

# بسمه تعالی

## هوش مصنوعی عدم قطعیت - ۲ نیمسال اول ۱۴۰۴-۱۴۰۳

دکتر مازیار پالهنک  
آزمایشگاه هوش مصنوعی  
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر  
دانشگاه صنعتی اصفهان

# یادآوری

- عدم موفقیت عامل منطقی در حالت عدم قطعیت
- عدم امکان بوجود آوردن قوانینی که کامل باشند بدلائل:
  - تنبلی، نادانی نظری، نادانی عملی
- نظریهٔ تصمیم = نظریهٔ احتمال + نظریهٔ سودمندی
- متغیر تصادفی و دامنهٔ آن
- فضای نمونه، حادثهٔ اتمی، حادثه
- اصول احتمال
- احتمال پیشین
- توزیع احتمال
- توزیع احتمال توأم
- احتمال شرطی
- توزیع شرطی
- استنتاج با فهرست کردن از روی توزیع احتمال توأم کلی

# استنتاج با فهرست کردن

■ شروع با توزیع احتمال توأم

	<i>toothache</i>		$\neg$ <i>toothache</i>	
	<i>catch</i>	$\neg$ <i>catch</i>	<i>catch</i>	$\neg$ <i>catch</i>
<i>cavity</i>	<b>.108</b>	<b>.012</b>	.072	.008
$\neg$ <i>cavity</i>	<b>.016</b>	<b>.064</b>	.144	.576

■ برای هر گزاره  $\varphi$ ، گزاره های اتمی که در آنها درست است را جمع کن:

■  $P(\varphi) = \sum_{\omega \in \varphi} P(\omega)$

■

■  $P(\text{toothache}) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$

■

$$P(Y) = \sum_{z \in Z} P(Y, z)$$

— ریر پالهنک

هوش مصنوعی

3

$$P(Y) = \sum_{z \in Z} P(Y, z)$$

■ Z مجموعه متغیرهای دیگر به جز Y

■ مثال:

$$P(Cavity) = \sum_{z \in \{Catch, Toothache\}} P(Cavity, z)$$

$$P(Y) = \sum_z P(Y | z) P(z)$$

■ تنوع دیگری از این قانون:

■ به این کار به حاشیه بردن marginalization گفته می شود.

# استنتاج با فهرست کردن

■ شروع با توزیع احتمال توأم

	<i>toothache</i>		$\neg$ <i>toothache</i>	
	<i>catch</i>	$\neg$ <i>catch</i>	<i>catch</i>	$\neg$ <i>catch</i>
<i>cavity</i>	.108	.012	.072	.008
$\neg$ <i>cavity</i>	.016	.064	.144	.576

■ همچنین می توان احتمالاتی شرطی را محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} P(\neg cavity \mid toothache) &= \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)} \\ &= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4 . \end{aligned}$$

# استنتاج با فهرست کردن

■ شروع با توزیع احتمال توأم

	<i>toothache</i>		$\neg$ <i>toothache</i>	
	<i>catch</i>	$\neg$ <i>catch</i>	<i>catch</i>	$\neg$ <i>catch</i>
<i>cavity</i>	<b>.108</b>	<b>.012</b>	.072	.008
$\neg$ <i>cavity</i>	<b>.016</b>	<b>.064</b>	.144	.576

■ همچنین می توان احتمالاتی شرطی را محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} P(cavity \mid toothache) &= \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)} \\ &= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6 \end{aligned}$$

# عادی سازی

■ مخرج کسر را می توان به عنوان ثابت عادی ساز در نظر گرفت

$$\begin{aligned}
 P(Cavity / toothache) &= \alpha P(Cavity, toothache) \\
 &= \alpha [P(Cavity, toothache, catch) + \\
 &\quad P(Cavity, toothache, \neg catch)] \\
 &= \alpha [<0.108, 0.016> + <0.012, 0.064>] \\
 &= \alpha <0.12, 0.08> = <0.6, 0.4>
 \end{aligned}$$

	toothache		$\neg$ toothache	
	catch	$\neg$ catch	catch	$\neg$ catch
cavity	.108	.012	.072	.008
$\neg$ cavity	.016	.064	.144	.576

■ ایده کلی: محاسبه توزیع روی متغیر سؤال با ثابت در نظر گرفتن دلیل و جمع گرفتن روی متغیرهای مخفی

$$P(X | e) = \alpha P(X, e) = \alpha \sum_y P(X, e, y)$$

■  $X, e, Y$  با هم شامل همه متغیرهای موجود می شوند.



# استقلال

■ A و B مستقل هستند اگر و تنها اگر:

■  $P(A, B) = P(A)P(B)$  یا  $P(B | A) = P(B)$  یا  $P(A | B) = P(A)$

■ مثال: به متغیرهای دندان درد، کشیدن و کرم خوردگی، متغیر وضع هوا را نیز اضافه کنیم

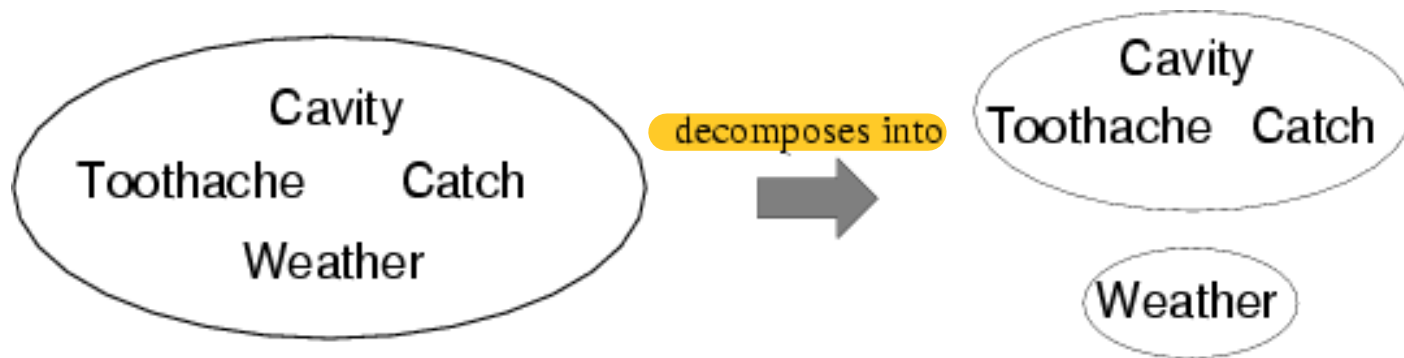
■ توزیع توأم کلی:

■  $P(\text{Toothache}, \text{Catch}, \text{Cavity}, \text{Weather})$

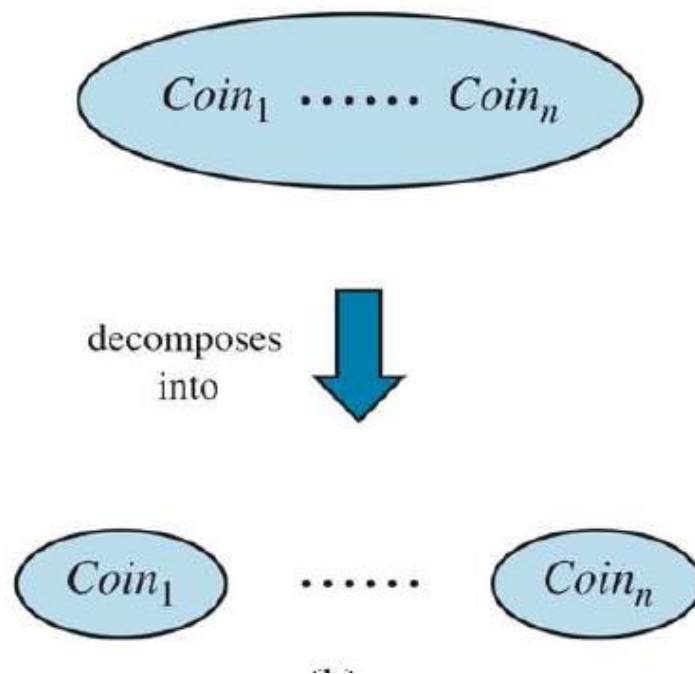
■ جدول با ۳۲ ورودی

$$P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity}, \text{cloudy}) = \\ P(\text{cloudy} \mid \text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity}) \times \\ P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity})$$

$$P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity}, \text{cloudy}) = \\ P(\text{cloudy}) \times \\ P(\text{toothache}, \text{catch}, \text{cavity})$$



- ۱۲ ورودی به جای ۳۲ ورودی
- استقلال مطلق به سختی وجود دارد.



■  $n$  مقدار بجای  $2^n$  مقدار

# استقلال شرطی

■ توزیع  $P(\text{Toothache}, \text{Cavity}, \text{Catch})$  را در نظر بگیرید.

■ در صورت وجود کرم خوردگی، احتمال کشیده شدن دندان مستقل از داشتن دندان درد است.

$$P(\text{catch}|\text{toothache}, \text{cavity}) = P(\text{catch}|\text{cavity})$$

■ به همین صورت:

$$P(\text{catch}|\text{toothache}, \neg \text{cavity}) = P(\text{catch}|\neg \text{cavity})$$

■ یا:

$$\mathbf{P}(\text{Catch}|\text{Toothache}, \text{Cavity}) = \mathbf{P}(\text{Catch}|\text{Cavity})$$

# استقلال شرطی

■ در صورت وجود کرم خوردگی، احتمال کشیده شدن دندان مستقل از داشتن دندان درد است.

$$P(\text{toothache}, \text{catch} | \text{cavity}) = \\ P(\text{toothache} | \text{cavity})P(\text{catch} | \text{cavity})$$

$$P(\text{cavity} | \text{toothache}, \text{catch}) = \\ \alpha P(\text{toothache} | \text{cavity})P(\text{catch} | \text{cavity})P(\text{cavity})$$

# استقلال شرطی

■ بطور کلی

$$\mathbf{P}(X, Y | Z) = \mathbf{P}(X | Z) \mathbf{P}(Y | Z)$$

# قانون بیز

■ قانون ضرب:  $P(a,b)=P(a | b)P(b)=P(b | a)P(a)$

■ قانون بیز:

$$P(b | a) = \frac{P(a | b)P(b)}{P(a)}$$

■ بصورت توزیعی:

$$P(Y | X) = \frac{P(X | Y)P(Y)}{P(X)}$$



# قانون بیز

■ با داشتن دلیل  $e$

$$P(Y|X, e) = \frac{P(X|Y, e)P(Y|e)}{P(X|e)}$$

■ مفید برای کارهای تشخیصی

$$P(\text{cause} | \text{effect}) = \frac{P(\text{effect} | \text{cause})P(\text{cause})}{P(\text{effect})}$$

■ بطور مثال اگر M بیماری منتزیت و S گردن درد باشد:

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = \frac{0.8 \times 0.0001}{0.1} = 0.0008$$

# قانون بیز و استقلال شرطی

$$P(Cavity|toothache \wedge catch)$$

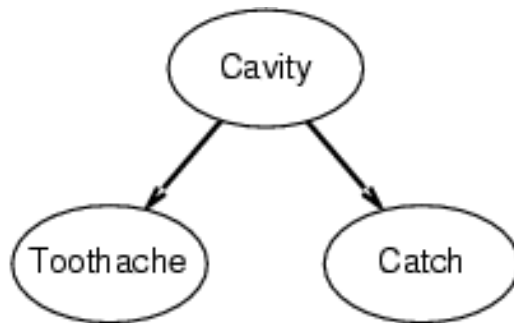
$$= \alpha P(toothache \wedge catch|Cavity)P(Cavity)$$

$$= \alpha P(toothache|Cavity)P(catch|Cavity)P(Cavity)$$

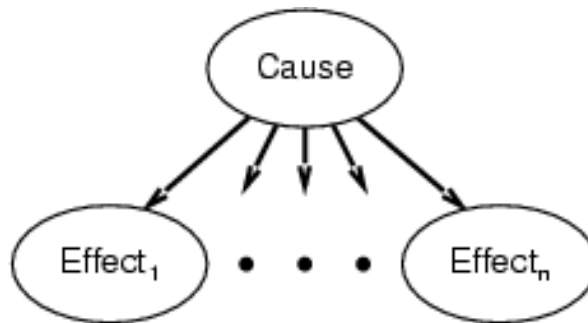
■ داشتیم:

■ نمونه ای از مدل بیز ساده Naïve Bayes

$$P(Cause, Effect_1, \dots, Effect_n) = P(Cause) \prod_i P(Effect_i|Cause)$$



مازیار پالهنک



هوش مصنوعی

# دنیای دیو – بازدید دوباره

■ دنیای دیو نیمه مشاهده پذیر است بدین دلیل عدم قطعیت در آن وجود دارد.

■ حالت مقابل:

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 B OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 B OK	3,1	4,1

- عامل منطقی خالص نمی تواند نتیجه بگیرد کدام مربع محتملتر است که امن باشد.
- می تواند بصورت تصادفی انتخاب کند.
- هدف: محاسبه احتمال آنکه هر یک از سه خانه دارای گودال باشد.
- فعلاً دیو و طلا را در نظر نمی گیریم.
- فرض: هر مربع به جز [۱و۱] با احتمال ۰،۲ دارای گودال است.

■  $P_{ij}$  درست اگر  $[i,j]$  دارای گودال باشد.

■  $B_{ij}$  درست اگر  $[i,j]$  دارای نسیم باشد.

■ مشخص کردن توزیع توأم کلی

$$\mathbf{P}(P_{1,1}, \dots, P_{4,4}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}) =$$

$$\mathbf{P}(B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1} \mid P_{1,1}, \dots, P_{4,4}) \mathbf{P}(P_{1,1}, \dots, P_{4,4})$$

■ ترم اول برای مربعاتی که گودالها و نسیمها نزدیک هستند ۱ و در غیر این صورت صفر است.

■ داریم:

$$\mathbf{P}(P_{1,1}, \dots, P_{4,4}) = \prod_{i,j=1,1}^{4,4} \mathbf{P}(P_{i,j})$$

■ دلایل فعلی: مشاهده یا عدم مشاهده نسیم در مربعهای بازدید

شده.  $(b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1})$

■ و اینکه این مربعها دارای گودال نیستند.

$(\text{known} = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1})$

■ علاقمند با پاسخ به سؤالی همانند  $P(P_{1,3} \mid \text{known}, b)$

■ فرض unknown ترکیب متغیرهای گودال به جز مربعهای شناخته شده و سؤال

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, unknown, known, b)$$

■ با داشتن توزیع توأم کلی می توان محاسبه فوق را انجام داد.

■ ۱۲ مربع ناشناس

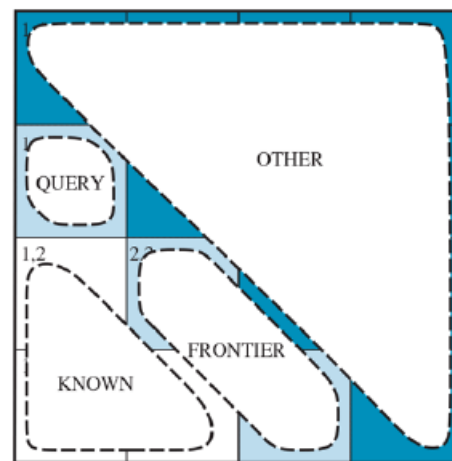
■ جمع دارای  $2^{12}=4096$  ترم است.



- آیا محتوای  $[4,4]$  بر روی گودال بودن  $[1,3]$  اثر دارد؟
- فرض frontier متغیرهای گودال نزدیک به مربعهای بازدید شده به جز مربع سؤال
- Other متغیرهای گودال دیگر ناشناخته

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 B OK	2,2	3,2	4,2
1,1 OK	2,1 B OK	3,1	4,1

(a)



(b)

(a) After finding a breeze in both  $[1,2]$  and  $[2,1]$ , the agent is stuck—there is no safe place to explore. (b) Division of the squares into *Known*, *Frontier*, and *Other*, for a query about  $[1,3]$ .

■ نسیمهای مشاهده شده بطور شرطی از دیگر متغیرها مستقل شرطی هستند به شرط داشتن متغیرهای known، frontier، و query

$$\mathbf{P}(X | \mathbf{e}) = \alpha \mathbf{P}(X, \mathbf{e}) = \alpha \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{P}(X, \mathbf{e}, \mathbf{y})$$

$$\mathbf{P}(P_{1,3} | \text{known}, b)$$

$$= \alpha \sum_{\text{unknown}} \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, b, \text{unknown}) \quad \text{(from Equation (12.23))}$$

$$= \alpha \sum_{\text{unknown}} \mathbf{P}(b | P_{1,3}, \text{known}, \text{unknown}) \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{unknown}) \quad \text{(product rule)}$$

$$= \alpha \sum_{\text{frontier}} \sum_{\text{other}} \mathbf{P}(b | \text{known}, P_{1,3}, \text{frontier}, \text{other}) \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}, \text{other})$$

$$= \alpha \sum_{\text{frontier}} \sum_{\text{other}} \mathbf{P}(b | \text{known}, P_{1,3}, \text{frontier}) \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}, \text{other}),$$

$$\mathbf{P}(P_{1,1}, \dots, P_{4,4}) = \prod_{i,j=1,1}^{4,4} \mathbf{P}(P_{i,j})$$

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid \text{known}, b)$$

$$= \alpha \sum_{\text{frontier}} \sum_{\text{other}} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}) \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}, \text{other})$$

$$= \alpha \sum_{\text{frontier}} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}) \sum_{\text{other}} \mathbf{P}(P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}, \text{other})$$

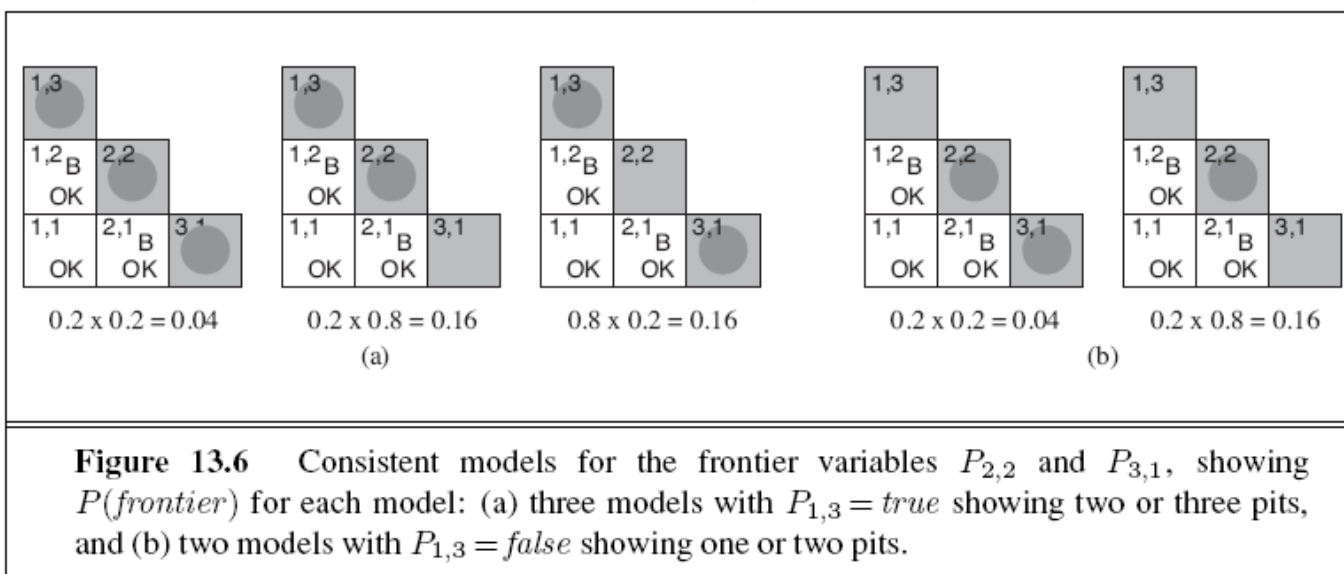
$$= \alpha \sum_{\text{frontier}} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}) \sum_{\text{other}} \mathbf{P}(P_{1,3}) P(\text{known}) P(\text{frontier}) P(\text{other})$$

$$= \alpha P(\text{known}) \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{\text{frontier}} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}) P(\text{frontier}) \sum_{\text{other}} P(\text{other})$$

$$= \alpha' \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{\text{frontier}} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, \text{known}, \text{frontier}) P(\text{frontier})$$

= 1

■  $P(b \mid \text{known}, P_{1,3}, \text{frontier})$  برابر ۱ است وقتی که frontier با مشاهدات نسیم سازگار باشد.



$$P(P_{1,3} | known, b) = \alpha' \langle 0.2(0.04 + 0.16 + 0.16), 0.8(0.04 + 0.16) \rangle \\ \approx \langle 0.31, 0.69 \rangle$$

■ با احتمال ۰٫۳۱ در  $[1, 3]$  گودال وجود دارد.

■ به همینطور در  $[3, 1]$

■ بطور مشابه در  $[2, 2]$  به احتمال ۰٫۸۶  $P(P_{2,2} | known, b) \approx \langle 0.86, 0.14 \rangle$

■ عامل حتماً باید از رفتن به  $[2, 2]$  اجتناب کند.

■ برای عامل منطقی قبل سه خانه شرایط یکسانی داشتند.

# خلاصه

- استقلال متغیرها
- استقلال شرطی متغیرها
- بازدید دوبارهٔ دنیای دیو



اصفهان - بوستان شهرستان

مازیار پالهنګ

هوش مصنوعی

32



- دقت نمائید که پاورپوینت ابزاری جهت کمک به یک ارائه شفاهی می باشد و به هیچ وجه یک جزوه درسی نیست و شما را از خواندن مراجع درس بی نیاز نمی کند.
- لذا حتماً مراجع اصلی درس را مطالعه نمائید.
- در تهیه این اسلایدها، از اسلایدهای سایت کتاب استفاده شده است.