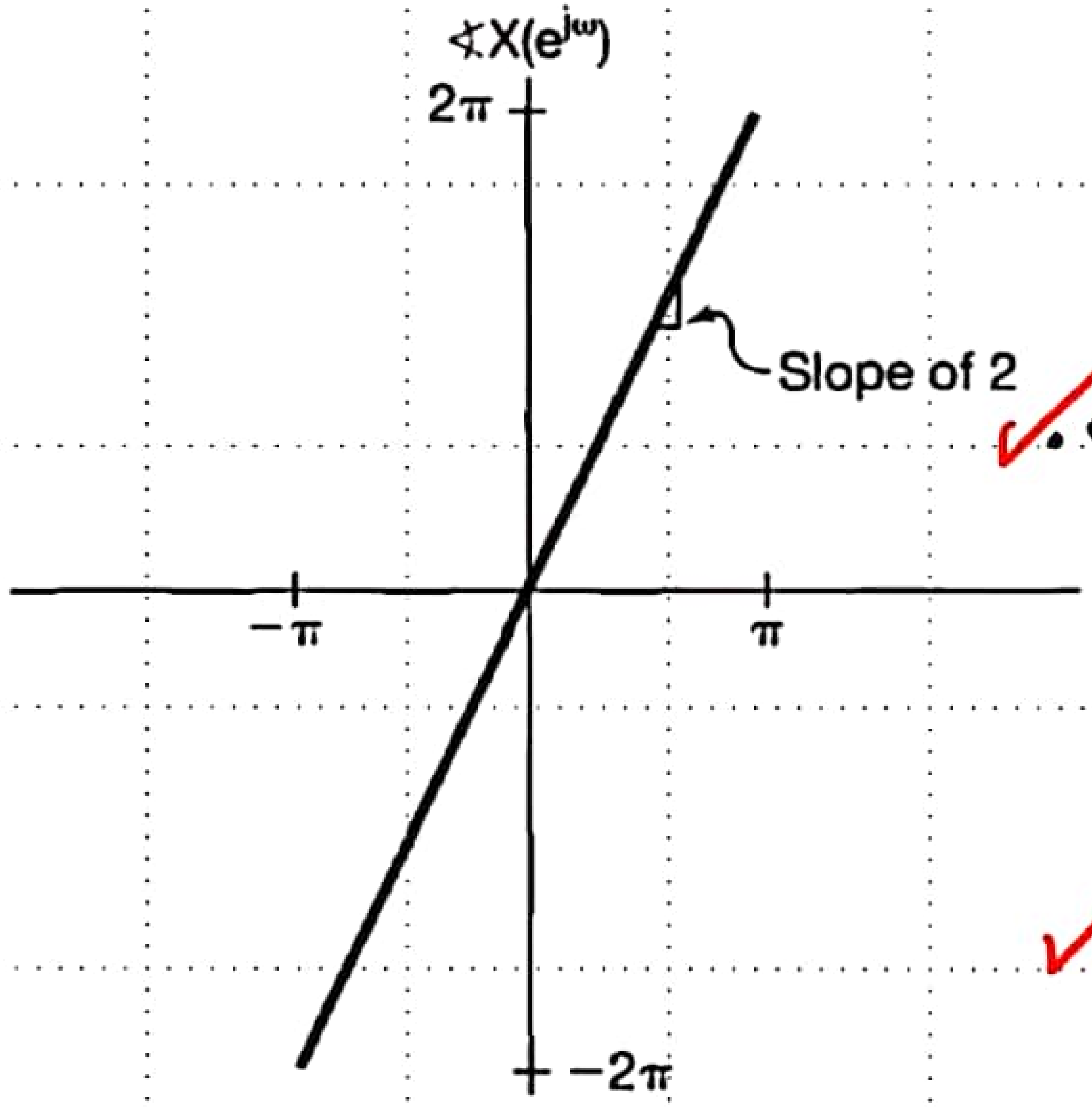
The quantity on the left-hand side is the total energy in the signal $x[n]$, and Parseval's relation states that this energy can also be determined by integrating the energy per unit frequency, $|X(e^{j\omega})|^2/2\pi$, over a full 2π interval of distinct discrete-time frequencies.

In analogy with the continuous-time case, $|X(e^{j\omega})|^2$ is referred to as the *energy-density spectrum* of the signal $x[n]$.

مثال) کاربرد چند خاصیت تبدیل فوریه در تشخیص ویژگیهای یک دنباله در حوزهٔ زمان

Consider the sequence $x[n]$ whose Fourier transform $X(e^{j\omega})$ is depicted for $-\pi \leq \omega \leq \pi$ whether or not, in the time domain, $x[n]$ is periodic, real, even, and/or of finite energy. ?





۱) $x[n]$ غیرمتناوب است، چون $X(e^{j\omega})$ تابعی

پیوسته از ω است و به فرم قطار ضربه نیست. ✓

۲) $x[n]$ حقیقی است، چون $|X|$ زوج و

$\measuredangle X$ فرد است. ✓

۳) $x[n]$ زوج نیست، چون $X(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج نیست. ✓

۴) انرژی دنباله $x[n]$ محدود است، چون انتگرال

$|X(e^{j\omega})|^2$ در بازه $-\pi$ تا π، مقدار محدودی است. ✓

THE CONVOLUTION PROPERTY

۱۰. خاصیت کانولوشن (در حوزهٔ زمان)

Specifically, if $x[n]$, $h[n]$, and $y[n]$ are the input, impulse response, and output, respectively, of an LTI system, so that $y[n] = x[n] * h[n]$, then

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),}$$

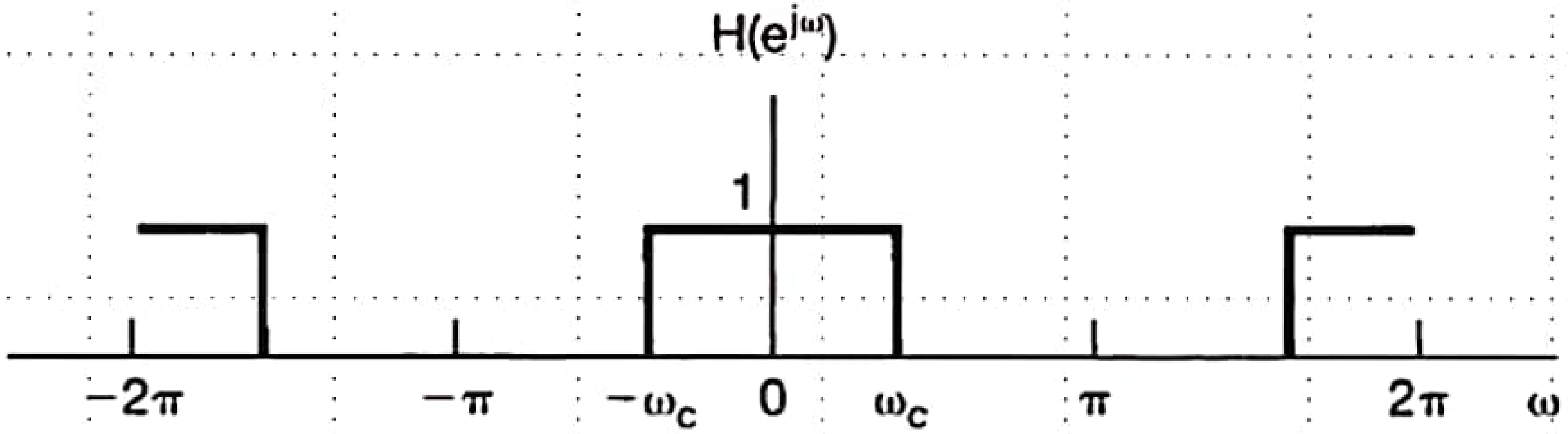
where $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$, and $Y(e^{j\omega})$ are the Fourier transforms of $x[n]$, $h[n]$, and $y[n]$, respectively.

نکتهٔ مهم: $H(e^{j\omega})$ پاسخ فرکانسی سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ است که با ضرب شدن در تبدیل فوریه دنبالهٔ ورودی سیستم، اندازه و فاز آن را در خروجی تغییر می‌دهد.

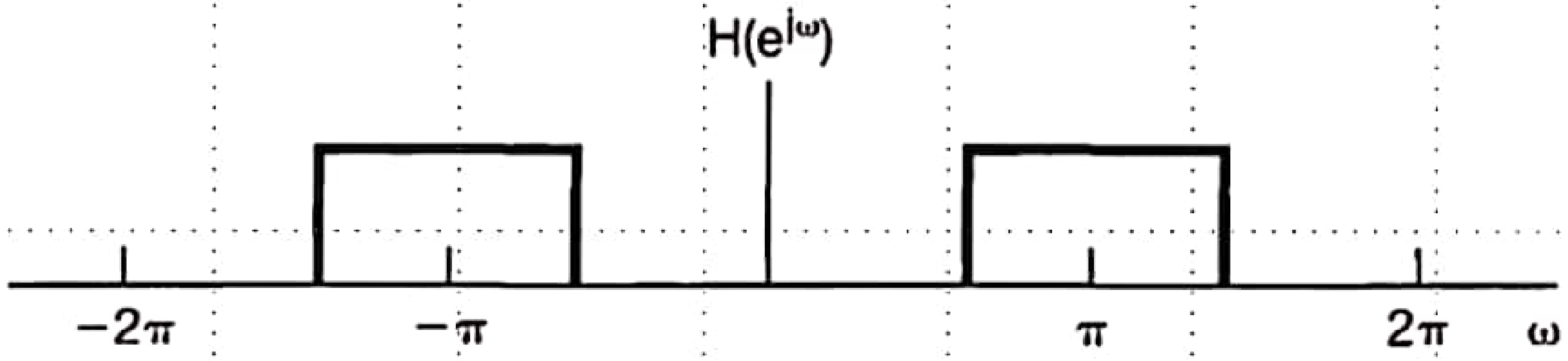
$$\begin{cases} |Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \cdot |H(e^{j\omega})| \\ \measuredangle Y(e^{j\omega}) = \measuredangle X(e^{j\omega}) + \measuredangle H(e^{j\omega}) \end{cases}$$

Thus, in frequency- selective filtering, for example, we want $H(e^{j\omega}) \approx 1$ over the range of frequencies corresponding to the desired passband and $H(e^{j\omega}) \approx 0$ over the band of frequencies to be eliminated or significantly attenuated.

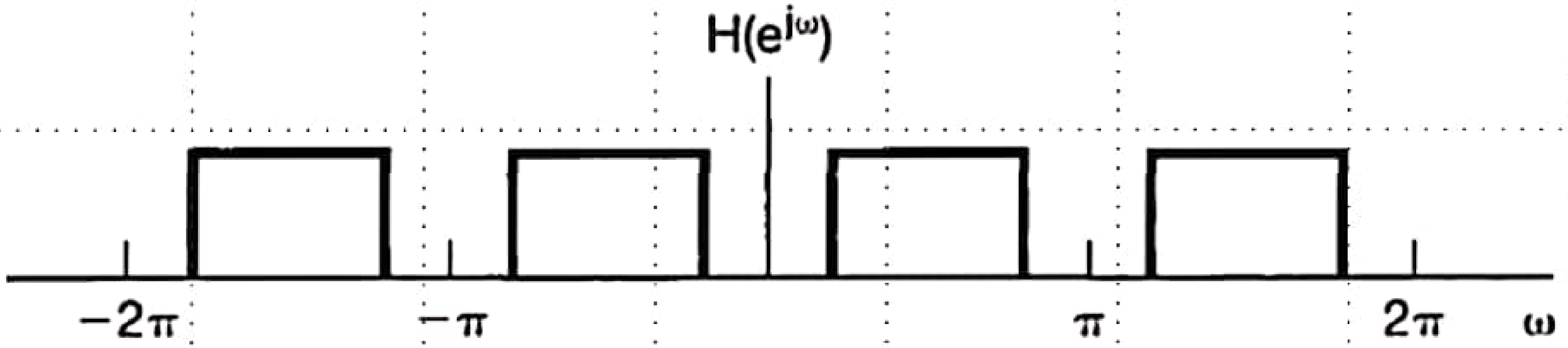
مثال) پاسخ فرکانسی انواع فیلترهای ایده‌آل زمان‌گسسته (پائین‌گذر، بالاگذر و میان‌گذر)



Frequency response of
an ideal lowpass filter

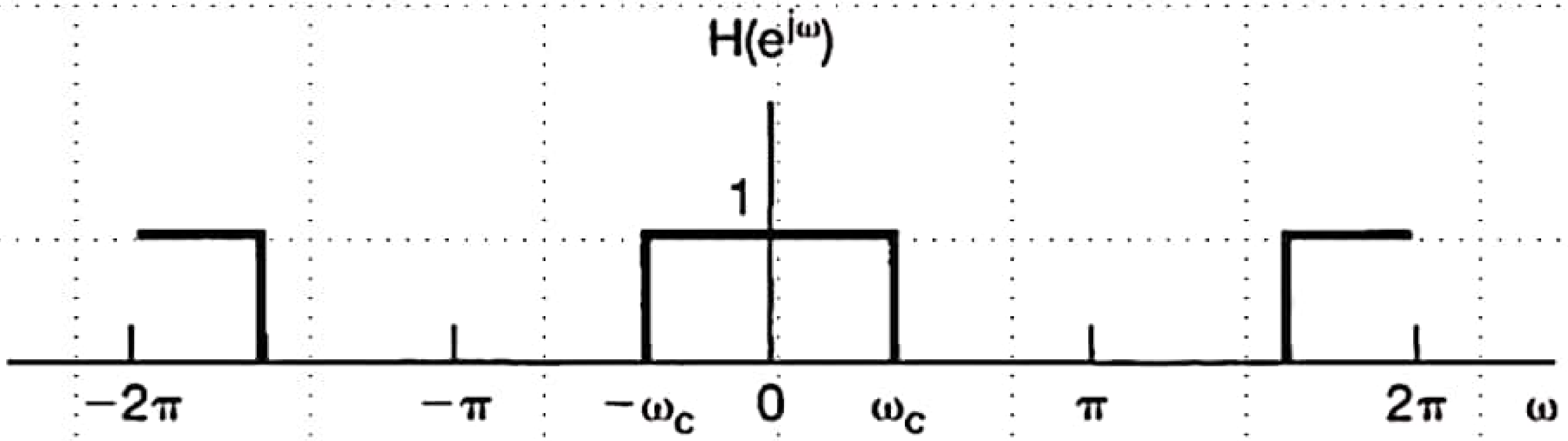


Frequency response of
an ideal highpass filter

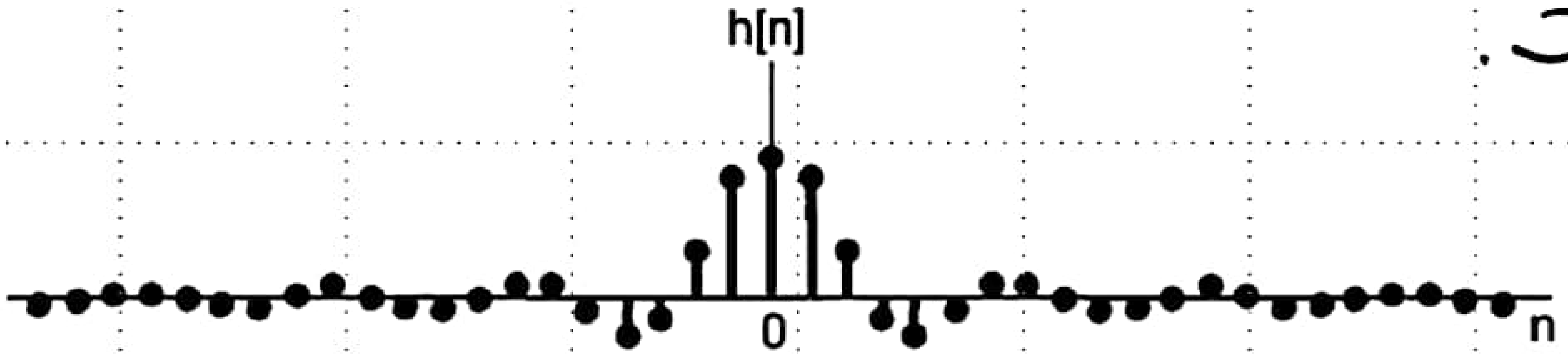


Frequency response of
an ideal bandpass filter

مثال) پاسخ ضربه فیلتر ایده‌آل پایین‌گذر



$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n},$$



نکته: ۱) $h[n]$ یک سیگنال غیرعلّی است.

۲) $h[n]$ نوسانی است و با افزایش ω_c فرکانس نوسان بیشتری دارد. اما وقتی $\omega_c=\pi$، فیلتر تمام گذر شده و $h[n]=\delta[n]$ و دیگر پاسخ ضربه نوسانی نخواهد داشت.

مثال) پاسخ فرکانسی سیستم تأخیردهنده

$$h[n] = \delta[n - n_0].$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}.$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega n_0}$$

$$\Rightarrow |Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \quad \& \quad \measuredangle Y(e^{j\omega}) = \measuredangle X(e^{j\omega}) - \omega n_0$$

اندازهٔ طیف فرکانسی ورودی تغییری نمی‌کند اما به فاز آن عبارت $-\omega n_0$ اضافه می‌گردد.

مثال)

Consider an LTI system with impulse response $h[n] = \alpha^n u[n]$, with $|\alpha| < 1$,

and suppose that the input to this system is $x[n] = \beta^n u[n]$, with $|\beta| < 1$.

$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \quad \text{and} \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}},$$

$$\Rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})}. \quad \Rightarrow \quad y[n] = ?$$

✓ if $\alpha \neq \beta$, the partial fraction expansion of $Y(e^{j\omega})$ is of the form

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}. \qquad A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}.$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^{n+1}u[n] - \beta^{n+1}u[n]].$$

✓ For $\alpha = \beta$, $\quad Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2,$

which can be expressed as $\quad Y(e^{j\omega}) = \frac{j}{\alpha}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right).$

we can use the frequency differentiation property, together with the Fourier transform pair

$\alpha^n u[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$, to conclude that $\quad n\alpha^n u[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right).$

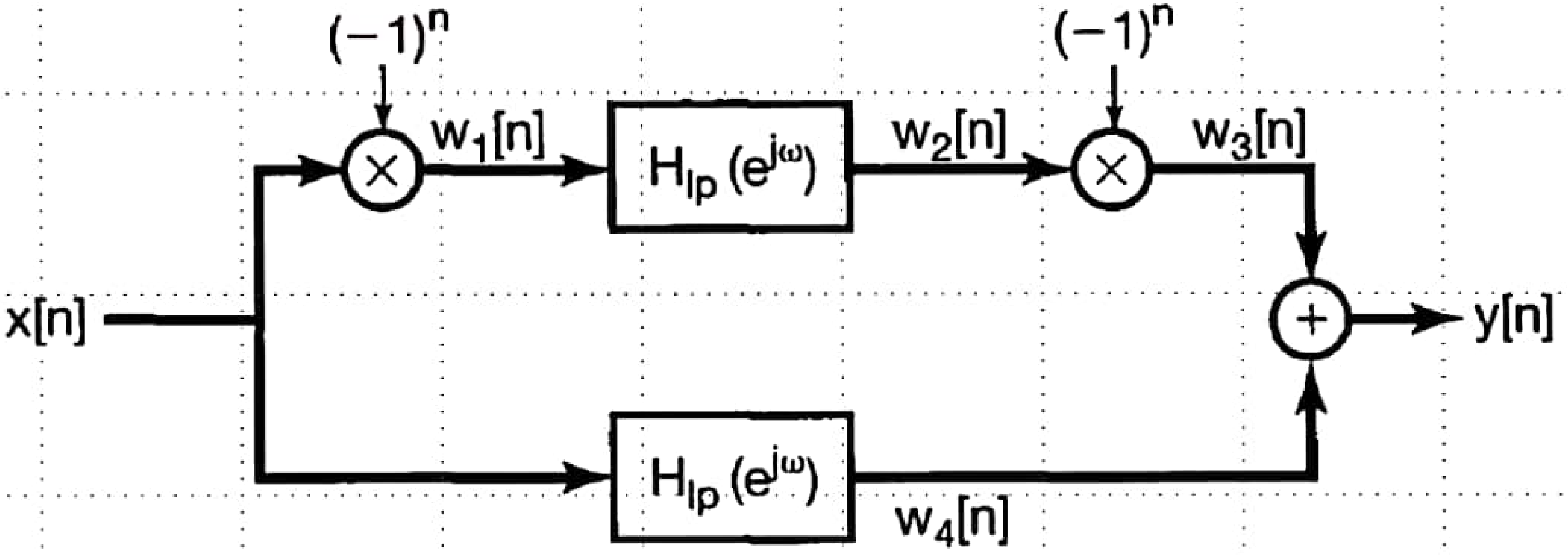
To account for the factor $e^{j\omega}$, we use the time-shifting property to obtain

$$(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} je^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right),$$

and finally, accounting for the factor $1/\alpha$, we obtain $y[n] = (n+1)\alpha^n u[n+1]$.

It is worth noting that, although the right-hand side is multiplied by a step that begins at $n = -1$, the sequence $(n+1)\alpha^n u[n+1]$ is still zero prior to $n = 0$, since the factor $n + 1$ is zero at $n = -1$. Thus, we can alternatively express $y[n]$ as $y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$.

مثال) به دست آوردن پاسخ فرکانسی یک سیستم ترکیبی، حاصل از اتصال سیستم‌های LTI.



The LTI systems with frequency response $H_{lp}(e^{j\omega})$ are ideal lowpass filters with cutoff frequency $\pi/4$ and unity gain in the passband.

$$(-1)^n = e^{j\pi n} \quad \Rightarrow \quad w_1[n] = e^{j\pi n}x[n]. \quad \Rightarrow \quad W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)}).$$

The convolution property yields $\quad W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\pi)}).$

$$w_3[n] = e^{j\pi n} w_2[n], \Rightarrow W_3(e^{j\omega}) = W_2(e^{j(\omega-\pi)}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)}).$$

$$\Rightarrow W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega}).$$

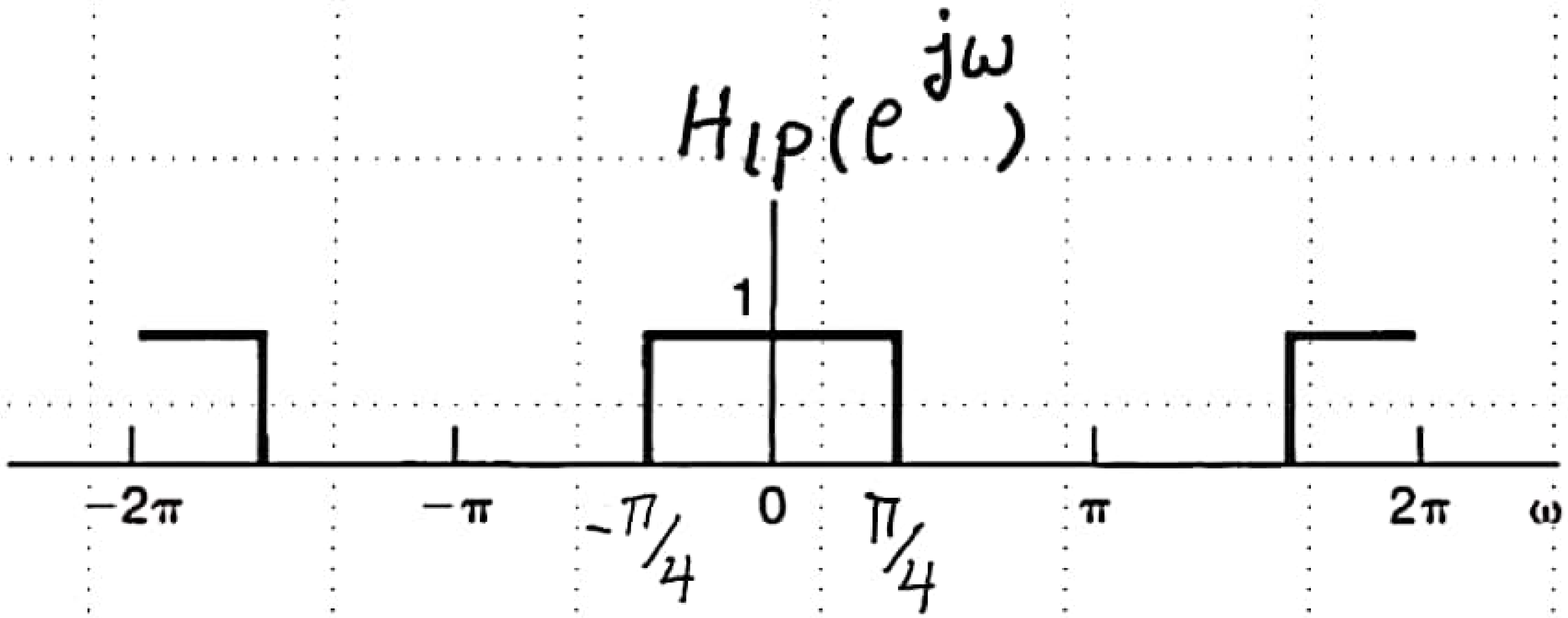
Applying the convolution property to the lower path, we get $W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$.

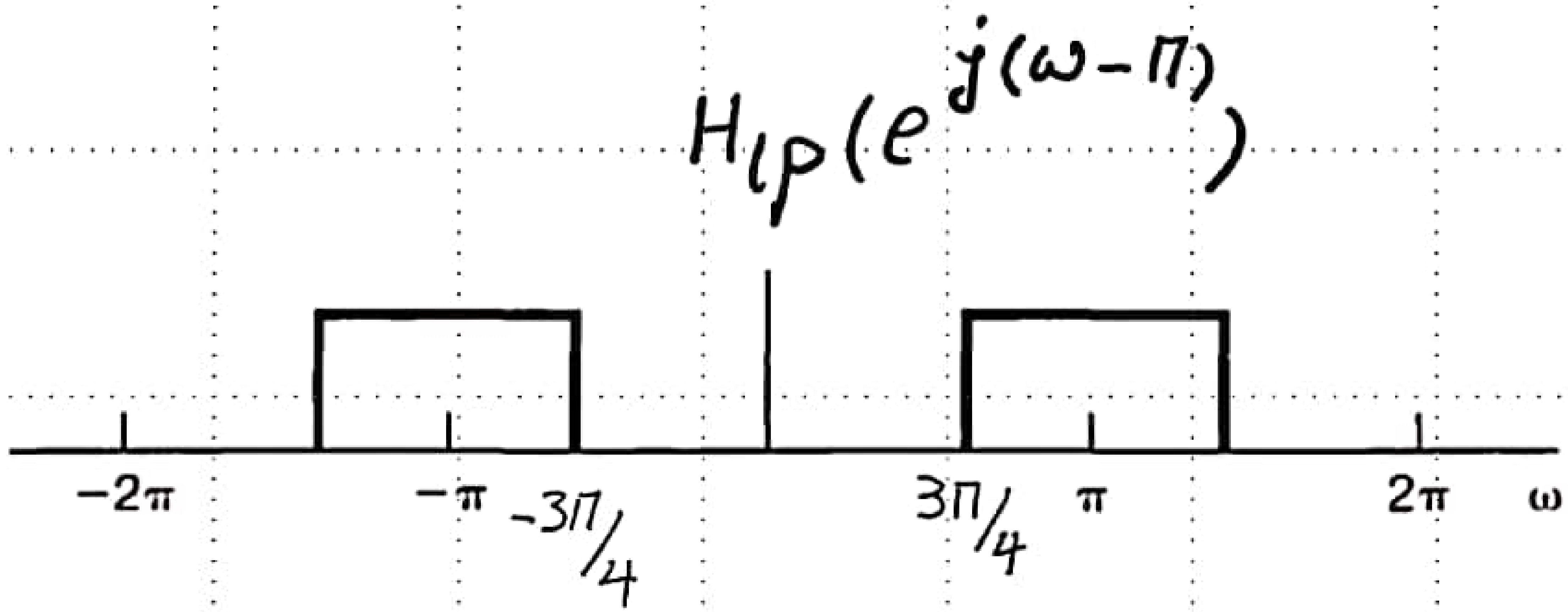
From the linearity property of the Fourier transform, we obtain

$$Y(e^{j\omega}) = W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega}).$$

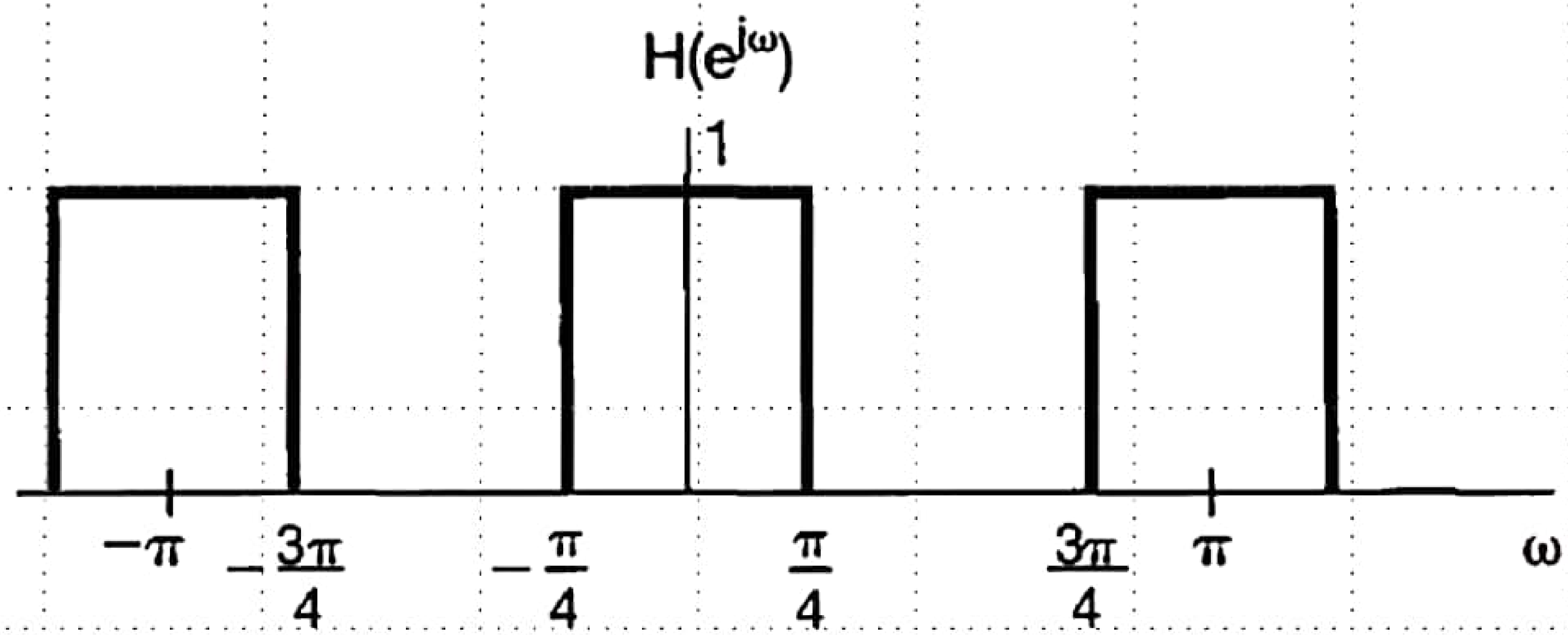
Consequently, the overall system has the frequency response

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$





فیلتر میان نگذر
ایده‌آل



an *ideal bandstop characteristic,* where the stopband is the region $\pi/4 < |\omega| < 3\pi/4$.

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه بیست و ششم _ بخش‌های 5.5 تا 5.8 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

THE MULTIPLICATION PROPERTY ۱۱. خاصیت ضرب (در حوزهٔ زمان)

An analogous property to the multiplication property for continuous-time signals exists for discrete-time signals and plays a similar role in applications.

Consider $y[n]$ equal to the product of $x_1[n]$ and $x_2[n]$, with $Y(e^{j\omega})$, $X_1(e^{j\omega})$, and $X_2(e^{j\omega})$ denoting the corresponding Fourier transforms. Then

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\omega n},$$

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta, \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right\} e^{-j\omega n}.$$

Interchanging the order of summation and integration, we obtain

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right]d\theta.$$

The bracketed summation is $X_2(e^{j(\omega-\theta)})$, and consequently,

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.}$$

This equation corresponds to a *periodic* convolution of $X_1(e^{j\omega})$ and $X_2(e^{j\omega})$, and the integral in this equation can be evaluated over any interval of length 2π.

Consider the problem of finding the Fourier transform $X(e^{j\omega})$ of a signal $x[n]$ which is (مثال

the product of two other signals; that is,

$$x[n] = x_1[n]x_2[n], \quad \text{where} \quad x_1[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}. \quad \text{and} \quad x_2[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}$$

From the multiplication property

$$\Longrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.$$

کانولوشن متناوب

we can convert the equation into an ordinary convolution by defining

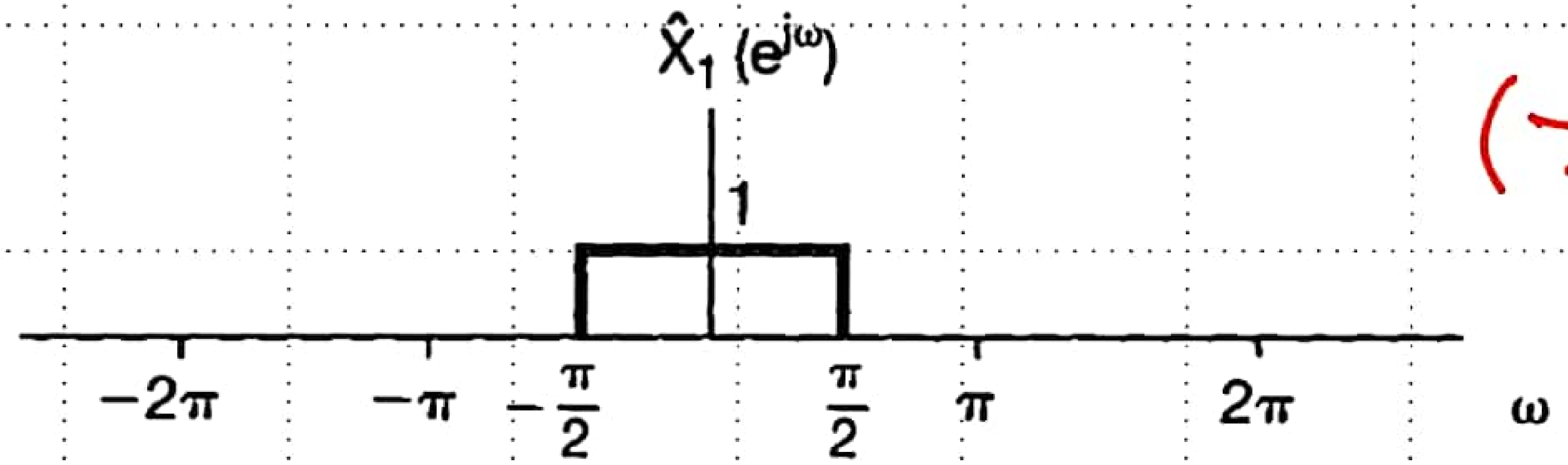
$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & \text{for } -\pi < \omega \le \pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

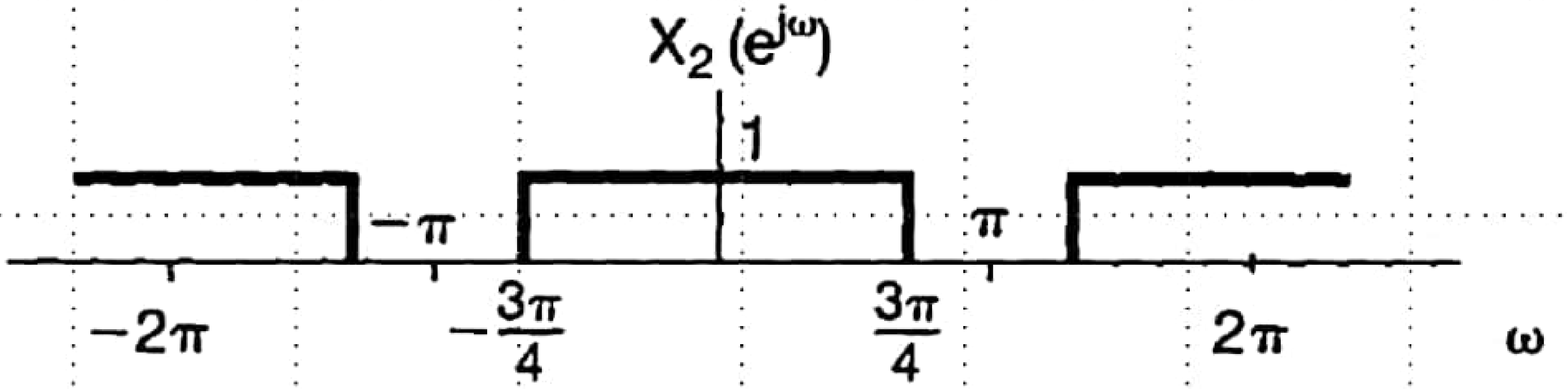
Then, replacing $X_1(e^{j\theta})$ by $\widehat{X}_1(e^{j\theta})$, and using the fact that $\widehat{X}_1(e^{j\theta})$ is zero for $|\theta| > \pi$,

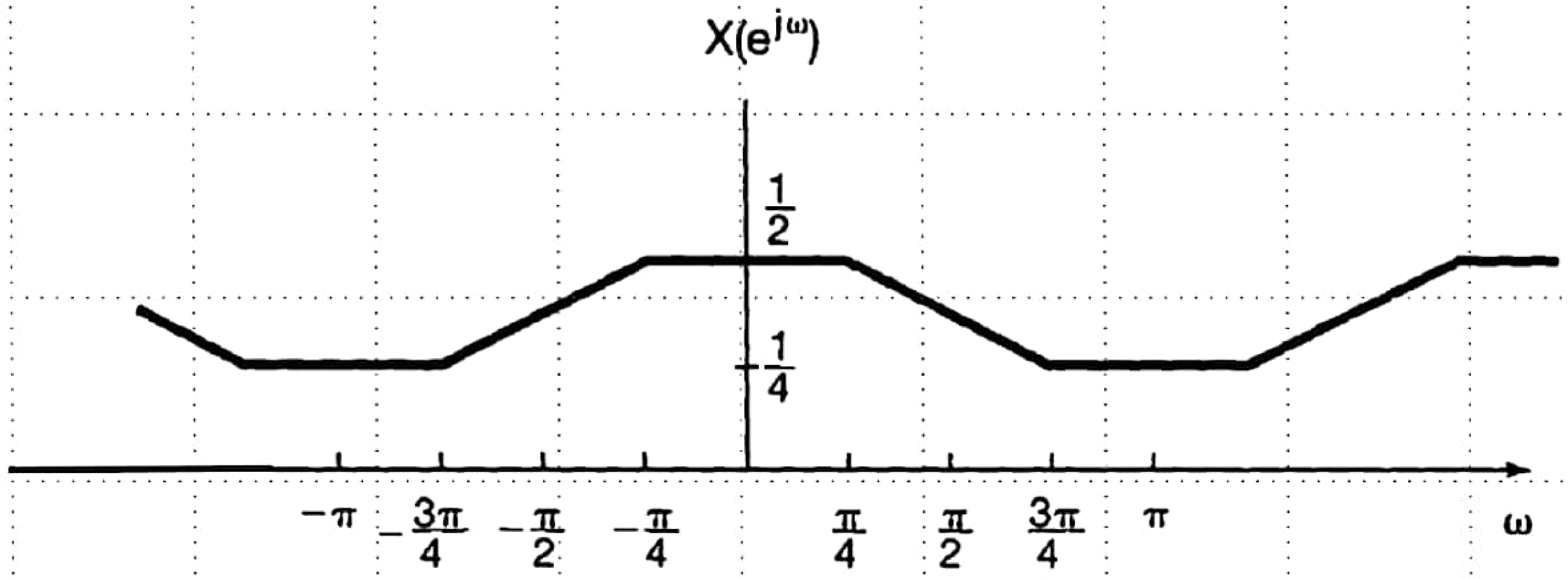
we see that

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.$$

کانولوشن
معمولی
(خطی - غیرمتناوب)







جدول خواص تبدیل فوریه

TABLE 5.1 PROPERTIES OF THE DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM

Section	Property	Aperiodic Signal	Fourier Transform
		$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{matrix} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{matrix}\right\}$ periodic with period 2π

5.3.2	Linearity	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
5.3.3	Time Shifting	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
5.3.3	Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
5.3.4	Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
5.3.4	Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re e\{X(e^{j\omega})\} = \Re e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \Im m\{X(e^{j\omega})\} = -\Im m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
5.3.4	Symmetry for Real, Even Signals	$x[n]$ real an even	$X(e^{j\omega})$ real and even
5.3.4	Symmetry for Real, Odd Signals	$x[n]$ real and odd	$X(e^{j\omega})$ purely imaginary and odd

5.3.4	Even-odd Decomposition of Real Signals	$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ [$x[n]$ real] $x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$\Re e\{X(e^{j\omega})\}$ $j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
5.3.5	Differencing in Time	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
5.3.5	Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
5.3.6	Time Reversal	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5.3.7	Time Expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n = \text{multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \neq \text{multiple of } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
5.3.8	Differentiation in Frequency	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

5.3.9 Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

5.4	Convolution	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
5.5	Multiplication	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

جدول زوج تبدیل فوریه دنباله‌های مهم نامتناوب و متناوب

TABLE 5.2 BASIC DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM PAIRS

Signal	Fourier Transform	Fourier Series Coefficients (if periodic)
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic

$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n\rvert \le N/2 \end{cases}$ and $x[n + N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, \ k \ne 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \ k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n]\begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—

$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert\omega\rvert \le W \\ 0, & W < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

DUALITY دوگانی

In considering the continuous-time Fourier transform, we observed a symmetry or duality between the analysis equation and the synthesis equation. No corresponding duality exists between the analysis equation and the synthesis equation for the discrete-time Fourier transform.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega,$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}.$$

دوگانی در سری فوریه گسسته دنباله‌های متناوب

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a[k]\, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$a[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$x[n] = x[n+N] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k+N] = a[k] = a_k$$

دنبالهٔ متناوب $a[k]$، ضرائب نمایش سری فوریه برای دنبالهٔ متناوب $x[n]$ است.

از طرف دیگر با تغییر متغیر n به $-m$، در رابطهٔ آنالیز می‌توان نوشت:

$$a[k] = \sum_{m=<N>} \frac{1}{N} x[-m]\, e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)m}$$

حال با تغییر متغیر مجدد k به n و m به k می‌توان نوشت:

$$a[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} x[-k]\, e^{jn\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$$

رابطهٔ اخیر همان رابطهٔ سنتز است و نشان می‌دهد که دنبالهٔ متناوب $\frac{1}{N} x[-k]$

ضرائب نمایش سری فوریه برای دنبالهٔ متناوب $a[n]$ است.

As in continuous time, this duality implies that every property of the discrete-time Fourier series has a dual. For example

$$x[n-n_0] \stackrel{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0} \qquad \text{and} \qquad e^{jm(2\pi/N)n} x[n] \stackrel{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_{k-m}$$

$$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} Na_k b_k \qquad \text{and} \qquad x[n]y[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}.$$

we see that these pairs of properties are dual.

Consider the following periodic signal with a period of $N = 9$: مثال)

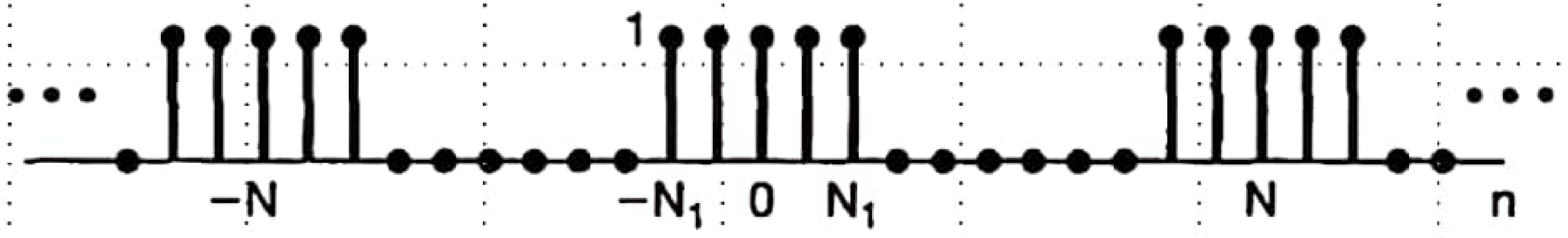
$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{9}\dfrac{\sin(5\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)}, & n \neq \text{multiple of } 9 \\ \dfrac{5}{9}, & n = \text{multiple of } 9 \end{cases} \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k = ?$$

A rectangular square wave has Fourier coefficients in a form much as in the above equation.

Duality, then, suggests that the coefficients for $x[n]$ must be in the form of a rectangular square wave.

To see this more precisely, let $g[n]$ be a rectangular square wave with period $N = 9$ such that

$$g[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & 2 < |n| \leq 4. \end{cases}$$



The Fourier series coefficients b_k for $g[n]$ can be determined from

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{9}\dfrac{\sin(5\pi k/9)}{\sin(\pi k/9)}, & k \neq \text{multiple of } 9 \\ \dfrac{5}{9}, & k = \text{multiple of } 9 \end{cases}$$

The Fourier series analysis equation for $g[n]$ can now be written as $b_k = \dfrac{1}{9}\displaystyle\sum_{n=-2}^{2}(1)e^{-j2\pi nk/9}$.

Interchanging the names of the variables k and n and noting that $x[n] = b_n$, we find that

$$x[n] = \frac{1}{9}\sum_{k=-2}^{2}(1)e^{-j2\pi nk/9}.$$

Letting $k' = -k$ in the sum on the right side, we obtain

$$x[n] = \frac{1}{9}\sum_{k'=-2}^{2} e^{+j2\pi nk'/9}.$$

Finally, moving the factor 1/9 inside the summation, we see that the right side of this equation has the form of the synthesis equation for $x[n]$. We thus conclude that the Fourier coefficients of $x[n]$ are given by

$$a_k = \begin{cases} 1/9, & |k| \le 2 \\ 0, & 2 < |k| \le 4, \end{cases}$$ and, of course, are periodic with period $N = 9$.

دوگانی بین تبدیل فوریهٔ گسسته و سری فوریه پیوستهٔ سیگنال‌های متناوب

In addition to the duality for the discrete Fourier series, there is a duality between

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega,$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

discrete-time Fourier *transform* and *continuous-time* Fourier *series*

$X(e^{j\omega})$ یک تابع متناوب از متغیر پیوستهٔ ω ، با دوره تناوب اصلی 2π است.

پس برای $X(e^{j\omega})$ می توان نمایش سری فوریه درنظر گرفت.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

از طرف دیگر براساس معادلهٔ آنالیز در تبدیل فوریهٔ گسسته:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] e^{jk\omega}$$

درنتیجه $b_k = x[-k]$، یعنی ضرائب سری فوریه برای تابع متناوب و پیوستهٔ $X(e^{j\omega})$، همان وارون شدهٔ زمانی دنبالهٔ $x[n] = F^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$ هستند.

مثال) تبدیل فوریهٔ گسستهٔ دنبالهٔ $x[n] = \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$. به کمک دوگانی بین تبدیل فوریهٔ گسسته و سری فوریهٔ پیوسته قابل محاسبه است.

To use duality, we first must identify a continuous-time signal $g(t)$ with period $T = 2\pi$ and Fourier coefficients $a_k = x[k]$. We know that if $g(t)$ is a periodic square wave with period 2π (or, equivalently, with fundamental frequency $\omega_0 = 1$) and with $g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \le \pi \end{cases}$,

then the Fourier series coefficients of $g(t)$ are $a_k = \dfrac{\sin(kT_1)}{k\pi}$

Consequently, if we take $T_1 = \pi/2$, we will have $a_k = x[k]$.

In this case the analysis equation for $g(t)$ is

$$\frac{\sin(\pi k/2)}{\pi k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-jkt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{-jkt}dt.$$

Renaming k as n and t as ω, we have

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{-jn\omega}d\omega.$$

Replacing n by $-n$ on both sides and noting that the sinc function is even, we obtain

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1)e^{jn\omega}d\omega.$$

The right-hand side of this equation has the form of the Fourier transform synthesis equation for $x[n]$, where $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \le \pi \end{cases}$.

TABLE 5.3 SUMMARY OF FOURIER SERIES AND TRANSFORM EXPRESSIONS

	Continuous time		Discrete time	
	Time domain	**Frequency domain**	**Time domain**	**Frequency domain**
Fourier Series	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ continuous time periodic in time	$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}$ discrete frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ discrete time periodic in time	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$ discrete frequency periodic in frequency
Fourier Transform	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ continuous time aperiodic in time	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ continuous frequency aperiodic in frequency	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ discrete time aperiodic in time	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ continuous frequency periodic in frequency

duality

duality

duality

پاسخ فرکانسی سیستم‌های LTI گسسته توصیف‌شده توسط معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت (LCCDE)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

*N*th-order difference equation

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$ or equivalently, $$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}.$$

Applying the Fourier transform to both sides of the difference equation

and using the linearity and time-shifting properties, we obtain the expression

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega}),$$

$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}.$$

we see that, as in the case of continuous time, $H(e^{j\omega})$ is a ratio of polynomials,

but in discrete time the polynomials are in the variable $e^{-j\omega}$.

Consider the causal LTI system that is characterized by the difference equation (مثال

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \qquad \text{with } |a| < 1.$$

the frequency response of this system is $$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

The impulse response of the system is then recognized as $$h[n] = a^n u[n].$$

Consider a causal LTI system that is characterized by the difference equation (مثال

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n].$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}.$$

$$\Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

$$\Rightarrow \quad h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

پاسخ این سیستم به ورودی $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ چیست؟

we have
$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left[\frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}\right]\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right]$$

$$= \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-e\omega})^2}.$$

the form of the partial-fraction expansion in this case is

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}},$$

$$B_{11} = -4, \quad B_{12} = -2, \quad B_{21} = 8,$$

تعیین مانده‌ها به روش مشابه در تبدیل Z

$$\Rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = -\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = \left\{-4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} u[n].$$