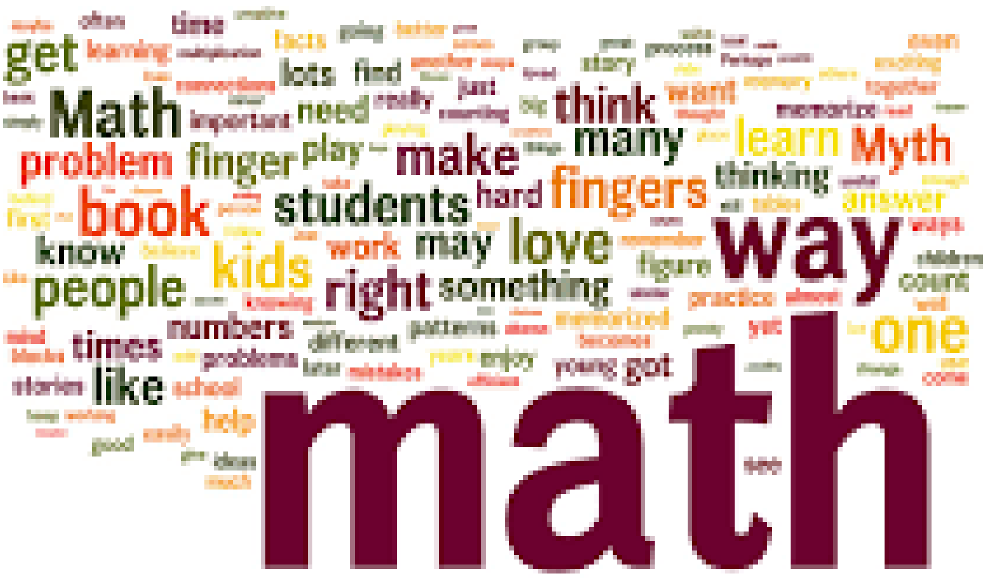
دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

معادلات دیفرانسیل معمولی (دوره کارشناسی)

(ویرایش جدید: بهمن ۹۹)

محمود بهبودی[1]
اصغر دانشور[2]



[1] دانشیار دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان
[2] دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۸ فروردین ۱۴۰۰

این نوشتار جهت استفاده دانشجویان کارشناسی دانشگاه صنعتی اصفهان آماده شده است و استفاده از آن برای دیگر موسسات آموزش عالی و دانشجویان بلامانع است.

باعث افتخار نویسندگان است که نقدها، ایرادات و پیشنهادهای خود را به آدرس ایمیل زیر ارسال نمایید.

mbehbood@iut.ac.ir

متن پیش‌رو حاصل چندین سال تجربه تدریس معادلات دیفرانسیل معمولی برای دانشجویان دوره کارشناسی دانشگاه صنعتی اصفهان است...

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

بسیاری از پدیده‌های جهان اطراف، آنچه که امروزه به علوم فیزیکی، علوم مهندسی و حتی علوم جامعه‌شناسی معروف شده‌اند، وقتی به شکل ریاضی بیان شود منجر به یک معادله می‌شوند. اما برخی از این معادلات در اصطلاح به معادله دیفرانسیل معروف هستند. در این فصل شما را تا حد خوبی با معادلات دیفرانسیل آشنا می‌کنیم. این که چگونه یک معادله در پدیده‌های اطراف ما شکل می‌گیرد، خارج از مباحث این دوره درسی است. اما در ابتدای این فصل تا آنجا که اطلاعات کنونی شما و ما اجازه می‌دهد مثالی از چگونگی تشکیل معادلات دیفرانسیل را ارائه می‌دهیم. این ادعا گزاف نیست که این دوره درسی درب ورودی به علوم کاربردی از جمله علوم مهندسی است.

فیزیکدانان به تجربه دریافته‌اند که میزان تجزیه ماده رادیواکتیو اورانیوم به میزان جرم آن بستگی دارد. پس اگر میزان جرم ماده رادیواکتیو اورانیوم را با m نشان دهیم آنگاه جرم m تابعی از زمان است. پس آهنگ آنی تغییر (مفهوم مشتق) میزان جرم در زمان t متناسب با میزان جرم در زمان t است یعنی $m(t)$. این مفهوم را در ریاضیات به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\frac{dm(t)}{dt} \propto m(t).$$

فیزیکدانان با تجربه و آزمایش متوجه شده‌اند که ثابتی مانند k تناسب بالا را به تساوی تبدیل می‌کند. از طرفی چون جرم با گذشت زمان در حال کاهش است، به k یک علامت منفی می‌دهیم و داریم

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t).$$

به معادله آخر، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌گوییم و حل این معادله میزان جرم ماده رادیواکتیو اورانیوم را در هر زمان که مد نظر ما باشد، در اختیارمان قرار می‌دهد.

در قسمت اعظم این دوره درسی به نحوه حل گروه‌های زیادی از معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. برای حل معادلات دیفرانسیل نیاز است که آنها را دسته بندی کنیم. برای این منظور نیاز به تعریف‌هایی مقدماتی داریم. پیش نیاز این درس برای دانشجو، آشنایی خوب با درس ریاضیات عمومی است. انتظار است که دانشجو مفهوم متغیر مستقل، متغیر وابسته، تابع، حد، مشتق، مشتق مراتب بالاتر، انتگرال گیری و کمی از توابع چند متغیره و مشتقات چنین توابعی اطلاعات داشته باشد.

۱.۱ تعریف‌های اولیه

کار را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. *هر رابطه بین تابع و متغیرهای مستقل تابع و مشتق‌های تابع نسبت به متغیرهای مستقل یک **معادله دیفرانسیل** نامیده می‌شود (در ادامه برخی مواقع از نماد "$'$" یا "$\frac{d}{dx}$" برای نوشتن مشتق معمولی و از نماد "∂" یا "f_x" برای نشان دادن مشتق جزئی استفاده می‌کنیم).*

مثال ۲.۱.۱. *در معادله دیفرانسیل $y' = 5$ متغیر مستقل و تابع ظاهر نشده است.*
در معادله دیفرانسیل $y' + \cos x = y'' + 3x$ مشتق مرتبه دوم و اول تابع همراه با متغیر مستقل ظاهر شده است.
در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} + \cos x = y + 3x$ مشتق اول تابع همراه با متغیر مستقل و خود تابع ظاهر شده است.
در معادله دیفرانسیل $y' + y = (y'')^3 + e^x$ مشتق مرتبه دوم و اول تابع همراه با متغیر مستقل و وابسته ظاهر شده است.
در معادله دیفرانسیل $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - x\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} = yU(x,y)$ مشتق دوم جزئی نسبت به متغیر مستقل x و مشتق اول جزئی نسبت به متغیر y و متغیرهای آزاد x و y و خود تابع دو متغیر $U(x,y)$ ظاهر شده است.

حال که با تعریف معادله دیفرانسیل آشنا شده‌اید وقت آن است که معادلات دیفرانسیل را به بخش‌های کوچکتری دسته بندی کنیم تا بتوانیم در فصل‌های بعدی برای برخی از آنها حل ارائه کنیم.

تعریف ۳.۱.۱. *اگر تابع ظاهر شده در یک معادله دیفرانسیل فقط یک متغیر مستقل داشته باشد آنگاه به آن معادله دیفرانسیل یک معادله دیفرانسیل معمولی گوییم. اگر تابع ظاهر شده در یک معادله دیفرانسیل بیشتر از یک متغیر مستقل داشته باشد به آن معادله دیفرانسیل، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی گوییم.*

مثال ۴.۱.۱. *معادله دیفرانسیل $y' + y = (y'')^3 + e^x$ معمولی است. زیرا تابع $y = f(x)$ یک متغیر مستقل دارد. همچنین معادله‌های دیفرانسیل $y'' = 3\sin x$ و یا $y' = 6$ معمولی هستند.*

مثال ۵.۱.۱. *معادله دیفرانسیل $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - x\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} = yU(x,y)$ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. زیرا تابع $z = U(x,y)$ دو متغیر مستقل x و y دارد. همچنین معادله دیفرانسیل $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} - xy\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = U(x,y)$ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است.*

قرار داد ۶.۱.۱. *تا این لحظه معادلات دیفرانسیل را به دو دسته معمولی و مشتقات جزئی دسته بندی کرده‌ایم. در این دوره درسی با نحوه حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سر و کار نداریم و فقط به حل معادلات دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم. در ادامه هر جا صحبت از معادله دیفرانسیل شد، منظور معادله دیفرانسیل معمولی است که در برخی مواقع از نوشتن کلمه "معمولی" صرف نظر می‌کنیم.*

همانطور که از مثال‌های معادلات دیفرانسیل معمولی متوجه شده‌اید، شکل و ظاهر این معادلات می‌تواند متنوع باشد و این مطلب می‌تواند ما را برای ارائه حل چنین معادلاتی در ادامه با مشکل مواجه

کند. بنابراین نیاز اساسی داریم که با یک معیار مناسب این معادلات را نیز دسته بندی کنیم. در ادامه این معیار مناسب را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۱. *بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل معمولی را مرتبه آن معادله گوییم.*

مثال ۸.۱.۱. *مرتبه معادله دیفرانسیل $y' = 1$ برابر یک است.*
مرتبه معادله دیفرانسیل $y'' + y' = \cos x$ برابر دو است.
مرتبه معادله دیفرانسیل $(y''')^4 + y' = \cos y''$ برابر سه است.
مرتبه معادله دیفرانسیل $\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{dy}{dx} + xe^x$ برابر پنج است.

تذکر ۹.۱.۱. *در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه n را می‌توانیم با نماد*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

نیز نمایش دهیم. برای مثال معادله دیفرانسیل مرتبه دو، $y'' + xy' = y \cos x$، را می‌توانیم به صورت $y'' + xy' - y \cos x = 0$ بنویسیم. بنابراین $F(x, y, y', y'') = y'' + xy' - y \cos x$ است.

تذکر ۱۰.۱.۱. *اگر در یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه n، شرط‌های*

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

همراه باشد، گوییم یک معادله دیفرانسیل با شرط اولیه داریم. بعضی منابع به شرط‌های بالا، شرط مرزی گویند. در آینده خواهیم دید که این شرط‌های اولیه باعث می‌شود جواب خاصی مد نظر باشد.

مثال ۱۱.۱.۱. *معادله دیفرانسیل $y'' + y' = 0$ مرتبه دو است و شرط‌های اولیه (مرزی)*

$$y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$$

تعدادی برابر با مرتبه دارد.

تعریف ۱۲.۱.۱. *اگر در معادله دیفرانسیلی متغییر مستقل موجود نباشد، یعنی x نداشته باشیم آنگاه به آن معادله دیفرانسیل خودگردان گوییم.*

مثال ۱۳.۱.۱. *معادله دیفرانسیل $y'' + y' = y$ خودگردان است. زیرا متغییر مستقل ندارد.*

در فصل‌های آینده با توجه به دسته بندی مربوط به مرتبه یک معادله برای معادلات دیفرانسیل روش حل ارائه می‌کنیم. ولی در ابتدا باید منظور خودمان را از حل یا جواب یک معادله دیفرانسیل معلوم کنیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. *هر تابعی که در یک معادله دیفرانسیل صدق کند را یک جواب معادله دیفرانسیل گوییم. وقتی که همه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل را معلوم کنیم گوییم معادله را حل کرده‌ایم.*

مثال ۱.۱.۱۵. معادله دیفرانسیل $y' = 3$ دارای یک جواب به صورت $y = 3x$ است. زیرا واضح است که $y' = (3x)' = 3$. این معادله دیفرانسیل دارای یک جواب دیگر به صورت $y = 3x + 2$ است. زیرا $y' = (3x + 2)' = 3$. این مثال نشان می‌دهد که جواب یک معادله دیفرانسیل لزوما یکتا نیست.

مثال ۱.۱.۱۶. معادله $y' - y = 0$ دارای یک جواب به صورت $y = e^x$ است. زیرا

$$y' - y = (e^x)' - e^x = e^x - e^x = 0.$$

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $y = 5e^x$ یک جواب دیگر برای معادله است (آیا می‌توانید جواب‌های دیگری برای معادله حدس بزنید؟).

مثال ۱.۱.۱۷. تابع $y = \ln x + 3$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ است (آیا می‌توانید جواب‌های دیگری برای معادله حدس بزنید؟).

مثال ۱.۱.۱۸. تابع $y = a \sin 3x + b \cos 3x$ که در آن a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند، تعداد بیشمار جواب برای معادله دیفرانسیل $y'' + 9y = 0$ به دست می‌دهد. زیرا

$$y' = (a \sin 3x + b \cos 3x)' = 3a \cos 3x - 3b \sin 3x \;\Rightarrow$$
$$y'' = (y')' = (3a \cos 3x - 3b \sin 3x)' = -9a \sin 3x - 9b \cos 3x.$$

حال واضح است که $y'' + 9y = 0$ است. مثلا با انتخاب $a = b = 3$ داریم

$$y' = (\sin 3x + \cos 3x)' = 3 \cos 3x - 3 \sin 3x \;\Rightarrow$$
$$y'' = (y')' = (3 \cos 3x - 3 \sin 3x)' = -9 \sin 3x - 9 \cos 3x.$$

حال واضح است که $y'' + 9y = 0$ است.

تمرین ۱.۱.۱۹. نشان دهید که $y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ یک جواب برای معادله $y' - \sin x = \frac{y}{x}$ است.

حل. داریم

$$y' - \sin x = (x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt)' - \sin x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + (x \cdot \frac{\sin x}{x}) - \sin x =$$
$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{x} = \frac{y}{x}.$$

تمرین ۱.۱.۲۰. مقدار $a \in \mathbb{R}$ را چنان بیابید که معادله $y'' + 4y' + 5y = 0$ جوابی به صورت $y = e^{ax}$ داشته باشد.

حل. داریم

$$0 = y'' + 4y' + 5y = ((e^{ax})')' + 4(e^{ax})' + 5e^{ax} = (ae^{ax})' + 4(ae^{ax}) + 5e^{ax}$$
$$= a^2 e^{ax} + 4ae^{ax} + 5e^{ax} = (a^2 + 4a + 5)e^{ax}$$

چون e^{ax} ناصفر است (چرا؟)، باید $a^2+4a+5=0$. اما این معادله نیز جواب حقیقی ندارد (چرا؟). پس برای هیچ مقداری از a، $y=e^{ax}$ جواب نیست.

حال که منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل را متوجه شده‌اید، وقت آن است که جواب‌ها را نیز نامگذاری کنیم. دلیل این کار هم این است که از مثال‌ها متوجه شده‌اید یک معادله دیفرانسیل لزوما جواب یکتا ندارد حتی ممکن است بیشمار جواب داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. *اگر جواب‌های یک معادله دیفرانسیل را تحت یک فرمول همراه با چند ثابت (پارامتر) بیان کنیم آنگاه به آن جواب عمومی گوییم.*

مثال ۱.۱.۲۲. *برای هر $c\in\mathbb{R}$، یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $y=\ln x+c$ یک جواب برای معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ است. به عبارت دیگر، $y=\ln x+c$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است. این جواب عمومی دارای یک ثابت (پارامتر) است.*

مثال ۱.۱.۲۳. *تابع $y=a\sin 3x+b\cos 3x$ که در آن a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند، جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل $y''+9y=0$ است. این جواب عمومی دارای دو ثابت (پارامتر) است.*

تذکر ۱.۱.۲۴. *تعداد ثابت‌ها (پارامترها) در جواب عمومی دقیقا برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل است. مثلا در مثال ۱.۱.۲۲ مرتبه معادله دیفرانسیل برابر با یک است و در جواب عمومی یک ثابت c را مشاهده می‌کنیم. یا در مثال ۱.۱.۲۳ مرتبه معادله دیفرانسیل برابر با دو است و در جواب عمومی دو ثابت a و b را مشاهده می‌کنیم. یعنی معادله دیفرانسیل مرتبه n*

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$$

دارای جوابی به صورت $G(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0$ است که در آن c_iها ثابت هستند.

مثال ۱.۱.۲۵. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y')^2=4y$ به صورت $y=(x-c)^2$ است. دقت شود که مرتبه معادله برابر یک است و جواب عمومی دقیقا یک ثابت c دارد.*

تعریف ۱.۱.۲۶. *هر گاه در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل شرایطی را در نظر بگیریم تا ثابت‌های آن مقدارهای خاصی از اعداد حقیقی را اختیار کنند، آنگاه به جواب حاصل شده، جواب خصوصی معادله گوییم.*

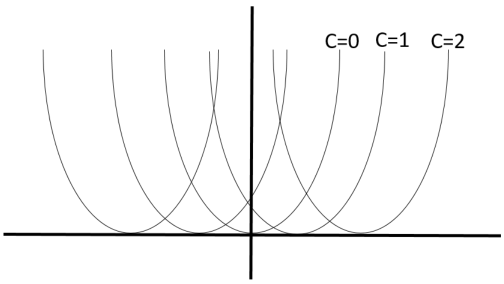
مثال ۱.۱.۲۷. *تابع $y=a\sin 3x+b\cos 3x$ که در آن a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند، جواب عمومی برای معادله دیفرانسیل $y''+9y=0$ است. اگر $a=2$ و $b=3$ فرض شوند آنگاه جواب خصوصی $y=2\sin 3x+3\cos 3x$ حاصل می‌شود.*

مثال ۱.۱.۲۸. *تابع $y=\ln x+c$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ است. برای مقادیر مختلف از c توابع متفاوتی که جواب معادله هستند به دست می‌آید. اما اگر از بین این دسته از توابع که جواب معادله هستند آن تابعی مد نظر ما باشد که از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد، آنگاه باید $c=0$ باشد. به عبارت دیگر جواب خصوصی $y=\ln x$ مد نظر است.*

مثال ۲۹.۱.۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y')^2 = 4y$ به صورت $y = (x-c)^2$ است. با فرض $c = 0$ به جواب خصوصی $y = x^2$ دست می‌یابیم.

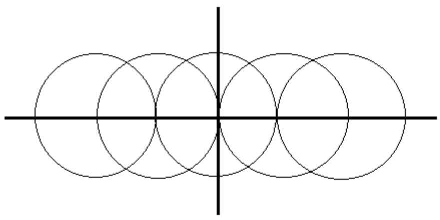
تذکر ۳۰.۱.۱. در برخی از معادلات جواب عمومی همه جواب‌های معادله را به دست نمی‌دهد. یعنی نمی‌توانیم همه جواب‌ها تحت جواب عمومی بیان کنیم. برای درک بهتر مثال‌های زیر را دنبال کنید.

مثال ۳۱.۱.۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y')^2 = 4y$ به صورت $y = (x-c)^2$ است. اما $y = 0$ در معادله دیفرانسیل $(y')^2 = 4y$ صدق می‌کند، پس $y = 0$ یک جواب است. دقت شود که برای هیچ مقداری از $c \in \mathbb{R}$، جواب $y = 0$ از جواب عمومی حاصل نمی‌شود (جواب خصوصی نیست). حال کمی دقت خود را بیشتر می‌کنیم. بیایید برای مقدارهای مختلف از c، منحنی‌های جواب را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، یعنی به شکل زیر دست یابیم



مشاهده می‌شود که خط $y = 0$ بر هر منحنی حاصل شده از جواب عمومی، به صورت مماس در تماس است!

مثال ۳۲.۱.۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{4}{y^2} = (y')^2 + 1$ به صورت $(x-c)^2 + y^2 = 4$ است. اما خط $y = 2$ و خط $y = -2$ در معادله دیفرانسیل $\frac{4}{y^2} = (y')^2 + 1$ صدق می‌کنند، پس خط $y = 2$ و خط $y = -2$ دو جواب هستند که برای هیچ مقداری از $c \in \mathbb{R}$، از جواب عمومی حاصل نمی‌شوند (جواب خصوصی نیستند). حال کمی دقت خود را بیشتر می‌کنیم. بیایید برای مقدارهای مختلف از c، منحنی‌های جواب را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، به شکل زیر دست می‌یابیم



مشاهده می‌شود که خط $y = 2$ و خط $y = -2$ بر هر منحنی حاصل شده از جواب عمومی، به صورت مماس در تماس هستند!

حال تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۱.۳۳. *جواب غیر عادی (استثنایی یا منفرد) معادله دیفرانسیل، آن جوابی است که نتوان منحنی آن را از جواب عمومی به دست آورد.*

اما چگونه می‌توان جواب غیر عادی یک معادله دیفرانسیل را مشخص کرد؟ پاسخ به این پرسش پیچیده است! اما برای معادلات مرتبه اول خوشبختانه می‌توانیم جوابی روشن فراهم کنیم. با ایده‌ای که از مثال‌ها دریافت کرده‌ایم، می‌توانیم حدس بزنیم منحنی جواب غیر عادی هر منحنی جواب عمومی را به صورت مماس قطع کرده است. این مطلب همان مفهوم از قبل دانسته شده در ریاضی با نام پوش دسته منحنی $G(x,y,c)=0$ است. بدون اثبات می‌پذیریم تعیین جواب غیر عادی یک معادله دیفرانسیل، یافتن پوش دسته منحنی‌های جواب عمومی است.

تعریف ۱.۱.۳۴. *پوش دسته منحنی‌های داده شده $G(x,y,c)=0$، منحنی است که همه اعضای $G(x,y,c)=0$ را به طور مماس لمس می کند.*

اما چگونه پوش (یا همان جواب‌های غیر عادی) معادله دیفرانسیل $F(x,y,y')=0$ با جواب عمومی $G(x,y,c)=0$ را تعیین کنیم؟ پاسخ این که کافی است ثابت c را در دستگاه

$$\begin{cases} G(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial G}{\partial c}=0 \end{cases}$$

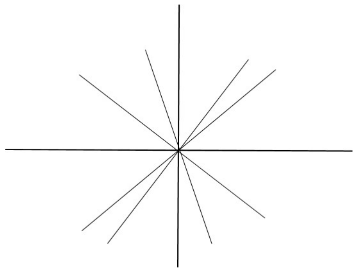
حذف کنیم تا منحنی پوش (جواب غیر عادی) پیدا شود (این روش اصطلاحا تعیین پوش برای منحنی $G(x,y,c)=0$ گفته می‌شود). مثال‌های زیر را دنبال کنید تا روش کار را بهتر متوجه شوید.

مثال ۱.۱.۳۵. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{4}{y^2}=1+(y')^2$ به صورت $(x-c)^2+y^2=4$ است. می‌خواهیم جواب غیر عادی را مشخص کنیم. ابتدا این دقت را داریم که معادله مرتبه اول است و $G(x,y,c)=(x-c)^2+y^2-4$. پس هدف ما تعیین پوش برای $G(x,y,c)=0$ است. بنابراین ابتدا پوش را مشخص می‌کنیم*

$$\begin{cases} G(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial G}{\partial c}=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (x-c)^2+y^2-4=0 \\ -2(x-c)=0 \end{cases}$$

از معادله دوم باید $x=c$ باشد و با جایگذاری در معادله اول داریم $y^2=4$. پس خط $y=2$ و خط $y=-2$ پوش $G(x,y,c)=0$ یا جواب غیر عادی معادله دیفرانسیل می‌باشند.

مثال ۱.۱.۳۶. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'x-y=0$ به صورت $y=cx$ است. حال اگر برای مقدارهای مختلف از c، منحنی‌های جواب را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، به شکل زیر دست می‌یابیم*



واضح است که هیچ تابعی بر همه منحنی‌های حاصل شده از جواب عمومی، مماس نیست. پس این معادله جواب غیر عادی ندارد.

مثال ۳۷.۱.۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y')^2 = 4y$ به صورت $y = (x-c)^2$ است. می‌خواهیم جواب غیر عادی را مشخص کنیم. ابتدا دقت را داریم که معادله مرتبه اول است و

$$G(x,y,c) = (x-c)^2 - y.$$

پس هدف ما تعیین پوش برای $G(x,y,c) = 0$ است. بنابراین ابتدا پوش را مشخص می‌کنیم

$$\begin{cases} G(x,y,c) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x-c)^2 - y = 0 \\ -2(x-c) = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم باید $c = x$ باشد و با جایگذاری در معادله اول داریم $y = 0$. پس خط $y = 0$ جواب غیر عادی معادله دیفرانسیل است.

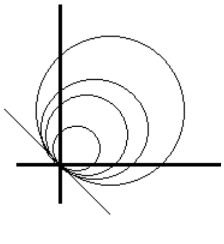
مثال ۳۸.۱.۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(xy' - yy')^2 + (y-x)^2 = 2(x+yy')^2$$

به صورت $(x-c)^2 + (y-c)^2 = 2c^2$ است. می‌خواهیم جواب غیر عادی را مشخص کنیم. داریم که $G(x,y,c) = (x-c)^2 + (y-c)^2 - 2c^2$. پس

$$\begin{cases} G(x,y,c) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x-c)^2 + (y-c)^2 - 2c^2 = 0 \\ -2(x-c) - 2(y-c) - 4c = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم باید $x + y = 0$ باشد که مستقل از c است پس c خودکار حذف شده است. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که خط $y = -x$ در معادله دیفرانسیل بالا صدق می‌کند یعنی جواب غیر عادی است. به شکل زیر که $G(x,y,c) = 0$ را در یک دستگاه مختصات نشان می‌دهد دقت کنید (دوایری که مرکز آنها روی خط $y = x$ قرار دارد)



تمرین ۳۹.۱.۱. *می‌دانیم که جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x(y')^2-2yy'+x=0$ به صورت $y=\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}$ است. آیا این معادله جواب غیر عادی دارد؟*

حل. ابتدا دقت را داریم که $G(x,y,c)=\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}-y$. پس پوش این دسته منحنی‌ها را مشخص می‌کنیم

$$\begin{cases} G(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial G}{\partial c}=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{c}{2}x^2+\frac{1}{2c}-y=0 \\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2c^2}=0 \end{cases}$$

از معادله دوم باید $c=\frac{1}{x}$ یا $c=\frac{-1}{x}$ باشد و با جایگذاری در معادله اول به دست می‌آید که $y=x$ یا $y=-x$. لذا این دو خط جواب غیر عادی هستند.

۲.۱ بازنویسی یک معادله دیفرانسیل با متغیرهای جدید

در فصل‌های آینده برای حل برخی از معادلات دیفرانسیل لازم است که تغییراتی اعمال کنیم تا معادله به صورتی تبدیل شود که روش حل آن را می‌دانیم. یادآوری می‌کنیم که با این روش در مبحث انتگرال گیری در ریاضیات عمومی آشنا شده‌اید و برخی انتگرال‌های پیچیده را با کمک تغییر متغیری مناسب به صورت انتگرالی تبدیل می‌کردید که برای شما آشنا بود. چون در فصل‌های آینده از این روش استفاده می‌کنیم پس بسیار مناسب است که در همین بخش ذهن شما را با روش تغییر متغیر آشنا کنیم.

تغییر متغیر در معادله دیفرانسیل $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ معمولا به دو صورت زیر انجام می‌شود.

(الف) تابع y تابعی از متغیر مستقل x و تابعی دیگر مانند $u(x)$ است (یعنی $y=H(u,x)$). در این حالت باید y، y'، y''،...، $y^{(n)}$ را بر حسب u، u'، u''، ...، $u^{(n)}$ به دست آوریم و در معادله دیفرانسیل جایگذاری کنیم. در این حالت معادله حاصل برحسب متغیرهای جدید u و x خواهد بود.

(ب) متغیر مستقل x خود تابعی است بر اساس متغیر مستقل t (یعنی $x=h(t)$). در این حالت باید y، y'، y''،...، $y^{(n)}$ را بر حسب t به دست آوریم و در معادله دیفرانسیل جایگذاری کنیم (قاعده زنجیری مشتق). در این حالت معادله حاصل برحسب متغیرهای جدید y و t خواهد بود.

مثال‌های زیر درک بهتری از (الف) و (ب) در اختیار قرار می‌دهند.

مثال ۱.۲.۱. *معادله دیفرانسیل $y''-4xy'=xe^x$ را با تغییر متغیر $y=ue^x$ بازنویسی می‌کنیم. با توجه به نوع تغییر متغیر، حالت (الف) رخ داده است، یعنی $y=H(u,x)=ue^x$. چون مرتبه معادله برابر با دو است پس باید y، y' و y'' را بر حسب u، u' و u'' محاسبه کنیم و بعد در معادله جایگذاری نماییم. حال داریم*

$$y'=u'e^x+ue^x=(u+u')e^x$$
$$y''=u''e^x+u'e^x+u'e^x+ue^x=u''e^x+2u'e^x+ue^x=(u''+2u'+u)e^x$$

حال با جایگذاری داریم

$$y'' - 4xy' = xe^x \ \Rightarrow\ (u'' + 2u' + u)e^x - 4x((u + u')e^x) = xe^x \ \Rightarrow$$
$$[(u'' + 2u' + u - 4x(u + u')]e^x = xe^x \ \Rightarrow$$
$$u'' + 2u' + u - 4xu - 4xu' = x \ \Rightarrow\ \boxed{u'' + (2 - 4x)u' + (1 - 4x)u = x}.$$

دقت شود که معادله حاصل برحسب متغیرهای جدید u و x است.

مثال ۲.۲.۱. معادله دیفرانسیل $y'' + xy' = 0$ را با تغییر متغیر $x = \frac{1}{3}t$ بازنویسی می‌کنیم. با توجه به نوع تغییر متغیر، حالت (ب) رخ داده است، یعنی $x = h(t) = \frac{1}{3}t$. چون مرتبه معادله برابر با دو است پس باید y، y' و y'' را بر حسب t محاسبه کنیم و بعد در معادله جایگذاری نماییم. از قاعده زنجیری مشتق استفاده می‌کنیم. دقت شود که $t = 3x$ است و $t' = \frac{dt}{dx} = 3$ و $t'' = \frac{d^2t}{dx^2} = 0$.
حال داریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3\frac{dy}{dt}$$

و برای y'' داریم

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(3\frac{dy}{dt}) = 3\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}) =$$
$$3\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx} = 3\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) \times 3 = 9\frac{d^2y}{dt^2}$$

و با جایگذاری داریم

$$y'' + xy' = 0 \ \Rightarrow\ 9\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{3}t(3\frac{dy}{dt}) = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{9\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} = 0}.$$

دقت شود که معادله حاصل برحسب متغیرهای جدید y و t است.

تمرین ۳.۲.۱. معادله دیفرانسیل $y'' + xy' = 0$ را با تغییر متغیر $x = \ln t$ بازنویسی کنید.

حل. با توجه به نوع تغییر متغیر، حالت (ب) رخ داده است، یعنی $x = h(t) = \ln t$. چون مرتبه معادله برابر با دو است پس باید y، y' و y'' را بر حسب t محاسبه کنیم و بعد در معادله جایگذاری نماییم. دقت شود که $t = e^x$ است و $t' = \frac{dt}{dx} = e^x$ و $t'' = \frac{d^2t}{dx^2} = e^x$. حال داریم

$$\begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^x\frac{dy}{dt} = e^{\ln t}\frac{dy}{dt} = t\frac{dy}{dt} \\ y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}(y')\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(t\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx} = (t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt})e^x = \\ \qquad (t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt})t = t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} \end{cases}$$

و با جایگذاری داریم

$$y'' + xy' = 0 \ \Rightarrow\ t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \ln t(t\frac{dy}{dt}) = 0$$
$$\Rightarrow\ \boxed{t^2\frac{d^2y}{dt^2} + (t + t\ln t)\frac{dy}{dt} = 0}.$$

تمرین ۴.۲.۱. *معادله دیفرانسیل $y'' = \cos(\frac{y}{x})$ را با تغییر متغییر $y = ux$ بازنویسی کنید.*

حل. با توجه به نوع تغییر متغیر، حالت (الف) رخ داده است، یعنی $y = H(u, x) = ux$.
چون مرتبه معادله برابر با دو است پس باید y، y' و y'' را بر حسب u، u' و u'' محاسبه کنیم و بعد در معادله جایگذاری نماییم. حال داریم

$$y' = xu' + u \qquad y'' = xu'' + u' + u' = xu'' + 2u'$$

حال با جایگذاری داریم

$$y'' = \cos(\frac{y}{x}) \Rightarrow xu'' + 2u' = \cos(\frac{ux}{x}) = \cos u.$$

پس $xu'' + 2u' = \cos u$ است.

۳.۱ تشکیل معادله دیفرانسیل از جواب عمومی (اختیاری)

همانطور که از بخش قبل متوجه شده‌ایم، جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل معمولی از درجه n، یعنی $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ به صورت $G(x, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ است که در آن c_iها ثابت هستند و تعداد این ثابت‌ها دقیقا برابر عدد n، مرتبه معادله، است.
اما ممکن است یک سوال طبیعی ایجاد شود و آن این است که چگونه با در اختیار داشتن جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل یعنی $G(x, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$، خود معادله دیفرانسیل را به دست آوریم؟ یعنی بگوییم $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ چه بوده است؟
برای پاسخ به پرسش بالا کافی است مراحل زیر را دنبال کنیم

مرحله (۱): مرتبه معادله دیفرانسیل را مشخص می‌کنیم. دقت شود که مرتبه معادله دیفرانسیل دقیقا برابر تعداد ثابت‌ها در جواب عمومی است.
مرحله (۲): طبق مرحله (۱)، به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل از جواب عمومی مشتق می‌گیریم. اگر مرتبه معادله n باشد آنگاه این مرحله تعداد nتا معادله در اختیار ما قرار می‌دهد.
مرحله (۳): دستگاه معادلاتی با کمک n معادله مرحله (۲) و خود جواب عمومی تشکیل می‌دهیم. پس $(n+1)$تا معادله در اختیار داریم.
مرحله (۴): حال در مرحله (۳) سعی می‌کنیم nتا ثابت را با کمک $(n+1)$تا معادله، حذف کنیم.
مرحله (۲'): اگر در مرحله (۲) بعد از nبار مشتق گیری از جواب عمومی، اصلا ثابتی مشاهده نکردیم، به معادله دیفرانسیل مطلوب دست یافته‌ایم و کار تمام است.

اکنون مثال‌های زیر را دنبال کنید تا مراحل بالا را بهتر متوجه شوید.

مثال ۱.۳.۱. *$y = (x-c)^2$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل است (مثال ۲۹.۱.۱ را ببینید). می‌خواهیم آن معادله دیفرانسیل را مشخص کنیم. مراحل بالا را پیاده سازی می‌کنیم.*
مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.

مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم $y' = 2(x-c) = 2x - 2c$.
مرحله (۳): تشکیل یک دستگاه به شکل زیر:

$$\begin{cases} y = (x-c)^2 \\ y' = 2x - 2c \end{cases}$$

مرحله (۴): ثابت c را حذف می‌کنیم. از معادله دوم در مرحله (۳) به دست می‌آید که $c = \frac{2x-y'}{2}$. با جایگذاری در معادله اول از مرحله (۳) داریم

$$y = (x-c)^2 = (x - (\frac{2x-y'}{2}))^2 = (\frac{-y'}{2})^2 = \frac{(y')^2}{4}.$$

پس معادله دیفرانسیل مطلوب به صورت $4y = (y')^2$ است.

مثال ۱.۳.۲. $y = \ln x + c$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل است (مثال ۱.۱.۲۸ را ببینید). می‌خواهیم آن معادله دیفرانسیل را مشخص کنیم. مراحل بالا را پیاده سازی می‌کنیم.
مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم $y' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$.
مرحله (′۲): چون در مرحله (۲) ثابتی مشاهده نمی‌کنیم، پس معادله دیفرانسیل مطلوب به صورت $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ است.

مثال ۱.۳.۳. $y = c_1e^x + c_2xe^x$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل است. می‌خواهیم آن معادله را مشخص کنیم. مراحل بالا را پیاده سازی می‌کنیم.
مرحله (۱): چون در جواب عمومی دو ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر دو است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم

$$\begin{aligned} &y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x \\ &y'' = c_1e^x + c_2e^x + c_2e^x + c_2xe^x = c_1e^x + 2c_2e^x + c_2xe^x \end{aligned}$$

مرحله (۳): تشکیل یک دستگاه به شکل زیر:

$$\begin{cases} y = c_1e^x + c_2xe^x \\ y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x \\ y'' = c_1e^x + 2c_2e^x + c_2xe^x \end{cases}$$

مرحله (۴): ثابت‌های c_1 و c_2 را حذف می‌کنیم. اگر معادله دوم در مرحله (۳) را در عدد 2 ضرب کنیم و حاصل را از معادله سوم در مرحله (۳) کم کنیم، به دست می‌آید که $y'' - 2y' = -y$. پس معادله دیفرانسیل مطلوب به صورت $y'' - 2y' + y = 0$ است.

مثال ۱.۳.۴. $y = \sin x + c_1x + c_2$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل است. می‌خواهیم آن معادله دیفرانسیل را مشخص کنیم. مراحل بالا را پیاده سازی می‌کنیم.

مرحله (۱): چون در جواب عمومی دو ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر دو است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم

$$y' = \cos x + c_1 \qquad\qquad y'' = -\sin x$$

مرحله ($'$۲): چون در مرحله (۲) ثابتی مشاهده نمی‌کنیم، پس معادله دیفرانسیل مطلوب به صورت $y'' = -\sin x$ است.

تمرین ۵.۳.۱. *معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$ را پیدا کنید.*

حل. مرحله (۱): چون در جواب عمومی سه ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابرسه است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم

$$\begin{aligned} y' &= c_2e^x + c_3e^x + c_3xe^x \\ y'' &= c_2e^x + 2c_3e^x + c_3xe^x \\ y''' &= c_2e^x + 3c_3e^x + c_3xe^x \end{aligned}$$

مرحله (۳): تشکیل یک دستگاه به شکل زیر:

$$\begin{cases} y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x \\ y' = c_2e^x + c_3e^x + c_3xe^x \\ y'' = c_2e^x + 2c_3e^x + c_3xe^x \\ y''' = c_2e^x + 3c_3e^x + c_3xe^x \end{cases}$$

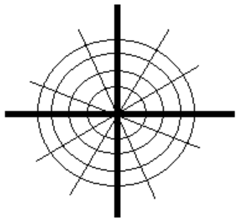
مرحله (۴): ثابت‌ها را حذف می‌کنیم. اگر دوبرابر معادله سوم را از معادله چهارم کم کنیم حاصل برابر $-y'$ می‌شود یعنی $y''' - 2y'' + y' = 0$.

۴.۱ تشکیل معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم (اختیاری)

با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنیم دو دسته منحنی مانند F و G در اختیار داریم. گوییم F مسیرهای قائم G است هرگاه هر منحنی در F بر تمام منحنی‌های در G عمود باشد و همچنین هر منحنی در G بر تمام منحنی‌های در F عمود باشد.*

مثال ۲.۴.۱. *فرض کنیم F دسته منحنی‌های $x^2 + y^2 = c$ که در آن c ثابت و G دسته منحنی‌های $y = c'x$ باشد که در آن c' ثابت است. این دو دسته را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم*



حال واضح است که F مسیرهای قائم G است (و برعکس، G مسیرهای قائم F است).

فرض کنیم دسته منحنی یک پارامتری مانند F در اختیار داریم. می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی به دست آوریم که جواب عمومی آن دسته منحنی‌های G باشد و همچنین F مسیرهای قائم G باشد. برای این منظور ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های F را به دست می‌آوریم و سپس به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم (چرا؟). اگر معادله دیفرانسیل جدید را حل کنیم به دسته منحنی G می‌رسیم (در این فصل روش حل معادله مد نظر نیست).

برای درک بهتر مثال‌های زیر را دنبال کنید.

مثال ۳.۴.۱. *فرض کنیم F دسته منحنی‌های $y=(x-c)^2$ باشد. می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی به دست آوریم که جواب عمومی آن دسته منحنی‌های G باشد و همچنین F مسیرهای قائم G باشد. ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های F را به دست می‌آوریم:*
مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم $y'=2(x-c)=2x-2c$.
مرحله (۳): تشکیل یک دستگاه به شکل زیر:

$$\begin{cases} y=(x-c)^2 \\ y'=2x-2c \end{cases}$$

مرحله (۴): ثابت c را حذف می‌کنیم. از معادله دوم در مرحله (۳) به دست می‌آید که $c=\frac{2x-y'}{2}$. با جایگذاری در معادله اول از مرحله (۳) داریم

$$y=(x-c)^2=(x-(\frac{2x-y'}{2}))^2=(\frac{-y'}{2})^2=\frac{(y')^2}{4}.$$

پس معادله دیفرانسیل مطلوب به صورت $4y=(y')^2$ است. حال به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم و داریم $4y=(\frac{-1}{y'})^2$. پس $4y(y')^2=1$ معادله دیفرانسیلی است که جواب عمومی آن دسته منحنی‌های G است و همچنین F مسیرهای قائم G است (حل معادله جدید و به دست آوردن G فعلا مد نظر نیست).

مثال ۴.۴.۱. *فرض کنیم F دسته منحنی‌های $x^2+y^2=c$ باشد. می‌خواهیم معادله دیفرانسیلی به دست آوریم که جواب عمومی آن دسته منحنی‌های G باشد و همچنین F مسیرهای قائم G باشد. ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های F را به دست می‌آوریم:*

مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم

$$2x + 2yy' = 0 \ \Rightarrow \ x + yy' = 0.$$

مرحله ('۲): چون در مرحله (۲) ثابتی مشاهده نمی‌کنیم، پس معادله دیفرانسیل مطلوب به صورت $x + yy' = 0$ است. حال به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم و داریم $x + y(\frac{-1}{y'}) = 0$. پس $x - \frac{y}{y'} = 0$ معادله دیفرانسیلی است که جواب عمومی آن دسته منحنی‌های G است و همچنین F مسیرهای قائم G است (حل معادله جدید و به دست آوردن G فعلا مد نظر نیست هر چند واضح است که جواب عمومی این معادله دیفرانسیل $y = cx$ است!).

تمرین ۵.۴.۱. *معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $y^2 + x^2 = 2cx$ را پیدا کنید (حل معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم لازم نیست).*

حل. ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y^2 + x^2 = 2cx$ را می‌یابیم.
مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم $2yy' + 2x = 2c$.
مرحله (۳): تشکیل یک دستگاه به شکل زیر:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 2cx \\ yy' + x = c \end{cases}$$

مرحله (۴): ثابت c را حذف می‌کنیم. از معادله دوم c را در معادله اول جایگذاری می‌کنیم. لذا داریم

$$y^2 - x^2 = 2xyy'.$$

حال به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم و داریم

$$y'(y^2 - x^2) = -2xy.$$

۵.۱ تمرین‌های کل فصل

تمرین ۱.۵.۱. *مرتبه هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را مشخص کنید.*
(۱) $y' = y'' \cos x$ (۲) $(y')^2 + xy'y'' + \cos x = 0$ (۳) $xy' \ln y^{(4)} = 0$

تمرین ۲.۵.۱. *نشان دهید که $y = e^{2x} + \frac{3}{2}$ یک جواب برای معادله $y' - 2y + 3 = 0$ است.*

تمرین ۳.۵.۱. *نشان دهید که معادله $y'' + 4y' + 5y = 0$ جوابی به صورت $y = e^{-2x}\sin x$ دارد.*

تمرین ۴.۵.۱. *می‌دانیم که جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y')^2 - xy' + y = 0$ به صورت $y = cx - c^2$ است. آیا این معادله جواب غیر عادی دارد؟*

تمرین ۵.۵.۱. *پوش دسته منحنی‌های $(x-c)^2+(2y-c)^2-xy=2c^2$ را بیابید.*

تمرین ۶.۵.۱. *معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $\ln\frac{x}{y}=1+cy$ را پیدا کنید.*

تمرین ۷.۵.۱. *معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $y=c_1x^2+c_2x+c_3$ را بیابید.*

تمرین ۸.۵.۱. *معادله دیفرانسیل $x^2y''+2xy'+y=0$ را با تغییر متغیر $t=\ln x$ بازنویسی کنید.*

تمرین ۹.۵.۱. *معادله دیفرانسیل $y'=\tan(x+y)$ را با تغییر متغییر $u=x+y$ بازنویسی کنید.*

تمرین ۱۰.۵.۱. *معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}-y=xy^2$ را با تغییر متغییر $u=\frac{1}{y}$ بازنویسی کنید.*

تمرین ۱۱.۵.۱. *معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $\ln\frac{x}{y}=1+cy$ را پیدا کنید.*

تمرین ۱۲.۵.۱. *معادله دیفرانسیل مسرهای قائم دسته منحنی‌های $y=c_1x^2+c_2x+c_3$ را بیابید.*

تمرین ۱۳.۵.۱. *برای معادله دیفرانسیل $y'=y(y-1)(y-2)(y-3)$ نقاط تعادل را پیدا کنید. میدان برداری رسم کنید. شمایل منحنی‌های جواب را رسم کنید. خط فاز را رسم کنید. نقاط پایدار و ناپایدار را معلوم کنید. با توجه به مقدار $y(0)$ زمانی که x به بی‌نهایت میل می‌کند جواب‌ها را آنالیز کنید.*

۶.۱ نمونه سوالات امتحانی تشریحی

سوال ۱.۶.۱. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر با کمی تغییر) معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم دسته منحنی‌های $y^2=cx^3+x^2-1$ را بیابید.*

پاسخ. ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y^2=cx^3+x^2-1$ را می‌یابیم.
مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم $2yy'=3cx^2+2x$.
مرحله (۳): تشکیل یک دستگاه به شکل زیر:

$$\begin{cases} y^2=cx^3+x^2-1 \\ 2yy'=3cx^2+2x \end{cases}$$

مرحله (۴): ثابت c را حذف می‌کنیم. طبق معادله دوم $c=\frac{2yy'-2x}{3x^2}$ است و با جایگذاری در معادله اول داریم $y^2=2xyy'-x^2-1$. حال به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم و داریم $y^2=\frac{-2xy}{y'}-x^2-1$. پس $y^2=\frac{-2xy}{y'}-x^2-1$ معادله دیفرانسیل مطلوب است.

سوال ۲.۶.۱. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر) (الف) معادله دیفرانسیل متناظر با دسته منحنی‌های $y=cx-\frac{1}{4}c^2$ را به دست آورید.*
(ب) آیا معادله دیفرانسیل قسمت (الف) دارای جواب غیر عادی است؟
(ج) معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم متناظر با دسته منحنی‌های (الف) چیست؟

پاسخ. (الف) مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم $y' = c$.
مرحله (۳): تشکیل یک دستگاه به شکل زیر:

$$\begin{cases} y = cx - \frac{1}{4}c^2 \\ y' = c \end{cases}$$

مرحله (۴): ثابت c را حذف می‌کنیم. طبق معادله دوم کافی است که $y' = c$ را در معادله اول جایگذاری کنیم و داریم $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$.
(ب) ابتدا دقت را داریم که $G(x, y, c) = cx - \frac{1}{4}c^2 - y$. پس

$$\begin{cases} G(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} cx - \frac{1}{4}c^2 - y = 0 \\ x - \frac{c}{2} = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم باید $c = 2x$ باشدکه با جایگذاری در معادله اول داریم $y = x^2$. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که این سهمی جوابی برای $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ است، یعنی یک جواب غیر عادی است.
(ج) طبق پاسخ قسمت (الف)، در $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم و داریم $y = \frac{-x}{y'} - \frac{1}{4(y')^2}$.

سوال ۳.۶.۱. *(میان ترم صنعتی امیرکبیر با کمی تغییر) با تغییر متغیر $y = ux^2$ معادله دیفرانسیل زیر را بازنویسی کنید.*

$$x^2y'' + 2x(x+2)y' + 2(x+1)^2y = 0$$

پاسخ. با توجه به نوع تغییر متغیر، $y = H(u, x) = ux^2$ و مرتبه معادله که برابر با دو است پس باید y، y' و y'' را بر حسب u، u' و u'' محاسبه کنیم و بعد در معادله جایگذاری نماییم. حال داریم

$$\begin{aligned} y' &= u'x^2 + 2xu \\ y'' &= u''x^2 + 2xu' + 2u + 2xu' = x^2u'' + 4xu' + 2u \end{aligned}$$

حال با جایگذاری داریم

$$\begin{aligned} &x^2y'' + 2x(x+2)y' + 2(x+1)^2y = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x^2u'' + 4xu' + 2u) + \\ &(2x^2 + 4x)(u'x^2 + 2xu) + (2x^2 + 4x + 2)(ux^2) \;\Rightarrow \\ &\boxed{x^4u'' + (8 + 2x)x^3u' + (12 + 8x + 2x^2)x^2u = 0}. \end{aligned}$$

۷.۱ نمونه سوالات تستی

۱. (سراسری پلیمر ۸۲) معادله دیفرانسیل $(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ از چه مرتبه‌ای است؟
(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) پنجم

۲. (آزاد انرژی ۸۰) به ازای کدام مقدار از λ تابع $e^{\lambda x}$ جواب معادله $y'' - 5y' + 6y = 0$ است؟
(۱) ۲ و ۳ (۲) ۶ و ۵- (۳) ۵ و ۶ (۴) ۳- و ۲-

۳. (سراسری مکانیک ۸۷) با تغییر متغیر $z = \sqrt{x}$ معادله دیفرانسیل زیر به کدام تبدیل می‌شود؟

$$4x^2y'' + 4xy' + (x-4)y = 0 \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dz}$$

(۱) $z^2\ddot{y} + z\dot{y} + (z^2-4)y = 0$ (۲) $z^2\ddot{y} + 2z\dot{y} + (z^2-4)y = 0$
(۳) $z^4\ddot{y} + 4z^2\dot{y} + (z^2-4)y = 0$ (۴) $z^2\ddot{y} + z\dot{y} + (z-4)y = 0$

۴. (سراسری هوا و فضا ۸۰) جواب عمومی معادله دیفرانسیلی دسته منحنی $y = cx + \cos c$ است. جواب غیر عادی کدام گزینه زیر است؟
(۱) $y = x\cos^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$ (۲) $y = x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$
(۳) $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{x^2-1}$ (۴) $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

۵. (سراسری برق ۸۵) کدام گزینه در مورد جواب معادله دیفرانسیل $y' = 1 - x^2 - y^2$ حول مبدا صحیح است؟
(۱) جواب معادله صعودی است. (۲) جواب معادله اکیدا صعودی است.
(۳) جواب معاله نزولی است. (۴) جواب معادله اکیدا نزولی است.

۶. (سراسری ریاضی ۸۵) معادله دیفرانسیل دوایری در صفحه که مرکز آنها روی محور xها باشد، کدام است؟
(۱) $1 + yy'' + y' = 0$ (۲) $1 - y^2y'' + y' = 0$
(۳) $1 + yy'' + (y')^2 = 0$ (۴) $1 - y(y'')^2 + (y')^2 = 0$

۷. (سراسری ریاضی ۸۴) با تغییر متغیر $xz = 1$ معادله $x^4y'' + 2x^3y' - 4y = 0$ به چه صورت در می‌آید؟ ($\dot{y} = \frac{dy}{dz}$)
(۱) $\ddot{y} - 4y = 0$ (۲) $\ddot{y} + 4y = 0$
(۳) $\ddot{y} + \dot{y} + 4y = 0$ (۴) $\ddot{y} + \dot{y} - 4y = 0$

۸. (سراسری هوا و فضا ۸۰) خطوط هم پتانسیل جریانی برابر است با $x^2 - y^2 = c$. معادله دیفرانسیل خطوط جریان کدام است؟
(۱) $xy' = y$ (۲) $xy' = -y$ (۳) $xy = y'$ (۴) $-xy = y'$

۹. (سراسری نساجی ۸۴) پوش دسته منحنی $x = \frac{y}{c} + c^2$ کدام است؟
(۱) $27y^3 = x^2$ (۲) $27y^2 = x^3$
(۳) $27y^3 = 4x^2$ (۴) $27y^2 = 4x^3$

۱۰. (آزاد مکانیک ۸۲) معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = cx^2 + d$ کدام است؟

۱) $x^2y'' - 2xy' + y = 0$

۲) $y'' + (x^2 - 2x)y' - y = 0$

۳) $xy'' - y' = 0$

۴) $2xy'' - x^2y' + y = 0$

فصل ۲

معادلات مرتبه اول

در فصل قبل با تعریف معادله دیفرانسیل، مرتبه یک معادله و مفهوم جواب آشنا شدید. در این فصل می‌خواهیم حل معادلادت مرتبه اول را دنبال کنیم. یعنی تمام جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را ارائه کنیم. سعی می‌کنیم مطالب را از آسان به سخت مرتب نماییم تا دسته بندی و حل معادلات دیفرانسیل راحتتر به خاطر سپرده شوند. لازم است که از این لحظه به بعد دانشجو به تکنیک‌های انتگرال گیری مسلط باشد.

۱.۲ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

اکنون به حل معادلات دیفرانسیل خطی می‌پردازیم که دسته بسیار زیادی از معادلات اینگونه هستند.

تعریف ۱.۱.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را بتوانیم به صورت $y'+p(x)y=g(x)$ بنویسیم، که در آن $p(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته روی بازه I هستند. در این صورت گوییم معادله دیفرانسیل $F(x,y,y')=0$ خطی مرتبه اول است.*

مثال ۲.۱.۲. *معادله دیفرانسیل $y'+xy=0$ خطی مرتبه اول است که $p(x)=x$ و $g(x)=0$ است.*
معادله دیفرانسیل $y'=\sin x$ خطی مرتبه اول است که $p(x)=0$ و $g(x)=\sin x$ است.
معادله دیفرانسیل $y'+xy=x^2$ خطی مرتبه اول است که $p(x)=x$ و $g(x)=x^2$ است.
معادله دیفرانسیل $y'=\frac{x+y}{x}$ خطی است. زیرا به صورت $y'-\frac{1}{x}y=1$ است که $p(x)=-\frac{1}{x}$ و $g(x)=1$ است.

مثال ۳.۱.۲. *معادله دیفرانسیل $y'-x=x\cos y$ خطی نیست.*

در ادامه می‌بینیم که حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن خطی بسیار ساده است! اگر $p(x)=0$ باشد آنگاه معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $y'=g(x)$ را در اختیار داریم که به سادگی و با انتگرال گیری جواب عمومی آن به دست می‌آید، یعنی $y=\int g(x)dx+c$. حال فرض کنیم $y'+p(x)y=g(x)$ را در اختیار داریم. حالت ساده بالا که فقط منجر به یک انتگرال گیری ساده

می‌شود، این انگیزه را در ما ایجاد می‌کند که که از خود سوال کنیم که آیا می‌شود معادله دیفرانسیل بالا را با ضرب یک تابع مناسب مانند μ به صورت

$$\mu y' + \mu p(x)y = \frac{d}{dx}(\mu y) = \mu g(x)$$

بنویسیم که با یک انتگرال گیری ساده جواب عمومی آن به دست آید؟ یعنی $\mu y = \int \mu g(x)dx + c$. خوشبختانه جواب این سوال مثبت است. با یک مثال روند کار را شرح می‌دهیم. مثلا معادله دیفرانسیل خطی $y' + y = e^{-x}$ را در نظر می‌گیریم. طرفین را در e^x ضرب می‌کنیم و داریم $e^x y' + e^x y = 1$. لذا $e^x y' + e^x y = \frac{d}{dx}(e^x y) = 1$. بنابراین جواب به صورت $e^x y = x + c$ است. بنابراین جواب دادن به سوال بالا مشروط به یافتن یک تابع ناصفر مانند $\mu(x)$ روی بازه I است که با ضرب این تابع در $y' + p(x)y = g(x)$ خواسته مطلوب ما را عملی کند. بیایید مسئله را حل شده فرض کنیم، یعنی فرض کنیم چنین μ وجود دارد (تابع μ را عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌نامیم) و لذا

$$\mu g(x) = \mu y' + \mu p(x)y = \frac{d}{dx}(\mu y) = \mu y' + \mu' y.$$

پس $\mu p(x)y = \mu' y$ و با فرض این که $y \neq 0$ داریم $\mu p(x) = \mu'$. در نتیجه $\frac{\mu'}{\mu} = p(x)$ و با یک انتگرال گیری بدون اعمال کردن ثابت انتگرال گیری (چون فقط یک μ نیاز است) داریم

$$\ln \mu = \int p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int p(x)dx}.$$

یعنی تابع مد نظر را یافته‌ایم. دقت کنید که μ را می‌توانیم یک تابع مثبت فرض کنیم.

اکنون خلاصه مطالب بالا و روش حل را در کادر زیر دنبال کنید.

صورت کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

$$y' + p(x)y = g(x) \qquad\qquad \frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

روش یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول:
طرفین را در تابع عامل انتگرال ساز $\mu = e^{\int p(x)dx}$ ضرب می‌کنیم. پس $\mu g(x) = \frac{d}{dx}(\mu y)$ و لذا جواب عمومی به صورت $\mu y = \int \mu g(x)dx + c$ است.

مثال ۴.۱.۲. *معادله دیفرانسیل $y' - 2xy = 0$ خطی مرتبه اول است. بنابراین خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2xdx} = e^{-x^2}$. پس*

$$\mu y = \int \mu g(x)dx + c \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2} y = \int 0dx + c = c$$

و لذا $y = ce^{x^2}$ جواب عمومی است.

مثال ۵.۱.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل*

$$\tan xy' + y = 3x\sec x$$

را پیدا کنیم. این معادله دیفرانسیل به ظاهر خطی مرتبه اول نیست. اما با تقسیم بر $\tan x$ داریم

$$y' + (\cot x)y = 3x\csc x$$

و در نتیجه خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$. *پس*

$$\mu y = \int \mu g(x)dx + c \;\;\Rightarrow\;\; \sin x\, y = \int 3x\csc x\sin x dx + c = \frac{3x^2}{2} + c$$

و لذا $y = \frac{c}{\sin x} + \frac{3x^2}{2\sin x}$ *جواب عمومی است.*

در ادامه دو معادله بسیار معروف را معرفی خواهیم کرد! این دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول به ظاهر خطی نیستند اما با تغییراتی تبدیل به معادله خطی می‌شوند.

معادله دیفرانسیل برنولی

صورت کلی معادله دیفرانسیل (غیر خطی) برنولی $y' + p(x)y = y^n g(x)$ است که در آن $n \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ است (اگر $n = 0$ یا $n = 1$ معادله خطی است). این معادله با تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول u برحسب x می‌شود، یعنی به شکل $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)g(x)$ (بررسی کنید) و سپس آن معادله خطی را حل می‌کنیم.

مثال ۶.۱.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y' - \frac{y}{3} = y^{-2}(\frac{x+1}{3})$ *را پیدا کنیم. این یک معادله برنولی است. در این معادله برنولی* $p(x) = \frac{-1}{3}$ *و* $g(x) = \frac{x+1}{3}$ *است. تغییر متغیر* $u = y^{1-n} = y^3$ *را اعمال می‌کنیم* $u' = 3y'y^2$. *بنابراین با ضرب معادله در* $3y^2$ *داریم*

$$3y^2y' - y^3 = x + 1 \;\Rightarrow\; u' - u = x + 1$$

که به صورت معادله دیفرانسیل خطی u تابعی از x مبدل می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p_0(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$. *پس*

$$\mu u = \mu y^3 = \int \mu g_0(x)dx + c \;\;\Rightarrow$$
$$e^{-x}y^3 = \int e^{-x}(x+1)dx + c = -xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

و لذا $y^3 = e^x(-xe^{-x} - 2e^{-x} + c)$ *جواب عمومی است (انتگرال گیری از روش جز به جز استفاده شده است).*

مثال ۷.۱.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$ *را پیدا کنیم. این یک معادله برنولی است. در این معادله برنولی* $p(x) = -1$ *و* $g(x) = x$ *است. تغییر متغیر* $u = y^{1-n} = y^{-1}$ *را اعمال می‌کنیم* $u' = -y'y^{-2}$*. بنابراین با ضرب معادله در* $-y^{-2}$ *داریم*

$$-y^{-2}y' + y^{-2}y = -y^{-2}xy^2 \ \Rightarrow\ u' + u = -x$$

که به صورت معادله دیفرانسیل خطی u *تابعی از* x *مبدل می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت که* $\mu = e^{\int p_0(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$*. پس*

$$\mu u = \mu y^{-1} = \int \mu g_0(x)dx + c \ \Rightarrow\ e^x y^{-1} = \int -xe^x dx + c = e^x - xe^x + c$$

و لذا $y = \frac{e^x}{e^x - xe^x + c}$ *جواب عمومی است (انتگرال گیری از روش جز به جز استفاده شده است).*

تمرین ۸.۱.۲. *معادله دیفرانسیل* $xy' + xy^2 = y$ *را با شرط اولیه* $y(1) = 1$ *حل کنید.*

حل. معادله دیفرانسیل مرتبه اول است ولی به ظاهر خطی نیست! اما طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم و $y' - y\frac{1}{x} = -y^2$ یک معادله برنولی است! در این معادله برنولی $p(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = -1$ است. تغییر متغیر $u = y^{1-n} = y^{-1}$ را اعمال می‌کنیم $u' = \frac{-y'}{y^2}$. بنابراین با ضرب معادله در $-y^{-2}$ داریم $u' - u\frac{1}{x} = -1$ به صورت معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول u تابعی از x مبدل می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p_0(x)dx} = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{-1}{x}$. پس

$$\mu u = \int \mu g_0(x)dx + c \ \Rightarrow\ \frac{-1}{x}u = \int \frac{1}{x}dx + c = \ln x + c$$

و لذا $u = y^{-1} = -x(\ln x + c)$ جواب عمومی است. با اعمال شرط اولیه $y(1) = 1$ داریم $c = -1$.

تمرین ۹.۱.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$ *را پیدا کنید.*

حل. معادله دیفرانسیل مرتبه اول است ولی به ظاهر خطی نیست! اما فرض کنیم $u = \tan\frac{y}{2}$. پس

$$\sin y = \frac{\tan\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2}} \qquad \cos y = \frac{1-\tan^2\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2}} \qquad y' = \frac{2u'}{1+u^2}.$$

در نتیجه $u' + u = -x$ به دست می‌آید. داریم $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$. پس

$$\mu u = \int \mu g(x)dx + c \ \Rightarrow\ e^x u = \int -xe^x dx + c = e^x - xe^x + c$$

و لذا $u = \tan\frac{y}{2} = 1 - x + ce^{-x}$ جواب عمومی است.

معادله دیفرانسیل ریکاتی

صورت کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر خطی ریکاتی به صورت

$$y' + q(x)y^2 + p(x)y = g(x)$$

است که $q(x) \neq 0$ (چون در غیر این صورت معادله خطی است). برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی را در اختیار داشته باشیم. معمولا این جواب خصوصی حدس زدنی است. اگر در امتحان با این معادله مواجه شدید توابع معروف مانند e^x، x، $\sin x$ و ... را به عنوان جواب خصوصی اولیه امتحان کنید! برای حل معادله ریکاتی، فرض کنیم که y_1 یک جواب خصوصی معادله ریکاتی باشد که از قبل در اختیار داریم. معادلات زیر را در معادله ریکاتی قرار می‌دهیم

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \qquad y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

(که u تابعی از x است) تا یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول u تابعی از x حاصل شود و سپس آن معادله خطی را حل می‌کنیم.

مثال ۱۰.۱.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y' - x^3 - \frac{2}{x}y + \frac{1}{x}y^2 = 0$ *را پیدا کنیم. واضح است که این یک معادله ریکاتی است. برای حل آن نیاز به یک جواب خصوصی اولیه داریم. توابع معروف را امتحان می‌کنیم.* $y_1 = -x^2$ *یک جواب خصوصی است (بررسی کنید). حال معادلات زیر را در معادله ریکاتی*

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = -x^2 + \frac{1}{u} \qquad y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} = -2x - \frac{u'}{u^2}$$

قرار می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned}
&y' - x^3 - \frac{2}{x}y + \frac{1}{x}y^2 = 0 \;\Rightarrow\\
&-2x - \frac{u'}{u^2} - x^3 - \frac{2}{x}(-x^2 + \frac{1}{u}) + \frac{1}{x}(-x^2 + \frac{1}{u})^2 = 0 \;\Rightarrow\\
&u' + (\frac{2}{x} + 2x)u = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

که به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول u تابعی از x مبدل می‌شود. بنابراین خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int (\frac{2}{x}+2x)dx} = e^{x^2+2\ln x} = e^{x^2}e^{\ln x^2} = e^{x^2}x^2$. *پس*

$$\mu u = \int \mu g(x)dx + c \;\Rightarrow\; e^{x^2}x^2u = \int e^{x^2}x^2\frac{1}{x}dx + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

و با جایگذاری داریم

$$y = -x^2 + \frac{1}{u} \;\Rightarrow\; y = -x^2 + \frac{e^{x^2}x^2}{\frac{1}{2}e^{x^2} + c}.$$

تمرین ۱۱.۱.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ را پیدا کنید به شرطی که بدانیم $y_1 = \frac{1}{x}$ یک جواب خصوصی معادله بالا است.*

حل. واضح است که این یک معادله ریکاتی است. حال معادلات زیر را در معادله ریکاتی

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \qquad y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} = \frac{-1}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

قرار می‌دهیم. داریم

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{-1}{x^2} - \frac{u'}{u^2} = (\frac{1}{x} + \frac{1}{u})^2 - \frac{2}{x^2} \;\Rightarrow u' + \frac{2u}{x} = -1$$

که به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول u تابعی از x مبدل می‌شود. بنابراین خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. پس

$$\mu u = \int \mu g(x)dx + c \;\Rightarrow\; x^2 u = \int -x^2 dx + c = \frac{-1}{3}x^3 + c$$

و با جایگذاری داریم

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{\frac{-1}{3}x^3 + c}.$$

۲.۲ معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

با تعریف معادله جدایی پذیر کار را آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ را بتوانیم به صورت $y' = f(x)g(y)$ یا $u(x)dx + v(y)dy = 0$ بنویسیم. در این صورت گوییم معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدایی پذیر است.*

مثال ۲.۲.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = x^2 y$ یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است. زیرا داریم که $f(x) = x^2$، $g(y) = y$ و $y' = f(x)g(y)$.*

مثال ۳.۲.۲. *معادله دیفرانسیل $ydy + xdx = 0$ یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است. زیرا $u(x) = x$ و $v(y) = y$ است.*

مثال ۴.۲.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = \sin x \tan y$ یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است.*

مثال ۵.۲.۲. *معادله دیفرانسیل $(\sqrt{x} + e^x)dx + (1 + \tan y)dy = 0$ یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است.*

مثال ۶.۲.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = \frac{xy}{(1+y)\cos x}$ یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است.*

روش به دست آوردن جواب عمومی یک معادله جدایی پذیر بسیار ساده است. یک معادله جدایی پذیر به صورت $u(x)dx + v(y)dy = 0$ را در نظر بگیرید و فرض کنیم $U(x) = \int u(x)dx$ و $V(y) = \int v(y)dy$. واضح است که $U'(x) = u(x)$ و $V'(y) = v(y)y' = v(y)\frac{dy}{dx}$. اما از رابطه $u(x)dx + v(y)dy = 0$ داریم $u(x) + v(y)\frac{dy}{dx} = 0$. پس $U'(x) + V'(y) = 0$ و در نتیجه $U(x) + V(y) = c$. دقت شود که انتگرال سمت راست برابر ثابت c می‌شود. بنابراین جواب عمومی به صورت $\int u(x)dx + \int v(y)dy = c$ است. در کادر زیر خلاصه مطالب جمع آوری شده است.

صورت کلی معادله دیفرانسیل جدایی پذیر مرتبه اول:

$$y' = f(x)g(y) \qquad\qquad u(x)dx + v(y)dy = 0$$

یافتن جواب عمومی معادله جدایی پذیر مرتبه اول:
(۱) جدایی پذیر بودن معادله را مشخص می‌کنیم.
(۲) معادله را به صورت $u(x)dx + v(y)dy = 0$ می‌نویسیم.
(۳) از معادله به صورت $\int u(x)dx + \int v(y)dy = c$ انتگرال می‌گیریم.

برای درک بهتر مثال‌های زیر را دنبال کنید.

مثال ۷.۲.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x}{y}$ را حساب کنیم. واضح است که این معادله از مرتبه یک است. همچنین صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر را دارد. پس آن را به صورت $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ می‌نویسیم. در نتیجه داریم $ydy = xdx$ یا معادلا $xdx - ydy = 0$. حال انتگرال می‌گیریم. یعنی $\int xdx - \int ydy = c$ و بنابراین $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = c$.*

مثال ۸.۲.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = e^{x+y}$ را حساب کنیم. واضح است که این معادله از مرتبه یک است. همچنین صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر را به ظاهر ندارد. اما داریم $y' = e^{x+y} = e^x e^y$ پس آن را به صورت $\frac{dy}{dx} = e^x e^y = \frac{e^x}{e^{-y}}$ می‌نویسیم. در نتیجه داریم $e^{-y}dy = e^x dx$ یا معادلا $e^x dx - e^{-y}dy = 0$. حال انتگرال می‌گیریم. یعنی $\int e^x dx - \int e^{-y}dy = c$ و بنابراین $e^x + e^{-y} = c$.*

مثال ۹.۲.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy(1 + x^2)dy = (1 + y^2)dx$ را حساب کنیم. واضح است که این معادله از مرتبه یک است. این یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است. زیرا با کمی تغییرات هوشمندانه داریم $\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{x(1+x^2)}dx$. حال انتگرال می‌گیریم $\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$. اکنون باید از مهارت‌های انتگرال گیری خود استفاده کنیم. اما داریم*

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2} \ \Rightarrow\ 1 \equiv A(1 + x^2) + Bx^2 + Cx \ \Rightarrow$$
$$1 \equiv (A + B)x^2 + Cx + A \ \Rightarrow\ A = 1,\ \ B = -1,\ \ C = 0$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}dx \;\Rightarrow\\
&\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \;\Rightarrow\\
&\ln(1+y^2) = 2\ln|x| - \ln(1+x^2) + 2c \;\Rightarrow\\
&\ln(1+y^2) = \ln\frac{x^2}{1+x^2} + \ln c_1 = \ln\frac{c_1x^2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

بنابراین $1+y^2 = \frac{c_1x^2}{1+x^2}$ *(چرا مجاز هستیم* $2c$ *را با* $\ln c_1$ *جایگزین کنیم؟)*

مثال ۱۰.۲.۲. *می‌خواهیم معادله* $y' = 2x + y$ *را حل کنیم. واضح است که مرتبه این معادله یک است. اما این معادله جدایی پذیر نیست (خطی چطور؟)! اما با تغییر متغیر* $u = 2x + y$ *و مشتق گیری داریم* $u' = 2 + y' \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2$*. پس با جایگذاری داریم* $u = \frac{du}{dx} - 2$ *و در نتیجه* $\frac{1}{u+2}du = dx$ *که معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است. حال با انتگرال گیری داریم*

$$\int \frac{1}{u+2}du = \int dx \;\Rightarrow\; \ln|u+2| = x + c.$$

بنابراین $\ln|2x+y+2| = x + c$.

تمرین ۱۱.۲.۲. *مسیر قائمی از دسته منحنی‌های* $x^2+y^2 = c$ *را پیدا کنید که از* $(1,1)$ *عبور کند.*

حل. ابتدا معادله دیفرانسیل مسیره‌های قائم دسته منحنی‌های $x^2+y^2 = c$ را مشخص می‌کنیم. چون دسته منحنی‌ها یک ثابت دارد پس مرتبه معادله برابر یک است. بنابراین باید یکبار مشتق گیری انجام دهیم $2x + 2yy' = 0 \;\Rightarrow\; x + yy' = 0$. حال باید y' را با $\frac{-1}{y'}$ عوض کنیم. داریم $x + \frac{-y}{y'} = 0$. یعنی $y' = \frac{y}{x}$. اکنون باید این معادله مرتبه اول را حل نماییم. این معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است و داریم $y' = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$ و با انتگرال گیری داریم

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; \ln|x| + \ln c = \ln|y| \;\Rightarrow\; \ln c|x| = \ln|y|.$$

پس دسته منحنی‌های قائم بر $x^2+y^2 = c$، $|y| = c|x|$ است. چون c دلخواه است $|y| = c|x|$ و $y = cx$ یک دسته منحنی را مشخص می‌کنند (چگونه؟). حال با جایگذاری $x = y = 1$، $c = 1$ به دست می‌آید. پس جواب خصوصی $y = x$ مد نظر است.

تمرین ۱۲.۲.۲. *معادله دیفرانسیل* $xy^2(xy'+y) = 1$ *را حل کنید.*

حل. این معادله دیفرانسیل از مرتبه اول است که جدایی پذیر نیست. تغییر متغیر $u = xy$ را اعمال می‌کنیم $u' = y + xy'$. با جایگذاری داریم

$$xy^2(xy'+y) = 1 \;\Rightarrow\; uyu' = 1 \;\Rightarrow\; \frac{u^2}{x}\frac{du}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; u^2du = xdx.$$

حال یک معادله جدایی پذیر آماده انتگرال گیری در اختیار داریم

$$\int u^2 du = \int x dx$$

در این بخش معادله دیفرانسیل همگن و روش حل آن را آموزش می‌دهیم. اما قبل از معرفی این معادله دیفرانسیل به چند تعریف نیاز داریم.

تعریف ۱.۳.۲. *گوییم تابع* $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *همگن از درجه* n *است هرگاه برای هر عدد حقیقی (ناصفر)* a *داشته باشیم*

$$f(ax_1, ax_2, ..., ax_m) = a^n f(x_1, x_2, ..., x_m).$$

مثال ۲.۳.۲. *تابع* $f(x,y) = \cos\frac{x}{y}$ *همگن از درجه صفر است. زیرا برای هر عدد حقیقی* a *داریم*

$$f(ax, ay) = \cos\frac{ax}{ay} = \cos\frac{x}{y} = a^0 f(x,y) = f(x,y).$$

همچنین تابع $f(x,y,z) = x^2z + yz^2$ *همگن از درجه سه است. زیرا برای هر عدد حقیقی* a *داریم*

$$f(ax, ay, az) = (ax)^2(az) + (ay)(az)^2 = a^3(x^2z + yz^2) = a^3 f(x,y,z).$$

مثال ۳.۳.۲. *تابع* $f(x) = x^2+1$ *و* $f(x,y) = x^3+\sqrt{y}$ *همگن نیستند. همچنین* $f(x) = \sqrt{x}$ *همگن از درجه* $\frac{1}{2}$ *است. زیرا*

$$f(ax) = \sqrt{ax} = \sqrt{a}\sqrt{x} = a^{\frac{1}{2}} f(x).$$

اکنون تعریف معادله دیفرانسیل همگن را می‌آوریم.

تعریف ۴.۳.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل* $F(x,y,y') = 0$ *را بتوانیم به صورت*

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 \qquad\qquad y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

بنویسیم که در آن $f(x,y)$ *و* $g(x,y)$ *هر دو همگن از درجه* n *هستند. در این صورت گوییم* $F(x,y,y') = 0$ *یک معادله دیفرانسیل همگن از درجه* n *است.*

مثال ۵.۳.۲. *معادله دیفرانسل مرتبه اول* $xydx + y^2dy = 0$ *همگن از درجه دو است. زیرا* $f(x,y) = xy$ *و* $g(x,y) = y^2$ *توابعی همگن از درجه دو هستند.*

مثال ۶.۳.۲. *معادله دیفرانسل مرتبه اول* $x\cos y dx + y^2 dy = 0$ *همگن نیست. زیرا داریم که* $f(x,y) = x\cos y$ *تابعی همگن نیست. دقت شود که* $g(x,y) = y^2$ *توابعی همگن از درجه دو است.*

مثال ۷.۳.۲. *معادله دیفرانسل مرتبه اول* $x\sqrt{xy}dx + xy^2dy = 0$ *همگن نیست. زیرا داریم که* $f(x,y) = x\sqrt{xy}$ *تابعی همگن از مرتبه دو است. در حالی که* $g(x,y) = xy^2$ *تابعی همگن از درجه سه می‌باشد.*

مثال ۸.۳.۲. *معادله دیفرانسل مرتبه اول* $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *به آسانی مشخص است که یک معادله دیفرانسیل همگن از مرتبه دو است.*

مثال ۹.۳.۲. *معادله دیفرانسل مرتبه اول* $yy' = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ *با این شکل و ظاهر قابل قضاوت نیست. اما داریم* $y' = \frac{dy}{dx}$ *پس* $x^2ydx - y(x^2+y^2)dy = 0$ *. اکنون به آسانی مشخص است که معادله دیفرانسیل همگن از مرتبه سه در اختیار داریم.*

صورت کلی معادله دیفرانسیل همگن مرتبه اول:

$$(\text{الف})\ y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \qquad\qquad (\text{ب})\ f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

روش یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن مرتبه اول:
(۱) همگن بودن معادله را مشخص می‌کنیم.
(۲) تغییر متغیر $y = ux$ یا $u = \frac{y}{x}$ را اعمال می‌کنیم تا معادله جدایی پذیر مرتبه اول حاصل شود. برای راحتی اگر صورت (الف) رخ داد از $y' = u + xu'$ استفاده می‌کنیم و اگر (ب) رخ داد از $dy = udx + xdu$ استفاده می‌کنیم.
(۳) معادله جدایی پذیر مرتبه اول در (۲) را حل می‌کنیم.

مثال‌های زیر را دنبال کنید تا روش حل معادله همگن را بهتر متوجه شوید.

مثال ۱۰.۳.۲. *معادله دیفرانسیل* $x(y-x)y' = y^2$ *یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. اما داریم* $y' = \frac{y^2}{x(y-x)}$ *و در نتیجه یک بررسی ساده نشان می‌دهد که همگن درجه دو است. حال تغییر متغیر*

$$y = ux \qquad\qquad y' = u + xu'$$

را اعمال می‌کنیم. پس

$$y' = \frac{y^2}{x(y-x)} \Rightarrow u + xu' = \frac{(ux)^2}{x(ux-x)} \Rightarrow$$
$$u + xu' = \frac{u^2}{u-1} \Rightarrow xu' = \frac{u}{u-1}$$

بنابراین با در نظر گرفتن $u' = \frac{du}{dx}$ *، معادله دیفرانسیل جدایی پذیر مرتبه اول* $\frac{dx}{x} - \frac{(u-1)du}{u} = 0$ *حاصل می‌شود. داریم*

$$0 = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(u-1)du}{u} = \int \frac{dx}{x} - \int (1 - \frac{1}{u})du =$$
$$\ln|x| - \int du + \int \frac{du}{u} + c = \ln|x| - u + \ln|u| + c$$

پس جواب عمومی (ساده نشده) به صورت $\ln|x| - \frac{y}{x} + \ln|\frac{y}{x}| + c = 0$ است.

مثال ۱۱.۳.۲. معادله دیفرانسل $(x+3y)dx + (x-y)dy = 0$ مرتبه اول است و یک بررسی ساده نشان می‌دهد که همگن از درجه یک است. حال تغییر متغیر

$$y = ux \qquad\qquad dy = udx + xdu$$

را اعمال می‌کنیم. پس

$$0 = (x+3y)dx + (x-y)dy = (x+3ux)dx + (x-ux)(udx+xdu) =$$
$$xdx + 3xudx + xudx + x^2du - xu^2dx - x^2udu$$

بنابراین بعد از ساده سازی معادله دیفرانسیل جدایی پذیر مرتبه اول

$$\frac{dx}{x} + \frac{(3u+1)du}{3u^2+2u-1} = 0$$

حاصل می‌شود. داریم

$$0 = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(3u+1)du}{3u^2+2u-1} = \ln|x| + \frac{\ln|3u^2+2u-1|}{2} + c$$

پس جواب عمومی (ساده نشده) به صورت $\ln|x| + \frac{\ln|3(\frac{y}{x})^2 + \frac{2y}{x} - 1|}{2} + c = 0$ است.

تذکر ۱۲.۳.۲. همان طور که از مثال‌ها متوجه شده‌اید در حل معادله همگن برای متغییر مستقل (در مثال‌های بالا x) همواره یک انتگرال گیری داریم که حاصل آن مضربی از تابع $\ln x$ است. پس وجود $\ln x$ یک ملاک برای تشخیص این مطلب است که فرآیند حل را به درستی دنبال کرده‌اید.

تذکر ۱۳.۳.۲. گاهی اوقات معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با یک تغییر متغیر به یک معادله دیفرانسیل همگن تبدیل می‌شود. معمولا یا تغییر متغیر از صورت معادله دیفرانسیل مشخص است یا این که آن تغییر متغیر به ما داده می‌شود. به مثال زیر دقت نمایید.

مثال ۱۴.۳.۲. واضح است که معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y^3}{2xy^2 - 2x^2}$ همگن نیست! اما با توجه به نوع معادله و تعریف همگنی می‌توان حدس زد که با تغییر متغیر $y = u^a$ که $a \in \mathbb{R}$ معادله دیفرانسیل همگن شود. برای مشخص کردن مقدار دقیق a تغییر متغیر را اعمال می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\frac{dy}{dx} = au^{a-1}\frac{du}{dx} \;\Rightarrow\; y' = au'u^{a-1}$$

پس

$$y' = \frac{y^3}{2xy^2 - 2x^2} \;\Rightarrow\; au'u^{a-1} = \frac{(u^a)^3}{2x(u^a)^2 - 2x^2}$$
$$\Rightarrow\; u' = \frac{u^{3a}}{au^{a-1}(2xu^{2a} - 2x^2)} = \frac{u^{3a}}{2axu^{3a-1} - 2ax^2u^{a-1}} \qquad (I)$$

پس داریم

$$f(x,u)=u^{3a} \qquad\qquad g(x,u)=2axu^{3a-1}-2ax^2u^{a-1}$$

برای این که معادله دیفرانسیل جدید همگن شود باید $g(x,u)$ تابعی همگن شود. پس باید تساوی توان‌های x و u برقرار شود یعنی

$$1+3a-1=2+a-1 \;\Rightarrow\; 3a=a+1.$$

این یعنی باید $a=\frac{1}{2}$ باشد. با جایگذاری این مقدار مشخص می‌شود که معادله (I) همگن از درجه $\frac{3}{2}$ است و با اعمال تغییر متغیر همگننیف همان مثال ۲.۳.۱۰ است که حل آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

دسته‌ای دیگر از معادلات که با کمی تغییر به یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه اول تبدیل می‌شود به صورت $y'=\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}$ هستند. این معادلات را در دو حالت در نظر می‌گیریم:
(الف) اگر دو خط $ax+by+c=0$ و $dx+ey+f=0$ در نقطه (x_0,y_0) تلاقی داشته باشند، تغییر متغیر $x=X+x_0$ و $y=Y+y_0$ را اعمال می‌کنیم.
(ب) اگر دو خط $ax+by+c=0$ و $dx+ey+f=0$ موازی باشند، از تغییر متغیر $u=ax+by$ استفاده می‌کنیم و به معادله جدایی پذیر می‌رسیم.

مثال‌های زیر را دنبال نمایید.

مثال ۲.۳.۱۵. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=\frac{x+y-1}{x+4y+2}$ همگن نیست. ابتدا محل تلاقی دو خط $x+y-1=0$ و $x+4y+2=0$ را مشخص می‌کنیم که نقطه $(2,-1)$ است و تغییر متغیر*

$$x=X+2 \qquad\qquad y=Y-1$$

را اعمال می‌کنیم. داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+4y+2} \;\Rightarrow\; Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{X+2+Y-1-1}{X+2+4Y-4+2}=\frac{X+Y}{X+4Y}.$$

به وضوح معادله جدید یک معادله دیفرانسیل همگن از درجه یک است. با اعمال تغییر متغیر همگنی

$$Y=vX \qquad\qquad Y'=v+Xv'$$

معادله جدایی پذیر $\frac{dX}{X}+\frac{(4v+1)dv}{4v^2-1}=0$ حاصل می‌شود که جواب عمومی آن

$$0=\int\frac{dX}{X}+\int\frac{(4v+1)dv}{4v^2-1}=\ln|X|+$$
$$\int\frac{4vdv}{4v^2-1}-\int\frac{-dv}{4v^2-1}+c=\ln|X|+\frac{1}{2}\ln|4v^2-1|-$$
$$\frac{1}{2}\ln|\frac{2v-1}{2v+1}|+c$$

است. حال تغییر متغیرها را اعمال می‌کنیم و جواب عمومی (ساده نشده)

$$\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|4(\frac{y+1}{x-2})^2-1|-\frac{1}{2}\ln|\frac{\frac{2(y+1)}{x-2}-1}{\frac{2(y+1)}{x-2}+1}|+c=0$$

است.

مثال ۱۶.۳.۲. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=\frac{x+y}{x+y+1}$ همگن نیست. اما دو خط $x+y=0$ و $x+y+1=0$ موازی هستند و تغییر متغیر*

$$u=x+y \;\;\Rightarrow\;\; u'=1+y'$$

را اعمال می‌کنیم. داریم

$$y'=\frac{x+y}{x+y+1} \;\Rightarrow\; u'-1=\frac{u}{u+1}$$
$$\Rightarrow\; u'=\frac{2u+1}{u+1} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}=\frac{2u+1}{u+1}.$$

به وضوح معادله جدید یک معادله دیفرانسیل جدایی پذیر است و لذا

$$\int dx-\int\frac{u+1}{2u+1}du=c \;\Rightarrow\; x-(\int(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2u+1}))=c \;\Rightarrow$$
$$x-\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\ln|4u+2|=c$$

حال کافی است u را جایگذاری کنیم.

تمرین ۱۷.۳.۲. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=\frac{x-y}{x+y-2}$ را به یک معادله دیفرانسیل همگن تبدیل کنید (حل معادله لازم نیست).*

حل. معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=\frac{x-y}{x+y-2}$ همگن نیست. پس ابتدا محل تلاقی دو خط $x-y=0$ و $x+y-2=0$ را مشخص می‌کنیم که نقطه $(1,1)$ است و تغییر متغیر

$$x=X+1 \qquad\qquad y=Y+1$$

را اعمال می‌کنیم. حال چون $dx=dX$ و $dy=dY$، لذا با جایگذاری در معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y-2}$ داریم

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+1-Y-1}{X+1+Y+1-2}=\frac{X-Y}{X+Y}.$$

به وضوح معادله جدید یک معادله دیفرانسیل همگن از درجه یک است.

تمرین ۱۸.۳.۲. *جواب خصوصی معادله دیفرانسیل*

$$(x - \sin y + 3)dx + (x - 2\sin y)\cos y dy = 0$$

را که از نقطه $(1, \pi)$ *می‌گذرد را بیابید.*

حل. معادله به ظاهر پیچیده است و حال و هوای معادله دیفرانسیل همگن را ندارد! با تغییر متغیر $\sin y = u$ شروع می‌کنیم. پس داریم

$$y' \cos y = u' \ \Rightarrow \ \cos y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \ \Rightarrow \ \cos y dy = du.$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل اصلی داریم

$$(x - u + 3)dx + (x - 2u)du = 0 \ \Rightarrow \ u' = \frac{x - u + 3}{2u - x}.$$

محل تلاقی دو خط $2u - x = 0$ و $x - u + 3 = 0$ نقطه $(-6, -3)$ است و داریم

$$x = X - 6 \qquad\qquad u = U - 3$$

پس $u' = \frac{du}{dx} = \frac{x-u+3}{2u-x}$ ودر نتیجه

$$\frac{dU}{dX} = U' = \frac{X - 6 - U + 3 + 3}{2U - 6 - X + 6} = \frac{X - U}{2U - X}.$$

اکنون یک معادله دیفرانسیل همگن درجه یک در اختیار داریم و تغییر متغیر همگنی را اعمال می‌کنیم

$$U = vX \qquad\qquad U' = v + Xv'$$

پس $U' = \frac{X-U}{2U-X}$ و در نتیجه

$$v + Xv' = \frac{X - vX}{2vX - X} = \frac{1 - v}{2v - 1}.$$

با ساده سازی معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

$$\frac{dX}{X} = \frac{2v - 1}{1 - 2v^2} dv$$

حاصل می‌شود. حال داریم

$$\int \frac{dX}{X} = \int \frac{2v - 1}{1 - 2v^2} dv =$$
$$\int \frac{2v}{1 - 2v^2} - \int \frac{1}{1 - 2v^2} = \int \frac{2v}{1 - 2v^2} - \int \frac{\frac{1}{2}}{1 - \sqrt{2}v} - \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + \sqrt{2}v}.$$

لذا
$$\ln|X|+c=-\frac{\ln|1-2v^2|}{2}+\frac{\ln|1-\sqrt{2}v|}{2\sqrt{2}}-\frac{\ln|1+\sqrt{2}v|}{2\sqrt{2}}.$$
اما دنبال جواب خصوصی هستیم پس باید c را معلوم کنیم. چون $y=\pi$ است پس $u=0$. اما $x=1$ پس $X=7$ و در نتیجه $v=0$ زیرا $u=0$. حال با جایگذاری در جواب عمومی بر حسب v و X داریم که $c=-\ln 7$. بنابراین جواب خصوصی مد نظر (بعد از جایگذاری تغییرات متغیر و $v=\frac{U}{X}=\frac{u+3}{x+6}=\frac{\sin y+3}{x+6}$)

$$\ln|x+6|-\ln 7=-\frac{\ln|1-2(\frac{\sin y+3}{x+6})^2|}{2}+\frac{\ln|1-\sqrt{2}(\frac{\sin y+3}{x+6})|}{2\sqrt{2}}-\frac{\ln|1+\sqrt{2}(\frac{\sin y+3}{x+6})|}{2\sqrt{2}}$$

است.

۴.۲ معادله دیفرانسیل کامل

در این بخش یکی از معروفترین معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را معرفی می‌کنیم و سپس روش حل این معادلات را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱.۴.۲. *فرض کنیم بتوانیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را به شکل*
$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (I)$$
بنویسیم. گوییم معادله دیفرانسیل (I) کامل است هرگاه تابعی دو متغییره مانند $f(x,y)$ موجود باشد که
$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=P(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=f_y=Q(x,y)$$

مثال ۲.۴.۲. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(2xy+3)dx+x^2dy=0$ کامل است. زیرا اگر فرض کنیم $f(x,y)=x^2y+3x$ آنگاه*
$$f_x=P(x,y)=2xy+3 \qquad f_y=Q(x,y)=x^2.$$
حتی می‌توانیم $f(x,y)=x^2y+3x+1$ را هم در نظر بگیریم. بنابراین لزوما $f(x,y)$ یکتا نیست.

مثال ۳.۴.۲. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(3\cos y)dx+(3y^2-3x\sin y)dy=0$ کامل است. زیرا اگر فرض کنیم $f(x,y)=3x\cos y+y^3$ آنگاه*
$$f_x=P(x,y)=3\cos y \qquad f_y=Q(x,y)=3y^2-3x\sin y.$$

همانطور که از مثال‌ها مشخص است، حدس زدن $f(x,y)$ کار ساده‌ای نیست و این سبب می‌شود که تشخیص معادله دیفرانسیل کامل مرتبه اول دشوار به نظر آید. اما قضیه زیر نگرانی ما را در این مورد بر طرف می‌کند و تشخیص معادله دیفرانسیل کامل را آسان می‌کند. لازم به ذکر است که این قضیه را اثبات نمی‌کنیم و بدون اثبات آن را می‌پذیریم. می‌دانیم که اگر معادله دیفرانسیل (I) کامل باشد آنگاه $f_x = P(x,y)$ و $f_y = Q(x,y)$. انتظار داریم که $f_{xy} = \frac{\partial P}{\partial y}$ و $f_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ با هم برابر باشند. در ریاضی عمومی دیده‌اید که یک شرط این تساوی پیوستگی است. لذا قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲.۴.۴. *فرض کنیم بتوانیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را به شکل*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (I)$$

بنویسیم. همچنین فرض کنیم P، Q، $\frac{\partial P}{\partial y}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ در ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ پیوسته باشند. در این صورت معادله (I) کامل است اگر و تنها اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

مثال ۲.۴.۵. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(2xy+3)dx + x^2dy = 0$ کامل است. زیرا شرایط قضیه ۲.۴.۴ بر قرار است و داریم $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

مثال ۲.۴.۶. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(x+y)dx + xdy = 0$ کامل است. زیرا شرایط قضیه ۲.۴.۴ بر قرار است و داریم $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

مثال ۲.۴.۷. *معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(x+\cos y)dx + \sin x dy = 0$ کامل نیست. زیرا فرض‌های قضیه ۲.۴.۴ بر قرار است اما $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x$.*

صورت کلی معادله دیفرانسیل کامل مرتبه اول:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_x$$

روش یافتن جواب عمومی معادله کامل مرتبه اول:
چون معادله کامل است، فرض می‌کنیم تابعی مانند $f(x,y)$ موجود باشد که $f_x = P(x,y)$.
از تساوی آخر نسبت به x انتگرال می‌گیریم تا $f(x,y)$ معلوم شود و دقت می‌کنیم که ثابت انتگرال گیری تابعی بر حسب y است مانند $h(y)$. حال مقدار $h(y)$ را پیدا و جایگذاری می‌کنیم. اکنون $f(x,y)=c$ جواب نهایی است.
توجه: می‌توانیم به جای $f_x = P(x,y)$ از $f_y = Q(x,y)$ استفاده کنیم و در مراحل بعدی انتگرال گیری نسبت به x و y به صورت مناسب تغییر دهیم.

مثال‌های زیر روند حل یک معادله کامل را بهتر برای شما شرح می‌دهد.

مثال ۲.۴.۸. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(2xy+3)dx + x^2dy = 0$ را پیدا کنیم. این معادله از مرتبه اول و معادله کامل است. زیرا شرایط قضیه ۲.۴.۴ بر قرار است و داریم*

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$. فرض می‌کنیم تابع $f(x, y)$ چنان وجود دارد که $f_x = P(x, y) = 2xy + 3$.
از طرفین رابطه بالا نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\int^x f_x dx = f(x, y) = \int^x (2xy + 3)dx = x^2y + 3x + h(y).$$

اکنون باید $h(y)$ را معلوم کنیم. از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$h'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 3x) = Q(x, y) - x^2 = x^2 - x^2 = 0.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y h'(y)dy = h(y) = \int^y 0dy = c'.$$

بنابراین $x^2y + 3x + c' = c$ یا معادلاً $x^2y + 3x = c$ جواب عمومی است.

مثال ۹.۴.۲. می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\cos y + (y^2 - x\sin y)y' = 0$ را پیدا کنیم. این معادله از مرتبه اول است. معادله را به صورت $\cos y dx + (y^2 - x\sin y)dy = 0$ باز نویسی می‌کنیم. این صورت یک معادله کامل است. زیرا شرایط قضیه ۴.۴.۲ بر قرار است و داریم $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y = \frac{\partial P}{\partial y}$. فرض می‌کنیم تابع $f(x, y)$ موجود باشد که $f_x = P(x, y) = \cos y$.
از طرفین رابطه آخر نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\int^x f_x dx = f(x, y) = \int^x (\cos y)dx = x\cos y + h(y).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$h'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}(x\cos y) = Q(x, y) + x\sin y = y^2 - x\sin y + x\sin y = y^2.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y h'(y)dy = h(y) = \int^y y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c'.$$

بنابراین $x\cos y + \frac{y^3}{3} = c$ جواب عمومی است.

مثال بالا را با کمک "توجه" که در کادر گفتیم حل می‌کنیم تا هم منظور دقیق از آنچه در توجه آمده است را درک کنید و هم مشاهده کنید که جواب تغییری نمی‌کند. این که از کدام روش استفاده می‌کنید مطلبی تجربی است و معمولا آن حالتی را در پیش بگیرید که انتگرال گیری و مشتق گیری آسانتری دارد.

مثال ۱۰.۴.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $\cos y + (y^2 - x\sin y)y' = 0$ *را پیدا کنیم. این معادله از مرتبه اول است. معادله را به صورت* $\cos y dx + (y^2 - x\sin y)dy = 0$ *باز نویسی می‌کنیم. این صورت یک معادله کامل است. زیرا شرایط قضیه ۴.۴.۲ بر قرار است و داریم* $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ *. حال فرض می‌کنیم تابع* $f(x,y)$ *چنان موجود باشد که داشته باشیم* $f_y = Q(x,y) = y^2 - x\sin y$ *. از طرفین رابطه آخر نسبت به* y *انتگرال می‌گیریم*

$$\int^y f_y dy = f(x,y) = \int^y (y^2 - x\sin y)dy = \frac{y^3}{3} + x\cos y + h(x).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به x *مشتق می‌گیریم*

$$h'(x) = f_x - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y^3}{3} + x\cos y) = P(x,y) - \cos y = \cos y - \cos y = 0.$$

از رابطه آخر نسبت به x *انتگرال می‌گیریم*

$$\int^y h'(x)dx = h(x) = \int^x 0dx = c'.$$

بنابراین $x\cos y + \frac{y^3}{3} + c' = c$ *یا معادلا* $x\cos y + \frac{y^3}{3} = c$ *جواب عمومی است.*

تمرین ۱۱.۴.۲. *مقدار* $a \in \mathbb{R}$ *را چنان مشخص نمایید که معادله* $y' = \frac{x - xy^2}{x^2y + ay}$ *کامل شود.*

حل. معادله را به شکل $(x - xy^2)dx + (-ay - x^2y)dy = 0$ بازنویسی می‌کنیم. شرایط قضیه ۴.۴.۲ برقرار است. پس اگر معادله بخواهد کامل باشد باید داشته باشیم $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. بنابراین داریم $-2xy = -2xy$. شرط لازم و کافی کامل بودن معادله هیچ ربطی به مقدار a ندارد و برای هر عدد حقیقی a معادله کامل است.

تمرین ۱۲.۴.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $(ye^x + e^y)dx + (e^x + xe^y)dy = 0$ *را بیابید.*

حل. این معادله از مرتبه اول و معادله کامل است. زیرا شرایط قضیه ۴.۴.۲ بر قرار است و داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + e^y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که $f_x = P(x,y) = ye^x + e^y$. از طرفین رابطه آخر نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\int^x f_x dx = f(x,y) = \int^x (ye^x + e^y)dx = ye^x + xe^y + h(y).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$h'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}(ye^x + xe^y) = Q(x,y) - e^x - xe^y = e^x + xe^y - e^x - xe^y = 0.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y h'(y)dy = h(y) = \int^y 0dy = c'.$$

بنابراین $ye^x + xe^y = c$ جواب عمومی است.

۵.۲ معادلات قابل تبدیل به معادلات کامل (فاکتور انتگرال)

در برخی مواقع ممکن است معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ کامل نباشد اما با ضرب یک تابع مناسب تبدیل به یک معادله دیفرانسیل کامل شود. یافتن چنین تابعی آسان نیست! در این بخش در حالت‌های بسیار خاصی یافتن چنین توابعی را آموزش می‌دهیم.

تعریف ۱.۵.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ را به صورت*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

نوشته‌ایم. اگر این معادله کامل نباشد ولی با ضرب تابعی ناصفر مانند $h(x, y)$ تبدیل به یک معادله دیفرانسیل کامل شود آنگاه به تابع ناصفر $h(x, y)$ فاکتور انتگرال می‌گوییم.

مثال ۲.۵.۲. *معادله دیفرانسیل $ydx - xdy = 0$ یک معادله مرتبه اول است. شرایط قضیه ۲.۴.۴ برقرار است اما داریم $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ یعنی این معادله کامل نیست! اما با ضرب طرفین در تابع ناصفر $h(x, y) = \frac{1}{x^2}$ داریم $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$. حال معادله جدید شرایط قضیه ۲.۴.۴ را دارد (ناحیه D را مجموعه نقاط پیوستگی در نظر می‌گیریم) و داریم $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ یعنی معادله جدید کامل است و $h(x, y) = \frac{1}{x^2}$ فاکتور انتگرال است. این فاکتور انتگرال لزوما یکتا نیست! مثلا این بار با ضرب طرفین در تابع ناصفر $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$ داریم $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$. حال معادله جدید در شرایط قضیه ۲.۴.۴ صدق می‌کند (ناحیه D را مجموعه نقاط پیوستگی در نظر می‌گیریم) و داریم $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. یعنی معادله جدید کامل است و $h(x, y) = \frac{1}{y^2}$ فاکتور انتگرال دیگری برای معادله است.*

اما این مطلب که فاکتور انتگرال چگونه جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل که کامل نیست را به دست می‌دهد در قضیه زیر می‌آوریم. قضیه زیر در حقیقت دلیل اصلی ما برای جستجوی فاکتور انتگرال است.

قضیه ۳.۵.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ را به صورت*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

نوشته‌ایم. اگر معادله دیفرانسیل کامل نباشد ولی دارای فاکتور انتگرال $h = h(x, y)$ باشد و معادله دیفرانسیل $hP(x, y)dx + hQ(x, y)dy = 0$ دارای جواب عمومی $f(x, y) = c$ باشد آنگاه $f(x, y) = c$ جواب عمومی $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ نیز است.

اثبات. داریم که

$$hP(x,y)dx + hQ(x,y)dy = 0 \ \Rightarrow \ h[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = 0.$$

اما $f(x,y) = c$ معادله بالا را صفر می‌کند و چون h صفر نیست، باید عبارت داخل کروشه را صفر کند و این یعنی $f(x,y) = c$ جواب معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ است. $\square$

مثال ۴.۵.۲. *می‌خواهیم معادله دیفرانسیل $ydx - xdy = 0$ را حل کنیم. در مثال‌های قبل مشاهده شد که $h(x,y) = \frac{1}{y^2}$ یک فاکتور انتگرال برای این معادله دیفرانسیل است. پس طبق قضیه ۲ .۳.۵، برای حل این معادله کافی است معادله $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ که کامل است را حل کنیم. طبق آنچه در بخش قبل برای حل معادله کامل آموخته‌ایم، فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که $f_x = P(x,y) = \frac{1}{y}$. از طرفین رابطه بالا نسبت به x انتگرال می‌گیریم*

$$\int^x f_x dx = f(x,y) = \int^x \frac{1}{y}dx = \frac{x}{y} + s(y).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$s'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y}) = Q(x,y) + \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 0.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y s'(y)dy = s(y) = \int^y 0dy = c'.$$

بنابراین $\frac{x}{y} = c$ جواب عمومی مورد نظر است. دقت شود که مشاهده کرده‌اید که تابع ناصفر $h(x,y) = \frac{1}{x^2}$ نیز فاکتور انتگرال برای معادله $ydx - xdy = 0$ است. استفاده از این فاکتور انتگرال تغییری در جواب عمومی نمی‌دهد (بررسی کنید).

دقت شود که قضیه خاصی در دسترس نداریم تا با کمک آن به صورت دقیق دست کم یک فاکتور انتگرال را معلوم کنیم. اما قضیه زیر وجود فاکتور انتگرال را ضمانت می‌کند.

قضیه ۵.۵.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y') = 0$ را به صورت*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

نوشته‌ایم. اگر معادله دیفرانسیل کامل نباشد و $f(x,y) = c$ جواب عمومی این معادله دیفرانسیل باشد آنگاه یک فاکتور انتگرال برای معادله وجود دارد.

اکنون وقت آن است تا در موارد خیلی خاصی روش ساختن فاکتور انتگرال را در اختیار شما قرار دهیم.

روش ساختن فاکتور انتگرال

در این قسمت، فرض کنیم که معادله دیفرانسیل مرتبه اول $F(x,y,y')=0$ را به صورت

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

نوشته‌ایم و این معادله دیفرانسیل کامل نیست. در ادامه چندین نمونه از نحوه ساختن فاکتورهای انتگرال مشهور برای معادله دیفرانسیل بالا را در قضایایی خواهیم آورد. قضیه‌های زیر را بدون اثبات می‌پذیریم هر چند اثبات‌ها سر راست هستند.

قضیه ۲.۵.۶. *اگر $\frac{1}{Q}[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}]=s(x)$ باشد آنگاه معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ دارای فاکتور انتگرال به صورت $e^{\int s(x)dx}$ است.*

نمادگذاری ۲.۵.۷. *از این لحظه تا آخر همین بخش (و هر جا که ردپایی از معادله دیفرانسیل کامل باشد)، برای راحتی فرض کنیم که $\Delta:=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$.*

مثال ۲.۵.۸. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$ برای $x>0$ را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. شرایط قضیه ۲.۴.۴ بر قرار است و داریم $\frac{\partial P}{\partial y}=3x+2y\neq 2x+y=\frac{\partial Q}{\partial x}$. بنابراین معادله کامل نیست اما داریم*

$$\frac{1}{Q}\Delta=\frac{1}{x^2+xy}(x+y)=\frac{1}{x(x+y)}(x+y)=\frac{1}{x}=s(x).$$

بنابراین معادله فاکتور انتگرال به شکل

$$h=h(x,y)=e^{\int s(x)dx}=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$$

دارد. معادله را در فاکتور انتگرال ضرب می‌کنیم تا معادله کامل حاصل شود

$$(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0.$$

حال فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که $f_x=P(x,y)=3x^2y+xy^2$. از طرفین رابطه آخر نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\int^x f_xdx=f(x,y)=\int^x(3x^2y+xy^2)dx=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+k(y).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$k'(y)=f_y-\frac{\partial}{\partial y}(x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2)=$$
$$Q(x,y)-x^3-x^2y=x^3+x^2y-x^3-x^2y=0.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y k'(y)dy = k(y) = \int^y 0dy = c'.$$

بنابراین $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$ جواب عمومی است

قضیه ۹.۵.۲. اگر $\frac{-1}{P}[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}] = s(y)$ باشد آنگاه معادله $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ دارای فاکتور انتگرال به صورت $e^{\int s(y)dy}$ است.

مثال ۱۰.۵.۲. می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$(\frac{y}{x}\ln(\ln y) + \frac{2}{3}xy^4)dx + (\frac{\ln x}{\ln y} + x^2y^3)dy = 0$$

را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. شرایط قضیه ۴.۴.۲ برای ناحیه مناسب D برقرار است و داریم $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\ln(\ln y)}{x} + \frac{1}{x\ln y} + \frac{8xy^3}{3} \neq \frac{1}{x\ln y} + 2xy^3 = \frac{\partial Q}{\partial x}$. بنابراین معادله کامل نیست اما داریم

$$\frac{-1}{P}\Delta = \frac{-1}{\frac{y}{x}\ln(\ln y) + \frac{2}{3}xy^4}(\frac{\ln(\ln y)}{x} + 2xy^3) = \frac{-1}{y} = s(y).$$

بنابراین معادله فاکتور انتگرال به شکل

$$h = h(x,y) = e^{\int s(y)dy} = e^{\int \frac{-dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{-1}{y}$$

دارد. معادله را در فاکتور انتگرال ضرب می‌کنیم تا معادله کامل حاصل شود

$$(\frac{-1}{x}\ln(\ln y) - \frac{2}{3}xy^3)dx + (\frac{-\ln x}{y\ln y} - x^2y^2)dy = 0$$

حال فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که $f_x = P(x,y) = \frac{-1}{x}\ln(\ln y) - \frac{2}{3}xy^3$. از طرفین رابطه آخر نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\int^x f_x dx = f(x,y) = \int^x (\frac{-\ln(\ln y)}{x} - \frac{x^2y^3}{3})dx =$$
$$-\ln x\ln(\ln y) - \frac{x^2y^3}{3} + k(y).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$k'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}(-\ln x \ln(\ln y) - \frac{x^2y^3}{3}) =$$
$$Q(x,y) + \frac{\ln x}{y\ln y} + x^2y^2 = \frac{-\ln x}{y\ln y} - x^2y^2 + \frac{\ln x}{y\ln y} + x^2y^2 = 0.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y k'(y)dy = k(y) = \int^y 0dy = c'.$$

بنابراین $c = -\ln x \ln(\ln y) - \frac{x^2y^3}{3}$ *جواب عمومی است.*

تمرین ۱۱.۵.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل*

$$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$$

را پیدا کنید.

حل. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. شرایط قضیه ۴.۴.۲ بر قرار است و داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y \neq \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

بنابراین معادله کامل نیست اما داریم

$$\frac{1}{Q}\Delta = \frac{1}{x\cos y - y\sin y}(x\cos y - y\sin y) = 1 = s(x).$$

بنابراین معادله فاکتور انتگرال به شکل

$$h = h(x,y) = e^{\int s(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

دارد. معادله را در فاکتور انتگرال ضرب می‌کنیم تا معادله کامل حاصل شود

$$e^x(x\sin y + y\cos y)dx + e^x(x\cos y - y\sin y)dy = 0.$$

حال فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که

$$f_x = P(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y) = e^x x\sin y + e^x y\cos y.$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به x انتگرال می‌گیریم (انتگرال گیری جز به جز)

$$\int^x f_x dx = f(x,y) = \int^x (e^x x\sin y + e^x y\cos y)dx =$$
$$(x-1)e^x\sin y + e^x y\cos y + k(y).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$k'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}((x-1)e^x \sin y + e^x y \cos y) =$$
$$Q(x,y) - (x-1)e^x \cos y - e^x \cos y + e^x y \sin y = e^x(x \cos y - y \sin y) -$$
$$(x-1)e^x \cos y - e^x \cos y + e^x y \sin y = 0.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y k'(y)dy = k(y) = \int^y 0dy = c'.$$

بنابراین $(x-1)e^x \sin y + e^x y \cos y = c$.

تمرین ۱۲.۵.۲. *معادله دیفرانسیل $(x^4y^2 - y)dx + (x^2y^4 - x)dy = 0$ را با کمک فاکتور انتگرالی به شکل $x^s y^l$ حل کنید.*

حل. معادله را در فاکتور انتگرال ضرب می‌کنیم تا معادله کامل حاصل شود

$$(x^{s+4}y^{l+2} - x^s y^{l+1})dx + (x^{s+2}y^{l+4} - x^{s+1}y^l)dy = 0 \qquad (*)$$

حال باید s و l را معلوم کنیم. شرایط قضیه ۴.۴.۲ بر قرار است و معادله $(*)$ کامل است پس

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (l+2)x^{s+4}y^{l+1} - (l+1)x^s y^l =$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (s+2)x^{s+1}y^{l+4} - (s+1)x^s y^l.$$

ضرایب هم درجه‌ها باید مساوی شوند و ضرایب توان‌های نابرابر باید صفر باشد یعنی

$$\begin{cases} l+2 = s+2 \\ l+2 = 0 \\ s+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ l = s = -2.$$

پس $(xy)^{-2}$ فاکتور انتگرال است. با جایگذاری l و s در $(*)$ داریم

$$(x^2 - x^{-2}y^{-1})dx + (y^2 - x^{-1}y^{-2})dy = 0.$$

حال فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که $f_y = Q(x,y) = y^2 - x^{-1}y^{-2}$. از طرفین رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y f_y dy = f(x,y) = \int^y (y^2 - x^{-1}y^{-2})dy = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{xy} + k(x).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$k'(x) = f_x - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{y^3}{3} + \frac{1}{xy}) =$$
$$P(x,y) + \frac{1}{x^2y} = x^2 - x^{-2}y^{-1} + \frac{1}{x^2y} = x^2.$$

از رابطه آخر نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\int^y k'(x)dx = k(x) = \int^x x^2dx = \frac{x^3}{3} + c'.$$

بنابراین $\frac{y^3}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{x^3}{3} = c$.

تمرین ۱۳.۵.۲. *برای معادله دیفرانسیل* $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$ *یک فاکتور انتگرال* $h(u)$ *پیدا کنید که* $u = y^2 - x^2$ *است.*

حل. فرض کنیم $h = h(u)$ فاکتور انتگرال باشد پس $h(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xyhdy = 0$ کامل است و داریم $\frac{\partial}{\partial y}(h(x^2 + y^2 + 1)) = \frac{\partial}{\partial x}(-2xyh)$ یعنی

$$h\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 1) + (x^2 + y^2 + 1)\frac{\partial h}{\partial y} = h\frac{\partial}{\partial x}(-2xy) - 2xy\frac{\partial h}{\partial x}.$$

چون فاکتور انتگرال ناصفر است، طرفین معادله آخر را بر h تقسیم می‌کنیم

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 1) + \frac{1}{h}(x^2 + y^2 + 1)\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) + \frac{-1}{h}2xy\frac{\partial h}{\partial x}.$$

مقدارها را جایگذاری می‌کنیم و هم زمان از قوانین مشتق گیری استفاده می‌کنیم

$$2y + (x^2 + y^2 + 1)\frac{\partial(\ln h)}{\partial y} = -2y - 2xy\frac{\partial(\ln h)}{\partial x}.$$

اما طبق قوانین مشتق و این مطلب که h تابعی یک متغییره بر حسب u است داریم

$$\begin{cases} \frac{\partial(\ln h)}{\partial y} = \frac{h'}{h}.\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\frac{h'}{h} \\ \frac{\partial(\ln h)}{\partial x} = \frac{h'}{h}.\frac{\partial u}{\partial x} = -2x\frac{h'}{h} \end{cases}$$

پس با جایگذاری داریم

$$2y + (x^2 + y^2 + 1)(2y\frac{h'}{h}) = -2y - 2xy(-2x\frac{h'}{h}).$$

با ساده سازی داریم

$$\frac{h'}{h} = \frac{2}{x^2 - y^2 - 1} = \frac{-2}{u+1} \Rightarrow \ln h = -2\ln(u+1) = \ln(u+1)^{-2}.$$

پس $h(u) = (u+1)^{-2}$ است.

۶.۲ تغییر نقش متغیر مستقل و وابسته و تغییر متغیرهای دیگر

در بسیاری از مواقع معادله دیفرانسیل به صورت شناخته شده‌ای که تا کنون آموخته‌ایم نیست. اما با تغییر نقش متغیر مستقل x و وابسته y معادله دیفرانسیل شکل مطلوبی پیدا می‌کند. یعنی معادلات دیفرانسیل نسبت به x خطی می‌شوند و می‌توان x را تابعی از y در نظر گرفت و صورت معادله را به صورت خطی مرتبه اول $x' + p(y)x = g(y)$ تبدیل کرد. گاهی هم با کمی تغییر در معادله به معادله‌ای مشهور می‌رسیم که می‌توان x را تابعی از y در نظر گرفت. در اکثر مواقع معادله دیفرانسیل برنولی سوالات امتحانی این چنین است یعنی باید x را تابعی از y در نظر گرفت! صورت کلی یک معادله برنولی x تابعی از y به شکل $x' + p(y)x = x^n g(y)$ است که با تغییر متغیر $u = x^{1-n}$ تبدیل به معادله خطی می‌شود. دقت شود که اجازه این کار را در حالت کلی نداریم مگر اینکه تابع y وارونپذیر باشد. در هر صورت می‌دانیم که اگر تابع y در بازه باز شامل x_0 مشتق پیوسته داشته باشد و $y'(x_0) \neq 0$ آنگاه یک بازه چنان وجود دارد که y وارونپذیر است (چرا؟). از این رو خود را مشغول این مطلب نمی‌کنیم.

مثال ۱.۶.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'(x\sin y + 2\sin(2y)) = 1$ را پیدا کنیم. معادله دیفرانسیل صورت خطی شناخته شده را ندارد. اما با تغییرات*

$$x\sin y + 2\sin(2y) = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} = x' \;\Rightarrow\; x' - (\sin y)x = 2\sin(2y).$$

به صورت خطی x تابعی از y مبدل می‌شود. پس $\mu = e^{\int p(y)dy} = e^{\int -\sin y dy} = e^{\cos y}$. لذا

$$\mu x = \int \mu g(y)dy + c \;\;\Rightarrow$$
$$e^{\cos y}\, x = \int 2\sin(2y)e^{\cos y}dy + c = -4e^{\cos y}\cos y + 4e^{\cos y} + c$$

و لذا $x = e^{-\cos y}(-4e^{\cos y}\cos y + 4e^{\cos y} + c)$ جواب عمومی است.

مثال ۲.۶.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $dx + (x - x^2y)dy = 0$ را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل برنولی، x تابعی از y است! یعنی $x' + x = x^2y$. در این معادله برنولی $p(y) = 1$ و $g(y) = y$ است. تغییر متغیر $u = x^{1-n} = x^{-1}$ را اعمال می‌کنیم $u' = -x^{-2}x'$. بنابراین با ضرب معادله در $-x^{-2}$ داریم*

$$-x^{-2}x' - x^{-2}x = -y \;\Rightarrow\; u' - u = -y$$

به صورت خطی u تابعی از y مبدل می‌شود. پس $\mu = e^{\int p_0(y)dy} = e^{\int -dy} = e^{-y}$. لذا

$$\mu u = \int \mu g_0(y)dy + c \;\;\Rightarrow\;\; e^{-y}\, u = \int -ye^{-y}dy + c = (y-1)e^{-y} + c$$

و لذا $x^3 = e^y((y-1)e^{-y} + c)$ جواب عمومی است.

در بخش‌های قبل حل معادلات را با کمک تغییر متغیر در چندین تمرین و مثال دیدیم. در ادامه این روش حل معادلات را به صورت رسمی‌تر بیان کنیم تا همواره آن را به عنوان یک روش حل گوشه ذهنتان داشته باشید. معمولا تغییر متغیر در خود معادله دیفرانسیل وجود دارد.

مثال ۳.۶.۲. *می‌خواهیم معادله دیفرانسیل $y'+2x=2(x^2+y-1)^{\frac{2}{3}}$ را حل کنیم. قرار می‌دهیم $u=x^2+y-1$ و لذا $u'=2x+y'$. بنابراین معادله جدایی پذیر $u'=2u^{\frac{2}{3}}$ حاصل می‌شود و لذا $3u^{\frac{1}{3}}=3(x^2+y-1)^{\frac{2}{3}}=2x+c$ جواب عمومی است.*

مثال ۴.۶.۲. *می‌خواهیم معادله $(x+y)^2(xdy-ydx)+(y^2-2x^2(x+y)^2)(dx+dy)=0$ را حل کنیم. ظاهرا پیچیده است! اما با فرض $v=x+y$ و $w=\frac{y}{x}$ داریم که $dv=dx+dy$ و $dw=\frac{xdy-ydx}{x^2}$. با جایگذاری در معادله به $v^2(x^2dw)+(y^2-2x^2v^2)dv=0$ می‌رسیم. با تقسیم معادله آخر بر x^2 به معادله دیفرانسیل همگن از درجه دو $v^2dw+(w^2-2v^2)dv=0$ می‌رسیم که با تغییر متغیر $w=tv$ به همگن جدایی پذیر تبدیل می‌شود که حل آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.*

تمرین ۵.۶.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=\frac{3x^2}{x^3+y+1}$ را پیدا کنید.*

حل. این یک معادله دیفرانسیل برنولی، x تابعی از y است! معادله دیفرانسیل صورت خطی شناخته شده را ندارد. اما با تغییرات

$$\frac{x^3+y+1}{3x^2}=\frac{1}{y'}=\frac{dx}{dy}=x' \ \Rightarrow\ x'-\frac{x}{3}=x^{-2}(\frac{y+1}{3}).$$

یک معادله برنولی ظاهر می‌شود. در این معادله برنولی $p(y)=\frac{-1}{3}$ و $g(y)=\frac{y+1}{3}$ است. تغییر متغیر $u=x^{1-n}=x^3$ را اعمال می‌کنیم $u'=3x'x^2$. بنابراین با ضرب معادله در $3x^2$ داریم

$$3x^2x'-x^3=y+1 \ \Rightarrow\ u'-u=y+1$$

به صورت خطی u تابعی از y مبدل می‌شود. پس $\mu=e^{\int p_0(y)dy}=e^{\int -dy}=e^{-y}$. لذا

$$\mu u=\int \mu g_0(y)dy+c \ \Rightarrow$$
$$e^{-y}\,u=\int 2\sin(y+1)e^{-y}dy+c=-ye^{-y}-2e^{-y}+c$$

و لذا $x^3=e^y(-ye^{-y}-2e^{-y}+c)$ جواب عمومی است.

تمرین ۶.۶.۲. *معادله دیفرانسیل $\sec^2 x(2\tan x-2\cos y)dx+\tan x\sin ydy=0$ را حل کنید.*

حل. فرض می‌کنیم که $u=\tan x$ و $v=\cos y$. لذا $du=\sec^2 xdx$ و $dv=-\sin ydy$. با جایگذاری داریم $(3u-2v)du-udv=0$ یا معادلا $\frac{dv}{du}+\frac{2}{u}v=3$. این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است و $\mu=e^{\int\frac{3}{u}du}=u^2$. لذا $(u^2v)'=3u^2$ و داریم $u^2v=u^3+c$. بنابراین $\tan^2 x\cos y=\tan^3 x+c$ جواب عمومی است.

۷.۲ قضیه وجود جواب و یکتایی جواب

تا کنون راجع به حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به حد کافی گفته‌ایم. اما در مورد وجود جواب اصلا صحبتی نشده است. در این فصل کمی در این مورد خواهیم گفت. به مثال‌های زیر دقت کنید.

مثال ۱.۷.۲. *معادله دیفرانسیل $(y')^2 + 4 = 0$ در اعداد حقیقی جواب ندارد!*

مثال ۲.۷.۲. *معادله دیفرانسیل $(y')^2 + y^2 = 0$ با شرط $y(0) = 1$ اصلا جواب ندارد! چون جمع مثبت‌ها صفر شده است باید $y^2 = 0$ باشد و در نتیجه $y = 0$ باشد و این جواب عمومی در شرط $y(0) = 1$ صدق نمی‌کند.*

مثال ۳.۷.۲. *معادله دیفرانسیل $xy' - y = -2$ یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است و طبق آنچه که آموخته‌اید دارای جواب عمومی $y = 2 + cx$ می‌باشد. این معادله با شرط $y(0) = 2$ بی شمار جواب دارد!*

مثال ۴.۷.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = 1$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است و طبق آنچه که آموخته‌اید دارای جواب عمومی $y = x + c$ می‌باشد. این معادله با شرط $y(0) = 2$ فقط و فقط یک جواب دارد!*

پس یک سوال طبیعی ایجاد می‌شود و آن اینکه معادله دیفرانسیل $F(x, y, y') = 0$ با شرط $y(x_0) = y_0$ در چه زمانی جواب دارد؟
برای پاسخ به پرسش بالا به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۵.۷.۲. *فرض کنیم تابع $f(x, y)$ در ناحیه مستطیلی D*

$$x_1 \leq x \leq x_2 \qquad y_1 \leq y \leq y_2$$

تعریف شده باشد. گوییم $f(x, y)$ روی D کراندار است هرگاه عدد حقیقی K چنان موجود باشد که برای هر $(x, y) \in D$ داشته باشیم $|f(x, y)| \leq K$.

اکنون قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۶.۷.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل $F(x, y, y') = 0$ را به صورت $y' = f(x, y)$ نوشته‌ایم و تابع $f(x, y)$ در ناحیه مستطیلی D*

$$x_1 \lneq x \lneq x_2 \qquad y_1 \lneq y \lneq y_2$$

تعریف شده باشد. اگر $f(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در D پیوسته و کراندار باشند آنگاه یک بازه باز مانند $(x_0 - h, x_0 + h)$ چنان وجود دارد که معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ دارای جواب یکتا است.

تذکر ۷.۷.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل $F(x, y, y') = 0$ را به صورت $y' = f(x, y)$ نوشته‌ایم و تابع $f(x, y)$ در ناحیه مستطیلی D*

$$x_1 \leq x \leq x_2 \qquad y_1 \leq y \leq y_2$$

تعریف شده باشد (به کوچکتر یا مساوی $\leq$ دقت شود!). اگر $f(x,y)$ در D پیوسته باشد آنگاه یک بازه (x_0-h, x_0+h) چنان وجود دارد که معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ دارای دست کم یک جواب است. اگر $\frac{\partial f}{\partial y}$ در D پیوسته باشد آنگاه یک بازه (x_0-h, x_0+h) چنان وجود دارد که معادله دیفرانسیل $y' = f(x,y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ دارای جواب یکتا است.

مثال ۸.۷.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + y^2$ با شرط $y(x_0) = y_0$ که (x_0, y_0) در ناحیه مستطیلی D*

$$x_1 \leq x \leq x_2 \qquad y_1 \leq y \leq y_2$$

قرار بگیرد، دارای جواب یکتا است. زیرا $f(x,y) = x^2 + y^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ پیوسته هستند.

مثال زیر نشان می‌دهد که قضیه و تذکر بالا فقط شرط کافی به دست می‌دهند.

مثال ۹.۷.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = \frac{1}{y^2}$ با شرط $y(0) = 0$ دارای جواب یکتا $y = \sqrt[3]{3x}$ است (معادله جدایی پذیر است!). این در حالی است که روی هر ناحیه مستطیلی D*

$$x_1 \leq x \leq x_2 \qquad y_1 \leq y \leq y_2$$

که شامل محور xها باشد، تابع $f(x,y)$ پیوسته نیست و همچنین $\frac{\partial f}{\partial y}$ پیوسته نیست!

مثال ۱۰.۷.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = 2\sqrt{y}$ با شرط $y(0) = 0$ جواب $y = 0$ و $y = x^2$ را دارد. حال دقت کنید که روی هر ناحیه مستطیلی D*

$$x_1 \leq x \leq x_2 \qquad y_1 \leq y \leq y_2$$

که شامل نقطه $(0,0)$ باشد، تابع $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ پیوسته است و به همین دلیل است که ما دست کم جواب داریم. اما $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ در $(0,0)$ پیوسته نیست!

تمرین ۱۱.۷.۲. *بدون پیدا کردن جواب عمومی معادله $y' = x^2y^2 + y$ نشان دهید که این معادله تنها یک جواب با شرط اولیه $y(0) = 0$ دارد.*

حل. این معادله دیفرانسیل در نقطه $(0,0)$ که در هر ناحیه مستطیلی D

$$x_1 \leq x \leq x_2 \qquad y_1 \leq y \leq y_2$$

قرار بگیرد، دارای جواب یکتا است. زیرا $f(x,y) = x^2y^2 + y$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 1$ پیوسته هستند. از طرفی $y = 0$ در معادله صدق می‌کند. بنابراین $y = 0$ تنها جواب ممکن با شرط اولیه $y(0) = 0$ است.

تمرین ۱۲.۷.۲. *یک ناحیه D برای معادله دیفرانسیل $xy' = 2y$ با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ چنان پیدا کنید که معادله جواب یکتا داشته باشد.*

حل. قرار می‌دهیم $y' = \frac{2y}{x}$. این تابع در کلیه نقاطی که در شرط $y > 0$ صدق کنند پیوسته است. از طرفی داریم $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ که برای $x > 0$ پیوسته است. اکنون برای هر نقطه (x_0, y_0) که در ناحیه مستطیلی D

$$1 \leq x_0 \leq 2 \qquad 1 \leq y_0 \leq 2$$

قرار بگیرد، معادله دارای جواب یکتا است.

۸.۲ چند روش تکنیکی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در این بخش نکاتی تکنیکی را برای حل معادلات دیفرانسیل آموزش می‌دهیم.

(۱) برخی مواقع معادله دیفرانسیل ظاهری شبیه به فرمول‌های مهم مشتق گیری دارد. این شباهت گاهی حل معادله را بسیار ساده می‌کند و با کمک روش‌های ابتکاری حل معادله به انتگرال گیری‌های ساده تبدیل می‌شود.

(الف) معادلاتی که $ydx + xdy$ ظاهر شده باشد. طرفین معادله را بر $(xy)^t$ تقسیم می‌کنیم. معمولا انتخاب عدد t به گونه‌ای است که عباراتی که شامل $ydx + xdy$ نیستند، شامل فقط تابعی از x یا فقط تابعی از y باشند. همچنین به جای $ydx + xdy$ قرار می‌دهیم $d(xy)$ (مشتق گیری ضربی).

(ب) معادلاتی که $xdy - ydx$ ظاهر شده باشد. به توجه به نیاز معادله طرفین را بر x^2، y^2 و $x^2 + y^2$ تقسیم می‌کنیم. معمولا انتخاب نوع تقسیم به صورتی است که ضریب dx (dy) در عبارتی که شامل $xdy - ydx$ نیست، تابعی بر حسب x (y) شود. همچنین مشتق گیری خارج قسمتی اتفاق افتد، یعنی

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x}) \qquad \frac{xdy - ydx}{y^2} = d(\frac{-x}{y}) \qquad \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d(\tan^{-1}(\frac{y}{x})).$$

مثال ۱.۸.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $xdy + (y + 3x^4y^3)dx = 0$ را پیدا کنیم. این معادله از مرتبه اول است. اما با بازنویسی معادله به شکل $xdy + ydx + 3x^4y^3dx = 0$ عبارت $xdy + ydx$ در معادله ظاهر می‌شود. طرفین را بر $(xy)^3$ تقسیم می‌کنیم. یعنی حالت (الف) بالا، $t = 3$ انتخاب می‌کنیم تا عباراتی که شامل $ydx + xdy$ نیست، شامل تابعی فقط از x باشد*

$$\frac{xdy + ydx}{(xy)^3} + 3xdx = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(xy)}{(xy)^3} + 3xdx = 0.$$

با فرض $u = xy$ داریم $\frac{du}{u^3} + 3xdx = 0$. حال از طرفین انتگرال می‌گیریم (معادله جدایی پذیر) و جواب عمومی به صورت زیر است

$$\frac{-1}{2u^2} + \frac{3x^2}{2} + c = 0 \;\Rightarrow\; \frac{-1}{2(xy)^2} + \frac{3x^2}{2} + c = 0$$

مثال ۲.۸.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xdy + (x^2y^2 - y)dx = 0$ را پیدا کنیم. این معادله دیفرانسیل از مرتبه اول است که به ظاهر جدایی پذیر نیست! اما با بازنویسی معادله به شکل $xdy - ydx + x^2y^2dx = 0$ عبارت $xdy - ydx$ در معادله ظاهر می‌شود. طرفین را بر y^2 تقسیم می‌کنیم (حالت (ب) در تذکر بالا). زیرا با این تقسیم ضریب dx تابعی بر حسب x می‌شود. بنابراین*

$$\frac{xdy - ydx}{y^2} + x^2dx = 0 \;\Rightarrow\; d(\frac{-x}{y}) + x^2dx = 0.$$

حال از طرفین انتگرا می‌گیریم و جواب عمومی به صورت $\frac{-x}{y} + \frac{x^3}{3} + c = 0$ است.

(۲) برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x, y, y', (y')^2, (y')^3, ...) = 0$ سعی می‌کنیم که آن را به عواملی با توان یک بر حسب y' تجزیه کنیم و جواب عمومی هر عمل را حساب کنیم. جواب عمومی نهایی حاصل ضرب جواب عمومی‌ها است.

مثال ۳.۸.۲. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y')^2 - x^2yy' + 3x^2y - 3y' = 0$ را پیدا کنیم. ظاهر معادله بسیار خشمگین است! اما آرامشی در آن نهفته است!*

$$(y')^2 - (x^2y + 3)y' + 3x^2y = 0 \;\Rightarrow\; (y' - x^2y)(y' - 3) = 0.$$

معادله $y' - 3 = 0$ دارای جواب عمومی $y - 3x + c = 0$ است و معادله $y' -^2 y = 0$ جدایی پذیر و جواب عمومی $\ln y - \frac{x^3}{3} + c' = 0$ دارد. پس $(y - 3x + c)(\ln y - \frac{x^3}{3} + c') = 0$ جواب عمومی نهایی است.

تمرین ۴.۸.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y(x^2 + y^2 - 1)dx + x(x^2 + y^2 + 1)dy = 0$ را به دست آورید.*

حل. معادله را به صورت

$$xdy - ydx + y(x^2 + y^2)dx + x(x^2 + y^2)dy = 0$$

باز نویسی می‌کنیم. طرفین را بر $x^2 + y^2$ تقسیم می‌کنیم. پس

$$\frac{xdy - ydx}{(x^2 + y^2)} + ydx + xdy = 0 \;\Rightarrow\; d(\tan^{-1}(\frac{y}{x})) + d(xy) = 0.$$

اکنون یک انتگرال گیری ساده در انتظار ما است $\tan^{-1}(\frac{y}{x}) + xy + c = 0$.

تمرین ۵.۸.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y(y')^3 - 3x^2y' - y(y')^2 + 3xy' = 0$ را پیدا کنید.*

حل. داریم

$$y(y')^3 - 3x^2y' - y(y')^2 + 3xy' = 0 \;\Rightarrow\; y'(y' - 1)(yy' - 3x) = 0.$$

معادله $y' = 0$ دارای جواب عمومی $y + c = 0$ است. معادله $y' - 1 = 0$ دارای جواب عمومی $y - x + c' = 0$ است و معادله $yy' - 3x = 0$ جدایی پذیر و جواب عمومی $\frac{y^2}{2} - \frac{3x^2}{2} + c'' = 0$ دارد. پس $(y + c)(y - x + c')(\frac{y^2}{2} - \frac{3x^2}{2} + c'') = 0$ جواب عمومی نهایی است.

۹.۲ توصیف کیفی جواب معادله دیفرانسیل بدون حل آن

بسیاری از معادلات دیفرانسیل قابل حل تحلیلی (کلاسیک) نیستند. اما از خود معادله دیفرانسیل می‌توان درباره کیفیت جواب‌ها اطلاعاتی کسب کرد. در این بخش شما را تا حدی با این مطلب آشنا می‌کنیم. این مطالب بیشتر در رشته سیستم‌های دینامیکی از ریاضی مطرح است که ارتباط

بسیار نزدیکی با معادلات دیفرانسیل معمولی دارد. گاهی اوقات چند جواب خصوصی یک معادله راحت قابل حدس زدن است. برای مثال معادله $y' = y^2 + 2y$ را در نظر بگیرید. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $y = 0$ در معادله صدق می‌کند و یک جواب است. همچنین با تجزیه داریم $y' = y(y+2)$. این نشان می‌دهد که $y = -2$ یک جواب دیگر است!

این مطلب ما را به سمت تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف ۱.۹.۲. *فرض کنیم معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ را در اختیار داریم. جواب‌های که از $y' = 0$ حاصل می‌شود را نقاط تعادلی یا حل تعادلی گوییم.*

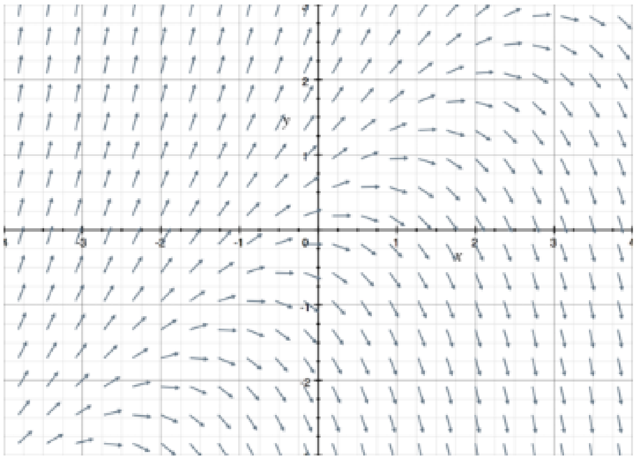
مثال ۲.۹.۲. *می‌خواهیم نقاط تعادلی $y' = y^2 - 9$ را به دست آوریم. با حل $y' = 0$ یا معادلا $y^2 - 9 = 0$ داریم که $y = 3$ یا $y = -3$. واضح است که هر دو مقدار جواب معادله هستند.*

مثال ۳.۹.۲. *می‌خواهیم نقاط تعادلی $y' = yx^2 - xy + y^2$ را به دست آوریم. با حل $y' = 0$ یا معادلا $yx^2 - xy + y^2 = y(x^2 - x + y) = 0$ داریم که $y = 0$ یا $y = x - x^2$. اگر $y = x - x^2$ آنگاه $y' = 1 - 2x \neq 0$ و لذا فقط $y = 0$ نقاط تعادلی است.*

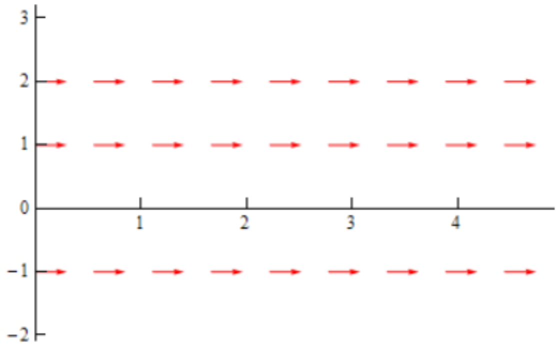
حال تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴.۹.۲. *فرض کنیم معادله مرتبه اول $F(x, y, y') = 0$ را به صورت $y' = f(x, y)$ نوشته‌ایم. هر نقطه (x, y) از صفحه مختصات که f بتواند روی آن اثر کند، مقداری برای y' به دست می‌دهد. که می‌توانیم آن را شیب پاره خطی کوچک که از این نقطه می‌گذرد در نظر گرفت (مفهوم مشتق را به یاد آورید). اگر همه این پاره خطها را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم آنگاه گوییم یک میدان امتدادی یا میدان شیب‌ها برای معادله دیفرانسیل رسم کرده‌ایم. اگر پاره خطها را با فلش (جهت فلش از روی $y' > 0$ یا $y' < 0$ مشخص می‌شود) عوض کنیم، گوییم یک میدان برداری برای معادله دیفرانسیل رسم کرده‌ایم.*

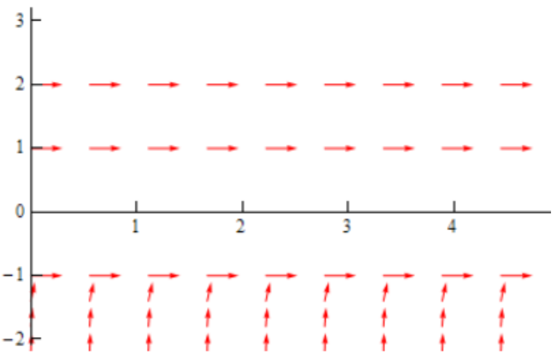
مثال ۵.۹.۲. *می‌خواهیم برای معادله $y' = y - x$ میدان برداری رسم کنیم. واضح است که برای نقاطی مثل $(1, 1)$ که مختص اول و دوم مساوی دارند، $y' = 0$ است که یک فلش با شیب صفر رسم کرده‌ایم. برای نقاطی مثل $(1, 2)$ که مختص دوم بزرگتر از مختص اول است، $y' > 0$ است که این مفهوم را با یک فلش کوچک به سمت بالا نشان می‌دهیم. هر چه این اختلاف بین مختص اول و دوم بیشتر باشد در میزان شیب فلش تاثیر دارد. برای نقاطی مثل $(3, 1)$ که مختص دوم کوچکتر از مختص اول است، $y' < 0$ است که این مفهوم را با یک فلش کوچک به سمت پایین نشان می‌دهیم. هر چه قدر مطلق این اختلاف بین مختص اول و دوم بیشتر باشد در میزان شیب فلش تاثیر دارد. پس نموداری به شکل زیر حاصل می‌شود (روش دیگری برای کشیدن میدان برداری، در تمرین‌های حل شده آموزش داده‌ایم).*



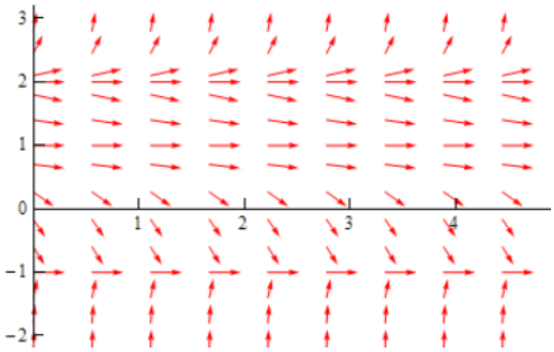
مثال ۶.۹.۲. می‌خواهیم برای معادله $y' = (y+1)(y-2)(1-y)^2$ میدان برداری رسم کنیم. ابتدا نقاط تعادلی را دقت کنید که عبارتند از $y=-1$، $y=2$ و $y=1$. در نقاط تعادلی $y'=0$ است. یعنی میدان برداری به شکل زیر است.



اگر $y<-1$ آنگاه $y'>0$. پس برای نقاط مختلف (معادله x ندارد پس برای نقاطی مثل $(-2,1)$ و $(-3,1)$ که y یکسان دارند، فلش‌ها موازی هستند) میدان برداری به شکل زیر است



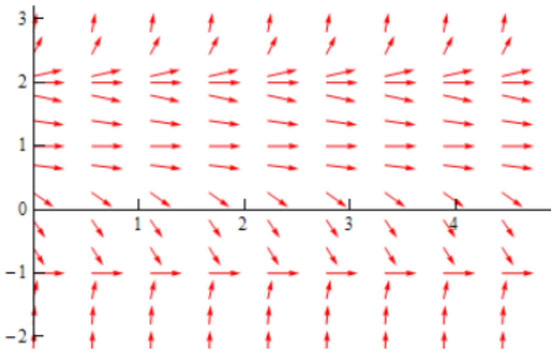
با استدلال مشابه بالا؛ برای $-1 < y < 1$، $1 < y < 2$ و $y > 2$ به ترتیب داریم $y' < 0$، $y' < 0$ و $y' > 0$ است. پس میدان برداری به شکل زیر است.



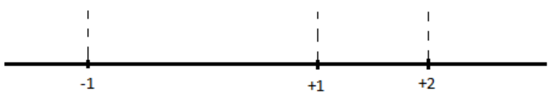
حال تعریف زیر را داریم.

تعریف ۷.۹.۲. هرگاه نقاط تعادلی معادله خودگردان $y' = f(y)$ را روی یک محور (افقی یا عمودی) رسم کنیم و از روی میدان برداری فلش مناسب به عنوان نماینده که به سمت نقاط تعادلی یا خارج آن اشاره می‌کند، رسم کنیم گوییم خط فاز را رسم کرده‌ایم (جهت فلش به این صورت است که مثلا برای بازه $a < y < b$، اگر $y' < 0$ آنگاه یک فلش به سمت چپ در آن بازه رسم می‌کنیم و اگر $y' > 0$ آنگاه یک فلش به سمت راست در آن بازه رسم می‌کنیم).

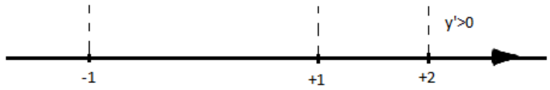
مثال ۸.۹.۲. می‌خواهیم برای معادله $y' = (y+1)(y-2)(1-y)^2$ خط فاز رسم کنیم. می‌دانیم که میدان برداری به شکل زیر است.



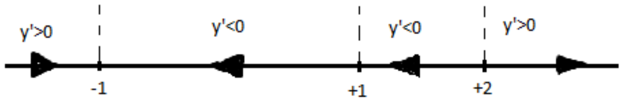
حال نقاط تعادلی را روی یک محور (یا خط) رسم می‌کنیم.



حال به نقطه تعادلی $y=2$ دقت کنید! زمانی که $y>2$ است جهت فلش‌ها در میدان برداری از $y=2$ دور می‌شود و $y'>0$، یعنی فلش به سمت راست! این مطلب را روی خط فاز به صورت زیر نمایش می‌دهیم.



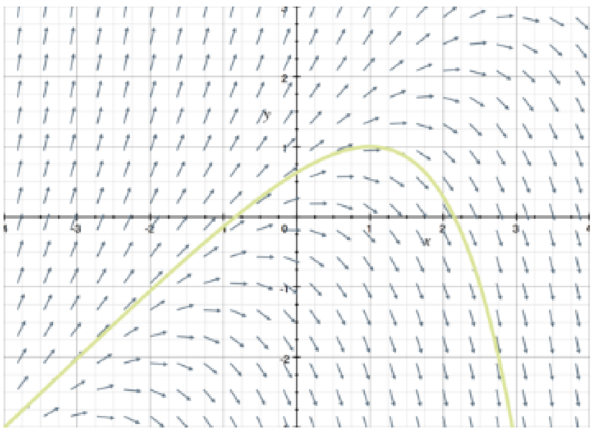
با استدلال مشابه بالا خط فاز به شکل زیر است.



حال تعریف زیر را داریم.

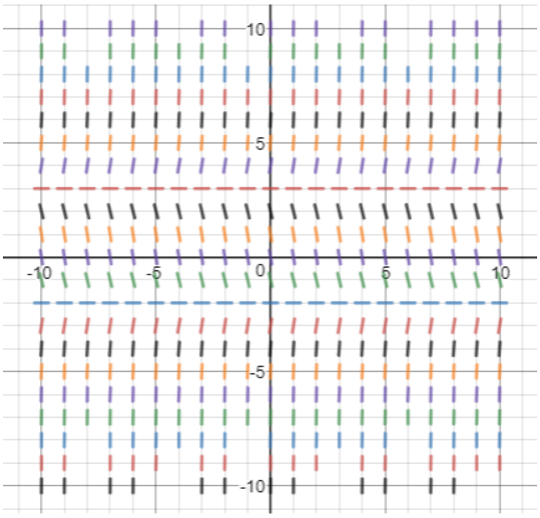
تعریف ۹.۹.۲. *به منحنی که در هر نقطه مختصات به فلشی از میدان برداری که به آن نقطه مختصات وابسته است؛ مماس باشد منحنی انتگرال (منحنی جواب) گوییم.*

مثال ۱۰.۹.۲. *در شکل زیر میدان برداری برای معادله $y'=y-x$ و یک منحنی انتگرال (منحنی جواب) رسم شده است.*

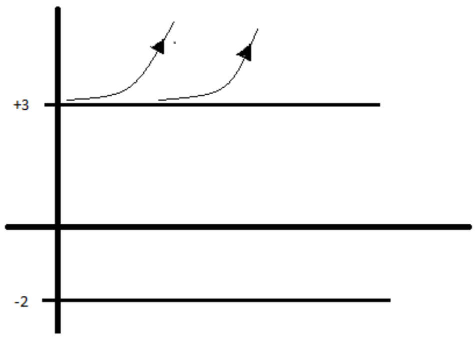


در ریاضی عمومی دیده‌اید که مشتق دوم و تغییر علامت آن در رسم منحنی جواب بسیار کمک می‌کند. برای به دست آوردن شمایل منحنی جواب تقعر نقش مهمی دارد. به مثال زیر دقت نمایید.

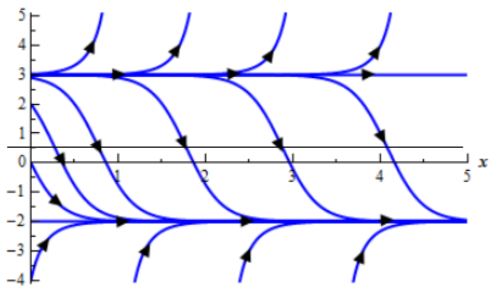
مثال ۱۱.۹.۲. *معادله دیفرانسیل $y'=y^2-y-6$ را در نظر بگیرید. از حل $y'=0$ نقاط تعادلی این منحنی به صورت $y=-2$ و $y=3$ است. پس میدان امتدادی یا میدان شیب آن به شکل*



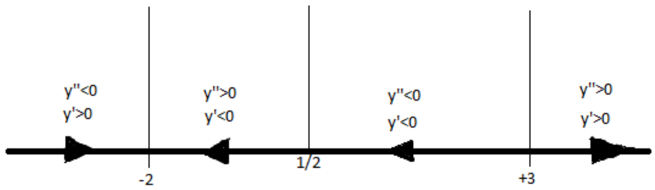
است. از روی میدان برداری و تعریف منحنی جواب، مشخص است که شمایل برخی منحنی‌های جواب مثلا برای $y > 3$ به صورت



است. دقت شود که جهت فلش مانند خط فاز انتخاب می‌شود. اما $y'' = 0$ یعنی $(2y-1)y' = 0$ نقطه عطف و تقعرهای منحنی‌های جواب را مشخص می‌کند. $y = \frac{1}{2}$ عطف است. برای $y > 3$ تقعر رو به بالا است برای $y < -2$ تقعر رو به پایین است. اگر $\frac{1}{2} < y < 3$ تقعر رو به پایین و اگر $-2 < y < \frac{1}{2}$ تقعر رو به بالا است. حال با کمک میدان امتدادی شمایل منحنی‌های انتگرال (جواب) به صورت



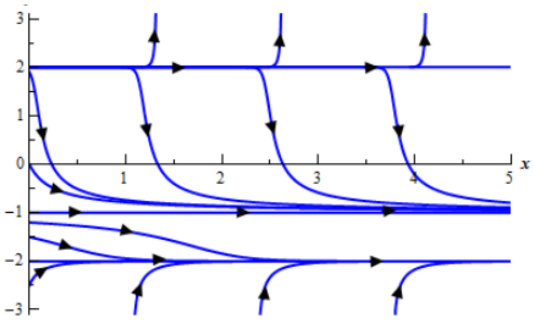
است. همین جا لازم است که تذکر دهیم طبق مطالب بخش ۸ از فصل دوم، اگر معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه باشد آنگاه در نزدیکی آن نقطه فقط یک منحنی جواب خواهیم داشت! مثلا فقط یک منحنی جواب است که از $(2,0)$ می‌گذرد. برای خط فاز این معادله اطلاعات مشتق دوم را نیز اعمال می‌کنیم.



حال تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۲.۹.۲. *فرض کنیم معادله خودگردان $y' = f(y)$ را در اختیار داریم. گوییم نقطه تعادلی y_0 پایدار است هرگاه در نزدیکی y_0 فلش‌های خط فاز همگرا شوند. گوییم نقطه تعادلی y_0 ناپایدار است هرگاه در نزدیکی y_0 فلش‌های خط فاز واگرا شوند. گوییم نقطه تعادلی y_0 شبه پایدار است هرگاه در نزدیکی y_0 فلش‌های خط فاز یک جهت شوند.*

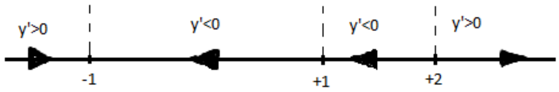
مثال ۱۳.۹.۲. *برای معادله $y' = (y^2-4)(y+1)^2$ نقاط تعادل -2، $+2$ و -1 هستند. شمایل منحنی‌های جواب به صورت*



است. هم می‌توان خط فاز رسم کرد و نوع پایداری نقاط تعادل را معلوم کرد و هم از روی شمایل منحنی جواب قضاوت کرد. نقطه تعادل 2 ناپایدار است. زیرا فلش‌های منحنی جواب در نزدیکی 2 واگرا هستند. نقطه تعادل -1 شبه پایدار است. زیرا فلش‌های منحنی‌های جواب در نزدیکی -1 یک جهته است از سمتی وارد و از سمتی دیگر خارج شده‌اند. نقطه تعادل -2 پایدار است. زیرا منحنی‌های جواب در نزدیکی -2 همگرا هستند. در حقیقت وقتی x را به بی‌نهایت میل دهیم مقادیر منحنی‌های جواب در نزدیکی نقطه تعادل -2 ، به -2 میل می‌کنند.

تذکر ۱۴.۹.۲. *در نظریه معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی مفهوم پایداری تعابیر مختلف دارد! مثلا معروفترین این تعابیر پایداری لیاپانوف است. اما پایداری که در بالا تعریف شده است پایداری مجانبی است که از آوردن کلمه مجانبی صرف نظر کرده‌ایم. همچنین باید ذکر کنیم که تعاریف بالا به صورت ابتدایی و در حدود درس معادلات دیفرانسیل معمولی بیان شده‌اند.*

مثال ۱۵.۹.۲. *برای معادله* $y' = (y+1)(y-2)(1-y)^2$ *نقاط تعادل* 1، 2 *و* -1 *هستند. در مثال‌های قبل دیدیم که خط فاز به صورت*



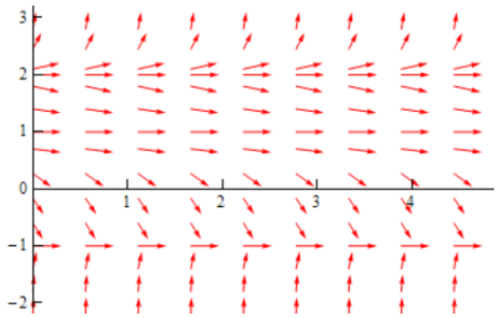
است. نقطه تعادل -1 *پایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی* -1 *همگرا هستند. نقطه تعادل* 2 *ناپایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی* 2 *واگرا هستند. نقطه تعادل* 1 *شبه پایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی* 1 *یک طرفه هستند.*

تمرین ۱۶.۹.۲. *برای معادله دیفرانسیل* $y' = (y^2-y-2)(1-y)^2$ *نقاط تعادل را پیدا کنید. میدان برداری رسم کنید. شمایل منحنی‌های جواب را رسم کنید. خط فاز را رسم کنید. نقاط پایدار و ناپایدار را معلوم کنید. با توجه به مقدار* $y(0)$ *زمانی که* x *به بی‌نهایت میل می‌کند جواب‌ها را آنالیز کنید.*

حل. از حل $y' = 0$ نقاط تعادلی حاصل می‌شود

$$(y^2-y-2)(1-y)^2 = 0 \;\Rightarrow\; (y-2)(y+1)(1-y)^2 = 0.$$

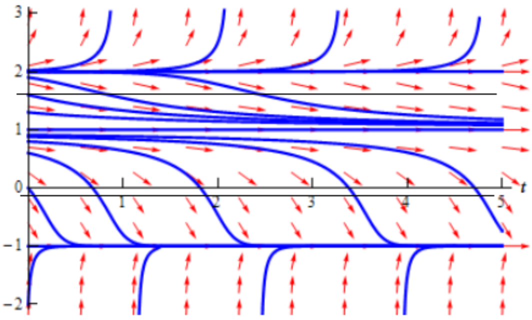
پس نقاط تعادلی $y=-1$، $y=1$ و $y=2$ هستند.
اما میدان برداری به صورت



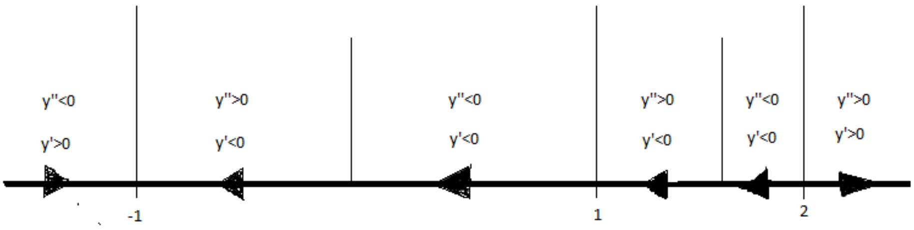
است. دقت شود که معادله x ندارد پس برای نقاطی مثل $(1,0)$ و $(3,0)$ که y یکسان دارند، فلش‌ها موازی هستند.
برای شمایل منحنی‌های جواب بهتر است y'' حساب شود. از $y''=0$ دو مقدار

$$y = \frac{2-\sqrt{7}}{3}, \;\; y = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$$

حاصل می‌شود که به صورت تقریبی در شکل زیر مشاهده می‌کنید. پس



شمایل منحنی‌های جواب است.
اکنون خط فاز را رسم می‌کنیم. از روی شمایل منحنی جواب، خود معادله دیفرانسیل و میدان برداری واضح است که زمانی که $y > 2$ باشد آنگاه $y' = (y-2)(y+1)(1-y)^2 > 0$ است و فلش‌ها از $y = 2$ خارج می‌شوند، یعنی فلش به سمت راست! با تکرار استدلال‌های مشابه خط فاز به صورت



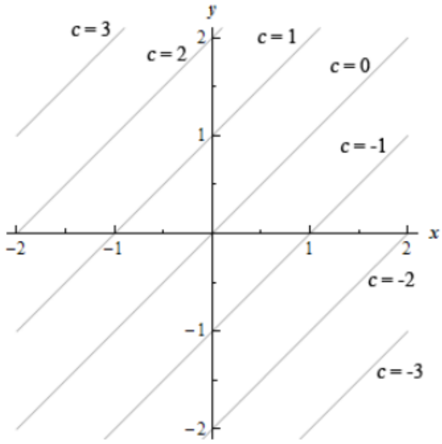
است.
حال می‌توانیم هم از شمایل منحنی و هم از خط فاز پایداری و ناپایداری نقاط تعادل را قضاوت کنیم. نقطه تعادل 2 ناپایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی 2 واگرا هستند. نقطه تعادل 1 شبه پایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی 1 یک طرفه است. نقطه تعادل -1 پایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی -2 همگرا هستند.
اگر مقدار $y(0)$ در ناحیه $y > 2$ قرار گیرد آنگاه وقتی که x را به بینهایت میل می‌دهیم، منحنی‌های جواب این ناحیه به بینهایت میل می‌کنند.
اگر مقدار $y(0)$ در ناحیه $y = 2$ قرار گیرد آنگاه وقتی که x را به بینهایت میل می‌دهیم، منحنی‌های جواب این ناحیه به $y = 2$ میل می‌کنند.
اگر مقدار $y(0)$ در ناحیه $1 \leq y < 2$ قرار گیرد آنگاه وقتی که x را به بینهایت میل می‌دهیم، منحنی‌های جواب این ناحیه به $y = 1$ میل می‌کنند.
اگر مقدار $y(0)$ در ناحیه $y < 1$ قرار گیرد آنگاه وقتی که x را به بینهایت میل می‌دهیم، منحنی‌های جواب این ناحیه به $y = -1$ میل می‌کنند.

تمرین ۱۷.۹.۲. *برای معادله $y' = y - x$ میدان برداری و منحنی‌های جواب را به دست آورید (دقت شود معادله خودگردان نیست و نقاط پایداری و ناپایداری مطرح نمی‌شود).*

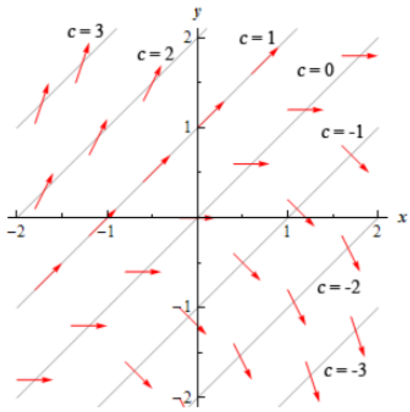
حل. ابتدا باید دقت کنیم در چه نقاطی مشتق عددی ثابت است. مثلا فرض کنیم

$$y' = y - x = c$$

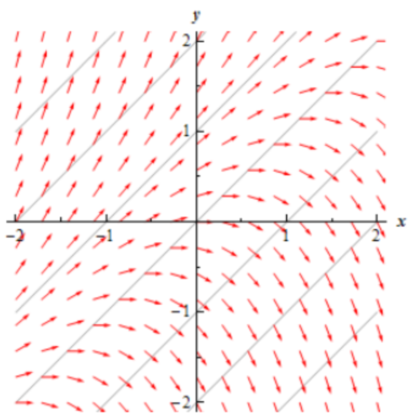
است که c عدد حقیقی است. برای مقادیر مختلف c نموداری به شکل زیر حاصل می‌شود



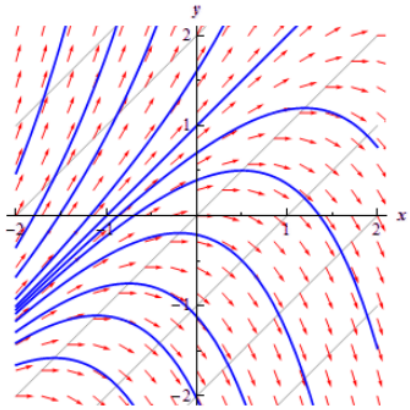
دقت شود که فلش‌های که روی خطوط مثلا خط $y - x = 2$ قرار می‌گیرند موازی هم هستند. پس شکل زیر حاصل می‌شود.



اگر برای cهای بیشتری رسم کنیم به شکل



دست می‌یابیم. اکنون کشیدن منحنی‌های جواب با کمک تعریف ساده است. شمایل منحنی‌های جواب به صورت



است.

۱۰.۲ تمرین‌های کل فصل

تمرین ۱.۱۰.۲. *جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول* $y' - 2xy = -2x$ *با شرط* $y(0) = 1$ *را پیدا کنید.*

تمرین ۲.۱۰.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y'e^y - 2e^y = 2x$ *را پیدا کنید.*

تمرین ۳.۱۰.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $2y' \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{y}$ *را پیدا کنید.*

تمرین ۴.۱۰.۲. *معادله دیفرانسیل* $y' = xy^2 - x^3y + 2x$ *را حل کنید.*

تمرین ۵.۱۰.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y' = xy^2$ *را حساب کنیمد.*

تمرین ۶.۱۰.۲. *جمعیت یک نوع باکتری مفید متناسب با تعداد آنها زیاد می‌شود. اگر در لحظه اولیه فقط ۲ تا از این نوع باکتری در اختیار داشته باشیم و بدانیم که در ۴ ثانیه بعد تعداد باکتری‌های صدتا است آنگاه بعد از یک دقیقه چقدر از این نوع باکتری در اختیار داریم.*

تمرین ۷.۱۰.۲. *جوابی از معادله دفرانسیل* $\sin x dx - 2y dy = 0$ *را معلوم کنید که از نقطه* $(0, 0)$ *عبور کند.*

تمرین ۸.۱۰.۲. *معادله دیفرانسیل* $xy' = y + x \sin \frac{y}{x}$ *را حل کنید.*

تمرین ۹.۱۰.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ *را به دست آورید.*

تمرین ۱۰.۱۰.۲. *نشان دهید که معادله دیفرانسیل* $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{y}$ *با تغییر متغیر* $y = u^a$ *که* $a \in \mathbb{R}$ *قابل تبدیل شدن به معادله همگن نیست.*

تمرین ۱۱.۱۰.۲. *مسیرهای قائم دسته منحنی $\ln\frac{x}{y} = 1 + cy$ را پیدا کنید (انتگرال گیری نهایی لازم نیست).*

تمرین ۱۲.۱۰.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2x\sin 3ydx + 3x^2\cos 3ydy = 0$ را به دست آورید.*

تمرین ۱۳.۱۰.۲. *معادله $(4x^3\cos^3 y - 2x\cos y)dx + (x^2 - 3x^4\cos^2 y)\sin ydy = 0$ را با شرط اولیه $y(0) = 0$ حل کنید.*

تمرین ۱۴.۱۰.۲. *تابع $z = h(y)$ را چنان مشخص نمایید که معادله $y' = \frac{x - xy^2}{x^2 z + 8y}$ کامل شود.*

تمرین ۱۵.۱۰.۲. *معادله دیفرانسیل $y(3 + 4xy)dx + x(2 + 3xy)dy = 0$ یک فاکتور انتگرل به صورت $x^s y^l$ دارد. مقدار s و l را معلوم کنید.*

تمرین ۱۶.۱۰.۲. *نشان دهید معادله دیفرانسیل $ydx + (x + 3x^3y^4)dy = 0$ یک فاکتور انتگرل به صورت $\frac{1}{x^3y^3}$ دارد و سپس آن را حل کنید (به روش ابتکاری نیز این معادله را حل کنید).*

تمرین ۱۷.۱۰.۲. *برای معادله دیفرانسیل $(xe^x + e^x)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$ یک فاکتور انتگرل معرفی کنید و سپس آن را حل کنید.*

تمرین ۱۸.۱۰.۲. *برای معادله دیفرانسیل $(x^2 + x + y^2)dx + xydy = 0$ یک فاکتور انتگرل معرفی کنید و سپس آن را حل کنید.*

تمرین ۱۹.۱۰.۲. *معادله دیفرانسیل $y' = 1 + 6xe^{x-y}$ را حل کنید.*

تمرین ۲۰.۱۰.۲. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'y - xy' - 1 = 0$ را پیدا کنید.*

تمرین ۲۱.۱۰.۲. *در مورد وجود جواب و یکتایی معادله دیفرانسیل $y' = \sqrt{y}$ بحث کنید.*

تمرین ۲۲.۱۰.۲. *جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $ydx + (x + 2x^2y^3)dy = 0$ را با شرط $y(1) = 1$ به دست آورید.*

۱۱.۲ نمونه سوالات امتحانی تشریحی

سوال ۱.۱۱.۲. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بسازید که جواب آن در بی نهایت به ۳ میل کند.*

پاسخ. می‌دانیم برای هر عدد حقیقی c تابع $y = 3 + ce^{-x}$ در بی نهایت حد برابر با ۳ دارد. پس معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = 3 + ce^{-x}$ را به دست می‌آوریم. طبق مطالب فصل اول، معادله دیفرانسیل این دسته منحنی به صورت $y' + y = 3$ است! این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است که جواب عمومی آن شرایط مسئله را دارد.

سوال ۲.۱۱.۲. *(میان ترم صنعتی اصفهان) معادله دیفرانسیل $y' = \pi^2 + xe^y$ را با شرط اولیه $y(0) = 4\ln\pi$ حل نمایید.*

پاسخ. فرض کنیم $u = e^{-y}$. بنابراین $-y'e^y = u'$. طرفین معادله را در $-e^{-y}$ ضرب می‌کنیم

$$-e^{-y}y' = -\pi^2 e^{-y} - x \;\Rightarrow\; u + \pi^2 u = -x.$$

معادله آخر خطی است. در نتیجه خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \pi^2 dx} = e^{\pi^2 x}$. پس با انتگرال گیری به روش جز به جز داریم

$$\mu u = \int \mu g(x)dx + c \;\Rightarrow\; e^{\pi^2 x}u = \int -xe^{\pi^2 x}dx + c = -\frac{(\pi^2 x - 1)\,\mathrm{e}^{\pi^2 x}}{\pi^4} + c$$

و لذا $u = e^{-y} = e^{-\pi^2 x}(-\frac{(\pi^2 x-1)\mathrm{e}^{\pi^2 x}}{\pi^4} + c)$ جواب عمومی است. حال قرار می‌دهیم $x = 0$ و $y = 4\ln\pi = \ln\pi^4$. بنابراین $c = 0$ است.

سوال ۳.۱۱.۲. (*میان ترم صنعتی اصفهان*) *جواب عمومی* $y' = 3(4x+1)e^x y^3 + 2xy$ *را پیدا کنید.*

پاسخ. معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم $y' - 2xy = 3(4x+1)e^x y^3$. یک معادله برنولی است! در این معادله برنولی $p(x) = -2x$ و $g(x) = 3(4x+1)e^x$ است. تغییر متغیر $u = y^{1-n} = y^{-2}$ را اعمال می‌کنیم $u' = -2y'y^{-3}$. بنابراین با ضرب معادله در $-2y^{-3}$ داریم $u' + 4xu = -6(4x+1)e^x$ که به صورت معادله دیفرانسیل خطی u تابعی از x مبدل می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p_0(x)dx} = e^{\int 4xdx} = e^{2x^2}$. پس

$$\mu u = \mu y^{-2} = \int \mu g_0(x)dx + c \;\Rightarrow\; e^{2x^2}y^{-2} =$$
$$\int -6e^{2x^2}(4x+1)e^x dx + c = \int -6(4x+1)e^{2x^2+x} + c = -6e^{2x^2+x} + c$$

جواب عمومی است.

سوال ۴.۱۱.۲. (*میان ترم صنعتی اصفهان*) *جواب عمومی معادله دیفرانسیل*

$$(x^2 y\ln y + xy^2 - y\sin x)dx + (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y + y^2\cos y)dy = 0$$

را پیدا کنید.

پاسخ. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. شرایط قضیه ۴.۴.۲ برقرار است و داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2\ln y + x^2 + 2xy - \sin x \neq x^2 + xy = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

بنابراین معادله کامل نیست اما داریم

$$\frac{-1}{P}\Delta = \frac{-1}{x^2 y\ln y + xy^2 - y\sin x}(x^2\ln y + xy - \sin x) = \frac{-1}{y} = s(y).$$

بنابراین معادله فاکتور انتگرال به شکل

$$h = h(x,y) = e^{\int s(y)dy} = e^{\int \frac{-dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$

دارد. معادله را در فاکتور انتگرال ضرب می‌کنیم تا معادله کامل حاصل شود

$$(x^2\ln y + xy - \sin x)dx + (\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{2} + y\cos y)dy = 0$$

حال فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که $f_x = P(x,y) = x^2\ln y + xy - \sin x$.
از طرفین رابطه آخر نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned}&\int^x f_x dx = f(x,y) = \\ &\int^x (x^2\ln y + xy - \sin x)dx = \frac{1}{3}x^3\ln y + \frac{1}{2}x^2 y + \cos x + k(y).\end{aligned}$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\begin{aligned}&k'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{3}x^3\ln y + \frac{1}{2}x^2 y + \cos x) = \\ &Q(x,y) - \frac{1}{3y}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{2} + y\cos y - \frac{1}{3y}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = y\cos y.\end{aligned}$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y k'(y)dy = k(y) = \int^y y\cos y dy = y\sin y + \cos y + c.$$

بنابراین $\frac{1}{3}x^3\ln y + \frac{1}{2}x^2 y + \cos x + y\sin y + \cos y = c$.

سوال ۵.۱۱.۲. (*میان ترم صنعتی اصفهان*) *مقدار b را چنان پیدا کنید که معادله دیفرانسیل زیر کامل شود و سپس معادله دیفرانسیل را حل نمایید.*

$$(ye^{2xy} + 4x^3)dx + bxe^{2xy}dy = 0$$

پاسخ. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. شرایط قضیه ۴.۴.۲ برقرار است و داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{2xy} + 2xye^{2xy} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = be^{2xy} + 2bxye^{2xy}$$

برای این که معادله کامل شود باید $b = 1$ باشد. حال فرض می‌کنیم تابع $f(x,y)$ چنان وجود دارد که $f_x = P(x,y) = ye^{2xy} + 4x^3$. از طرفین رابطه آ نسبت به x انتگرال می‌گیریم

$$\int^x f_x dx = f(x,y) = \int^x (ye^{2xy} + 4x^3)dx = \frac{1}{2}e^{2xy} + x^4 + k(y).$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$k'(y) = f_y - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}e^{2xy} + x^4) = Q(x,y) - xe^{2xy} = xe^{2xy} - xe^{2xy} = 0.$$

از رابطه آخر نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$\int^y k'(y)dy = k(y) = \int^y 0dy = c'.$$

بنابراین $\frac{1}{2}e^{2xy} + x^4 = c$.

سوال ۶.۱۱.۲. *(میان ترم صنعتی اصفهان) جواب عمومی معادله دیفرانسیل*

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$$

را با جواب خصوصی $y = \frac{1}{x}$ *پیدا کنید.*

پاسخ. معادله فریاد می‌زند که ریکاتی است! حال معادلات زیر را در معادله ریکاتی

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \qquad y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} = \frac{-1}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

قرار می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned} &x^2y' + xy + x^2y^2 = 1 \;\Rightarrow \\ &x^2(\frac{-1}{x^2} - \frac{u'}{u^2}) + x(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}) + x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{u})^2 = 1 \;\Rightarrow\; u' + \frac{3}{x}u = -1 \end{aligned}$$

که به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول u تابعی از x مبدل می‌شود. بنابراین خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$. پس

$$\mu u = \int \mu g(x)dx + c \;\;\Rightarrow\;\; x^3u = \int -x^3\frac{1}{x}dx + c = \frac{-x^4}{4} + c$$

و با جایگذاری داریم

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{\frac{-x^4}{4} + c}$$

کار تمام است!

سوال ۷.۱۱.۲. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر) جواب عمومی معادله دیفرانسیل*

$$4x^2yy' = 3x(3y^2 + 2) + 2(3y^2 + 2)^3$$

را پیدا کنید.

پاسخ. فرض کنیم $u = 3y^2 + 2$. پس $u' = 6yy'$ و

$$x^2u' = \frac{9}{2}u + 3u^2 \ \Rightarrow\ u' - \frac{9}{2x^2}u = \frac{3}{x^2}u^2.$$

این یک معادله برنولی است! در این معادله برنولی $p(x) = -\frac{9}{2x^2}$ و $g(x) = \frac{3}{x^2}$ است. تغییر متغیر $v = u^{1-n} = u^{-1}$ را اعمال می‌کنیم $v' = -u'u^{-2}$. بنابراین با ضرب معادله در $-u^{-2}$ داریم $v' + \frac{9}{2x^2}v = -\frac{3}{x^2}$ که به صورت معادله دیفرانسیل خطی v تابعی از x مبدل می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت که $\mu = e^{\int p_0(x)dx} = e^{\int \frac{9}{2x^2}dx} = e^{\frac{-9}{2x}}$. پس

$$\mu v = \int \mu g_0(x)dx + c \ \Rightarrow\ e^{\frac{-9}{2x}}v = \int e^{\frac{-9}{2x}}\frac{-3}{x^2}dx + c = -\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{9}{2x}}}{3} + c$$

و با جایگذاری v و u $(3y^2+2)^{-1} = e^{\frac{9}{2x}dx}(-\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{9}{2x}}}{3} + c)$ جواب عمومی است.

سوال ۸.۱۱.۲. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر) مسیرهای قایم بر منحنی $x^3 - 3x^2y = c$ را به دست آورید.*

پاسخ. ابتدا معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های $x^3 - 3x^2y - c = 0$ را به دست می‌آوریم:
مرحله (۱): چون در جواب عمومی یک ثابت وجود دارد، پس مرتبه معادله برابر یک است.
مرحله (۲): به تعداد مرتبه از جواب عمومی مشتق می‌گیریم

$$3x^2 - 6xy - 3x^2y' = 0 \ \Rightarrow\ x^2 - 2xy - x^2y' = 0.$$

مرحله ('۲): چون در مرحله (۲) ثابتی مشاهده نمی‌کنیم، پس معادله دیفرانسیل مطلوب به صورت $x + yy' = 0$ است. حال به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ را جایگذاری می‌کنیم و داریم $x^2 - 2xy - x^2(\frac{-1}{y'}) = 0$. پس با ساده سازی $x^2dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ معادله دیفرانسیلی است که جواب عمومی آن دسته منحنی‌های G است و همچنین $x^3 - 3x^2y - c = 0$ مسیرهای قائم G است. این معادله همگن از درجه دو است. حال تغییر متغیر

$$y = ux \qquad dy = udx + xdu$$

را اعمال می‌کنیم. پس

$$\begin{aligned}&0 = x^2dx + (x^2 - 2xy)dy = x^2dx + (x^2 - 2xux)(udx + xdu) = \\ &(1 + u - 2u^2)dx + x(1 - 2u)du\end{aligned}$$

بنابراین بعد از ساده سازی معادله دیفرانسیل جدایی پذیر مرتبه اول

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-2u)du}{1+u-2u^2} = 0$$

حاصل می‌شود. داریم

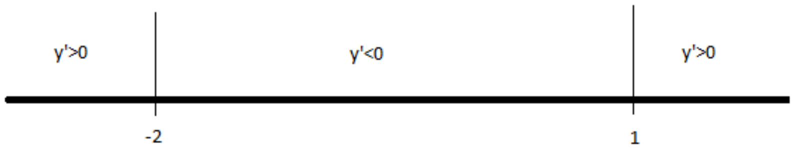
$$0=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(1-2u)du}{1+u-2u^2}=$$
$$\ln|x|+\frac{2\ln(2u+1)+\ln(u-1)}{3}+c$$

جواب عمومی (ساده نشده) با جایگذاری $u=\frac{y}{x}$ به دست می‌آید(برای انتگرال گیری دقت کنید که $1+u-2u^2=(2u+1)(1-u)$ است).

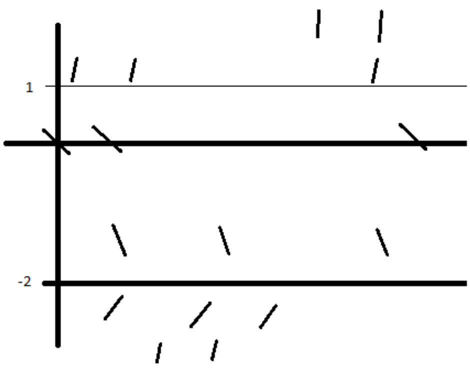
سوال ۹.۱۱.۲. *(میان ترم صنعتی اصفهان) نقاط تعادل و نوع پایداری را روی خط فاز برای معادله دیفرانسیل زیر مشخص کنید. جواب‌های معادله را برای شرایط اولیه متفاوت رسم کنید (با استدلال کامل).*

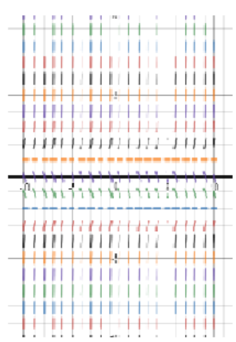
$$y'=(y-1)(y+2)$$

پاسخ. نقاط تعادل از حل $y'=0$ به دست می‌آید. پس $y=1$ و $y=-2$ نقاط تعادلی هستند. اگر $y>1$ باشد آنگاه چون $y'=(y-1)(y+2)$ پس $y'>0$ است. اگر $-2<y<1$ باشد آنگاه چون $y'=(y-1)(y+2)$ پس $y'<0$ است. اگر $y<-2$ باشد آنگاه چون $y'=(y-1)(y+2)$ پس $y'>0$ است. یعنی داریم

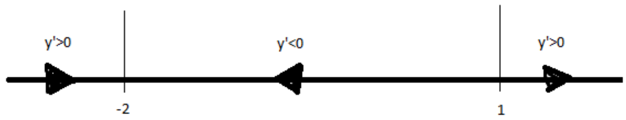


حال باید در خط فاز فلش‌ها را مشخص کنیم. برای این کار می‌توانیم از میدان برداری یا میدان امتدادی کمک بگیریم یا استدلال متن درس را تکرار کنیم (مشتق مثبت فلش به راست- مشتق منفی فلش به چپ). لازم نیست مانند متن درس میدان برداری یا میدن امتدادی در نقاط زیاد رسم شود هر چند شکل رسم شده توسط نرم افزار را نیز قرار داده‌ایم. همچنین دقت کنید که معادله خودگردان و فاقد x است.این به این معنی است که خط‌های میدان با y یکسان هم شیب هستند. بنابراین شکل میدان امتدادی به صورت زیر است





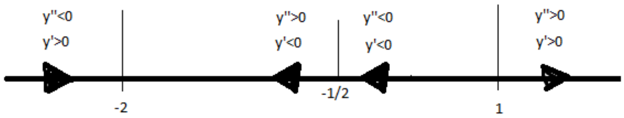
پس خط فاز به شکل زیر است.



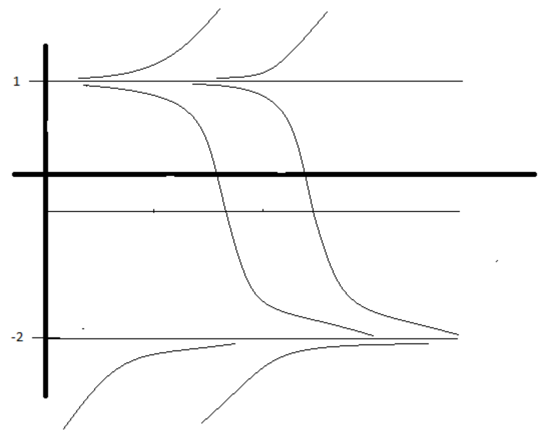
اکنون نقطه تعادل -2 پایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی -2 همگرا هستند نقطه تعادل 1 ناپایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی 1 واگرا هستند.
حال $y''=0$ را هم به دست می‌آوریم تا بتوانیم در نواحی مختلف شمایل (منحنی) جواب‌ها را رسم کنیم

$$y''=0 \;\Rightarrow\; y'(y+2+y-1)=0 \;\Rightarrow\; y'(2y+1)=0.$$

پس $y=\frac{-1}{2}$ را به خط فاز اضافه می‌کنیم



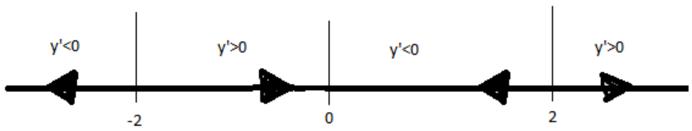
بنابراین شمایل جواب‌های به صورت زیر است (بخش رسم نمودار از ریاضی عمومی را مرور کنید).



سوال ۱۰.۱۱.۲. *(میان ترم صنعتی اصفهان) معادله دیفرانسیل $y'=y(y-2)(y+2)$ را در نظر بگیرید.*
(الف) نقاط تعادل و نوع پایداری و خط فاز را مشخص کنید.
(ب) جواب‌های معادله را برای $y(0)$های متفاوت رسم کنید (با استدلال کامل).

پاسخ. (الف) نقاط تعادل از حل $y'=0$ به دست می‌آید. پس $y=0$، $y=2$ و $y=-2$ نقاط تعادلی هستند. اگر $y>2$ باشد آنگاه چون $y'=y(y-2)(y+2)$ پس $y'>0$ است. اگر $2>y>0$ باشد آنگاه چون $y'=y(y-2)(y+2)$ پس $y'<0$ است. اگر $-2<y<0$ باشد آنگاه چون $y'=y(y-2)(y+2)$ پس $y'>0$ است. اگر $y<-2$ باشد آنگاه چون $y'=y(y-2)(y+2)$ پس $y'<0$ است. یعنی داریم

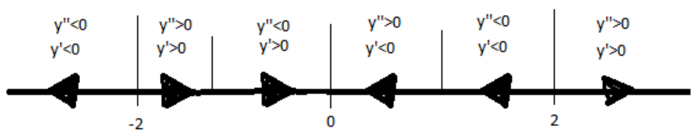
حال باید در خط فاز فلش‌ها را مشخص کنیم. استدلال متن درس را تکرار کنیم (مشتق مثبت فلش به راست ـ مشتق منفی فلش به چپ). پس خط فاز به شکل زیر است.



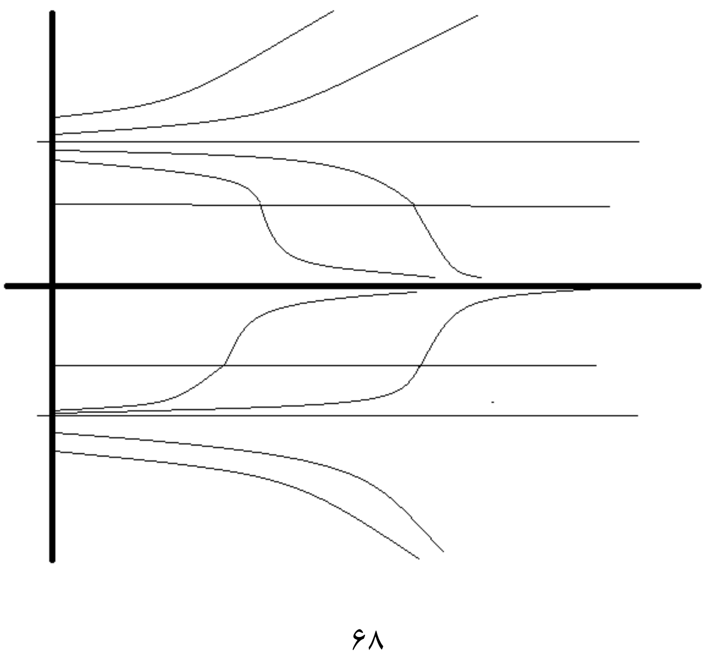
اکنون نقطه تعادل 0 پایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی 0 همگرا هستند نقطه تعادل 2 و -2 ناپایدار است. زیرا فلش‌های خط فاز در نزدیکی 2 و -2 واگرا هستند.
حال $y'' = 0$ را هم به دست می‌آوریم تا بتوانیم در نواحی مختلف شمایل (منحنی) جواب‌ها را رسم کنیم

$$y'' = 0 \Rightarrow y'((y-2)(y+2) + y(y+2) + y(y-2)) = 0 \Rightarrow y'(3y^2 - 4) = 0.$$

پس $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ و $\frac{2}{\sqrt{3}}$ را به خط فاز اضافه می‌کنیم (تقریبی)



بنابراین شمایل جواب‌های معادله برای $y(0)$های مختلف به صورت زیر است که همه جواب‌ها را با شروع از $x = 0$ رسم کرده‌ایم (بخش رسم نمودار از ریاضی عمومی را مرور کنید).



۱۲.۲ نمونه سوالات تستی

۱. (سراسری سیستم ۷۹) جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$(4x+xy^2)dx+(y+x^2y)dy=0$$

کدام است

(۱) $(1+x)(4+y)=c$ (۲) $(4+x)(1+y)=c$

(۳) $(1+x^2)(1+y^2)=c$ (۴) $(4+x^2)(1+y^2)=c$

۲. (سراسری هواشناسی ۷۷) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'=e^{2x+y-1}-2$ کدام است

(۱) $e^{-2x-y+1}+x=c$ (۲) $e^{2x-y+1}+x=c$

(۳) $e^{2x+y-1}+x=c$ (۴) $e^{-2x+y+1}+x=c$

۳. (سراسری مواد ۷۹) جواب معادله دیفرانسیل $y'=\frac{x^2+2y^2}{xy}$ در $x=0$ کدام است

(۱) $y=1$ (۲) $y=0$ (۳) $y=\infty$ (۴) هیچ کدام

۴. (سراسری ریاضی ۸۴) کدام گزینه جواب معادله $(2xy-\sin y)dy+y^2dx=0$ است

(۱) $(1+x)(4+y)=c$ (۲) $(4+x)(1+y)=c$

(۳) $(1+x^2)(1+y^2)=c$ (۴) $(4+x^2)(1+y^2)=c$

۵. (سراسری ریاضی ۸۶) برای کدام مقدار m معادله $(x^2-y^2)dx+mxydy=0$ کامل است

(۱) 3 (۲) 2 (۳) -3 (۴) -2

۶. (سراسری مکانیک ۷۵) یک فاکتور انتگرال ساز برای معادله $y(2-3xy)dx-xdy=0$ برابر است با

(۱) $\frac{x}{y^2}$ (۲) $\frac{x^2}{y}$ (۳) xy^2 (۴) $\frac{y^2}{x}$

۷. (سراسری هسته‌ای ۷۴) جواب معادله دیفرانسیل $(y-xy^2)dx-(x+x^2y)dy=0$ کدام است

(۱) $x=cy^2e^{xy}$ (۲) $x=cye^{y}$ (۳) $x=cye^{x}$ (۴) $x=cye^{xy}$

۸. (سراسری مکانیک ۷۷) جواب معادله دیفرانسیل $y'+t\tan x=2\cos^2 x$ از کدام نقطه زیر می‌گذرد ($y(0)=0$)

(۱) $(\frac{\pi}{4},1)$ (۲) $(\frac{\pi}{2},1)$ (۳) $(\frac{\pi}{4},2)$ (۴) $(\frac{\pi}{2},2)$

۹. (سراسری هسته‌ای ۷۴) حل معادله دیفرانسیل $xy'+2y=e^{x^2}$ کدام است

(۱) $y=\frac{1}{x^3}(e^{x^2}+c)$ (۲) $y=e^{x^2}+c$

(۳) $y=\frac{1}{x}(e^{x^2}+c)$ (۴) $y=\frac{1}{x^2}(e^{x^2}+c)$

۱۰. (سراسری مکانیک ۸۴) جواب معادله $x^2dy+(y^2-xy)dx=0$ کدام است

(۱) $y=\frac{x}{\ln cx}$ (۲) $y=\frac{\ln cx}{x}$

(۳) $y=\frac{cx}{\ln x}$ (۴) $y=\frac{c\ln x}{x}$

۱۱. (سراسری معدن ۸۳) جواب معادله $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ کدام است
(۱) $y(ce^{x} - \cos x) = 1$ (۲) $y(ce^{-x} + \sin x) = 1$
(۳) $y(ce^{-x} + \cos x) = 1$ (۴) $y(ce^{x} - \sin x) = 1$

۱۲. (سراسری هوا و فضا ۸۲) جواب معادله $(y')^2 + (y-1)y' - y = 0$ کدام است
(۱) $(y + x + c)(y + cx) = 0$ (۲) $(y - cx)(y - c\ln x) = 0$
(۳) $(y - x + c)(y - ce^{-x}) = 0$ (۴) $(y + cx)(y - ce^{x}) = 0$

۱۳. (سراسری عمران ۸۶) معادله مسیرهای قایم خانواده دسته منحنی های $y^2 = cx^3$ کدام است
(۱) $3x^2y + y^3 = k$ (۲) $2x^2 + 3y^2 = k^2$
(۳) $x^2y + y^2 = k^2$ (۴) $3x^2y + 2y^2 = k$

۱۴. (سراسری برق ۸۶) معادله مسیرهای قایم خانواده دسته منحنی های $x^2 - y^2 - 2x + 4 + \lambda = 0$ کدام است
(۱) $x - xy = c$ (۲) $y - xy = c$
(۳) $y + xy = c$ (۴) $x + xy = c$

فصل ۳

معادلات مرتبه دوم و بالاتر

در این فصل می‌خواهیم روش حل برخی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر را آموزش دهیم. همان طوری که در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال برای شما گفته شده است، پاسخ دادن به هر انتگرالی برای ما امکانپذیر نیست و وقتی نتوانیم هر انتگرالی را پاسخ دهیم بسیار طبیعی است که نتوانیم هر معادله دیفرانسیل را حل کامل نماییم. هر چند حل‌های تقریبی خوبی توسط ریاضیدان‌ها کشف شده تا نیاز به حل کلاسیک یک معادله کمتر شود. اما هدف از گفتن این مطلب این بود که بدانید وقتی مرتبه معادله دیفرانسیل از یک بیشتر می‌شود انتظار حل کلاسیک کمتر می‌شود. با این اوصاف در این فصل حل برخی از معادلات دیفرانسیل مراتب بالا را آموزش می‌دهیم که اتفاقا طیف بسیار وسیعی هم دارند!

۱.۳ مقدمات

معادلات دیفرانسیل را علاوه بر دسته بندی با مرتبه به دسته‌های دیگری نیز تقسیم بندی می‌کنیم تا راحتتر آن‌ها را شناسایی و حل کنیم. یادآوری می‌کنیم که صورت کلی یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n به صورت زیر است

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

در فصل قبل با معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول و روش حل آن آشنا شدید و متوجه شدید که چنین معادله‌ای حل کلاسیک دارد. پس خیلی طبیعی است که وسوسه شویم و معادلات را با مفهوم خطی دسته بندی کنیم و برای آنها حل ارائه نماییم. از این رو معادلات را می‌توانیم به دسته‌های زیر تقسیم کنیم:

(۱) معادلات دیفرانسیل خطی.

(۲) معادلات دیفرانسیل غیر خطی.

در ادامه به شکل رسمی معادله دیفرانسیل خطی را تعریف می‌کنیم و باید همین جا بگوییم که تمرکز اصلی ما در این فصل حل معادلات دیفرانسیل خطی است.

تعریف ۳.۱.۱. *گوییم معادله دیفرانسیل $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)}) = 0$ خطی است هرگاه بتوانیم آن را به صورت*

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + f_{n-2}(x)y^{(n-2)} + ... + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$$

بنویسیم که در آن f_iها و g توابعی پیوسته با متغیر x هستند. f_iها ضرایب معادله خطی نامیده می‌شوند. اگر $g(x)$ صفر باشد آنگاه به معادله، معادله دیفرانسیل خطی همگن گوییم و اگر $g(x)$ ناصفر باشد به معادله، معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن گوییم. اگر معادله دیفرانسیل را نتوانیم به صورت بالا بنویسم به آن غیر خطی گوییم.
توجه: خطی مرتبه دوم به صورت $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ است. خطی مرتبه اول را در فصل قبل مطالعه کردیم $y' + p(x)y = g(x)$.

مثال ۳.۱.۲. *معادله $y''+xy = 3x$ خطی است. چون ضرایب به صورت $f_1(x) = 0$، $f_0(x) = x$ و $g(x) = 3x$ است. واضح است که این یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن است. همچنین معادله $y^{(7)} + xy'' = 0$ خطی است. چون ضرایب به صورت زیر است*

$$f_2(x) = x \qquad f_6(x) = ... = f_3(x) = f_1(x) = f_0(x) = g(x) = 0.$$

واضح است که این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی همگن است.

مثال ۳.۱.۳. *معادله $y'' = \cos\cos(\sqrt{x}y')$ غیر خطی است!*

۳.۲ معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم (و بالاتر)

در حالت کلی نمی‌توان برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه دوم حل کلاسیک ارائه کرد! اما در حالاتی خاص برخی روش‌های حل این معادلات را آموزش می‌دهیم. معادلات دیفرانسیل غیر خطی معمولا حل عددی می‌شوند که از حوصله بحث این دوره درسی خارج است. باید در همین جا ذکر کنیم که معادلات خطی را به طور کامل در بخش‌های بعدی زیر ذره بین قرار می‌دهیم. تمرکز اصلی ما روی معادلات خطی مرتبه دوم است و هر جا روش قابل تعمیم به مراتب بالاتر باشد اشاره می‌کنیم. می‌دانیم که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت $F(x,y,y',y'') = 0$ است. گاهی معادله دیفرانسیل به صورت $F(x,y'') = 0$، $F(y,y'') = 0$ و... است. از این رو برای بعضی حالت‌های خاص روش حل ارائه می‌کنیم.

(۱) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به گونه‌ای باشد که y'' بر حسب تابعی از x نوشته شود و فاقد y و y' باشد. در این صورت فقط انتگرال گیری ساده داریم! این روش برای معادله دیفرانسیل مرتبه بیشتر از دو نیز صادق است.

مثال ۳.۲.۱. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $y'' = \cos x$ را پیدا کنیم. این معادله فاقد y و y'*

است و y'' تابعی بر حسب x نوشته شده است. بنابراین انتگرال می‌گیریم

$$y' = \int y''dx = \int \cos x dx = -\sin x + c_1 \Rightarrow y = \int (-\sin x + c_1)dx = \cos x + c_1 x + c_2.$$

مثال ۲.۲.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $y''' = 3x$ را پیدا کنیم. این معادله فاقد y، y' و y'' است و y''' بر حسب تابعی x نوشته شده است. بنابراین انتگرال می‌گیریم*

$$\begin{aligned} y'' &= \int y''' dx = \int 3x dx = \frac{3}{2}x^2 + c_1 \Rightarrow y' = \int (\frac{3}{2}x^2 + c_1)dx = \\ &\frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2 \Rightarrow y = \int (\frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2)dx \Rightarrow \\ y &= \frac{1}{8}x^4 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3. \end{aligned}$$

(۲) معادله دیفرانسیل به صورت $F(x, y', y'') = 0$ باشد. یعنی فاقد تابع (y) است. با فرض $y' = P$ از معادله جدید نسبت به x مشتق می‌گیریم یعنی $P' = y''$ و به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌رسیم که باید آن را تشخیص و سپس حل نماییم (این روش برای مراتب بالا نیز صادق است).

مثال ۳.۲.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $xy'' + y' - 1 = 0$ را پیدا کنیم. معادله مرتبه دو است و فاقد تابع y! فرض کنیم $y' = P$ در نتیجه نسبت به x مشتق می‌گیریم و $y'' = P'$. پس $xP' + P - 1 = 0$. این یک معادله خطی مرتبه اول است (خودتان جزییات حل را بنویسید)*

$$P = \frac{1}{x}(x + c_1) = 1 + \frac{c_1}{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{c_1}{x}$$

اکنون یک انتگرال گیری ساده دیگر داریم

$$y = \int y' dx = \int (1 + \frac{c_1}{x})dx = x + c_1 \ln x + c_2.$$

مثال ۴.۲.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $xy''' + y'' = x + 1$ را پیدا کنیم. معادله مرتبه سه است و فاقد تابع! فرض کنیم $y'' = P$ در نتیجه نسبت به x مشتق می‌گیریم و $y''' = P'$. پس $xP' + P = x + 1$. این یک معادله خطی مرتبه اول است*

$$P = \frac{1}{x}(\frac{x^2}{2} + x + c_1) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x} \Rightarrow y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x}$$

اکنون یک انتگرال گیری ساده دیگر داریم

$$y' = \int y'' dx = \int (\frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x})dx = \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln x + c_2.$$

با یک انتگرال گیری دیگر جواب عمومی حاصل می‌شود

$$y = \int y' dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1 x \ln x + c_2 x + c_3.$$

(۳) معادله دیفرانسیل به صورت $F(y, y', y'') = 0$ باشد. یعنی فاقد x است. با فرض $y' = P$ از معادله جدید نسبت به y مشتق می‌گیریم ($y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx} = P\frac{dP}{dy}$) و به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌رسیم که باید آن را تشخیص و سپس حل نماییم.

مثال ۵.۲.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی $yy'' + (y+1)(y')^2 = 0$ را پیدا کنیم. معادله مرتبه دو است و فاقد x! فرض کنیم $y' = P$ در نتیجه نسبت به y مشتق می‌گیریم و $y'' = P\frac{dP}{dy}$. پس $yP\frac{dP}{dy} + (y+1)P^2 = 0$ یا معادلا $P(\frac{dP}{dy} + \frac{y+1}{y}Pdy) = 0$. اگر $P = y' = 0$ آنگاه $y = c$ که c ثابت است. اگر $\frac{dP}{dy} + \frac{y+1}{y}Pdy = 0$ آنگاه این یک معادله خطی مرتبه اول جدایی پذیر است. بنابراین*

$$\ln P + y + \ln y = c_1 \;\Rightarrow\; \ln(Py) = c_1 - y \;\Rightarrow\; Py = e^{c_1 - y}.$$

پس به معادله مرتبه اول جدایی پذیر $y'y = e^{c_1-y} = e^{c_1}e^{-y}$ می‌رسیم و لذا $ye^y - y = e^{c_1}x + c_2 = c_3 x + c_2$.

تذکر ۶.۲.۳. *اگر معادله هم فاقد y و هم فاقد x باشد از روش فاقد تابع یعنی (۲) استفاده می‌کنیم.*

مثال ۷.۲.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $2y'' - (y')^2 + 4 = 0$ را پیدا کنیم. معادله مرتبه دو است و فاقد y و x! فرض کنیم $y' = P$ در نتیجه نسبت به x مشتق می‌گیریم و $y'' = P'$. پس $2P' - P^2 + 4 = 0$. این یک معادله مرتبه اول جدایی پذیر است که حل آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.*

همانطور که متوجه شده‌اید یک روش کلی برای حل $F(x, y, y', y'') = 0$ وجود ندارد! در ادامه در یک حالت خاص یک روش برای حل $F(x, y, y', y'') = 0$ ارائه می‌کنیم به طوری که x، y، y' و y'' حضور دارند.

(۴) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $F(x, y, y', y'') = 0$ نسبت به y، y' و y'' همگن از درجه n باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی ناصفر a داشته باشیم

$$F(x, ay, ay', ay'') = a^n F(x, y, y', y'').$$

این معادله با تغییر متغیر $\int udx = \ln y$ تبدیل به معادله مرتبه اول می‌شود.

مثال ۸.۲.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$ را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن از درجه دو نسبت به y، y' و y'' است (بررسی کنید). پس قرار*

می‌دهیم $\int udx = \ln y$. بنابراین $u = \frac{y'}{y}$ یعنی $y' = yu$ و در نتیجه $y'' = y'u + u'y$. حال در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم

$$y(y'u + u'y) - (yu)^2 - 6xy^2 = 0 \Rightarrow y(yuu + u'y) - y^2u^2 - 6xy^2 = 0.$$

پس $y^2(u^2 + u' - u^2 - 6x) = 0$. اما y^2 ناصفر است (چرا؟). پس $u' = 6x$ و در نتیجه $u = 3x^2 + c_1$. بنابراین $\ln y = \int udx = \int(3x^2 + c_1)dx = x^3 + c_1x + c_2$ جواب عمومی است.

تمرین ۹.۲.۳. جواب عمومی معادله $xy'' + y' + x = 0$ را پیدا کنید.

حل. معادله مرتبه دو است و فاقد تابع! فرض کنیم $y' = P$ در نتیجه نسبت به x مشتق می‌گیریم و $y'' = P'$. پس $xP' + P + x = 0$. این یک معادله خطی مرتبه اول است و با تقسیم بر x داریم که $P' + \frac{1}{x}P - 1 = 0$. لذا با حل این معادله خطی مرتبه اول داریم

$$P = \frac{1}{x}\left[\frac{-x^2}{2} + c_1\right] = \frac{-x}{2} + \frac{c_1}{x} = y'$$

اکنون یک انتگرال گیری ساده دیگر داریم

$$y = \int y'dx = \int(\frac{-x}{2} + \frac{c_1}{x})dx = \frac{-x^2}{4} + c_1\ln x + c_2.$$

تمرین ۱۰.۲.۳. جواب عمومی معادله $yy'' - (y')^2 = y^4$ را پیدا کنید.

حل. معادله مرتبه دو است و فاقد x! فرض کنیم $y' = P$ در نتیجه نسبت به y مشتق می‌گیریم و $y'' = P\frac{dP}{dy}$. پس $yP\frac{dP}{dy} + P^2 = y^4$ یا معادلا $-(P^2 + y^4)dy + yPdP = 0$. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. حال شرایط قضیه ۴.۴.۲ بر قرار است و با قرار دادن $M = -(P^2 + y^4)$ و $N = yP$ داریم $\frac{\partial M}{\partial P} = -2P \neq P = \frac{\partial N}{\partial y}$. بنابراین معادله کامل نیست اما داریم $\frac{1}{N}\Delta = \frac{1}{yP}(-3P) = \frac{-3}{y} = s(y)$. بنابراین معادله فاکتور انتگرال به شکل

$$h = h(x,y) = e^{\int s(y)dy} = e^{\int \frac{-3}{y}} = e^{-3\ln y} = \frac{1}{y^3}$$

دارد. معادله را در فاکتور انتگرال ضرب می‌کنیم تا معادله کامل حاصل شود

$$-\frac{1}{y^3}(P^2 + y^4)dy + \frac{1}{y^2}PdP = 0.$$

با حل این معادله کامل (به عنوان تمرین رها می‌شود) داریم

$$\frac{P^2}{2y^2} - \frac{y^2}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow P = \sqrt{2c_1y^2 + y^4} = y' = \frac{dy}{dx}.$$

معادله آخر جدایی شدنی است و جواب عمومی به راحتی حاصل می‌شود.

تمرین ۱۱.۲.۳. *جواب عمومی معادله $y''' - \frac{y''}{x} = 0$ را پیدا کنید.*

حل. معادله مرتبه سه است و فاقد تابع! فرض کنیم $y'' = P$ در نتیجه نسبت به x مشتق می‌گیریم و $y''' = P'$. پس $P' - \frac{P}{x} = 0$. این یک معادله مرتبه اول خطی و جدایی پذیر است

$$\frac{dP}{P} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln P = \ln x + c = \ln x + \ln c_1 = \ln(c_1 x).$$

به عبارت دیگر $y'' = P = c_1 x$. اکنون یک انتگرال گیری ساده دیگر داریم

$$y' = \int y'' dx = \int c_1 x dx = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2.$$

با یک انتگرال گیری دیگر، جواب عمومی به صورت زیر است

$$y = \int y' dx = \int (\frac{c_1 x^2}{2} + c_2) dx = \frac{c_1 x^3}{6} + c_2 x + c_3.$$

۳.۳ قضیه‌هایی در مورد معادله دیفرانسیل خطی

در حل معادلات با مرتبه بیشتر از یک، جواب خصوصی خیلی با اهمیت است. از این رو در ادامه چند مطلب مهم را در مورد جواب خصوصی و جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خواهیم آورد. موقتا تمرکز اصلی ما روی معادلات مرتبه دو است. هر چند اکثر مطالب قابل تعمیم به معادلات مرتبه بالاتر از دو نیز می‌باشد.

قضیه‌های این بخش را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنیم توابع $p(x)$، $q(x)$ و $g(x)$ روی بازه I پیوسته باشند و $x_0 \in I$. در این صورت یک همسایگی حول x_0 مانند $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ وجود دارد که معادله دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad y(x_0) = y_0, \;\; y'(0) = y_1$$

یک و فقط یک جواب دارد.

مثال ۲.۳.۳. *معادله دیفرانسیل خطی $y'' + y = 0$ حداقل دارای دو جواب خصوصی به صورت $y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$ است. اما با فرض $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$، $y_1 = \cos x$ تنها جواب معادله است.*

قضیه ۳.۳.۳. *اگر y_1 و y_2 دو جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل خطی همگن*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند آنگاه برای هر دو عدد حقیقی c_1 و c_2، $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز جواب معادله بالا است.

مثال ۴.۳.۳. معادله $y''+y=0$ دارای دو جواب خصوصی به صورت $y_1=\cos x$ و $y_2=\sin x$ است. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که برای هر عدد حقیقی c، $y=c\cos x+\sin x$ جواب است.

تذکر ۵.۳.۳. قضیه ۳.۳.۳ برای معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن و معادله دیفرانسیل غیر خطی صحیح نیست. به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶.۳.۳. معادله دیفرانسل خطی غیرهمگن $y''-4y'=3$ دارای دو جواب خصوصی به صورت $y_1=\frac{-3}{4}$ و $y_2=e^{4x}-\frac{3}{4}$ است. اما $y=y_1+(-1)y_2$ جواب معادله بالا نیست (بررسی کنید).

مثال ۷.۳.۳. معادله دیفرانسیل غیر خطی $yy''-x(y')=0$ دارای دو جواب خصوصی به صورت $y_1=1$ و $y_2=x^2$ است. اما $y=y_1+(-1)y_2$ جواب معادله بالا نیست (بررسی کنید).

حال قضیه زیر را داریم.

قضیه ۸.۳.۳. اگر y_1 جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

باشد و y_2 جواب خصوصی $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد آنگاه $y=y_1+y_2$ نیز جواب معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن بالا است.

قضیه ۹.۳.۳. اگر y_1 و y_2 جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

باشد آنگاه y_2-y_1 جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ است.

تعریف زیر را نیاز داریم.

تعریف ۱۰.۳.۳. گوییم توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، $f_n(x)$ روی بازه I مستقل خطی هستند هرگاه از

$$c_1f_1(x)+...+c_nf_n(x)=0 \qquad \forall x\in I$$

نتیجه شود که c_iها همگی صفر هستند. اگر f_iها مستقل خطی نباشند به آن ها وابسته خطی گوییم.

مثال ۱۱.۳.۳. تابع‌های $y_1=x$ و $y_2=x^2$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند. زیرا اگر

$$c_1y_1+c_2y_2=c_1x+c_2x^2=0$$

باشد آنگاه با مشتق گیری داریم $c_1+2c_2x=0$. حال فرض کنیم $x=0$ است پس $c_1=0$. اگر فرض کنیم $x=1$ آنگاه c_2 هم صفر می‌شود.

مثال ۱۲.۳.۳. *توابع $y_1 = x$ و $y_2 = 2x$ روی مثلا بازه $(0, 1)$ وابسته خطی هستند. زیرا*

$$0 = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2(2x) \qquad c_1 = 2, \;\; c_2 = -1$$

و به وضوح نه c_1 صفر است و نه c_2! به بیان دیگر، اگر $c_1x + c_2(2x) = 0$ آنگاه داریم $x(c_1 + 2c_2) = 0$. چون x ناصفر است پس باید $c_1 = -2c_2$ باشد. حال انتخاب‌های زیاد ناصفری از c_i پیش روی ما است که در شرط $c_1x + c_2(2x) = 0$ صدق می‌کنند.

مثال ۱۳.۳.۳. *توابع $y_1 = 0$، $y_2 = x$ و $y_3 = x^2$ روی مثلا بازه $(0, 1)$ وابسته خطی هستند. زیرا*

$$2y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 2(0) + 0(x) + 0(x^2) \qquad c_1 = 2, \;\; c_2 = c_3 = 0$$

و به وضوح c_1 صفر نیست!

برای ادامه تعریف زیر را احتیاج داریم.

تعریف ۱۴.۳.۳. *فرض کنیم توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، $f_n(x)$ روی بازه I از هر مرتبه‌ای مشتق داشته باشند. در این صورت به دترمینان*

$$det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ & \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

رونسکین توابع $f_1(x)$، $f_2(x)$، ...، $f_n(x)$ روی بازه I گوییم و آن را با

$$W(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

نشان می‌دهیم. واضح است که رونسکین چند تابع، دوباره یک تابع است.

مثال ۱۵.۳.۳. *برای توابع $f_1(x) = x$ و $f_2(x) = x^2$ داریم*

$$W(f_1(x), f_2(x)) = det \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2.$$

حال قضیه بسیار جالب زیر را داریم.

قضیه ۱۶.۳.۳. *فرض کنیم*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب پیوسته روی بازه I باشد. در این صورت دو جواب خصوصی y_1 و y_2 این معادله استقلال خطی دارند اگر و تنها اگر $W(y_1, y_2)$ روی I صفر نشود.

مثال ۱۷.۳.۳. *معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + y = 0$ ضرایب پیوسته در $\mathbb{R}$ دارد و دارای دو جواب خصوصی به صورت $y_1 = \cos x$ و $y_2 = \sin x$ است. چون*

$$W(y_1, y_2) = det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1$$

روی $\mathbb{R}$ ناصفر است، این دو جواب مستقل خطی هستند.

حال قضیه بسیار جالب دیگری را می‌پذیریم.

قضیه ۱۸.۳.۳. *فرض کنیم*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب پیوسته روی بازه I باشد و y_1 و y_2 دو جواب خصوصی این معادله باشند. در این صورت $W(y_1, y_2)$ روی کل I صفر است یا در هیچ نقطه از I صفر نیست.

تذکر ۱۹.۳.۳. *قضیه ۱۶.۳.۳ فقط برای جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی همگن کارایی دارد. مثلا مشاهد کرده‌اید که توابع $y_1 = x$ و $y_2 = x^2$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند. اما*

$$W(y_1, y_2) = det \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = x^2$$

روی بازه $I = (-1, 1)$ ریشه صفر دارد!.

قضیه ۱۶.۳.۳ و قضیه ۱۸.۳.۳ نتیجه خیلی مهم زیر را برای ما دارد.

نتیجه ۲۰.۳.۳. *فرض کنیم*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

یک معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب پیوسته روی بازه I باشد. در این صورت دو جواب خصوصی y_1 و y_2 این معادله استقلال خطی دارند اگر و تنها اگر $W(y_1, y_2)$ روی یک نقطه از I صفر نشود.

حال می‌توانیم اولین قضیه اساسی را بیان کنیم. این قضیه نشان می‌دهد که چگونه جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل خطی همگن را به دست آوریم.

قضیه ۲۱.۳.۳. *اگر y_1 و y_2 دو تابع پیوسته و مستقل خطی روی بازه I باشند و همچنین y_1 و y_2 دو جواب از معادله دیفرانسیل خطی همگن*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشند آنگاه $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل بالا است (به توابع y_1 و y_2 صدق کننده در فرض‌های قضیه پایه جواب گوییم).

مثال ۲۲.۳.۳. *معادله دیفرانسیل خطی همگن* $y'' + y = 0$ *ضرایب پیوسته در* $\mathbb{R}$ *دارد و دارای دو جواب خصوصی به صورت* $y_1 = \cos x$ *و* $y_2 = \sin x$ *است. چون*

$$W(y_1, y_2) = det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1$$

روی $\mathbb{R}$ *ناصفر است بنابراین دو جواب خصوصی بالا مستقل خطی هستند. حال طبق قضیه* ۲۱.۳.۳ *،* $y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ *جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن* $y'' + y = 0$ *است.*

اکنون دومین قضیه اساسی را بیان می‌کنیم! قضیه زیر تکلیف جواب معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن را مشخص می‌کند.

قضیه ۲۳.۳.۳. *اگر* y_p *یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

با ضرایب پیوسته روی بازه I *باشد و همچنین* y_g *جواب عمومی معادله خطی همگن*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

آنگاه $y_G = y_g + y_p$ *جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن بالا است.*

مثال ۲۴.۳.۳. *معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن* $y'' - y = x$ *ضرایب پیوسته در* $\mathbb{R}$ *دارد و* $y_p = -x$ *یک جواب خصوصی این معادله است. اما* $y_1 = e^x$ *و* $y_2 = e^{-x}$ *دو جواب خصوصی* $y'' - y = 0$ *است. چون*

$$W(y_1, y_2) = det \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -2$$

روی $\mathbb{R}$*، پس دو جواب مستقل خطی هستند و طبق قضیه* ۲۱.۳.۳ *،* $y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ *جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن* $y'' - y = 0$ *است. پس*

$$y_G = y_g + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن است.

تمرین ۲۵.۳.۳. *اگر* y_1 *و* y_2 *دو تابع باشند که* $\frac{y_1}{y_2} = k$ *باشد آنگاه نشان دهید که* y_1 *و* y_2 *وابسته خطی هستند (*k *یک عدد حقیقی است).*

حل. فرض کنیم $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$. چون $y_1 = k y_2$ است پس داریم

$$0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 k y_1 + c_2 y_2 = y_2(c_1 k + c_2).$$

بنابراین چون $y_2 \neq 0$ باید داشته باشیم $c_2 = -c_1 k$. اگر $k = 0$ باشد آنگاه $y_1 = 0$ و داریم

$$0 = 2y_1 + 0y_2 \qquad c_1 = 2, \ \ c_2 = 0$$

و به وضوح c_1 صفر نیست! پس y_1 و y_2 وابسته خطی هستند. اگر $k \neq 0$ آنگاه با فرض $c_1 = 1$ و $c_2 = -k \neq 0$ داریم

$$c_1y_1 + c_2y_2 = y_1 - ky_2 = y_1 - y_1 = 0.$$

در حالی که c_2 ناصفر است. پس y_1 و y_2 وابسته خطی هستند.

تمرین ۲۶.۳.۳. *اگر y_1 و y_2 دو جواب $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ در بازه I باشند و $W = W(y_1, y_2)$ آنگاه نشان دهید $W' + f_1(x)W = 0$.*

حل. می‌دانیم که $W = y_1y_2' - y_1'y_2$. بنابراین

$$\begin{aligned}
&W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = \\
&y_1(-f_1(x)y_2' - f_0(x)y_2) - y_2(-f_1(x)y_1' - f_0(x)y_1) = \\
&- f_1(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = -f_1(x)W.
\end{aligned}$$

تمرین ۲۷.۳.۳. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن $y'' - y = e^x$ را با فرض $y_p = \frac{x}{2}e^x$ به دست آورید.*

حل. معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن $y'' - y = e^x$ ضرایب پیوسته در $\mathbb{R}$ دارد. اما $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^{-x}$ دو جواب خصوصی $y'' - y = 0$ است. چون

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -2$$

روی $\mathbb{R}$ ناصفر است پس دو جواب مستقل خطی هستند و طبق قضیه ۲۱.۳.۳، $y_g = c_1e^x + c_2e^{-x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' - y = 0$ است. پس

$$y_G = y_g + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{x}{2}e^x$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن است.

تمرین ۲۸.۳.۳. *نشان دهید که معادله دیفرانسیل خطی همگن*

$$y' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

با ضرایب پیوسته در بازه $(-1, 1)$ هرگز نمی‌تواند جوابی به صورت x^2 داشته باشد.

حل. فرض کنیم $y_1 = x^2$. معادله را با شرط

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0 \qquad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$$

در نظر می‌گیریم. واضح است که $y_2 = 0$ در معادله بالا صدق می‌کند. حال طبق قضیه ۱.۳.۳ باید $y_1 = y_2$ باشد و این تناقض است.

۴.۳ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

در این بخش روش حل معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دو خطی با ضرایب ثابت را آموزش می‌دهیم. در حقیقت ضرایب معادله دیفرانسیل خطی همگن را تابع‌های ثابت در نظر می‌گیریم، به عبارتی ساده‌ترین شکل ممکن! قبل از آن لازم است که کمی درباره اعداد مختلط بگوییم.

تعریف ۱.۴.۳. *مجموعه همه زوج‌های مرتب به شکل (x, y) که $x, y \in \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، یعنی*

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

برای دو زوج مرتب‌های $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} z + z' &:= (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ z \cdot z' &:= (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \end{aligned}$$

به $\mathbb{C}$ همراه با جمع و ضرب بالا مجموعه اعداد مختلط گوییم و هر عضو از $\mathbb{C}$ را یک عدد مختلط نامیم.

مثال ۲.۴.۳. *برای اعداد مختلط $z = (1, 1)$ و $z' = (0, -1)$ داریم*

$$\begin{aligned} z + z' &= (0 + 1, 1 + (-1)) = (1, 0) \\ z \cdot z' &:= (1, 1) \cdot (0, -1) = (0 - (-1), -1 + 0) = (1, -1). \end{aligned}$$

قرار داد ۳.۴.۳. *از این لحظه قرار داد می‌کنیم که عدد مختلط $(0, 1)$ در $\mathbb{C}$ را با i نشان دهیم. همچنین از این لحظه قرار داد می‌کنیم اعداد مختلط $(x, 0)$ و $(0, y)$ را به ترتیب با همان x و y نمایش دهیم. این دو قرار داد بسیار مفید هستند. زیرا کمک می‌کنند یک عدد مختلط (x, y) را به صورت $x + iy$ نمایش دهیم. لذا*

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

تذکر ۴.۴.۳. *قرار داد بالا سبب می‌شود که داشته باشیم*

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 - 0) = (-1, 0) = -1.$$

یعنی توان دوم i برابر با -1 است. یعنی معادله $t^2 + 1 = 0$ که در اعداد حقیقی ریشه نداشت در اعداد مختلط ریشه i دارد. در نتیجه جذر بری اعداد منفی با معنی است! یعنی داریم $\sqrt{-16} = 4i$ و یا $\sqrt{-25} = 5i$ و الی آخر. همچنین برای $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ داریم

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + x') + i(y + y') \\ z \cdot z' &= (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{aligned}$$

مثال ۳.۴.۵. برای اعداد مختلط $z = 1 + i$ و $z' = -i$ داریم

$$z + z' = 1$$
$$z \cdot z' := 1 - i.$$

تعریف ۳.۴.۶. برای عدد مختلط $z = x + iy$، به بخش x بخش حقیقی عدد مختلط z گوییم و با $Re(z)$ نشان می‌دهیم و به بخش y بخش موهومی عدد مختلط z گوییم و با $Im(z)$ نشان می‌دهیم.

اکنون قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳.۴.۷. معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ که در آن $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ دارای ریشه‌های زیر است

$$t_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad t_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

مثال ۳.۴.۸. معادله درجه دوم $t^2 + 2t + 5 = 0$ که در آن $\Delta = b^2 - 4ac = -16$ دارای ریشه‌های زیر است

$$t_1 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \qquad t_2 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$

تعریف ۳.۴.۹. منظور از نرم یا قدر مطلق عدد مختلط $z = x + iy$ یعنی $\sqrt{x^2 + y^2}$ و آن را با $|z|$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت $|z|$ همان فاصله نقطه (x, y) از مبدا $(0, 0)$ است.

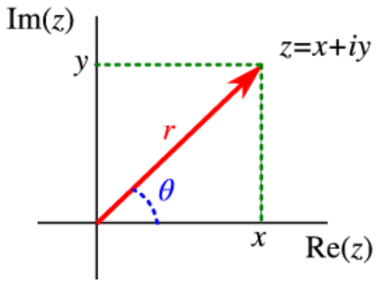
مثال ۳.۴.۱۰. قدر مطلق عدد مختلط $z = 1 - i$ برابر است با $|z| = \sqrt{2}$.

تعریف ۳.۴.۱۱. منظور از مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ یعنی $x - iy$ و آن را با $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۴.۱۲. ریشه‌های مختلط یک معادله درجه دوم با شرط $\Delta < 0$ مزدوج هستند. جالبتر این که اگر $a + ib$ ریشه $c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0 = 0$ باشد $(c_i \in \mathbb{R})$ آنگاه $a - ib$ نیز ریشه است.

لم ۳.۴.۱۳. برای هر عدد مختلط z همواره داریم $z\bar{z} = |z|^2$.

تذکر ۳.۴.۱۴. هر عدد مختلط یک نمایش قطبی یا مثلثاتی دارد. فرض کنیم عدد مختلط $z = x + iy$ را در اختیار داریم که $r = |z|$. یعنی



و لذا $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$. بنابراین $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. همچنین $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

تعریف ۱۵.۴.۳. در نمایش قطبی عدد مختلط z به θ آرگومان گوییم و به $-\pi < \theta \leq \pi$ آرگومان اصلی گوییم. در نمایش قطبی عدد مختلط همیشه آرگومان اصلی را لحاظ می‌کنیم.

مثال ۱۶.۴.۳. می‌خواهیم نمایش قطبی عدد مختلط $z = 1 - i$ را بنویسیم. واضح است که $|z| = \sqrt{2}$. اما $\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$. چون آرگومان اصلی مد نظر است پس $\theta = \frac{3\pi}{4}$. لذا $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$.

در فصل ششم و در تمرین‌های حل شده رابطه بسیار مهم زیر را اثبات کرده‌ایم.

لم ۱۷.۴.۳. (فرمول اویلر، اتحاد اویلر یا رابطه اویلر) همواره داریم $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. در نتیجه نمایش $re^{i\theta}$ برای عدد مختلط حاصل می‌شود.

مثال ۱۸.۴.۳. می‌خواهیم نمایش قطبی عدد مختلط $z = 1 - i$ را بنویسیم. واضح است که $|z| = \sqrt{2}$. اما $\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$. چون آرگومان اصلی مد نظر است پس $\theta = \frac{3\pi}{4}$. لذا $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

اکنون به هدف اصلی خودمان می‌پردازیم.

تعریف ۱۹.۴.۳. هر معادله مرتبه دو به صورت $y'' + ay' + by = 0$ که $a, b \in \mathbb{R}$، را معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دو خطی با ضرایب ثابت گوییم.

مثال ۲۰.۴.۳. $y'' + 2y' + 4y = 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی با ضرایب ثابت همگن است. همچنین $2y'' + 2y' + 4y = 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی با ضرایب ثابت همگن است (بر ۲ تقسیم کنید).

در ادامه به مفهوم زیر نیاز داریم.

تعریف ۲۱.۴.۳. برای هر معادله مرتبه دو به صورت $y'' + ay' + by = 0$ که $a, b \in \mathbb{R}$، معادله $t^2 + at + b = 0$ را معادله شاخصی یا معادله مفسر گوییم.

مثال ۲۲.۴.۳. معادله شاخصی برای معادله $y'' + 2y' + 4y = 0$ به صورت $t^2 + 2t + 4 = 0$ است.

می‌دانیم که معادله دیفرانسیل همگن مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت، $y' - ay = 0$ دارای یک جواب به صورت $y_1 = e^{ax}$ است. این مطلب ما را به اثبات قضیه زیر سوق می‌دهد.

قضیه ۲۳.۴.۳. *معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ با معادله شاخصی $t^2 + at + b = 0$ دارای جواب عمومی به صورت زیر است.*

(۱) معادله شاخصی دو ریشه حقیقی t_1 و t_2 دارد و جواب عمومی به صورت

$$y_g = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$$

است. در این حالت $y_1 = e^{t_1 x}$ و $y_2 = e^{t_2 x}$ دو جواب مستقل خطی معادله هستند.

(۲) معادله شاخصی دو ریشه مختلط به صورت $u + iv$ و $u - iv$ دارد و جواب عمومی به صورت

$$y_g = e^{ux}(c_1 \cos(vx) + c_2 \sin(vx))$$

است. در این حالت $y_1 = e^{ux}\cos(vx)$ و $y_2 = e^{ux}\sin(vx)$ دو جواب مستقل خطی معادله هستند.

(۳) معادله شاخصی یک ریشه مضاعف حقیقی t_1 دارد و جواب عمومی به صورت

$$y_g = (c_1 + c_2 x)e^{t_1 x}$$

است. در این حالت $y_1 = e^{t_1 x}$ و $y_2 = xe^{t_1 x}$ دو جواب مستقل خطی معادله هستند.

اثبات. با توجه به مطلبی که بالا اشاره شد، حدس می‌زنیم که معادله

$$y'' + ay' + by = 0$$

جوابی به صورت $y = e^{tx}$ داشته باشد! باید t مناسب را پیدا کنیم. جواب حدسی را در معادله جایگذاری می‌کنیم پس داریم

$$e^{tx}(t^2 + at + b) = 0.$$

پس باید t را ریشه معادله شاخصی قرار دهیم تا حدس ما به حقیقت تبدیل شود! از این رو حالات زیر رخ می‌دهد.

(۱) معادله شاخصی دو ریشه (متمایز) t_1 و t_2 دارد. پس $e^{t_1 x}$ و $e^{t_2 x}$ در معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دو با ضرایب ثابت صدق می‌کنند. اما $W(e^{t_1 x}, e^{t_2 x}) \neq 0$ (بررسی کنید، در واقع این دو مستقل خطی هستند). بنابراین طبق قضیه ۲۱.۳.۳ باید $y_g = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$ جواب عمومی باشد.

(۲) معادله شاخصی دو ریشه مختلط $u + iv$ و $u - iv$ دارد. پس $e^{(u+iv)x}$ و $e^{(u-iv)x}$ در معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دو با ضرایب ثابت صدق می‌کنند. اما $W(e^{(u+iv)x}, e^{(u-iv)x}) \neq 0$ (بررسی کنید، در واقع این دو مستقل خطی هستند). بنابراین بر طبق قضیه ۲۱.۳.۳ باید جواب عمومی مختلط $Y = (A+iB)e^{(u+iv)x} + (C+iD)e^{(u-iv)x}$ باشد. اما ما دنبال جواب عمومی حقیقی هستیم. برای این منظور در جواب عمومی مختلط بالا قرار می‌دهیم $B = D = 0$ و

$A = C = \frac{1}{2}$ و با کمک رابطه اویلر داریم

$$y_1 = \frac{1}{2}e^{(u+iv)x} + \frac{1}{2}e^{(u-iv)x} = \frac{1}{2}e^{ux}(e^{ivx} + e^{-ivx}) =$$
$$\frac{1}{2}e^{ux}(\cos(vx) + i\sin(vx) + \cos(-vx) + i\sin(-vx)) =$$
$$\frac{1}{2}e^{ux}(\cos(vx) + i\sin(vx) + \cos(vx) - i\sin(vx)) = e^{ux}\cos(vx).$$

به صورت مشابه، قرار می‌دهیم $A = C = 0$ و $B = D = \frac{1}{2}$ و با کمک رابطه اویلر داریم $y_2 = e^{ux}\sin(vx)$. y_1 و y_2 حقیقی هستند و $W(y_1, y_2) \neq 0$ (بررسی کنید، در واقع این دو مستقل خطی هستند). بنابراین طبق قضیه ۲۱.۳.۳ داریم

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 = e^{ux}(c_1\cos(vx) + c_2\sin(vx)).$$

(۳) معادله شاخصی یک ریشه مضاعف t_1 دارد. پس e^{t_1x} در معادله صدق می‌کند. اما با خوش شانسی تمام xe^{t_1x} نیز در معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت بالا صدق می‌کند و $W(e^{t_1x}, xe^{t_1x}) \neq 0$ (بررسی کنید، در واقع این دو مستقل خطی هستند). بنابراین طبق قضیه ۲۱.۳.۳ باید $y_g = c_1e^{t_1x} + c_2xe^{t_1x}$ جواب عمومی باشد (البته حدس xe^{t_1x} شانسی نیست و از روش تغییر پارامترها (کاهش مرتبه) که بعدا آموزش می‌دهیم حاصل می‌شود). □

صورت کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت:

$$y'' + ay' + by = 0$$

معادله شاخصی: $t^2 + at + b = 0$

(۱) معادله شاخصی دو ریشه t_1 و t_2 دارد و $y_g = c_1e^{t_1x} + c_2e^{t_2x}$.

(۲) معادله شاخصی دو ریشه مختلط به صورت $u + iv$ و $u - iv$ دارد (مزدوج هستند) و $y_g = e^{ux}(c_1\cos(vx) + c_2\sin(vx))$.

(۳) معادله شاخصی یک ریشه مضاعف t_1 دارد و $y_g = (c_1 + c_2x)e^{t_1x}$.

به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۲۴.۴.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' - 15y = 0$ را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت است. اما معادله شاخصی به صورت $t^2 + 2t - 15 = 0$ است که دو ریشه $t_1 = -5$ و $t_2 = 3$ دارد. پس حالت (۱) رخ داده است و $y_g = c_1e^{-5x} + c_2e^{3x}$ جواب عمومی است.*

مثال ۲۵.۴.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + y = 0$ را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت است. اما معادله شاخصی به صورت $t^2 + 2t + 1 = 0$ است که ریشه مضاعف $t_1 = -1$ دارد. پس حالت (۳) رخ داده است و $y_g = (c_1 + c_2x)e^{-x}$ جواب عمومی است.*

مثال ۲۶.۴.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y''+2y'+10y=0$ *را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت است. اما معادله شاخصی به صورت* $t^2+2t+10=0$ *است. حال داریم* $\Delta=b^2-4ac=-36$. *پس معادله دو ریشه مختلط (مزدوج هم) دارد*

$$t_1,t_2=\frac{-b\mp i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2\mp 6i}{2}=-1\mp 3i.$$

پس حالت (۲) رخ داده است و واضح است که $u=-1$ *و* $v=3$ *است. حال داریم که* $y_g=e^{-x}(c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x))$ *جواب عمومی است.*

تمرین ۲۷.۴.۳. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y''-4y'+4y=0$ *را پیدا کنید.*

حل. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت است. اما معادله شاخصی به صورت $t^2-4t+4=0$ است که ریشه مضاعف $t_1=2$ دارد. پس حالت (۳) رخ داده است و $y_g=(c_1+c_2x)e^{2x}$ جواب عمومی است.

تمرین ۲۸.۴.۳. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل* $y''+25y=0$ *را پیدا کنید.*

حل. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت است. اما معادله شاخصی به صورت $t^2+25=0$ است. حال داریم

$$\Delta=b^2-4ac=-100.$$

پس معادله دو ریشه مختلط (مزدوج هم) دارد

$$t_1,t_2=\frac{-b\mp i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{0\mp 10i}{2}=\mp 5i.$$

پس حالت (۲) رخ داده است و واضح است که $u=0$ و $v=5$ است. حال داریم که $y_g=e^{0x}(c_1\cos(5x)+c_2\sin(5x))=c_1\cos(5x)+c_2\sin(5x)$ جواب عمومی است.

تمرین ۲۹.۴.۳. *یک معادله دیفرانسیل بنویسید که توابع* $e^x\sin(2x)$ *و* $e^x\cos(2x)$ *جواب‌های آن باشند.*

حل. کافی است قرار دهیم $u=1$ و $v=2$ و حالت (۲) را مد نظر قرار دهیم. پس $1+2i$ و $1-2i$ ریشه‌های معادله شاخصی هستند. با توجه به روابط حاصل ضرب ریشه‌ها و حاصل جمع ریشه‌ها در معادلات درجه دوم و این مطلب که ضریب t^2 یک است، معادله شاخصی به صورت $t^2-2t+5=0$ است. بنابراین معادله دیفرانسیل $y''-2y'+5y=0$ جواب مسئله است.
است.

۵.۳ معادله دیفرانسیل خطی (غیر ضرایب ثابت) همگن

در بخش‌های قبل اشاره شد که ممکن است نتوانیم برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حل تحلیلی (کلاسیک) فراهم کنیم. اما برای معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت حل تحلیلی ارائه نمودیم. اما سوال این است که چگونه می‌توان برای یک معادله دیفرانسیل خطی همگن که ضرایب ثابت ندارد، حل تحلیلی فراهم کرد؟

در پاسخ باید بگوییم که لزوما نمی‌توان چنین حل تحلیلی ارائه نمود. اما اگر بتوانیم یک جواب خصوصی را حدس بزنیم یا از قبل داشته باشیم، می‌توانیم یک حل تحلیلی ارائه کنیم. در ادامه روشی را که به روش تغییر پارامترها یا کاهش مرتبه است شرح می‌دهیم.

روش کاهش مرتبه

در این قسمت می‌خواهیم به این سوال پاسخ دهیم که آیا با داشتن یک جواب ناصفر مانند y_1 از معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$، می‌توانیم یک جواب دیگر مانند y_2 داشته باشیم که مستقل خطی باشند؟ فرض کنیم معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

را همراه با جواب خصوصی y_1 در اختیار داریم. حال تابع u را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که $y_2 = uy_1$ جواب دیگری برای معادله باشد. اگر y_1 و y_2 مستقل خطی باشند آنگاه طبق قضیه ۲۱.۳.۳ داریم $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی است. اما u چگونه معیین می‌شود:
واضح است که $y_2' = uy_1' + u'y_1$ و $y_2'' = u''y_1 + y_1''u + 2y_1'u'$. چون y_2 جواب است، با جایگذاری در معادله اصلی داریم

$$\begin{aligned}
&y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0\\
&u''y_1 + y_1''u + 2y_1'u' + p(x)(uy_1' + u'y_1) + q(x)y_2 = 0\\
&y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' + (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) = 0\\
&y_1u'' + (2y_1' + p(x)y_1)u' = 0.
\end{aligned}$$

با فرض $Z = u'$ و مشتق گیری بر حسب x داریم $u'' = Z'$

$$y_1Z' + (2y_1' + p(x)y_1)Z = 0 \;\Rightarrow\; \frac{Z'}{Z} = \frac{-2y_1'}{y_1} - p(x)$$

معادله خطی مرتبه اول حاصل می‌شود (به همین دلیل به این روش کاهش مرتبه گوییم). حال با انتگرال گیری (می‌توانیم ثابت انتگرال را موقتا اعمال نکنیم تا کار ساده تر پیش برود) داریم

$$\begin{aligned}
&\ln Z = -2\ln y_1 + \int -p(x)dx \;\Rightarrow\\
&Z = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} \;\Rightarrow\; u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx}.
\end{aligned}$$

حال با یک انتگرال گیری u به دست می‌آید.

> روش کاهش مرتبه برای حل معادله مرتبه دوم همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$:
> (۱) حدس یک جواب یا داشتن یک جواب مانند y_1.
> (۲) در نظر گرفتن جواب دوم به صورت $y_2 = uy_1$.
> (۳) انتگرال گیری از $u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx}$ و محاسبه u (بهتر است ثابت انتگرال گیری را اعمال نکنید و در جواب عمومی اعمال شود).
> (۴) جواب عمومی $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ است.
> نکته: اگر y_1 در سوالی (یا امتحان) داده نشد، برای y_1 توابع معروف مانند x، $-x$، e^x، e^{ax}، $\sin x$ و $\sin(ax)$ و ... را امتحان می‌کنیم. در ضمن همیشه دقت کنید که ضریب y'' برابر ۱ باشد.

به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۱.۵.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $x^3y'' + xy' - y = 0$ را پیدا کنیم. ابتدا معادله را به صورت $y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x^3}y = 0$ می‌نویسیم. واضح است که $y_1 = x$ یک جواب است (حدس زده‌ایم). حال داریم*

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{x^2}e^{\int -\frac{1}{x^2}dx} = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow u = -e^{\frac{1}{x}}.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که x و $-xe^{\frac{1}{x}}$ مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی $y_g = c_1x - c_2xe^{\frac{1}{x}}$ است.

مثال ۲.۵.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0$ را پیدا کنیم. واضح است که $y_1 = x$ جواب معادله است (حدس زده‌ایم). حال داریم*

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{x^2}e^{\int -(-\frac{x+2}{x})dx} = \frac{1}{x^2}e^{x+2\ln x} = e^x \Rightarrow u = e^x.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که x و xe^x مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی $y_g = c_1x + c_2xe^x$ است.

تمرین ۳.۵.۳. *جواب خصوصی معادله $y'' - (1+\frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = 0$ را با شرط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(1) = 0$ به دست آورید.*

حل. واضح است که $y_1 = e^x$ یک جواب است (حدس زده‌ایم). حال داریم

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{(e^x)^2}e^{\int(1+\frac{1}{x})dx} = \frac{1}{e^{2x}}e^{x+\ln x} = xe^{-x}$$
$$\Rightarrow u = -(x+1)e^{-x}.$$

انتگرال گیری آخر جز به جز است. با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که e^x و

$$y_2 = uy_1 = -(x+1)e^{-x}e^x = -x-1$$

مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی $y_g = c_1e^x + c_2(-x-1)$ است. چون $y(0) = 1$ پس $c_1 - c_2 = 1$. اما $y'(1) = 0$ پس $c_1e - c_2 = 0$ است و در نتیجه $c_1 = \frac{1}{1-e}$، $c_2 = \frac{e}{1-e}$.

۶.۳ معادله دیفرانسیل خطی (غیر ضرایب ثابت) غیرهمگن

در بخش‌های قبلی به حل معادلات خطی همگن از مرتبه دو پرداختیم. اکنون وقت آن است که روش حل معادلات خطی غیرهمگن را آموزش دهیم. اگر یک نگاه گذرا به قضیه ۲۳.۳.۳ بیندازیم، متوجه خواهیم شد که برای حل یک معادله خطی غیرهمگن مرتبه دو نیاز داریم که جواب عمومی معادله همگن نظیر و یک جواب خصوصی از معادله را بدانیم.

اکنون به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۱.۶.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی $y'' - y = x$ را پیدا کنیم. معادله داده شده از مرتبه دو غیرهمگن خطی است. اما معادله همگن نظیر یعنی $y'' - y = 0$ با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی $t^2 - 1 = 0$ دارد. بنابراین جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت $y_g = c_1e^x + c_2e^{-x}$ است. با کمی دقت $y_p = -x$ جواب خصوصی این معادله است. بنابراین طبق قضیه ۲۳.۳.۳ باید $y_G = y_g + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} - x$ جواب عمومی معادله غیرهمگن خطی بالا باشد.*

مثال ۲.۶.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 4 - x - x^2$ را پیدا کنیم. معادله داده شده از مرتبه دو غیرهمگن خطی است. معادله همگن نظیر یعنی*

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0$$

دارای جواب $y_1 = x$ جواب معادله است (حدس زده‌ایم). حال داریم

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{x^2}e^{\int -(-\frac{x+2}{x})dx} = \frac{1}{x^2}e^{x+2\ln x} = e^x \;\Rightarrow\; u = e^x.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که x و xe^x مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی معادله همگن نظیر $y_g = c_1x + c_2xe^x$ است. با کمی دقت $y_p = x^2$ جواب خصوصی این معادله است. بنابراین طبق قضیه ۲۳.۳.۳ باید $y_G = y_g + y_p = c_1x + c_2xe^x + x^2$ جواب عمومی معادله غیرهمگن خطی بالا باشد.

همانطور که از مثال‌های بالا متوجه شده‌اید، اگر بتوانیم معضل جواب عمومی معادله همگن نظیر از یک معادله خطی غیرهمگن را حل کنیم آن وقت برای ارائه جواب عمومی معادله غیرهمگن خطی بامعضل دانستن یک جواب خصوصی مواجه هستیم! همیشه ارائه جواب خصوصی امکان ندارد. اما در زیر چند روش را آموزش می‌دهیم تا بتوانید جواب خصوصی را پیدا کنید.

روش ضرایب نامعین

از این روش فقط برای پیدا کردن یک جواب خصوصی از معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت آن هم تحت شرایط خاص استفاده می‌شود.

(۱) فرض کنیم معادله مرتبه 2 خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت $y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$ را در اختیار داریم. اگر $g(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1x + b_0$ یک چند جمله‌ای از درجه k باشد آنگاه

$$y_p = x^m(h_kx^k + h_{k-1}x^{k-1} + ... + h_1x + h_0)$$

ظاهر یک جواب خصوصی است که m تعداد صفرهای معادله شاخصی $t^2 + a_1t + a_0 = 0$ است. دقت شود که اگر صفر ریشه نباشد $m = 0$، اگر صفر ریشه با یک تکرار باشد $m = 1$ و اگر صفر ریشه مضاعف باشد $m = 2$.

مثال ۳.۶.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $y'' - 4y = 4$ را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن $t^2 - 4 = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت $y_g = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ است. چون $g(x) = 4$ یک چندجمله از درجه صفر ($k = 0$) است و معادله شاخصی اصلا ریشه صفر ندارد ($m = 0$) بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت $y_p = h_0$ است. با قرار دادن y_p در معادله $y'' - 4y = 4$ داریم که $y_p = h_0 = -1$. بنابراین طبق قضیه ۲۳.۳.۳ باید $y_G = y_g + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - 1$ جواب عمومی معادله غیرهمگن بالا باشد.*

مثال ۴.۶.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $y'' - 4y' = 8x$ را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت و معادله شاخصی آن به صورت $t^2 - 4t = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت $y_g = c_1 + c_2e^{4x}$ است. چون $g(x) = 8x$ یک چندجمله از درجه یک ($k = 1$) است و معادله شاخصی یک ریشه صفر دارد ($m = 1$) بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت $y_p = x(h_1x + h_0) = h_1x^2 + h_0x$ است. با قرار دادن y_p در معادله $y'' - 4y = 4$ داریم که*

$$(h_1x^2 + h_0x)'' - 4(h_1x^2 + h_0x)' = 8x \;\Rightarrow\; 2h_1 - 4(2h_1x + h_0) = 8x$$
$$\Rightarrow\; -8h_1x + 2h_1 - 4h_0 = 8x.$$

از متحد قرار دادن ضرایب عبارات هم درجه، داریم که $-8h_1 = 8$ و $2h_1 - 4h_0 = 0$ یعنی $h_1 = -1$ و $h_0 = \frac{-1}{2}$. بنابراین طبق قضیه ۲۳.۳.۳ باید

$$y_G = y_g + y_p = c_1 + c_2e^{4x} - x^2 - \frac{1}{2}x$$

جواب عمومی معادله غیرهمگن بالا باشد.

(۲) فرض کنیم معادله مرتبه 2 خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت $y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$ را در اختیار داریم. اگر $g(x) = U(x)e^{ax}$ که در آن $U(x)$ چند جمله‌ای از درجه k باشد آنگاه

$$y_p = e^{ax}x^m(h_kx^k + h_{k-1}x^{k-1} + ... + h_1x + h_0)$$

ظاهر یک جواب خصوصی است که در آن m تعداد ریشه‌های مساوی با a معادله شاخصی $t^2 + a_1t + a_0 = 0$ است. دقت شود که اگر a ریشه نباشد $m = 0$، اگر a ریشه با یک تکرار باشد $m = 1$ و اگر a ریشه مضاعف باشد $m = 2$.

مثال ۳.۶.۵. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله* $y'' - 3y' + 2y = 3e^{4x}$ *را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت* $t^2 - 3t + 2 = 0$ *است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت* $y_g = c_1e^x + c_2e^{2x}$ *است. داریم که* $g(x) = U(x)e^{ax} = 3e^{4x}$ *(*$a = 4$ *و* $U(x) = 3$*) است و معادله شاخصی هیچ ریشه* $a = 4$ *ندارد، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت* $y_p = e^{4x}(h_0) = h_0e^{4x}$ *است. با قرار دادن* y_p *در معادله* $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ *داریم که* $h_0 = \frac{1}{2}$ *.*$y_p =$ *بنابراین طبق قضیه* ۳.۳.۲۳ *باید* $y_G = y_g + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$ *جواب عمومی معادله غیرهمگن بالا باشد.*

مثال ۳.۶.۶. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله* $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ *را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت* $t^2 - 7t + 6 = 0$ *است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت* $y_g = c_1e^x + c_2e^{6x}$ *است. چون* $g(x) = (x-2)e^x$ *(*$a = 1$ *و* $U(x) = x - 2$*) است و معادله شاخصی یک ریشه مساوی با* $a = 1$ *دارد، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت* $y_p = xe^x(h_1x + h_0)$ *است. با قرار دادن* y_p *در معادله* $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ *داریم که*

$$(xe^x(h_1x + h_0))'' - 4(xe^x(h_1x + h_0))' = (x-2)e^x \;\Rightarrow$$
$$(h_1x^2 + h_0x + 4h_1x + 2h_0 + 2h_1 - 7h_1x^2 - 7h_0x -$$
$$14h_1x - 7h_0 + 6h_1x + 6h_0x) = (x-2)e^x.$$

از متحد قرار دادن ضرایب عبارات هم درجه، داریم که $h_1 = \frac{1}{10}$ *و* $h_0 = \frac{9}{25}$*. بنابراین طبق قضیه* ۳.۳.۲۳ *باید*

$$y_G = y_g + y_p = c_1e^x + c_2e^{6x} + xe^x(\frac{1}{10}x + \frac{9}{25})$$

جواب عمومی معادله غیرهمگن بالا باشد.

(۳) فرض کنیم معادله مرتبه 2 خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت $y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$ را در اختیار داریم. اگر $g(x) = e^{ax}U(x)\cos(bx)$ یا $g(x) = e^{ax}U(x)\sin(bx)$ باشد که در آن $U(x)$ چند جمله‌ای از درجه kاست و $a, b \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$y_p = x^m e^{ax}(R(x)\cos(bx) + S(x)\sin(bx))$$

ظاهر یک جواب خصوصی است که m تعداد ریشه‌های $a + ib$ (حتما $a - ib$ هم ریشه است) معادله شاخصی $t^2 + a_1t + a_0 = 0$ است و همچنین $R(x)$، $S(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه k هستند. دقت شود که اگر $a \mp b$ ریشه معادله شاخصی نباشد آنگاه $m = 0$ و اگر $a \mp b$ ریشه باشد آنگاه $m = 1$.

مثال ۳.۶.۷. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله* $y'' - 4y = 3\cos 5x$ *را پیدا کنیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن* $t^2 + 4 = 0$ *است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت* $y_g = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$ *است.* چون

$U(x)=3$ است و معادله شاخصی هیچ ریشه $2i$ ندارد و $k=0$، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت

$$y_p = r_0\cos 5x + s_0\sin 5x$$

است. با قرار دادن y_p در معادله $y''-4y=3\cos 5x$ داریم که $s_0=0$ و $r_0=\frac{-1}{7}$. بنابراین طبق قضیه ۲۳.۳.۳ باید $y_G=y_g+y_p=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)-\frac{1}{7}\cos 5x$ جواب عمومی معادله غیرهمگن بالا باشد.

مثال ۸.۶.۳. *می‌خواهیم فقط شکل (فرم) یک جواب خصوصی معادله $y''+4y=x^2\sin 2x$ را بنویسیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2+4=0$ است. چون $U(x)=x^2$ است و معادله شاخصی یک ریشه $2i$ دارد و $k=2$، بنابراین شکل یک جواب خصوصی به صورت*

$$y_p = x[(r_2x^2+r_1x+r_0)\cos(2x)+(s_2x^2+s_1x+s_0)\sin(2x)]$$

است.

فرض کنیم معادله مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت $y''+a_1y'+a_0y=g(x)$ را در اختیار داریم. اگر $g(x)=g_1(x)+\ldots+g_t(x)$ که هر کدام از g_iها به صورت شناخته شده در کادرهای بالا باشند آنگاه برای هر کدام یک جواب خصوصی می‌نویسیم و جواب خصوصی نهایی حاصل جمع آن‌ها می‌باشد.

مثال ۹.۶.۳. *می‌خواهیم فقط شکل یک جواب خصوصی معادله $y''-y'=x^2e^x+4x^3$ را بنویسیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه سه خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2-t=0$ است. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. اما با فرض $g_1(x)=x^2e^x$ و $g_2(x)=4x^3$ می‌توانیم جواب خصوصی را پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون $U(x)=x^2$ و معادله شاخصی یک ریشه $a=1$ دارد و $k=2$، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت*

$$y_{p_1} = xe^x(h_2x^2+h_1x+h_0)$$

است. حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم چون معادله شاخصی یک ریشه صفر دارد و $k=3$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به صورت

$$y_{p_2} = x(l_3x^3+l_2x^2+l_1x+l_0)$$

است. پس $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$ است.

فرض کنیم معادله مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت $y''+a_1y'+a_0y=g(x)$ را در اختیار داریم. برخی مواقع $g(x)$ ظاهرا به شکل مطلوب نیست! اما با فرمول‌های مثلثاتی یا روابط دانسته شده دیگر به شکل شناخته شده کادرهای بالا مبدل می‌شود. معمولا توان‌های مثلثاتی و یا توابع هذلولوی اینگونه هستند.

مثال ۱۰.۶.۳. *می‌خواهیم فقط شکل یک جواب خصوصی معادله $y''+y' = x\sinh x$ را بنویسیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه سه خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2+t=0$ است. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. از سوی دیگر داریم $\sinh x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$. با فرض $g_1(x) = x\frac{e^x}{2}$ و $g_2(x) = -x\frac{e^{-x}}{2}$ می‌توانیم جواب خصوصی را پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. شکل جواب خصوصی به صورت*

$$y_{p_1} = e^x(h_1x+h_0)$$

است. حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به صورت

$$y_{p_2} = xe^{-x}(l_1x+l_0)$$

است. پس $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ است.

مثال ۱۱.۶.۳. *می‌خواهیم فقط فرم یک جواب خصوصی معادله $y''-4y' = 2\sin^2(4x)+xe^{4x}$ را بنویسیم. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2-4t=0$ است. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. دقت شود که $2\sin^2(4x) = 1-\cos(8x)$. اما با فرض $g_1(x) = -\cos(8x)$، $g_2(x) = 1$ و $g_3(x) = xe^{4x}$ می‌توانیم جواب خصوصی را به روش ضرایب نامعین پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $8i$ ندارد، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت*

$$y_{p_1} = r_0\cos(8x)+s_0\sin(8x)$$

است. حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی یک ریشه صفر دارد و $k=0$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به صورت

$$y_{p_2} = x(h_0) = h_0x$$

است. و در آخر جواب خصوصی متناظر با $g_3(x)$ را می‌نویسیم. چون ۴ یکبار ریشه معادله شاخصی است و $k=1$ پس

$$y_{p_3} = x(h'_1x+h'_0) = h'_1x^2+h'_0x$$

است. بنابراین $y_p = y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$ است.

روش تغییر پارامترها یا روش لاگرانژ

فرض کنیم دو جواب مستقل خطی (پایه جواب) y_1 و y_2 از معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را در اختیار داریم. سوال طبیعی به ذهن می‌رسد که آیا با کمک این دو پایه جواب می‌توان یک جواب خصوصی مانند y_p برای معادله دیفرانسیل غیر همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ پیدا کرد؟ برای پاسخ به سوال بالا، بیایید فرض کنیم چنین کاری را بتوانیم انجام دهیم، یعنی داشته باشیم $y_p = u_1(x)y_1+u_2(x)y_2$. بنابراین $y'_p = u'_1y_1+u_1y'_1+u'_2y_2+u_2y'_2$. بیایید کمی توقع

خودمان را بکاهیم و یک محدودیت دیگر برای خودمان قائل شویم و فرض کنیم $u_1'y_1+u_2'y_2=0$.
لذا $y_p=u_1y_1'+u_2y_2'$ و $y_p''=u_1y_1''+u_1y_1'+u_2'y_2'+u_2y_2''$. باجایگذاری داریم

$$\begin{aligned}
&u_1y_1''+u_1y_1'+u_2'y_2'+u_2y_2''+p(x)(u_1y_1'+u_2y_2')+q(x)(u_1y_1+u_2y_2)\\
&=g(x)\\
&u_1[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+u_2[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2]+u_1'y_1'+u_2'y_2'=g(x)\\
&u_1'y_1'+u_2'y_2'=g(x)
\end{aligned}$$

لذا دستگاه زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2=0\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=g(x)\end{cases}$$

دستگاه بالا جواب دارد زیرا $W(y_1,y_2)\neq 0$ و با حل این دستگاه به روش کرامر (اگر روش کرامر را به خاطر ندارید فصل ۵ را ببینید) داریم

$$\begin{cases} u_1'=\dfrac{det\begin{pmatrix}0 & y_2\\ g(x) & y_2'\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}}=\frac{-g(x)y_2}{W(y_1,y_2)} \;\Rightarrow\; u_1=\int\frac{-y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx\\[2ex] u_2'=\dfrac{det\begin{pmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & g(x)\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}}=\frac{g(x)y_2}{W(y_1,y_2)} \;\Rightarrow\; u_2=\int\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx\end{cases}$$

فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیرهمگن $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ را در اختیار داریم. اگر y_1 و y_2 دو پایه جواب از معادله همگن نظیر $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشند آنگاه

$$y_p=y_2\int\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx-y_1\int\frac{y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

جواب خصوصی معادله غیرهمگن بالا است.
توجه: (۱) حتما در استفاده از فرمول بالا به ضریب y'' دقت کنید، باید این ضریب ۱ باشد!
(۲) از این روش فقط برای پیدا کردن یک جواب خصوصی از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دو استفاده می‌شود و لزومی ندارد که ضرایب ثابت باشند یا $g(x)$ به صورت شکل‌های شناخته شده باشد. محدودیت این روش این است که فقط برای معادلات مرتبه دوم کارساز است.

به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۱۲.۶.۳. می‌خواهیم جواب عمومی معادله

$$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = e^x \qquad\qquad x > 0$$

را پیدا کنیم. معادله مرتبه دوم با ضرایب خطی و غیرهمگن است. اما ضرایب ثابت نیست! ابتدا معادله را بر x تقسیم می‌کنیم

$$y'' + \frac{1-2x}{x}y' + \frac{x-1}{x}y = \frac{e^x}{x}.$$

واضح است که $y_1 = e^x$ یک جواب معادله همگن $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$ است (حدس زده‌ایم). حال داریم $p(x) = \frac{1-2x}{x}$ و

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{e^{2x}}e^{\int \frac{2x-1}{x}dx} = \frac{1}{e^{2x}}e^{2x-\ln x} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; u = \ln x.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳ ، واضح است که x و $y_2 = uy_1 = e^x \ln x$ مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی معادله همگن نظیر $y_g = c_1e^x + c_2e^x \ln x$ است. حال یک جواب خصوصی نیاز داریم (روش ضرایب نامعین کارساز نیست). پس از روش لاگرانژ کمک می‌گیریم. چون پس $y_1 = e^x$ و $y_2 = e^x \ln x$ پایه جواب هستند، داریم

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} e^x & e^x \ln x \\ e^x & e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}.$$

حال طبق روش لاگرانژ داریم

$$\begin{aligned} &y_p = y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx - y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \\ &e^x \ln x \int \frac{xe^xe^x}{xe^{2x}}dx - e^x \int \frac{xe^x \ln x e^x}{xe^{2x}}dx = xe^x \ln x - e^x(x\ln x - x) = xe^x \end{aligned}$$

پس $y_G = y_g + y_p = c_1e^x + c_2e^x \ln x + xe^x$ جواب عمومی است.

مثال ۱۳.۶.۳. می‌خواهیم برای معادله $y'' - 4y' = e^{2x}$ یک جواب خصوصی پیدا کنیم. چون معادله شاخصی معادله همگن نظیر به صورت $t^2 - 4t = 0$ است پس $y_1 = 1$ و $y_2 = e^{2x}$ پایه جواب هستند. اما داریم

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{pmatrix} = 2e^{2x}.$$

حال طبق روش لاگرانژ داریم

$$\begin{aligned} &y_p = y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx - y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \\ &e^{2x} \int \frac{e^{2x}}{2e^{2x}}dx - \int \frac{e^{2x}e^{2x}}{2e^{2x}}dx = \frac{xe^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} \end{aligned}$$

تذکر ۱۴.۶.۳. همواره به تابع $g(x)$ دقت کنید. در برخی مواقع روش ضرایب نامعین و روش لاگرانژ را می‌توان هم زمان استفاده کرد. برای یک نمونه مثال، سوال ۲.۹.۳ را ببینید.

تمرین ۱۵.۶.۳. *فقط فرم یک جواب خصوصی معادله* $y'' - 4y' = 2\cos^2(4x) + xe^{4x}$ *را بنویسید.*

حل. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2 - 4t = 0$ است. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. دقت شود که $2\cos^2(4x) = 1 + \cos(8x)$. اما با فرض $g_1(x) = \cos(8x)$، $g_2(x) = 1$ و $g_3(x) = xe^{4x}$ می‌توانیم جواب خصوصی را به روش ضرایب نامعین پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $8i$ ندارد، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت

$$y_{p_1} = r_0 \cos(8x) + s_0 \sin(8x)$$

است. حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی یک ریشه صفر دارد و $k = 0$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به صورت

$$y_{p_2} = x(h_0) = h_0 x$$

است. و در آخر جواب خصوصی متناظر با $g_3(x)$ را می‌نویسیم. چون ۴ یکبار ریشه معادله شاخصی است و $k = 1$ پس

$$y_{p_3} = x(h'_1 x + h'_0) = h'_1 x^2 + h'_0 x$$

است. بنابراین $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ است.

تمرین ۱۶.۶.۳. *جواب عمومی معادله* $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1$ *را پیدا کنید.*

حل. معادله مرتبه دوم با ضرایب خطی و غیرهمگن است. اما ضرایب ثابت نیست! واضح است که $y_1 = x$ یک جواب معادله همگن $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$ است (حدس زده‌ایم، هر چند جواب دیگر نیز قابل حدس زدن است و آن e^x است که با x مستقل خطی است). حال داریم

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{x}{x-1}dx} = \frac{1}{x^2}e^{x+\ln(x-1)} = \frac{x-1}{x^2}e^x \Rightarrow \ u = \frac{e^x}{x}.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که x و $y_2 = uy_1 = x\frac{e^x}{x} = e^x$ مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی معادله همگن نظیر $y_g = c_1 x + c_2 e^x$ است. حال یک جواب خصوصی نیاز داریم! اما روش ضرایب نامعین کارساز نیست. پس از روش لاگرانژ کمک می‌گیریم. چون پس $y_1 = x$ و $y_2 = e^x$ پایه جواب هستند، داریم

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} = xe^x - e^x.$$

حال طبق روش لاگرانژ داریم

$$y_p = y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx - y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx =$$
$$e^x \int \frac{x(x-1)}{xe^x - e^x} dx - x \int \frac{e^x(x-1)}{xe^x - e^x} dx = -x^2 + x - 1$$

پس $y_G = y_g + y_p = c_1 x + c_2 e^x - x^2 + x - 1$ جواب عمومی است.

تمرین ۱۷.۶.۳. *جواب خصوصی معادله $2y'' + y' = 8\sin(2x) + e^{-x}$ را با شرط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ بیابید.*

حل. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی معادله همگن آن به صورت $t^2 + \frac{1}{2}t = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت

$$y_g = c_1 + c_2 e^{\frac{-1}{2}x}$$

است. حال جواب خصوصی لازم داریم. می‌توانیم روش ضرایب نامعین را به کار ببریم. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. اما با فرض $g_1(x) = \sin(2x)$ و $g_2(x) = e^{-x}$ می‌توانیم جواب خصوصی را به روش ضرایب نامعین پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $2i$ ندارد و $U(x) = 2$، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت

$$y_{p_1} = r_0 \cos(2x) + s_0 \sin(2x)$$

است. با جایگذاری در معادله داریم

$$r_0 = \frac{-4}{17}, \quad s_0 = \frac{-16}{17}.$$

حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $a = -1$ ندارد و $k = 0$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به صورت

$$y_{p_2} = xe^{-x}(h_0) = h_0 x e^{-x}$$

است. با جایگذاری در معادله $h_0 = 1$ حاصل می‌شود. پس

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{-4}{17}\cos(2x) - \frac{16}{17}\sin(2x) + xe^{-x}$$

است. بنابراین

$$y_G = y_g + y_p = c_1 + c_2 e^{\frac{-1}{2}x} - \frac{4}{17}\cos(2x) - \frac{16}{17}\sin(2x) + xe^{-x}$$

جواب عمومی است. شرط $y(0) = 1$ نتیجه می‌دهد که $1 = c_1 + c_2 - \frac{4}{17}$ و شرط $y'(0) = 0$ نتیجه می‌دهد که $-\frac{1}{2}c_2 = 1 + \frac{32}{17}$. پس $c_1 = 6$ و $c_2 = -\frac{98}{17}$.

۷.۳ معادله دیفرانسیل کشی_اویلر

اکنون یکی از مهمترین معادلات دیفرانسیل را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۷.۳. *به هر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n به صورت*

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)}y^{(n-1)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = g(x)$$

یا

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{(n-1)}y^{(n-1)} + ... + a_1(ax+b)y' + a_0 y = g(x)$$

معادله کشی_ اویلر گوییم.

مثال ۲.۷.۳. *معادله دیفرانسیل همگن مرتبه سوم $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + 2y = 0$ کشی_ اویلر است.*

مثال ۳.۷.۳. *معادله دیفرانسیل غیر همگن مرتبه دوم $(x+1)^2y'' + 2(x+1)y' + 2y = \cos x$ کشی_ اویلر است.*

اما چگونه می‌شود معادله کشی_اویلر را حل کرد؟ می‌دانیم که اگر جواب عمومی معادله کشی_اویلر همگن را به دست آوریم و یک جواب خصوصی هم در اختیار داشته باشیم، جواب عمومی در دسترس ما قرار می‌گیرد (کدام قضیه؟). برای داشتن جواب خصوصی همان تکنیک‌های که آموخته‌اید راهگشا است. معضل اصلی ما داشتن جواب عمومی معادله همگن نظیر کشی_اویلر است! معادله همگن نظیر کشی_اویلر را می‌توان به دو روش حل کرد. این دو روش را ادامه شرح می‌دهیم. برای ما حل روش اول، بیشتر مد نظر است چون بسیار کوتاه‌تر به جواب خواهیم رسید. چون معادله دیفرانسیل کشی_اویلر مرتبه دوم برای ما اهمیت بسیار زیادی دارد، از این رو هر دو روش را برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر ذره بین قرار می‌دهیم (مراتب بالا مشابه است).

روش اول

اگر به شکل معادله دیفرانسیل کشی_اویلر همگن $x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$ دقت کنیم، ضرایب به شکل چندجمله‌ای هستند! از این رو می‌توانیم حدس بزنیم که معادله می‌تواند جوابی (ناصفر) به شکل $y = x^r$ که $x > 0$ داشته باشد (علت $x > 0$ را به زودی متوجه خواهید شد)! با جای گذاری $y' = rx^{r-1}$ و $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ داریم

$$x^2(r(r-1)x^{r-2}) + a_1xrx^{r-1} + a_0x^r = 0 \;\Rightarrow\; x^r(r(r-1) + a_1r + a_0) = 0.$$

لذا باید $r(r-1) + a_1r + a_0 = 0$ باشد (چرا؟)که به تعداد مرتبه معادله به ما ریشه به دست می‌دهد. برای ریشه‌ها سه حالت زیر رخ می‌دهد:

(الف) دو ریشه متمایز r_1 و r_2 داریم. در این حالت x^{r_1} و x^{r_2} دو جواب پایه هستند. لذا جواب

عمومی به صورت $y_g = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$ است (علت انتخاب $x > 0$ موجود نبودن ریشه اعداد منفی است).
(ب) ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = r$ داریم. پس یک جواب x^r را در اختیار داریم و با کمک روش کاهش مرتبه $x^r \ln x$ دیگر جواب پایه است. لذا جواب عمومی به صورت $y_g = c_1x^r + c_2x^r \ln x$ است.
(ج) ریشه مختلط $r_1 = u + iv$ و $r_2 = u - iv$ داریم. با کمک اتحاد اویلر (روش اثبات ضرایب ثابت را به یاد آورید) جواب عمومی به صورت $y_g = x^u(c_1 \cos(v \ln x) + c_2 \sin(v \ln x))$ است.
برای حل معضل $x > 0$ کافی است $|x|$ را جایگزین کنیم. لذا خلاصه مطالب بالا را در کادر زیر مشاهده می‌کنیم.

یافتن جواب عمومی کشی_ اویلر $x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$:
(۱) جایگذاری جوابی ناصفر به صورت $|x|^r$ در معادله دیفرانسیل.
(۲) استخراج یک معادله درجه دوم و یافتن دو ریشه آن:
(الف) دو ریشه متمایز r_1 و r_2 داریم: جواب عمومی به صورت $y_g = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}$ است.
(ب) ریشه مضاعف r داریم: جواب عمومی به صورت $y_g = c_1|x|^r + c_2|x|^r \ln|x|$ است.
(ج) ریشه مختلط $r_1 = u + iv$ و $r_2 = u - iv$ داریم: جواب عمومی به صورت $y_g = |x|^u(c_1 \cos(v \ln|x|) + c_2 \sin(v \ln|x|))$ است.

مثال ۴.۷.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $x^2y'' + xy' - y = 0$ را پیدا کنیم. واضح است که این یک معادله کشی_ اویلر مرتبه دوم همگن است. فرض کنیم $y = |x|^r$ جواب (ناصفر) است. لذا $y' = \frac{r|x|^r}{x}$ و $y'' = \frac{r(r-1)|x|^r}{x^2}$ و با جایگذاری در معادله کشی_ اویلر داریم*

$$x^2\left(\frac{r(r-1)|x|^r}{x^2}\right) + x\left(\frac{r|x|^r}{x}\right) - |x|^r = 0 \;\Rightarrow\; |x|^r(r(r-1) + r - 1) = 0$$

لذا باید $r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1 = 0$ باشد (چرا؟). این معادله دارای دو ریشه 1 و -1 است و به وضوح $|x|$ و $|x|^{-1}$ پایه جواب هستند. لذا جواب عمومی به صورت $y_g = c_1|x| + \frac{c_2}{|x|}$ است.

مثال ۵.۷.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $x^2y'' + xy' + y = x^3$ را برای $x > 0$ پیدا کنیم. واضح است که این یک معادله کشی_ اویلر مرتبه دوم غیر همگن است. احتیاج به جواب عمومی معادله همگن نظیر و یک جواب خصوصی داریم! فرض کنیم $y = x^r$ جواب (ناصفر) معادله همگن نظیراست. لذا $y' = rx^{r-1}$ و $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ و با جایگذاری در معادله کشی_ اویلر همگن نظیر داریم*

$$x^2(r(r-1)x^{r-2}) + x(rx^{r-1}) + x^r = 0 \;\Rightarrow\; x^r(r(r-1) + r + 1) = 0$$

لذا معادله $r(r-1) + r + 1 = r^2 + 1 = 0$ به دست می‌آید که دارای دو ریشه مختلط i و $-i$ است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت $y_g = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$ است. حال نیاز به یک جواب خصوصی داریم تا معادله کشی_ اویلر را حل کنیم. چون $y_1 = \cos(\ln x)$ و $y_2 = \sin(\ln x)$ پایه جواب هستند، با کمک روش لاگرانژ داریم

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} \cos(\ln x) & \sin(\ln x) \\ \frac{-1}{x}\sin(\ln x) & \frac{1}{x}\cos(\ln x) \end{pmatrix} = \frac{1}{x}.$$

حال طبق روش لاگرانژ ($g(x) = x$) داریم

$$y_p = y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx - y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx =$$
$$\sin(\ln x) \int \frac{x \cos(\ln x)}{\frac{1}{x}} dx - \cos(\ln x) \int \frac{x \sin(\ln x)}{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{10} x^3$$

پس $y_G = y_g + y_p = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + \frac{1}{10} x^3$ جواب عمومی است (انتگرال‌ها با روش جز به جز حل شده است).

تذکر ۶.۷.۳. *برای حل $(ax+b)^2 y'' + a_1(ax+b)y' + a_0 y = 0$ جواب $y = |ax+b|^r$ را در نظر می‌گیریم.*

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷.۷.۳. *می‌خواهیم معادله کشی–اویلر $(x+6)^2 y'' + \frac{25}{3}(x+6)y' - \frac{16}{3} y = 0$ را برای $x > -6$ حل کنیم. فرض کنیم $y = (x+6)^r$ جواب باشد (قدر مطلق لازم نیست، چرا؟). پس با جایگذاری $y' = r(x+6)^{r-1}$ و $y'' = r(r-1)(x+6)^{r-2}$ در معادله دیفرانسیل به معادله $3r^2 - 22r - 16 = 0$ می‌رسیم که دو ریشه -8 و $\frac{2}{3}$ است. لذا جواب عمومی $y_g = c_1(x+6)^{\frac{2}{3}} + c_2(x+6)^{-8}$ است.*

روش دوم

معادله دیفرانسیل کشی–اویلر $x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $|x| = e^u$. پس $u = \ln|x|$ و

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{|x|}\frac{dy}{du}$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{|x|}\frac{dy}{du}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right)$$

حال در معادله جایگذاری می‌کنیم و بعد ساده سازی داریم

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{du} + a_0 y = g(e^u).$$

واضح است که معادله آخر خطی با ضرایب ثابت با معادله شاخصی $t^2 + (a_1 - 1)t + a_0 = 0$ است. با کمک این معادله شاخصی ریشه‌ها پیدا شده و جواب عمومی معادله همگن نظیر به دست می‌آیند. برای جواب خصوصی هم از روش لاگرانژ یا ضرایب نامعیین استفاده می‌کنیم.
مطالبی که در روند بالا مشاهده کردید را به صورت مختصر و مفید در کادر زیر جمع آوری می‌کنیم.

صورت ضرایب ثابت شده معادله کشی_اویلر مرتبه دوم $x^2y'' + a_1xy' + a_0y = g(x)$ با تغییر متغیر $|x|= e^u$:

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{du} + a_0y = g(e^u)$$

معادله شاخصی: $t^2 + (a_1 - 1)t + a_0 = 0$
روش حل: با کمک معادله شاخصی و روش‌های حلی که آموخته‌ایم معادله را حل می‌کنیم و سپس تغییر متغیر را بر می‌گردانیم.

مثال ۸.۷.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $x^2y'' + xy' - y = 0$ را پیدا کنیم. واضح است که این یک معادله کشی_ اویلر مرتبه دوم همگن است. شکل ضرایب ثابت شده آن به صورت*

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{du} + a_0y = g(e^u) \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{du^2} - y = 0$$

است. پس معادله شاخصی $t^2 + (a_1 - 1)t + a_0 = t^2 - 1 = 0$ است. معادله شاخصی دارای دو ریشه است پس جواب عمومی به صورت

$$y_g = c_1e^u + c_2e^{-u} = c_1e^{\ln|x|} + c_2e^{-\ln|x|} = c_1|x| + \frac{c_2}{|x|}$$

است.

مثال ۹.۷.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله $x^2y'' + xy' + y = x^3$ را پیدا کنیم. واضح است که این یک معادله کشی_ اویلر مرتبه دوم غیر همگن است. شکل ضرایب ثابت شده آن به صورت*

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{du} + a_0y = g(e^u) \;\Rightarrow\; \frac{d^2y}{du^2} + y = e^{3u}$$

است. پس معادله شاخصی $t^2 + (a_1 - 1)t + a_0 = t^2 + 1 = 0$ است. معادله شاخصی دارای دو ریشه مختلط i و $-i$ است. پس جواب عمومی معادله همگن به صورت

$$y_g = c_1\cos u + c_2\sin u = c_1\cos(\ln|x|) + c_2\sin(\ln|x|)$$

است. حال نیاز به یک جواب خصوصی داریم تا معادله کشی_ اویلر را حل کنیم. چون معادله شاخصی معادله همگن نظیر ریشه $a = 3$ ندارد، با توجه به روش ضرایب نامعین $y_p = h_0e^{3u}$ است. با جایگذاری در معادله داریم

$$\frac{d^2y}{du^2} + y = e^{3u} \;\Rightarrow\; h_0 = \frac{1}{10}.$$

بنابراین $y_p = \frac{1}{10}e^{3u} = \frac{1}{10}|x|^3$ است و

$$y_G = y_g + y_p = c_1\cos(\ln|x|) + c_2\sin(\ln|x|) + \frac{1}{10}|x|^3$$

جواب عمومی است.

تذکر ۱۰.۷.۳. *اگر معادله کشی_اویلر به صورت* $(ax+b)^2y''+a_1(ax+b)y'+a_0y=g(x)$ *بود، حتما باید تغییر متغیر* $|ax+b|=e^u$ *را اعمال کنید و برای پرهیز از اشتباه، از روش بالا جهت حل استفاده نکنید.*

مثال ۱۱.۷.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی* $(x+1)^2y''+(x+1)y'+y=2\cos(\ln(x+1))$ *را پیدا کنیم. واضح است که این یک معادله کشی_اویلر مرتبه دوم غیرهمگن است. تغییر متغیر* $|x+1|=e^u$ *را اعمال می‌کنیم. چون* $\ln|x+1|=u$ *است، داریم*

$$y'=\frac{1}{|x+1|}\frac{dy}{du} \qquad y''=\frac{1}{(x+1)^2}(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}).$$

با جایگذاری، شکل ضرایب ثابت شده آن به صورت $\frac{d^2y}{du^2}+y=2\cos u$ *است. پس معادله شاخصی* $t^2+1=0$ *است. معادله شاخصی دارای دو ریشه مختلط است. پس جواب عمومی معادله همگن به صورت*

$$y_g=c_1\cos u+c_2\sin u=c_1\cos(\ln|x+1|)+c_2\sin(\ln|x+1|)$$

است. حال نیاز به یک جواب خصوصی داریم تا معادله کشی_اویلر را حل کنیم. چون معادله شاخصی معادله همگن نظیر i *دارد، با توجه به روش ضرایب نامعین،* $y_p=u(r_0\cos u+s_0\sin u)$ *است. با جایگذاری در معادله داریم* $r_0=0$ *و* $s_0=1$*. بنابراین*

$$y_p=u(r_0\cos u+s_0\sin u)=u\sin u=\ln|x+1|\ \sin(\ln|x+1|)$$

است و

$$y_G=y_g+y_p=c_1\cos(\ln|x+1|)+c_2\sin(\ln|x+1|)+\sin(\ln|x+1|)\ln|x+1|$$

جواب عمومی است.

تمرین ۱۲.۷.۳. *جواب عمومی معادله* $x^2y''-xy'+y=x^2$ *را پیدا کنید.*

حل. واضح است که این یک معادله کشی_اویلر مرتبه دوم غیر همگن است. فرض کنیم $y=|x|^r$ جواب (ناصفر) است. لذا $y'=\frac{r|x|^r}{x}$ و $y''=\frac{r(r-1)|x|^r}{x^2}$ و با جایگذاری در معادله کشی_اویلر داریم

$$x^2(\frac{r(r-1)|x|^r}{x^2})-x(\frac{r|x|^r}{x})+|x|^r=0 \Rightarrow |x|^r(r(r-1)-r+1)=0$$

لذا باید $r(r-1)-r+1=r^2-2r+1=0$ باشد (چرا؟). این معادله دارای ریشه مضاعف 1 است و لذا $|x|$ و $|x|\ln|x|$ پایه جواب هستند. بنابراین جواب عمومی به صورت $y_g=c_1|x|+c_2|x|\ln|x|$ است. حال جواب خصوصی را با کمک روش لاگرانژ پیدا می‌کنیم. بدون کم شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $y_1=x$ و $y_2=x\ln x$ پایه جواب هستند (چرا؟)، داریم

$$W(y_1,y_2)=det\begin{pmatrix}x & x\ln x\\ 1 & \ln x+1\end{pmatrix}=x.$$

حال طبق روش لاگرانژ ($g(x)=1$) داریم

$$y_p = y_2\int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx - y_1\int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx =$$
$$x\ln x\int \frac{x}{x}dx - x\int \frac{x\ln x}{x}dx = x^2$$

پس $y_G = y_g + y_p = (c_1 + c_2\ln|x|)|x| + x^2$ جواب عمومی است.

۸.۳ تمرین‌های کل فصل

تمرین ۱.۸.۳. *یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه شش همگن و یک معادله خطی مرتبه شش غیرهمگن مثال بزنید.*

تمرین ۲.۸.۳. *معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه سه مثال بزنید.*

تمرین ۳.۸.۳. *جواب عمومی معادله $yy'' - (y')^2 = 0$ را پیدا کنید.*

تمرین ۴.۸.۳. *جواب عمومی معادله $y'' - e^{-y'} = 0$ را پیدا کنید (غیر خطی فاقد x و y).*

تمرین ۵.۸.۳. *نشان دهید که اگر y_1، y_2 و $y_1 + y_2$ سه جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل خطی $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$ باشد آنگاه معادله همگن است.*

تمرین ۶.۸.۳. *نشان دهید که توابع e^x و e^{-x} روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند.*

تمرین ۷.۸.۳. *نشان دهید که e^{3x} و 1 یک پایه جواب برای $y'' - 3y' = 0$ است.*

تمرین ۸.۸.۳. *یک معادله دیفرانسیل بنویسید که توابع 1 و e^x جواب‌های آن باشند.*

تمرین ۹.۸.۳. *یک معادله دیفرانسیل بنویسید که توابع e^x و xe^x جواب‌های آن باشند.*

تمرین ۱۰.۸.۳. *جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 9y' = 0$ را پیدا کنید.*

تمرین ۱۱.۸.۳. *جواب عمومی معادله $x^3y'' - x^2y' + xy = 0$ را پیدا کنید.*

تمرین ۱۲.۸.۳. *جواب عمومی معادله $y'' + 4y' + 4y = e^x$ را بیابید.*

تمرین ۱۳.۸.۳. *فقط فرم یک جواب عمومی معادله $y''' - 4y'' + y' - 4y = e^{4x}$ را بنویسید.*

تمرین ۱۴.۸.۳. *جواب عمومی معادله $y'' - 4y' = 2\cos^2(4x) + xe^{4x}$ را بنویسید.*

تمرین ۱۵.۸.۳. *جواب عمومی معادله $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - \ln x^2$ را پیدا کنید.*

تمرین ۱۶.۸.۳. *جواب عمومی معادله $x^2y'' + 3xy' + 4y = 0$ را بنویسید.*

تمرین ۱۷.۸.۳. *جواب عمومی معادله $3(x+6)^2y'' + 25\,(x+6)\,y' - 16y = 0$ را بنویسید.*

تمرین ۱۸.۸.۳. *جواب عمومی معادله $y'' - 4xy' + 4x^2y = xe^{x^2}$ را بنویسید.*

۹.۳ نمونه سوالات امتحانی تشریحی

سوال ۱.۹.۳. *(میان ترم صنعتی اصفهان) برای* $t > 0$ *جواب عمومی معادله زیر را پیدا کنید.*

$$t^2y'' - 3ty' + 5y = 0$$

پاسخ. واضح است که این یک معادله کشی_اویلر مرتبه دوم همگن است. فرض کنیم $y = t^r$ جواب باشد. با جایگذاری $y' = rt^{r-1}$ و $y'' = r(r-1)t^{r-2}$ در معادله دیفرانسیل داریم به صورت

$$t^2(r(r-1)t^{r-2}) - 3trt^{r-1} + 5t^r = 0 \ \Rightarrow\ t^r(r(r-1) - 3r + 5) = 0$$

است. لذا $r^2 - 4r + 5 = 0$ دارای دو ریشه مختلط $2 + i$ و $2 - i$ است پس جواب عمومی به صورت $y_g = t^2(c_1 \cos \ln t + c_2 \sin \ln t)$ است.

سوال ۲.۹.۳. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر) جواب عمومی معادله زیر را پیدا کنید.*

$$y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x + \sin x$$

پاسخ. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی معادله همگن آن به صورت $t^2 - 2t + 1 = 0$ است. پس جواب عمومی معادله همگن نظیر به صورت

$$y_g = (c_1 + c_2x)e^x$$

است. حال جواب خصوصی لازم داریم. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. اما با فرض $g_1(x) = x^{-1}e^x$ و $g_2(x) = \sin x$ می‌توانیم جواب خصوصی را پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون $g_1(x)$ به شکل توابع شناخته شده در روش ضرایب نامعین نیست، از روش لاگرانژ کمک می‌گیریم. واضح است که $y_1 = e^x$ و $y_2 = xe^x$ پایه جواب هستند. اما داریم

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{pmatrix} = e^{2x}.$$

حال طبق روش لاگرانژ داریم

$$y_{p_1} = y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}dx - y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)}dx =$$
$$xe^x \int \frac{e^x x^{-1} e^x}{e^{2x}}dx - e^x \int \frac{xe^x x^{-1}e^x}{e^{2x}}dx = xe^x \ln x - xe^x$$

حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه i ندارد و $k = 0$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به روش ضرایب نامعین به صورت

$$y_{p_2} = r_0 \cos x + s_0 \sin x$$

است. با جایگذاری در معادله $r_0 = \frac{1}{2}$ و $s_0 = 0$ حاصل می‌شود. پس

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = x^2 + x + \frac{1}{2}\cos x$$

است. بنابراین

$$y_G = y_g + y_p = (c_1 + c_2 x)e^x + xe^x \ln x - xe^x + \frac{1}{2}\cos x$$

جواب عمومی است.

سوال ۳.۹.۳. *(میان ترم صنعتی اصفهان) فقط فرم یک جواب خصوصی معادله زیر را به روش ضرایب نامعین بنویسید (محاسبه ضرایب لازم نیست).*

$$y'' + 2y' + 5y = 3xe^{-x}\cos^2 x + 4$$

پاسخ. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2 + 2t + 5 = 0$ است که دو ریشه مختلط $-1 + 2i$ و $-1 - 2i$ دارد. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. دقت شود که $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. اما با فرض $g_1(x) = \frac{3}{2}xe^{-x}\cos(2x)$، $g_2(x) = \frac{3}{2}xe^{-x}$ و $g_3(x) = 4$ می‌توانیم جواب خصوصی را به روش ضرایب نامعین پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $-1 + 2i$ دارد و $k = 1$، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت

$$y_{p_1} = xe^{-x}[(r_0 + r_1 x)\cos(2x) + (s_0 + s_1 x)\sin(2x)]$$

است. حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $a = -1$ ندارد و $k = 1$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به صورت

$$y_{p_2} = (h_0 + h_1 x)e^{-x}$$

است. و در آخر جواب خصوصی متناظر با $g_3(x)$ را می‌نویسیم. معادله شاخصی ریشه صفر ندارد و $k = 0$ پس $y_{p_3} = l_0$ است. بنابراین $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ است.

سوال ۴.۹.۳. *(میان ترم صنعتی اصفهان) جواب عمومی معادله زیر را پیدا کنید.*

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2 e^x$$

پاسخ. معادله همگن نظیر را به صورت $y'' - (1 + \frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = 0$ بازنویسی می‌کنیم. واضح است که $y_1 = e^x$ یک جواب است (حدس زده‌ایم). حال داریم

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{(e^x)^2}e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} = \frac{1}{e^{2x}}e^{x+\ln x} = xe^{-x}$$
$$\Rightarrow\ u = -(x+1)e^{-x}.$$

انتگرال گیری آخر جز به جز است. با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که e^x و

$$y_2 = uy_1 = -(x+1)e^{-x}e^x = -x-1$$

مستقل خطی هستند. بنابراین $y_g = c_1e^x + c_2(-x-1)$ جواب عمومی معادله همگن نظیر است. اکنون به یک جواب خصوصی نیاز داریم. چون $g(x) = \frac{x^2e^x}{x} = xe^x$ است و معادله ضرایب ثابت نیست، از روش لاگرانژ کمک می‌گیریم. واضح است که $y_1 = e^x$ و $y_2 = -x-1$ پایه جواب هستند. اما داریم

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} e^x & -x-1 \\ e^x & -1 \end{pmatrix} = xe^x.$$

حال طبق روش لاگرانژ داریم

$$\begin{aligned} y_p &= y_2\int \frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx - y_1\int \frac{y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \\ &(-x-1)\int \frac{e^xxe^x}{xe^x}dx - e^x\int \frac{(-x-1)xe^x}{xe^x}dx = \frac{1}{2}x^2e^x - e^x \end{aligned}$$

بنابراین

$$y_G = y_g + y_p = c_1e^x + c_2(-x-1) + \frac{1}{2}x^2e^x - e^x$$

جواب عمومی است.

سوال ۵.۹.۳. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر) فقط فرم جواب خصوصی معادله زیر را به روش ضرایب نامعین بنویسید (محاسبه ضرایب لازم نیست).*

$$y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x}\sin^2 x$$

پاسخ. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2 + 2t + 5 = 0$ است که دو ریشه مختلط $-1+2i$ و $-1-2i$ دارد. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. دقت شود که $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$. اما با فرض $g_1(x) = e^{-x}$، $g_2(x) = e^{-x}\cos(2x)$ می‌توانیم جواب خصوصی را به روش ضرایب نامعین پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $a = -1$ ندارد و $k = 0$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_1 به صورت

$$y_{p_1} = h_0e^{-x}$$

است. حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $-1+2i$ دارد و $k = 0$، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت

$$y_{p_2} = e^{-x}[r_0\cos(2x) + s_0\sin(2x)]$$

است. و در آخر $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ است.

سوال ۶.۹.۳. *(میان ترم صنعتی اصفهان) جواب عمومی معادله زیر را پیدا کنید.*

$$x^2y'' - xy' + y = x(\ln x)^{91}$$

پاسخ. واضح است که این یک معادله کشی_اویلر مرتبه دوم همگن است. شکل ضرایب ثابت شده با تغییر متغیر $u = \ln|x|$ و

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{|x|}\frac{dy}{du}$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(\frac{1}{|x|}\frac{dy}{du}) = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du})$$

به صورت

$$\frac{d^2y}{du^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{du} + a_0y = g(e^u) \Rightarrow \frac{d^2y}{du^2} - 2\frac{dy}{du} + y = u^{91}e^u$$

است. پس معادله شاخصی

$$t^2 + (a_1 - 1)t + a_0 = t^2 - 2t + 1 = 0$$

است. معادله شاخصی دارای ریشه مضاعف است پس جواب عمومی معادله همگن به صورت

$$y_g = (c_1 + c_2u)e^u = (c_1 + c_2\ln|x|)|x|$$

است. حال به یک جواب خصوصی نیاز داریم. چون $g(u)$ به شکل توابع شناخته شده در روش ضرایب نامعین نیست، از روش لاگرانژ کمک می‌گیریم. واضح است که $y_1 = e^u$ و $y_2 = ue^u$ پایه جواب هستند. اما داریم

$$W(y_1, y_2) = det\begin{pmatrix} e^u & ue^u \\ e^u & e^u + ue^u \end{pmatrix} = e^{2u}.$$

حال طبق روش لاگرانژ (خودتان محاسبات را انجام دهید) داریم

$$y_p = -e^uu^{93}(\frac{1}{93} - \frac{1}{92}) = |x|(\ln|x|)^{93}(\frac{1}{92} - \frac{1}{93})$$

بنابراین

$$y_G = y_g + y_p = (c_1 + c_2\ln|x|)|x| + |x|(\ln x)^{93}(\frac{1}{92} - \frac{1}{93})$$

جواب عمومی است.

سوال ۷.۹.۳. *(میان ترم صنعتی امیر کبیر) جواب عمومی معادله $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ را پیدا کنید.*

پاسخ. ابتدا معادله را به صورت

$$y'' - \frac{x+1}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

می‌نویسیم. معادله یک جواب به صورت $y_1 = e^x$ دارد (حدس زده ایم!). حال داریم

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{e^{2x}}e^{\int \frac{x+1}{x}dx} = \frac{1}{e^{2x}}e^{x+\ln x} = xe^{-x} \Rightarrow u = -(x+1)e^{-x}.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که e^x و $y_2 = uy_1 = -x-1$ مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی $y_g = c_1e^x - c_2(-x-1)$ است.

سوال ۸.۹.۳. *(میان ترم صنعتی امیرکبیر با کمی تغییر)* جواب عمومی معادله

$$(x+1)y'' - (3x+4)y' + 3y = 0$$

را پیدا کنید.

پاسخ. ابتدا معادله را به صورت

$$y'' - \frac{3x+4}{x+1}y' + \frac{3}{x+1}y = 0$$

می‌نویسیم. معادله یک جواب به صورت $y_1 = e^{3x}$ دارد (حدس زده ایم!). حال داریم

$$u' = \frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{e^{6x}}e^{\int \frac{3x+4}{x+1}dx} = \frac{1}{e^{6x}}e^{3x+\ln(x+1)} = (x+1)e^{-3x}$$
$$\Rightarrow \quad u = -\frac{(3x+4)e^{-3x}}{9}.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که e^{3x} و $y_2 = uy_1 = -\frac{3x+4}{9}$ مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی $y_g = c_1e^{3x} - c_2(\frac{3x+4}{9})$ است.

۱۰.۳ نمونه سوالات تستی

۱. (سراسری معدن ۸۳) معادله دیفرانسل $x^4y'' + 2x^3y' = 4$ با تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ به کدام صورت بیان می‌شود

(۱) $y'' = 4$ (۲) $y'' - y' = 4$

(۳) $ty'' + y' = 4$ (۴) $y'' + ty' = 4$

۲. (سراسری عمران ۸۵) جواب معادله $y'' + 4y' + 5y = 0$ با مقدار اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 0$ کدام است

(۱) $y = e^{-x}\cos x + e^{-2x}\sin x$ (۲) $y = e^{-2x}\cos x + 2e^{-2x}\sin x$

(۳) $y = e^{-2x}\cos x + 3e6{-}2x\sin x$ (۴) $y = e^{-2x}\cos x + e6{-}x\sin x$

۳. (سراسری عمران ۸۵) معادله دیفرانسیل که توابع e^x و e^{2x} تشکیل دهنده مجموعه جواب‌های پایه آن باشد، کدام است

(۱) $y''+2y=0$ (۲) $y''+3y'-2y=0$

(۳) $y''-3y'+2y=0$ (۴) $2y''+y'-y=0$

۴. (سراسری عمران ۷۹) رونسکین $\{t, t-3, 2t+5\}$ عبارت است از

(۱) 0 (۲) 2 (۳) 5 (۴) -1

۵. (سراسری نفت ۸۴) جواب معادله $x^2y''+xy'-4y=0$ کدام است

(۱) $y=c_1x^{-1}+\frac{c_2}{x^4}$ (۲) $y=c_1e^{2x}+\frac{c_1}{x^2}$

(۳) $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x^2}$ (۴) $y=c_1x+c_2x^4$

۶. (سراسری برق ۸۴) جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''-3xy'+4y=0$ با شرایط اولیه $y'(1)=1$ و $y(1)=1$ با کدام گزینه برابر است

(۱) x^3+x^2 (۲) $(1-\ln x)x$

(۳) $(1+\ln x)x^2$ (۴) $(1-\ln x)x^2$

۷. (سراسری نساجی ۷۹) جواب معادله $(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}-(x+2)\frac{dy}{dx}+y=0$ کدام است

(۱) $y=x(c_1+c_2\ln x)$ (۲) $y=(x+2)(c_1+c_2e^{x+2})$

(۳) $y=e^{x+2}(c_1+c_2x)$ (۴) $y=(x+2)(c_1+c_2\ln(x+2))$

۸. (سراسری هسته‌ای ۷۹) جواب خصوصی معادله $y''+y=\sec x$ برابر است با

(۱) $x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$ (۲) $\ln|\cos x|(\sin x+x\cos x)$

(۳) $\tan^{-1}\cos x+x\sin x$ (۴) $x\cos x-\ln|\sin x|$

۹. (سراسری هسته‌ای ۸۲) جواب معادله دیفرانسیل $y''+(y')^2=0$ کدام است

(۱) ae^x+b (۲) $\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$ (۳) $\sinh(ax+b)$ (۴) $\ln(ax+b)$

۱۰. (سراسری عمران ۸۳) اگر $y=x$ یک جواب معادله $(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$ باشد جواب عمومی معادله کدام است

(۱) $c_1x^3+c_2x$ (۲) $c_1x+c_2(x^2+1)$

(۳) $c_1\ln x+c_2\frac{1}{x}$ (۴) $c_1\cos x+c_2\tan x$

۱۱. (سراسری برق ۸۲) پاسخ غیر ثابت معادله دیفرانسیل $yy''+(y')^2=0$ عبارت است از

(۱) $\frac{1}{y}=Ax^2+B$ (۲) $y^2=Ax+B$

(۳) $y=Ax^2+B$ (۴) $y^2=\frac{A}{x}+B$

۱۲. (سراسری مکانیک ۸۱) جواب عمومی معادله $y''-\frac{2}{x}y'+(1+\frac{2}{x^2})y=xe^x$ به کدام صورت است

(۱) $y=xe^{\frac{1}{2}x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

(۲) $y=x^2e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$

(۳) $y=x^2e^x+c_1\cos x+c_2\sin x$

(۴) $y=x(\frac{1}{2}e^x+c_1\cos x+c_2\sin x)$

فصل ۴

تبدیلات لاپلاس

در فصل‌های قبل با روش حل معادلات دیفرانسیل خطی آشنا شدید و مشاهده شد که اگر جواب خصوصی خاصی مد نظر باشد، آنگاه باید جواب عمومی را تحت شرایط اولیه داده شده قرار دهیم. این روش حل معادلات دیفرانسیل خطی زمان بر است و احتمال خطا در محاسبات وجود دارد. در این فصل روشی کارا برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه را آموزش می‌دهیم که به روش لاپلاس معروف است. جالبی این روش این است که مستقیما به همان جواب خصوصی مد نظر دست می‌یابیم.

۱.۴ تابع گاما

در ابتدا شما را با یک تابع که به نام گاما معروف است، آشنا می‌کنیم. این تابع نقش مهمی در لاپلاس و معادله دیفرانسیل بسل دارد.

تعریف ۱.۱.۴. *فرض کنیم α یک عدد حقیقی باشد. در این صورت تابع گامای α به صورت $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ تعریف می‌شود و با $\Gamma(\alpha)$ نشان می‌دهیم.*

مثال ۲.۱.۴. *داریم*

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

محاسبه تابع گاما برای مقادیر مختلف اصلا کار آسانی نیست! لم زیر نشان می‌دهد که محاسبه تابع گاما را فقط برای $\alpha \in [1, 2)$ لازم داریم (مثال‌های زیر را دنبال کنید). اما محاسبه این تابع را برای مقادیر مختلف $\alpha \in [1, 2)$ می‌توانید در منابع معتبر به صورت جدولی پیدا کنید.

لم ۳.۱.۴. *همواره داریم* $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

اثبات. طبق تعریف داریم $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx$. فرض کنیم $u=x^\alpha$ باشد. از روش جز به جز کمک می‌گیریم. پس $du=\alpha x^{\alpha-1}dx$ و $dv=e^{-x}dx$. بنابراین

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx=\left[-x^\alpha e^{-x}\right]_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=$$
$$0+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha)$$

و اثبات کامل است. □

نتیجه ۴.۱.۴. *برای عدد طبیعی n داریم* $\Gamma(n)=(n-1)!$.

اثبات. با کمک لم ۳.۱.۴ داریم

$$\begin{aligned}&\Gamma(n)=\Gamma(n-1+1)=(n-1)\Gamma(n-1)=\\&(n-1)\Gamma(n-2+1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=...=\\&(n-1)(n-2)(n-3)...2\Gamma(1)=(n-1)!\end{aligned}$$

و اثبات کامل است. □

نتیجه بالا انگیزه تعریف زیر را می‌دهد. در حقیقت این نتیجه نشان می‌دهد که گاما تعمیم فاکتوریل است!

تعریف ۵.۱.۴. *برای هر α تعریف می‌کنیم* $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$.

مثال ۶.۱.۴. *داریم*

$$0!=\Gamma(0+1)=\Gamma(1)=1.$$

مثال ۷.۱.۴. *داریم*

$$\begin{aligned}&2.1!=\Gamma(2.1+1)=(2.1)\Gamma(2.1)=(2.1)\Gamma(1.1+1)=\\&(2.1)(1.1)\Gamma(1.1)\end{aligned}$$

پس باید فقط $\Gamma(1.1)$ را حساب کنیم که چنین مقادیری تا چندین رقم اعشار در منابع حساب شده‌اند.

مثال ۸.۱.۴. *داریم*

$$\begin{aligned}&3.4!=\Gamma(3.4+1)=(3.4)\Gamma(3.4)=\\&(3.4)\Gamma(2.4+1)=(3.4)(2.4)\Gamma(2.4)=(3.4)(2.4)(1.4)\Gamma(1.4)\end{aligned}$$

پس باید فقط $\Gamma(1.4)$ را حساب کنیم که چنین مقادیری تا چندین رقم اعشار در منابع حساب شده‌اند.

مثال ۹.۱.۴. *می‌خواهیم $(-1\cdot 6)!$ را حساب کنیم. داریم*

$$(-1.6)! = \Gamma(-0.6) = \frac{(-0.6)\Gamma(-0.6)}{(-0.6)} =$$
$$\frac{\Gamma(0.4)}{(-0.6)} = \frac{(0.4)\Gamma(0.4)}{(0.4)(-0.6)} = \frac{\Gamma(1.4)}{(0.4)(-0.6)}.$$

پس باید فقط $\Gamma(1\cdot 4)$ را حساب کنیم که چنین مقادیری تا چندین رقم اعشار در منابع حساب شده‌اند.

مثال ۱۰.۱.۴. *می‌خواهیم $(-1)!$ را حساب کنیم. داریم*

$$1 = 0! = \Gamma(1) = \Gamma(0+1) = 0\Gamma(0) = 0 \times (-1)! \ \Rightarrow\ (-1)! = \infty.$$

تذکر ۱۱.۱.۴. *فاکتوریل اعداد صحیح منفی برابر بینهایت است (چرا؟).*

تمرین ۱۲.۱.۴. *مقدار $\Gamma(\frac{1}{2})$ را حساب کنید (سپس تا آخر عمر آن را به خاطر بسپارید!).*

حل. طبق تعریف داریم

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx.$$

با فرض $x = u^2$ داریم $dx = 2udu$. بنابراین داریم $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$. حال از روش‌های تکنیکی انتگرال گیری ریاضی عمومی دو استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $T = \int_0^\infty e^{-u^2}du$. پس

$$T^2 = (\int_0^\infty e^{-u^2}du)^2 = (\int_0^\infty e^{-u^2}du)(\int_0^\infty e^{-u^2}du) =$$
$$(\int_0^\infty e^{-u^2}du)(\int_0^\infty e^{-v^2}dv) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}dudv =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{4}.$$

بنابراین $T = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. حال داریم

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = 2T = \sqrt{\pi}.$$

تمرین ۱۳.۱.۴. *مقدار انتگرال $\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}}e^{-4x}dx$ را حساب کنید.*

حل. فرض کنیم $4x = u$ باشد. پس

$$\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}}e^{-4x}dx = \int_0^\infty (\frac{u}{4})^{\frac{3}{2}}e^{-u}\frac{du}{4} =$$
$$\frac{1}{32}\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}}e^{-u}du = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{32} = \frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma(\frac{1}{2})}{32} = \frac{3\sqrt{\pi}}{128}.$$

۲.۴ تبدیل لاپلاس

با تعریف زیر کار را آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۴. *فرض کنیم تابع $f(t)$ روی بازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد. در این صورت به*

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt \qquad s>0$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ گوییم به شرط آن که انتگرال بالا همگرا باشد و آن را با $F(s)$ یا $\mathcal{L}(f(t))$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t)=2$ را حساب کنیم. طبق تعریف داریم*

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b 2e^{-st}dt=$$
$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{s}e^{-st}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-2}{s}e^{-sb}+\frac{2}{s}\right]=\frac{2}{s}.$$

بنابراین به صورت کاملا مشابه برای عدد حقیقی a داریم $\mathcal{L}(a)=\frac{a}{s}$.

مثال ۳.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t)=t$ را حساب کنیم. طبق تعریف (برای انتگرال گیری جزبه‌جز و برای محاسبه حد از روش هوپیتال استفاده شده است) داریم*

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-st}dt=$$
$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{(st+1)e^{-st}}{s^2}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{(sb+1)e^{-sb}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{s^2}.$$

مثال ۴.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t)=e^{at}$ را حساب کنیم که $a\in\mathbb{C}$. طبق تعریف داریم*

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}e^{at}dt=$$
$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(1-s)b}-\frac{1}{a-s}\right]=\frac{1}{s-a}.$$

مثال ۵.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t)=\sin t$ را حساب کنیم. طبق تعریف (برای انتگرال گیری جزبه‌جز استفاده شده است) داریم*

$$F(s)=\int_0^\infty(\sin t)e^{-st}dt=\left[-\frac{e^{-st}(s\sin(t)+\cos(t))}{s^2+1}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2+1}.$$

به روش مشابه $\mathcal{L}(\cos t)=\frac{s}{s^2+1}$.

مثال ۶.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t) = t^\alpha$ را که $\alpha > -1$ حساب کنیم. طبق تعریف داریم*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st}dt.$$

با فرض $st = u$ داریم $sdt = du$. بنابراین

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-st}dt = \int_0^\infty (\frac{u}{s})^\alpha e^{-u}\frac{du}{s} = \frac{\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}dt}{s^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} = \frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}}.$$

تذکر ۷.۲.۴. *معمولا لاپلاس تابع $f(t)$ را با $F(s)$ و لاپلاس تابع $g(t)$ را با $G(s)$ نمایش می‌دهیم، یعنی با حرف بزرگ نظیر تابع! وقتی که تابع دقیقا مشخص نیست مثلا $f(t) + g(t)$، معمولا از نماد $\mathcal{L}$ استفاده می‌کنیم.*

تذکر ۸.۲.۴. *لاپلاس توابع چند ضابطه‌ایی با کمک تعریف لاپلاس محاسبه می‌شود.*

مثال ۹.۲.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع*

$$f(t) = \begin{cases} \sin(3t) & 0 \le t < \pi \\ 3 & \pi < t \end{cases}$$

را حساب کنیم. طبق تعریف داریم (انتگرال گیری جزبه‌جز استفاده شده است)

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\pi \sin(3t)e^{-st}dt + \int_\pi^\infty 3e^{-st}dt =$$
$$\left[-\frac{e^{-st}(s\sin(3t) + 3\cos(3t))}{s^2+9}\right]_0^\pi + \left[\frac{3e^{-st}}{s}\right]_\pi^\infty = \frac{3}{s^2+9}(e^{-\pi s}+1) + \frac{3e^{-\pi s}}{s}.$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که چرا به لاپلاس، تبدیل لاپلاس گوییم! توابعی که نسبت به جمع و ضرب رفتار خوبی از خود نشان می‌دهند به تبدیل (عملگر) معروف هستند. لازم است که بدانید لاپلاس (مشتق، انتگرال) نیز یک تابع است که دامنه آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه توابع و برد آن نیز یک زیرمجموعه از توابع است. در حقیقت لاپلاس (مشتق، انتگرال) یک تابع دریافت می‌کند و با یکسری عملیات تابعی دیگر تحویل می‌دهد!

قضیه ۱۰.۲.۴. *فرض کنیم دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ دارای لاپلاس باشند. در این صورت برای هر عدد حقیقی (یا مختلط) c داریم*

$$\mathcal{L}(cf(t) + g(t)) = c\mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)).$$

اثبات. داریم

$$\mathcal{L}(cf(t) + g(t)) = \int_0^\infty e^{-st}(cf(t) + g(t))dt = \int_0^\infty e^{-st}cf(t)dt +$$
$$\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = c\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = c\mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t))$$

و اثبات کامل است. □

مثال ۱۱.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t) = 3t + 2$ را حساب کنیم. طبق قضیه بالا و مثال‌های بالا داریم*

$$\mathcal{L}(3t+2) = 3\mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(2) = \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s} = \frac{3+2s}{s^2}.$$

مثال ۱۲.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس تابع $f(t) = \sinh t$ را حساب کنیم. طبق قضیه بالا و مثال‌های بالا داریم*

$$\mathcal{L}(\sinh t) = \mathcal{L}(\frac{e^t - e^{-t}}{2}) = \frac{\mathcal{L}(e^t) - \mathcal{L}(e^{-t})}{2} = \frac{1}{2}[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}] = \frac{1}{s^2-1}.$$

به روش مشابه $\mathcal{L}(\cosh t) = \frac{s}{s^2-1}$.

ممکن است این تصور ایجاد شود که همه توابع تبدیل لاپلاس دارند. اما باید بگوییم که اینگونه نیست. هماطور که در درس ریاضی عمومی مشاهده کرده‌اید لزوما همه انتگرال‌های ناسره همگرا نیستند و از آنجایی که تبدیل لاپلاس به نوعی یک انتگرال گیری ناسره است ممکن است همگرا نشود. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱۳.۲.۴. *تابع $f(t) = \frac{1}{t}$ تبدیل لاپلاس ندارد. زیرا داریم $F(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}dt$. اما تابع $\frac{e^{-st}}{t}$ روی بازه $[0,\infty)$ مثبت است پس داریم $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}dt$. از طرفی روی بازه $[0,1]$ واضح است که $e^{st} \leq e^s$ است زیرا $s > 0$. در نتیجه $e^{-st} \geq e^{-s}$. بنابراین*

$$\int_0^1 \frac{e^{-st}}{t}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-s}}{t}dt = e^{-s}\int_0^1 \frac{1}{t}dt.$$

اما انتگرال سمت راست یک عدد حقیقی نیست (چرا؟). پس لاپلاس نیز وجود ندارد.

مثال بالا به صورت طبیعی این سوال را در ذهن ایجاد می‌کند که چه توابعی بدون استفاده از تعریف و درگیر شدن با انتگرال ناسره، می‌تواند تبدیل لاپلاس داشته باشد. در ادامه به این سوال پاسخ می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۴. *گوییم تابع $f(t)$ را روی بازه باز $[a,\infty)$ پیوسته قطعه‌ای گوییم اگر برای هر عدد حقیقی $b \geq a$، تابع $f(t)$ روی بازه $[a,b)$ جز در تعداد متناهی از نقاط داخل بازه، پیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی حد چپ و راست عدد حقیقی باشد.*

مثال ۱۵.۲.۴. *هر تابع پیوسته، قطعه‌ای پیوسته است. زیرا اصلا نقطه ناپیوستگی ندارد!*

مثال ۱۶.۲.۴. *تابع*

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

روی $(0,\infty)$ قطعه‌ای پیوسته است. زیرا تعداد متناهی نقط ناپیوستگی دارد (در اینجا فقط $t = 1$ نقطه ناپیوستگی است). از سوی دیگر حد چپ و راست در $t = 1$ وجود دارد و یک عدد حقیقی است (بررسی کنید).

مثال ۱۷.۲.۴. *تابع جزء صحیح، $f(t) = [t]$ روی $[0, \infty)$ قطعه‌ای پیوسته است.*

مثال ۱۸.۲.۴. *تابع*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ 2 & t = 0 \\ \frac{1}{t} & 0 < t < \infty \end{cases}$$

روی $(-1, \infty)$ قطعه‌ای پیوسته نیست. این تابع با این که تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی دارد. اما حد راست در $t = 0$ عدد حقیقی نیست.

تعریف ۱۹.۲.۴. *گوییم تابع $f(t)$ روی $[0, \infty)$ مرتبه (رشد) نمایی است هرگاه عدد حقیقی نامنفی M و عدد حقیقی a چنان موجود باشد که*

$$|f(t)| \leq Me^{at}.$$

مثال ۲۰.۲.۴. *تابع $f(t) = \sin t$ هم مرتبه نمایی است. زیرا کافی است قرار دهیم $M = 1$ و $a = 0$، یعنی*

$$|\sin t| \leq 1 = e^{0 \times t}.$$

مثال ۲۱.۲.۴. *تابع $f(t) = e^t$ هم مرتبه نمایی است. زیرا کافی است قرار دهیم $M = 1$ و $a = 2$، یعنی*

$$|e^t| = e^t \leq e^{2t}.$$

حال قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم. قبل بیان قضیه این تذکر را می‌دهیم که توابع پیوسته قطعه‌ای انتگرال دارند.

قضیه ۲۲.۲.۴. (قضیه وجود لاپلاس) *فرض کنیم $f(t)$ یک تابع روی $[0, \infty)$ باشد که پیوسته قطعه‌ای و هم مرتبه نمایی باشد. در این صورت عدد حقیقی a وجود دارد که برای هر $s > a$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ وجود دارد.*

تذکر ۲۳.۲.۴. *باید دقت شود که توابعی وجود دارند که تبدیل لاپلاس دارند مانند $t^{\frac{-1}{2}}$ اما هم مرتبه نمایی نیست! یعنی شرایط قضیه بالا با این که برقرار نیست اما تبدیل لاپلاس ممکن است موجود باشد.*

اکنون تبدیل معکوس لاپلاس را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲۴.۲.۴. *فرض کنیم $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد. در این صورت به $f(t)$ تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ گوییم و آن را با $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$ نمایش می‌دهیم.*

مثال ۲۵.۲.۴. *دیدیم که تبدیل لاپلاس $f(t) = 2$ برابر با $F(s) = \frac{2}{s}$ است. پس $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s}) = 2$.*

مثال ۲۶.۲.۴. *دیدیم که تبدیل لاپلاس $f(t) = 3t + 2$ برابر با $F(s) = \frac{2s+3}{s^2}$ است. بنابراین $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2s+3}{s^2}) = 3t + 2$.*

قضیه ۲۷.۲.۴. *فرض کنیم دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ و $G(s)$ باشند. در این صورت برای هر عدد حقیقی (مختلط) c داریم*

$$\mathcal{L}^{-1}(cF(s) + G(s)) = c\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

اثبات. اثبات سر راست است. □

مثال ۲۸.۲.۴. *می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \frac{2s+3}{s^2}$ را حساب کنیم. طبق قضیه بالا داریم*

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{2s+3}{s^2}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}) = 2\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) + 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = 2 + 3t.$$

قضیه زیر بسیار کاربردی است.

قضیه ۲۹.۲.۴. *فرض کنیم $s > a$ و b عدد حقیقی مثبت باشد و $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$. در این صورت داریم:*

(۱) $\mathcal{L}(f(bt)) = \frac{1}{b}F(\frac{s}{b})$.

(۲) $\mathcal{L}^{-1}(F(bs)) = \frac{1}{b}f(\frac{t}{b})$.

اثبات. (۱) طبق تعریف داریم $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. پس $F(\frac{s}{b}) = \int_0^\infty e^{-\frac{s}{b}t}f(t)dt$. با قرار دادن $u = \frac{t}{b}$ داریم که $dt = bdu$ و در نتیجه

$$F(\frac{s}{b}) = b\int_0^\infty e^{-su}f(bu)du = b\mathcal{L}(f(bt)).$$

با تقسیم طرفین بر b (۱) حاصل می‌شود.

(۲) کافی است در (۱) نقش b را با $\frac{1}{b}$ تغییر دهیم (دقت شود که چون $b > 0$ است پس $\frac{1}{b} > 0$) یعنی $\mathcal{L}(f(\frac{1}{b}t)) = \frac{1}{\frac{1}{b}}F(\frac{s}{\frac{1}{b}})$. لذا $\mathcal{L}(f(\frac{t}{b})) = bF(bs)$. طرفین را بر b تقسیم می‌کنیم و تبدیل معکوس لاپلاس می‌گیریم و رابطه (۲) حاصل می‌شود. □

مثال ۳۰.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس $g(t) = \sin(at)$ را حساب کنیم. قرار می‌دهیم $f(t) = \sin t$. از مثال‌های بالا دیده‌ایم که $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1} = F(s)$. طبق قضیه ۲۹.۲.۴ قسمت (۱) داریم*

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) = \frac{1}{a}(\frac{1}{(\frac{s}{a})^2+1}) = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

به روش مشابه $\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2+a^2}$.

مثال ۳۱.۲.۴. *می‌خواهیم لاپلاس $g(t) = \sinh(at)$ را حساب کنیم. داریم $f(t) = \sinh t$. از مثال‌های بالا دیده‌ایم که $\mathcal{L}(\sinh t) = \frac{1}{s^2-1} = F(s)$. طبق قضیه ۲۹.۲.۴ قسمت (۱) داریم*

$$\mathcal{L}(\sinh(at)) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) = \frac{1}{a}(\frac{1}{(\frac{s}{a})^2-1}) = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

به روش مشابه $\mathcal{L}(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2-a^2}$.

مثال ۳۲.۲.۴. می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $G(s)=\frac{1}{9s^2+4}$ را پیدا کنیم. ابتدا داریم $G(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{9}{4}s^2+1}$. از مثال‌های بالا دیده‌ایم که $F(s)=\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}(\sin t)$. پس یعنی

$$G(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{3}{2}s)^2+1}=\frac{1}{4}F(\frac{3}{2}s).$$

طبق قضیه ۲۹.۲.۴ قسمت (۲) و با فرض $f(t)=\sin t$ داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s))=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{4}F(\frac{3}{2}s))=\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(F(\frac{3}{2}s))=$$
$$\frac{1}{4}(\frac{2}{3}f(\frac{2t}{3}))=\frac{1}{6}\sin(\frac{2t}{3}).$$

در ادامه تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس توابع معروف را در یک جدول به دست می‌دهیم. باید خاطر نشان کنیم که این جدول با کمک بخش‌های دیگر این فصل کم کم تکمیل می‌شود.

$F(s)$ $\mathcal{L}(f(t))$	$f(t)$ $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$
$\frac{a}{s}$	$a\ (\in\mathbb{R})$
$\frac{\alpha!}{s^{\alpha+1}}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	$t^{\alpha}\ (\alpha>-1)$
$\frac{1}{s-a}$	$e^{(at)}(a\in\mathbb{R})$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)\ (a\in\mathbb{R})$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)\ (a\in\mathbb{R})$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)\ (a\in\mathbb{R})$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)\ (a\in\mathbb{R})$

مثال ۳۳.۲.۴. می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $f(t)=4t^3-\cos(2t)-2e^{3t}$ را حساب کنیم. داریم

$$\mathcal{L}(4t^3-\cos(2t)-2e^{3t})=4\mathcal{L}(t^3)-\mathcal{L}(\cos(2t))-2\mathcal{L}(e^{3t})=$$
$$\frac{4(3!)}{s^4}-\frac{s}{s^2+4}-\frac{2}{s-3}$$

مثال ۳۴.۲.۴. می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)=\frac{2s+1}{s^2+4}$ را پیدا کنیم. داریم

$$F(s)=\frac{2s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+4}=\frac{2s}{s^2+4}+\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}.$$

در نتیجه داریم

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=2\cos(2t)+\frac{1}{2}\sin(2t).$$

مثال ۳۵.۲.۴. *می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)=\frac{s}{(s-1)(s+2)}$ را پیدا کنیم. قرار می‌دهیم*

$$F(s)=\frac{s}{(s-1)(s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}.$$

در نتیجه داریم $A=\frac{1}{3}$ و $B=\frac{2}{3}$. بنابراین

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{-2t}.$$

مثال زیر بسیار جالب است و یک روش برای محاسبه تبدیل معکوس لاپلاس با کمک بسط مک‌لورن و بسط تیلور آموزش می‌دهد (برای یادآوری بسط مک‌لورن و بسط تیلور منابع ریاضی عمومی را ببینید یا تا فصل شش صبور باشید).

مثال ۳۶.۲.۴. *می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ را حساب کنیم. داریم*

$$F(s)=\frac{1}{s\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{\frac{-1}{2}}.$$

اکنون بسط مک‌لورن $\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$ را مثلا تا سه جمله اول می‌نویسیم، یعنی

$$\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{\frac{-1}{2}}=1-\frac{1}{2s^2}+\frac{3}{8s^4}+...$$

و لذا

$$F(s)=\frac{1}{s}(1-\frac{1}{2s^2}+\frac{3}{8s^4}+...)=\frac{1}{s}-\frac{1}{2s^3}+\frac{3}{8s^5}+...$$

و در نتیجه

$$f(t)=1-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{64}t^4+\cdots.$$

در حقیقت $f(t)$ همان تابع بسل $J_0(x)$ است که در معادله دیفرانسیل بسل ظاهر می‌شود و خارج از بحث ما است.

تمرین ۳۷.۲.۴. *تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ را حساب کنید.*

حل. داریم

$$\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{t}})=\mathcal{L}(t^{-\frac{1}{2}})=\frac{(-\frac{1}{2})!}{s^{-\frac{1}{2}+1}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

تمرین ۳۸.۲.۴. *تبدیل لاپلاس $f(t)=\sinh(at+b)$ را برای اعداد حقیقی a و b حساب کنید.*

حل. ابتدا دقت شود که داریم

$$\sinh(at+b) = \sinh(at)\cosh(b) + \sinh(b)\cosh(at).$$

بنابراین

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sinh(at)\cosh(b) + \sinh(b)\cosh(at)) =$$
$$\cosh(b)\mathcal{L}(\sinh(at)) + \sinh(b)\mathcal{L}(\cosh(at)) =$$
$$\frac{a\cosh(b)}{s^2-a^2} + \frac{s(\sinh(b))}{s^2-a^2}.$$

تمرین ۳۹.۲.۴. *فرض کنیم $F(s)$ تبدیل لاپلاس یک تابع مانند $f(t)$ باشد و*

$$\mathcal{L}(\frac{1-e^{-t}}{t}) = \ln(1+F(s)).$$

در این صورت تبدیل لاپلاس $g(t) = \frac{2-2e^{-\frac{1}{2}t}}{t}$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $h(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$. بنابراین داریم $g(t) = h(\frac{1}{2}t)$. با فرض قرار دادن $\mathcal{L}(h(t)) = H(s) = \ln(1+F(s))$ و طبق قضیه ۲۹.۲.۴ قسمت (۱) نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(h(\frac{1}{2}t)) = 2H(2s) = 2\ln(1+F(2s)).$$

۳.۴ تبدیل لاپلاس مشتق

با لاپلاس توابعی که معروف هستند در بخش قبل آشنا شده‌ایم. در این بخش می‌خواهیم یک روش دیگر را آموزش دهیم تا بتوانیم لاپلاس برخی توابع را محاسبه کنیم.

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱.۳.۴. *فرض کنیم $f(t)$ ، $f'(t)$ ، ... ، $f^{n-1}(t)$ توابعی پیوسته باشند و در شرایط قضیه وجود لاپلاس، قضیه ۲۲.۲.۴ ، صدق کنند. همچنین $f^n(t)$ روی بازه $[0,\infty)$ پیوسته قطعه‌ای باشد. در این صورت رابطه زیر بر قرار است*

$$\mathcal{L}(f^n(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - (\sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}f^i(0)).$$

در حالت خاص، دو مورد زیر مد نظر ما (در ادامه) است

$$\mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(f^{'}(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$
$$\mathcal{L}(y'') = \mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0).$$

مثال ۲.۳.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $f(t) = te^t$ را حساب کنیم. داریم* $f'(t) = e^t + te^t$. *پس*

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) \Rightarrow \mathcal{L}(e^t + te^t) = s\mathcal{L}(f(t)) - 0 \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}(e^t) + \mathcal{L}(te^t) = s\mathcal{L}(te^t) \Rightarrow \frac{1}{s-1} = (s-1)\mathcal{L}(te^t) = (s-1)\mathcal{L}(f(t))$$

و لذا $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{(s-1)^2}$.

حال وقت آن است که با یک مثال نشان دهیم تبدیل لاپلاس چگونه یک معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه را حل می‌کند.

مثال ۳.۳.۴. *می‌خواهیم معادله دیفرانسیل*

$$y'' + 4y = t, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$$

را با کمک لاپلاس حل کنیم. فرض کنیم معادله جواب $y(t) = f(t)$ دارد (قضیه وجودی جواب را به یاد آورید!). حال داریم

$$\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(y'' + 4y) = \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) =$$
$$s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0) + 4\mathcal{L}(f(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - s - 1 + 4\mathcal{L}(f(t)).$$

لذا

$$(s^2+4)\mathcal{L}(f(t)) = s + 1 + \frac{1}{s^2} \Rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \frac{s+1}{s^2+4} + \frac{1}{s^2(s^2+4)}.$$

اکنون داریم

$$y(t) = f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s+1}{s^2+4} + \frac{1}{s^2(s^2+4)}) =$$
$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4(s^2+4)}) =$$
$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+4}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+4}) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+4}) =$$
$$\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin(2t) = \cos(2t) + \frac{3}{8}\sin(2t) + \frac{1}{4}t.$$

تمرین ۴.۳.۴. *تبدیل لاپلاس $f(t) = \frac{1}{16}(\sin(2t) - 2t\cos(2t))$ را حساب کنید.*

حل. در ابتدا لاپلاس تابع $g(t) = t\cos(2t)$ را حساب می‌کنیم. برای این منظور داریم $g'(t) = \cos(2t) - 2t\sin(2t)$ و $g''(t) = -4\sin(2t) - 4t\cos(2t)$. پس

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(g''(t)) = s^2\mathcal{L}(g(t)) - sg(0) - g'(0)\\
&\mathcal{L}(-4\sin(2t) - 4t\cos(2t)) = s^2\mathcal{L}(g(t)) - sg(0) - g'(0)\\
&-4\mathcal{L}(\sin(2t)) - 4\mathcal{L}(t\cos(2t)) = s^2\mathcal{L}(t\cos(2t)) - 0 - 1\\
&\frac{-8}{s^2+4} = (s^2+4)\mathcal{L}(t\cos(2t)) - 1 = (s^2+4)\mathcal{L}(g(t)) - 1
\end{aligned}$$

و لذا $\mathcal{L}(g(t)) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$. اما داریم

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{16}[\mathcal{L}(\sin(2t)) - 2\mathcal{L}(t\cos(2t))].$$

بنابراین $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{16}[\frac{2}{s^2+4} - \frac{2s^2-8}{(s^2+4)^2}]$.

۴.۴ تبدیل لاپلاس انتگرال

با تبدیل معکوس لاپلاس توابعی که معروف هستند در بخش‌های قبل آشنا شدیم. در این بخش می‌خواهیم یک روش دیگر را آموزش دهیم تا بتوانیم هم لاپلاس و هم تبدیل معکوس لاپلاس برخی توابع را محاسبه کنیم.

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱.۴.۴. *اگر $f(t)$ تابعی پیوسته قطعه‌ای و در شرایط قضیه وجود لاپلاس، قضیه ۴.۲.۲۲، صدق کنند و $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ آنگاه داریم*

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(x)dx) = \frac{1}{s}F(s).$$

مثال ۲.۴.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $g(t) = \int_0^t x\cos(2x)dx$ را حساب کنیم. قرار می‌دهیم $f(t) = t\cos(2t)$ و از قضیه بالا استفاده می‌کنیم. نیاز به $F(s)$ است و برای محاسبه $F(s)$ داریم که $f'(t) = \cos(2t) - 2t\sin(2t)$ و $f''(t) = -4\sin(2t) - 4t\cos(2t)$. پس*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)\\
&\mathcal{L}(-4\sin(2t) - 4t\cos(2t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)\\
&-4\mathcal{L}(\sin(2t)) - 4\mathcal{L}(t\cos(2t)) = s^2\mathcal{L}(t\cos(2t)) - 0 - 1\\
&\frac{-8}{s^2+4} = (s^2+4)\mathcal{L}(t\cos(2t)) - 1 = (s^2+4)\mathcal{L}(f(t)) - 1
\end{aligned}$$

و لذا $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} = F(s)$. بنابراین

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{s^2-4}{s(s^2+4)^2}.$$

مثال ۳.۴.۴. می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $G(s) = \frac{1}{s^2(s-4)}$ را حساب کنیم. قرار می‌دهیم $F_1(s) = \frac{1}{s-4}$. پس $f_1(t) = e^{4t}$ و داریم

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s-4)} = \frac{1}{s}F_1(s) = \mathcal{L}(\int_0^t e^{4x}dx).$$

لذا

$$\mathcal{L}^{-1}(G_1(s)) = \int_0^t e^{4x}dx = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1).$$

حال قرار می‌دهیم $F(s) = \frac{1}{s(s-4)}$. پس $f(t) = \frac{1}{4}(e^{4t} - 1)$ و داریم

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s-4)} = \frac{1}{s}F(s) = \mathcal{L}(\int_0^t \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)dx).$$

لذا

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \int_0^t \frac{1}{4}(e^{4x} - 1)dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}e^{4t} - t - \frac{1}{4}).$$

تمرین ۴.۴.۴. معادله دیفرانسیل

$$y'' + 9y = t, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

را حل کنید.

حل. فرض کنیم $y(t) = f(t)$ جواب معادله بالا باشد. داریم

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(y'') + 9\mathcal{L}(y(t)) = \\ &s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0) + 9\mathcal{L}(f(t)) = (s^2+9)\mathcal{L}(f(t)).\end{aligned}$$

لذا $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2(s^2+9)}$. قرار می‌دهیم $F_1(s) = \frac{1}{s^2+9}$. پس $f_1(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$ و داریم

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{s}F_1(s) = \mathcal{L}(\int_0^t \frac{1}{3}\sin(3x)dx).$$

لذا

$$\mathcal{L}^{-1}(G_1(s)) = \int_0^t \frac{1}{3}\sin(3x)dx = \frac{1}{9}(1 - \cos(3t)).$$

حال قرار می‌دهیم $F_2(s) = \frac{1}{s(s^2+9)}$. پس $f_2(t) = \frac{1}{9}(1 - \cos(3t))$ و داریم

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{s}F_2(s) = \mathcal{L}(\int_0^t \frac{1}{9}(1 - \cos(3t))dx).$$

لذا

$$y(t) = f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_0^t \frac{1}{9}(1 - \cos(3t))dx = \frac{1}{9}(t - \frac{1}{3}\sin(3t)).$$

۵.۴ تابع پله‌ای واحد

با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۴. *فرض کنیم c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. به تابع زیر تابع پله‌ای واحد گوییم*

$$u_c(t) = \begin{cases} 1 & c < t \\ 0 & 0 \leq t \leq c \end{cases}$$

در حالت خاص $u_0(t) = 1$.

حال گزاره زیر را داریم.

گزاره ۲.۵.۴. *فرض کنیم c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت داریم*

$$\mathcal{L}(u_c(t)) = \frac{e^{-cs}}{s}.$$

اثبات. با تعریف تبدیل لاپلاس سر راست است. □

برای بخش‌های بعدی لازم است که گاهی یک تابع را بر حسب تابع پله‌ای واحد بنویسیم. معمولا چنین عملی را برای توابع چند ضابطه‌ای انجام می‌دهیم. روش کار را در مثال زیر دنبال کنید.

مثال ۳.۵.۴. *می‌خواهیم تابع*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ -2 & 2 \leq t < 5 \\ 2 & 5 \leq t < 8 \\ 0 & 8 \leq t \end{cases}$$

را برحسب تابع پله‌ای واحد بنویسم و لاپلاس آن را حساب کنیم. برای این کار کافی است به ابتدا و انتهای بازه در هر شاخه از $f(x)$ دقت کنیم و سپس $f(t)$ را بر حسب تابع پله‌ای واحد ظاهر شده در ابتدا و انتهای بازه شاخه‌های تابع $f(t)$ بنویسیم. یعنی

$$f(t) = au_0(t) + bu_2(t) + cu_5(t) + du_8(t).$$

حال باید a، b، c و d را مشخص کنیم. برای این منظور کافی است که مثلا t را در بازه $0 \leq t < 2$ انتخاب کنیم. اکنون داریم

$$1 = f(t) = au_0(t) + bu_2(t) + cu_5(t) + du_8(t) = a + 0 + 0 + 0 = a.$$

همچنین t را در بازه $2 \leq t < 5$ انتخاب کنیم. اکنون داریم

$$-2 = f(t) = u_0(t) + bu_2(t) + cu_5(t) + du_8(t) = 1 + b + 0 + 0 = 1 + b.$$

بنابراین $b=-3$. با ادامه این روند داریم $f(t)=u_0(t)-3u_2(t)+4u_5(t)-2u_8(t)$. پس با استفاده از گزاره بالا داریم

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(u_0(t)-3u_2(t)+4u_5(t)-2u_8(t))=$$
$$\mathcal{L}(u_0(t))-3\mathcal{L}(u_2(t))+4\mathcal{L}(u_5(t))-2\mathcal{L}(u_8(t))=$$
$$\frac{1}{s}-\frac{3e^{-2s}}{s}+\frac{4e^{-5s}}{s}-\frac{2e^{-8s}}{s}.$$

مثال ۴.۵.۴. می‌خواهیم تابع

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<1\\ -2 & 1\le t<5\\ t^2 & 5\le t<7\\ 0 & 7\le t\end{cases}$$

را برحسب تابع پله‌ای واحد بنویسیم. برای این کار کافی است به ابتدا و انتهای بازه در هر شاخه از $f(x)$ دقت کنیم و سپس $f(t)$ را بر حسب تابع پله‌ای واحد ظاهر شده در ابتدا و انتهای بازه شاخه‌های تابع $f(t)$ بنویسیم. یعنی $f(t)=au_0(t)+bu_1(t)+cu_5(t)+du_7(t)$. حال باید a، b، c و d را مشخص کنیم. برای این کار مثلا t را در $0\le t<1$ انتخاب کنیم. اکنون داریم

$$0=f(t)=au_0(t)+bu_1(t)+cu_5(t)+du_7(t)=a.$$

همچنین t را در بازه $1\le t<5$ انتخاب کنیم. اکنون داریم

$$-2=f(t)=bu_1(t)+cu_5(t)+du_7(t)=b+0+0=b.$$

همچنین t را در بازه $5\le t<7$ انتخاب کنیم. اکنون داریم

$$t^2=f(t)=-2u_1(t)+cu_5(t)+du_7(t)=-2+c+0=c-2.$$

بنابراین $c=t^2+2$. با ادامه این روند داریم $d=-t^2$. بنابراین

$$f(t)=-2bu_1(t)+(t^2+2)u_5(t)-t^2u_7(t).$$

تمرین ۵.۵.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=[t+1]$ را برای $t>0$ حساب کنید.

حل. می‌دانیم این تابع به صورت زیر است

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t\le 1\\ 2 & 1<t\le 2\\ 3 & 2<t\le 3\\ \vdots\end{cases}.$$

حال $f(t)$ را برحسب تابع پله‌ای واحد می‌نویسیم، یعنی

$$f(t) = a_0u_0(t) + a_1u_1(t) + a_2u_2(t) + \cdots.$$

همانطور که در بخش قبل محاسبه ضرایب را آموخته‌اید، داریم

$$a_0 = a_1 = a_2 = ... = 1.$$

لذا

$$f(t) = u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \cdots.$$

و بنابراین

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u_0(t)) + \mathcal{L}(u_1(t)) + \mathcal{L}(u_2(t)) + ... =$$
$$\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + ... = \frac{1}{s}[1 + e^{-s} + e^{-2s} + ...] = \frac{1}{s}[\frac{1}{1-e^{-s}}].$$

۶.۴ تابع دلتای دیراک

تابع دلتای دیراک یک تابع بسیار مهم است که به شدت در فیزیک ظاهر می‌شود. این بخش تابع دلتای دیراک را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۴. *فرض کنیم $b \geq 0$ یک عدد حقیقی باشد. برای عدد حقیقی $\epsilon > 0$ تابع زیر را روی بازه $[0, \infty)$ ضربه یکه گوییم*

$$I_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & b \leq t \leq b+\epsilon \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تذکر ۲.۶.۴. *در تابع $I_\epsilon(t)$، همواره طول بازه در مقدار تابع برابر با یک است.*

گزاره ۳.۶.۴. *همواره داریم $I_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}(u_b(t) - u_{b+\epsilon}(t))$.*

اثبات. بدیهی است. □

گزاره ۴.۶.۴. *همواره داریم $\mathcal{L}(I_\epsilon(t)) = \frac{e^{-bs}}{\epsilon s}(1 - e^{-\epsilon s})$.*

اثبات. طبق گزاره بالا و گزاره بخش قبلی داریم

$$\mathcal{L}(I_\epsilon(t)) = \mathcal{L}(\frac{1}{\epsilon}(u_b(t) - u_{b+\epsilon}(t))) =$$
$$\frac{1}{\epsilon}[\mathcal{L}((u_b(t)) - \mathcal{L}(u_{b+\epsilon}(t)))] =$$
$$\frac{1}{\epsilon}[\frac{e^{-bs}}{s} - \frac{e^{-(b+\epsilon)s}}{s}] = \frac{e^{-bs}}{\epsilon s}(1 - e^{-\epsilon s}).$$

اثبات کامل است. □

حال تابع دلتای دیراک را تعریف می‌کنیم. دقت شود که در اینجا وارد بحث فلسفی بی نهایت که در تابع دلتای دیراک نهفته است نمی‌شویم. تابع دلتا را گاهی به این صورت مورد ملاحظه قرار می دهیم که تابعی فرضی که منحنی اش در مرکز مختصات میخی به‌طور نامحدود بلند، و به طور نامحدود باریک است، با مساحت کل برابر با یک در زیر میخ. این تابع شکل خاصی از ضربه واحد است که اولین بار توسط ریاضیدان ـ فیزیکدان انگلیسی پاول دیراک مطرح شد و به نام او نامگذاری گردید.

تعریف ۵.۶.۴. *به تابع زیر تابع دلتای دیراک گوییم و آن را با $\delta(t-b)$ نشان می‌دهیم*

$$\delta(t-b)=\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(t)=\begin{cases}0 & t\neq b\\ \infty & t=b\end{cases}\qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-b)=1$$

حال گزاره زیر را داریم.

گزاره ۶.۶.۴. *همواره داریم*

$$\mathcal{L}(\delta(t-b))=e^{-bs}.$$

در نتیجه $\mathcal{L}(\delta(t))=1$.

اثبات. دقت شود که حد می‌تواند در مواردی خاص از انتگرل رد شود. چون تعریف لاپلاس با انتگرال است، حد از لاپلاس رد می‌شود. حل طبق گزاره بالا و گزاره بخش قبلی داریم

$$\mathcal{L}(\delta(t-b))=\mathcal{L}(\lim_{a\to 0} I_a(t))=\lim_{a\to 0}(\mathcal{L}(I_a(t)))=$$
$$\lim_{a\to 0}(\frac{e^{-bs}}{as}(1-e^{-as}))=\frac{e^{-bs}}{s}(\lim_{a\to 0}(\frac{1}{a}(1-e^{-as})))=$$
$$\frac{e^{-bs}}{as}(as)=e^{-bs}.$$

برای قسمت دوم کافی است $b=0$ قرار دهیم. اثبات کامل است. □

تمرین ۷.۶.۴. *نشان دهید که* $\int_0^\infty \delta(t-b)dt=1$.

حل. داریم

$$\int_0^\infty \delta(t-b)dt=\int_0^\infty(\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(t))dt=$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}(\int_0^\infty I_\epsilon(t)dt)=\lim_{\epsilon\to 0}(\int_b^{b+\epsilon} I_\epsilon(t)dt)=$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}(\int_b^{b+\epsilon}\frac{1}{\epsilon}dt)=\lim_{\epsilon\to 0}(\frac{1}{\epsilon}(b+\epsilon-b))=1.$$

۷.۴ قضایای انتقال

اکنون آماده هستیم تا قضیه‌های انتقال را بیان کنیم. این قضایا تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس را ساده‌تر می‌کنند.

قضیه ۱.۷.۴. *(قضیه اول انتقال) فرض کنیم تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر با $F(s)$ باشد. در این صورت برای عدد حقیقی b داریم $\mathcal{L}(e^{bt}f(t)) = F(s-b)$.*

اثبات. با کمک تعریف لاپلاس داریم

$$F(s-b) = \int_0^\infty e^{-(s-b)t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}e^{bt}f(t)dt =$$
$$\int_0^\infty e^{-st}[e^{bt}f(t)]dt = \mathcal{L}(e^{bt}f(t))$$

و اثبات کامل است. □

مثال ۲.۷.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $g(t) = te^{2t}$ را حساب کنیم. قرار می‌دهیم $f(t) = t$. می‌دانیم که $F(s) = \frac{1}{s^2}$. بنابراین طبق قضیه اول انتقال، چون $b = 2$ است داریم*

$$\mathcal{L}(g(t)) = F(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2}.$$

مثال ۳.۷.۴. *می‌خواهیم معادله دیفرانسیل*

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2$$

را حل کنیم. فرض کنیم معادله جواب $y(t) = f(t)$ دارد (قضیه وجودی جواب را به یاد آورید!). حال داریم

$$0 = \mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(y'' - 4y' + 4y) = \mathcal{L}(y'') - 4\mathcal{L}(y') + 4\mathcal{L}(y) =$$
$$s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0) - 4(s\mathcal{L}(f(t) - f(0)) + 4\mathcal{L}(f(t)) =$$
$$s^2\mathcal{L}(f(t)) - 2 - 4s\mathcal{L}(f(t)) + 4\mathcal{L}(f(t)).$$

لذا $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2}{s^2-4s+4} = \frac{2}{(s-2)^2}$. اکنون اگر قرار دهیم $G(s) = \frac{2}{s^2}$ آنگاه واضح است که $g(t) = 2t$. پس طبق قضیه اول انتقال و با فرض $b = 2$ داریم

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{(s-2)^2}) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(2te^{2t})] = 2te^{2t}.$$

حال قضیه دوم انتقال را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۷.۴. *(قضیه دوم انتقال) فرض کنیم تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر با $F(s)$ باشد. در این صورت برای عدد حقیقی مثبت c داریم*

$$\mathcal{L}(u_c(t)f(t-c)) = e^{-cs}F(s) = e^{-cs}\mathcal{L}(f(t)).$$

بیشتر مواقع از صورت معادل که به شکل زیر است استفاده می‌کنیم

$$\mathcal{L}(u_c(t)f(t)) = e^{-cs}\mathcal{L}(f(t+c)).$$

اثبات. با کمک تعریف داریم

$$\mathcal{L}(u_c(t)f(t-c)) = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt.$$

با تغییر متغیر $v = t-c$ داریم

$$\mathcal{L}(u_c(t)f(t-c)) = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt =$$
$$\int_0^\infty e^{-s(v+c)}f(v)dv = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)dv = e^{-sc}F(s).$$

برای قسمت دوم از تغییر $g(t) = f(t+c)$ یا معادلا $f(t) = g(t-c)$ استفاده می‌کنیم و سپس قسمت اول کمک می‌گیریم، یعنی

$$\mathcal{L}(u_c(t)f(t)) = \mathcal{L}(u_c(t)g(t-c)) = e^{-cs}\mathcal{L}(g(t)) = e^{-cs}\mathcal{L}(f(t+c))$$

و اثبات کامل است. □

مثال ۵.۷.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $g(t) = u_2(t)t^2$ را حساب کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $f(t) = t^2$. می‌خواهیم از قضیه دوم انتقال استفاده کنیم، چون $c = 2$ است داریم*

$$\mathcal{L}(f(t+2)) = \mathcal{L}((t+2)^2) = \mathcal{L}(t^2+2t+4) = \frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s}.$$

بنابراین

$$\mathcal{L}(u_2(t)t^2) = e^{-2s}\mathcal{L}(f(t+2)) = e^{-2s}(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s}).$$

مثال ۶.۷.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $g(t) = u_\pi(t)\sin t$ را حساب کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $f(t) = \sin t$. می‌خواهیم از قضیه دوم انتقال استفاده کنیم، چون $c = \pi$ است داریم*

$$\mathcal{L}(f(t+\pi)) = \mathcal{L}(\sin(t+\pi)) = \mathcal{L}(-\sin t) = \frac{-1}{s^2+1}.$$

بنابراین

$$\mathcal{L}(u_\pi(t)\sin t) = e^{-\pi s}\mathcal{L}(\sin(t+\pi)) = \frac{-e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

مثال ۷.۷.۴. *می‌خواهیم معادله دیفرانسیل*

$$y'' + 3y' + 2y = g(t) \qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$$

را حل کنیم که در آن

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t \end{cases}.$$

ابتدا $g(t)$ *را برحسب تابع پله‌ای واحد می‌نویسیم، یعنی*

$$g(t) = u_0(t) - u_1(t).$$

حال فرض کنیم $y(t) = f(t)$ *جواب معادله بالا باشد. داریم*

$$\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \mathcal{L}(g(t))) = \mathcal{L}(y'') + 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y(t)) =$$
$$s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0) + 3(s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)) + 2\mathcal{L}(f(t)) =$$
$$s^2\mathcal{L}(f(t)) + 3(s\mathcal{L}(f(t)) + 2\mathcal{L}(f(t)).$$

لذا

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+3s+2)}.$$

بنابراین

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2+3s+2)}) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-s}}{s(s^2+3s+2)}).$$

قرار می‌دهیم $G(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$ *و داریم*

$$\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2+3s+2)}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}) =$$
$$\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}.$$

اما طبق قضیه دوم انتقال و با فرض $c = 1$ *داریم*

$$e^{-s}G(s) = \mathcal{L}(u_1(t)f(t-1)).$$

پس

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-s}}{s(s^2+3s+2)}) = u_1(t)g(t-1)$$
$$= \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{e^{-2(t-1)}}{2} & 1 < t \end{cases}$$

پس

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2+3s+2)})-\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-s}}{s(s^2+3s+2)})=$$
$$g(t)-u_1(t)g(t-1)=$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{e^{-2t}}{2} & 0<t<1\\ e^{-(t-1)}-e^{-t}-\frac{e^{-2(t-1)}}{2}+\frac{e^{-2t}}{2} & 1<t\end{cases}.$$

تمرین ۸.۷.۴. *تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\cosh(2t)\cos(2t)$ را حساب کنید.*

حل. ابتدا دقت شود که داریم

$$\cosh(2t)=\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}.$$

حال قرار می‌دهیم $f(t)=\cos(2t)$. می‌دانیم که $F(s)=\frac{s}{s^2+4}$. بنابراین طبق قضیه اول انتقال داریم

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(\frac{e^{2t}\cos(2t)+e^{-2t}\cos(2t)}{2})=$$
$$\mathcal{L}(\frac{e^{2t}\cos(2t)}{2})+\mathcal{L}(\frac{e^{-2t}\cos(2t)}{2})=\frac{1}{2}[F(s-2)+F(s+2)]=$$
$$\frac{1}{2}[\frac{s-2}{(s-2)^2+4}+\frac{s+2}{(s+2)^2+4}].$$

تمرین ۹.۷.۴. *تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)=\frac{se^{3s}}{s^2-9}$ را حساب کنید.*

حل. فرض کنیم $f(t)=\cosh(3t)$. می‌دانیم که $\mathcal{L}(\cosh(3t))=\frac{s}{s^2-9}$. طبق قضیه دوم انتقال و با فرض $c=-3$ داریم

$$\mathcal{L}(u_{-3}(t)\cosh(3(t+3)))=e^{-3s}\mathcal{L}(\cosh(3t))=\frac{se^{3s}}{s^2-9}=F(s).$$

بنابراین $f(t)=u_{-3}(t)\cosh(3(t+3))$.

تمرین ۱۰.۷.۴. *معادله دیفرانسیل*

$$y''+y=\delta(t-2),\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=0$$

را با کمک لاپلاس حل کنید.

حل. فرض کنیم معادله جواب $y(t)$ دارد (قضیه وجودی جواب را به یاد آورید!). حال داریم

$$\begin{aligned}
&e^{2s} = \mathcal{L}(\delta(t-2)) = \mathcal{L}(y''+y) = \mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \\
&s^2\mathcal{L}(y(t)) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y(t)) = \\
&s^2\mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}(y(t)).
\end{aligned}$$

لذا $\mathcal{L}(y(t)) = \frac{e^{2s}}{s^2+1}$. با فرض $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ داریم که $f(t) = \sin t$. اکنون با کمک قضیه دوم انتقال داریم

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{2s}}{s^2+1}) = u_{-2}(t)f(t+2) = u_{-2}(t)\sin(t+2).$$

۸.۴ تبدیل لاپلاس تابع متناوب

در این بخش هدف ما این است که محاسبه تبدیل لاپلاس توابع متناوب را که اتفاقا در مسائلی مهندسی و طبیعت فراوان ظاهر می‌شوند، ساده‌تر کنیم.

با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۸.۴. *گوییم تابع $f(x)$ متناوب است هرگاه عدد حقیقی ناصفر و مثبت T موجود باشد که $f(x+T) = f(x)$. کوچکترین عدد حقیقی ناصفر و مثبت T با خاصیت $f(x+T) =$ $f(x)$ را عدد اصلی تناوب گوییم.*

مثال ۲.۸.۴. *تابع $\sin x$ یک تابع متناوب است. زیرا برای هر عدد طبیعی n، داریم*

$$\sin x = \sin(2n\pi + x).$$

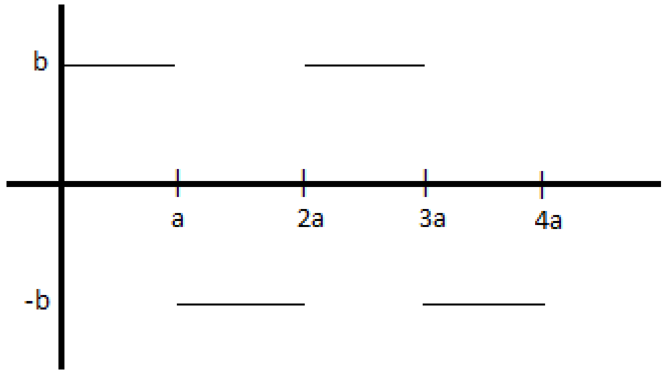
اما $T = 2\pi$ عدد اصلی تناوب است.

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۳.۸.۴. *فرض کنیم تابع $f(t)$ روی $[0,\infty)$ در شرایط قضیه وجود لاپلاس، قضیه ۲۲.۲.۴، صدق کند. اگر T عدد اصلی تناوب تابع $f(t)$ باشد آنگاه داریم*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt.$$

مثال ۴.۸.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به شکل*



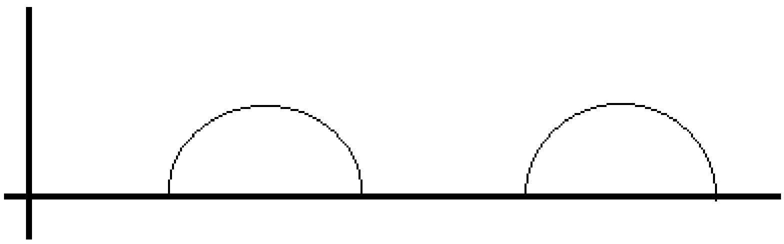
را حساب کنیم. واضح است که تابع (تابع موج مربعی) بالا یک تابع متناوب با عدد اصلی تناوب $T = 2a$ است. طبق قضیه بالا داریم

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2as}}\int_0^{2a} e^{-st}f(t)dt =$$
$$\frac{1}{1-e^{-2as}}(\int_0^a e^{-st}f(t)dt + \int_a^{2a} e^{-st}f(t)dt) =$$
$$\frac{1}{1-e^{-2as}}(\int_0^a be^{-st}dt + \int_a^{2a}(-b)e^{-st}dt) =$$
$$\frac{b}{s}\frac{1}{1-e^{-2as}}(\left[e^{-st}\right]_a^{2a} - \left[e^{-st}\right]_0^a) = \frac{b}{s}\frac{1}{1-e^{-2as}}(e^{-2as} - 2e^{-as} + 1).$$

اگر دنبال دردسر بیشتر هستید، تساوی آخر را ادامه دهید و به رابطه زیر برسید $F(s) = \frac{b}{s}\tanh(\frac{as}{2})$.

تمرین ۵.۸.۴. به وسیله یک اصلاح کننده موج، قسمت منفی موج $\sin t$ − را به صفر تبدیل کرده‌ایم (یکسو شده نیم موجی). تبدیل لاپلاس تابع جدید را حساب کنید.

حل. تابع جدید که آن را با $f(t)$ نشان می‌دهیم، به شکل



است. واضح است که تابع بالا یک تابع متناوب با عدد اصلی تناوب $T = 2\pi$ است. طبق قضیه بالا داریم

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}f(t)dt =$$
$$\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_\pi^{2\pi} e^{-st}f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_\pi^{2\pi} -e^{-st}\sin t dt =$$
$$\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{e^{-st}(s\sin t+\cos t)}{s^2+1}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\frac{e^{-2\pi s}(e^{\pi s}+1)}{s^2+1}.$$

انتگرال تساوی آخر جز به جز است.

۹.۴ مشتق گیری و انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس

در این بخش دو قضیه را بیان خواهیم کرد که محاسبه تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس را ساده می‌کنند. این دو قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱.۹.۴. *(مشتق گیری از تبدیل لاپلاس) فرض کنیم تابع $f(t)$ روی $[0,\infty)$ در شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس، قضیه ۲۲.۲.۴ ، صدق کند و دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد. در این صورت داریم*

$$(-1)^n\mathcal{L}(t^nf(t)) = \mathcal{L}((-t)^nf(t)) = F^{(n)}(s) = \frac{d^nF(s)}{ds^n}.$$

مثال ۲.۹.۴. *می‌خواهیم تبدیل لاپلاس تابع $g(t) = t^2\sin t$ را حساب کنیم. ابتدا قرار می‌دهیم $f(t) = \sin t$. می‌دانیم که $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$. حال طبق قضیه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم*

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(t^2\sin t) = \mathcal{L}((-t)^2\sin t) = F''(s) = (\frac{1}{s^2+1})'' = \frac{6s-2}{(s^2+1)^3}.$$

مثال ۳.۹.۴. *می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $G(s) = \ln\frac{s}{s-1}$ را حساب کنیم. داریم*

$$G'(s) = \frac{-1}{s(s-1)}.$$

اما طبق قضیه مشتق گیری از تبدیل باپلاس داریم $G'(s) = \mathcal{L}((-t)g(t))$. لذا داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(G'(s)) = -tg(t) \Rightarrow g(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}(G'(s)).$$

اما

$$\mathcal{L}^{-1}(G'(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{-1}{s(s-1)}) = -\int_0^t e^x dx = -(e^t-1).$$

بنابراین
$$g(t)=\frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}(G'(s))=\frac{1}{t}(e^t-1).$$
مثال ۴.۹.۴. می‌خواهیم انتگرال $\int_0^\infty te^{-2t}\sin(2t)dt$ را حساب کنیم. می‌دانیم که
$$G(s)=\mathcal{L}(t\sin(2t))=\int_0^\infty te^{-st}\sin(2t)dt.$$
حال قرار می‌دهیم $g(t)=t\sin(2t)$ و $f(t)=\sin(2t)$. می‌دانیم که $F(s)=\frac{2}{s^2+4}$. حال طبق قضیه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم
$$G(s)=\mathcal{L}(g(t))=\mathcal{L}(t\sin t)=-F'(s)=-(\frac{2}{s^2+4})'=\frac{4s}{(s^2+4)2}.$$
اما داریم
$$G(2)=\int_0^\infty te^{-2t}\sin(2t)dt=\frac{8}{(4+4)2}=\frac{1}{8}.$$
قضیه ۵.۹.۴. (انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس) فرض کنیم تابع $f(t)$ روی $[0,\infty)$ در شرایط قضیه وجود تبدیل لاپلاس، قضیه ۲۲.۲.۴، صدق کند و دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد. اگر $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه داریم $\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})=\int_s^\infty F(x)dx$.

مثال ۶.۹.۴. می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $g(t)=\frac{\cos t-\cos(2t)}{t}$ را حساب کنیم. فرض کنیم $f(t)=\cos t-\cos(2t)$ داریم $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=0$. اما $F(s)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}$. بنابراین طبق قضیه انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس داریم
$$\mathcal{L}(g(t))=\int_s^\infty F(x)dx=\int_s^\infty(\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+4})dx=$$
$$\left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}-\frac{\ln(x^2+4)}{2}\right]_s^\infty=\left[\frac{1}{2}\ln(\frac{x^2+1}{x^2+4})\right]_s^\infty=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+4}{s^2+1}).$$
مثال ۷.۹.۴. می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $G(s)=\frac{s}{(s^2-4)^2}$ را پیدا کنیم. طبق قضیه انتگرال گیری از لاپلاس داریم $\mathcal{L}(\frac{g(t)}{t})=\int_s^\infty G(x)dx$. لذا
$$\int_s^\infty G(x)dx=\int_s^\infty(\frac{x}{(x^2-4)^2})dx=\left[\frac{1}{2}\frac{-1}{x^2-4}\right]_s^\infty=\frac{1}{2(s^2-4)}.$$
در نتیجه داریم
$$\frac{g(t)}{t}=\mathcal{L}^{-1}(\int_s^\infty G(x)dx)=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2-4})=\frac{1}{4}\sinh(2t).$$
بنابراین $g(t)=\frac{t}{4}\sinh(2t)$.

تمرین ۸.۹.۴. *تبدیل لاپلاس تابع* $te^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin xdx$ *را حساب کنید.*

حل. فرض کنیم $f(t)=e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin xdx$ با تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد. طبق قضیه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}(te^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin xdx)=-\mathcal{L}(tf(t))=-F'(s).$$

پس باید $F(s)$ را محاسبه کنیم. برای این منظور فرض کنیم $g(t)=\int_0^t e^{2x}\sin xdx$ باشد. طبق قضیه اول انتقال داریم $F(s)=\mathcal{L}(e^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin xdx)=G(s+1)$. پس ابتدا باید $G(s)$ را حساب کنیم. حال فرض کنیم $h(t)=e^{2t}\sin t$ باشد. بنابراین طبق قضیه اول انتقال داریم

$$G(s)=\mathcal{L}(\int_0^t e^{2x}\sin xdx)=\frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}(\mathcal{L}(e^{2t}\sin t))=\frac{1}{s}(\frac{1}{(s-2)^2+1}).$$

بنابراین داریم

$$F'(s)=(G(s+1))'=(\frac{1}{s+1}(\frac{1}{(s-1)^2+1}))'=\frac{-s(3s-2)}{(s+1)^2(s^2-2s+2)^2}.$$

پس $\mathcal{L}(te^{-t}\int_0^t e^{2x}\sin xdx)=\frac{s(3s-2)}{(s+1)^2(s^2-2s+2)^2}$.

تمرین ۹.۹.۴. *تبدیل معکوس لاپلاس* $G(s)=\cot^{-1}(s+1)$ *را حساب کنید.*

حل. می‌خواهیم از قضیه مشتق گیری از لاپلاس استفاده کنیم. داریم $G'(s)=\frac{-1}{(s+1)^2+1}$. بنابراین

$$\mathcal{L}(tg(t))=-G'(s)\ \Rightarrow\ tg(t)=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)^2+1}).$$

لذا

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)^2+1})=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)^2+1})=e^{-t}\sin t.$$

در نتیجه $g(t)=\frac{1}{t}e^{-t}\sin t$ است.

تمرین ۱۰.۹.۴. *تبدیل معکوس لاپلاس* $G(s)=\frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$ *را پیدا کنید.*

حل. طبق قضیه انتگرال گیری از لاپلاس داریم $\mathcal{L}(\frac{g(t)}{t})=\int_s^\infty G(x)dx$. لذا

$$\int_s^\infty G(x)dx=\int_s^\infty(\frac{x+2}{(x^2+4x+5)^2})dx=\left[\frac{1}{2}\frac{-1}{x^2+4x+5}\right]_s^\infty=$$
$$\frac{1}{2(s^2+4s+5)}.$$

در نتیجه داریم

$$\frac{g(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1}(\int_s^\infty G(x)dx) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+4s+5}) =$$
$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+2)^2+1}) = \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t.$$

بنابراین $g(t) = \frac{t}{2}e^{-2t}\sin t$.

تمرین ۱۱.۹.۴. *برای دو عدد حقیقی متمایز a و b، مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ را حساب کنید.*

حل. فرض کنیم که $f(t) = e^{-at} - e^{-bt}$. می‌دانیم که $F(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$. از طرفی داریم $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = b - a$. فرض کنیم $g(t) = \frac{f(t)}{t}$. طبق قضیه انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس داریم

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \mathcal{L}(\frac{f(t)}{t}) = \int_s^\infty F(x)dx =$$
$$\int_s^\infty (\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b})dx = \left[\ln(\frac{x+a}{x+b})\right]_s^\infty = \ln(\frac{s+b}{s+a}).$$

لذا $G(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \ln(\frac{b}{a})$.

۱۰.۴ کانولوشن (ضرب پیچشی)

برای محاسبه تبدیل معکوس لاپلاس یک ابزار بسیار کارآمد به نام کانولوشن وجود دارد که در این بخش آن را آموزش می‌دهیم.
با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱۰.۴. *فرض کنیم $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع روی $[0,\infty)$ باشند. کانولوشن $f(t)$ و $g(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

برای راحتی گاهی $(f*g)(t)$ را با $f*g$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱۰.۴. *کانولوشن دو تابع $f(t) = t$ و $g(t) = e^t$ به صورت زیر است (انتگرال گیری به روش جزبه‌جز)*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_0^t xe^{t-x}dx = e^t - t - 1.$$

گزاره ۳.۱۰.۴. (خواص مقدماتی کانولوشن) برای توابع f، g و h و عدد حقیقی c همواره داریم:

(۱) $f * g = g * f$.

(۲) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

(۳) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

(۴) $f * 0 = 0 * f = 0$.

(۵) $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$.

اثبات. اثبات سر راست است (تغییر متغیر $u = t - x$ در اثبات برخی موارد کارساز است). $\square$

تذکر ۴.۱۰.۴. دقت شود که همواره برای هر عدد حقیقی x داریم $x^2 \geq 0$. اما در مورد کانولوشن اینگونه نیست، یعنی لزومی ندارد $(f * f) \geq 0$. مثلا فرض کنید $f(t) = \cos t$ باشد. در این صورت

$$(f * f)(t) = \int_0^t f(x)f(t-x)dx =$$
$$\int_0^t \cos x \cos(t-x)dx = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos t + \cos(2x - t))dx = \frac{t\cos t - \sin t}{2}.$$

حال واضح است که $(f * f)(\pi)$ مقداری منفی است. همچنین واضح است که $f * 1$ لزوما با f مساوی نیست

$$(f * 1)(t) = \int_0^t \cos(x)dx = \sin t \neq \cos t = f(t).$$

اکنون قضیه اساسی این بخش را بیان می‌کنیم و بدون اثبات می‌پذیریم (هر چند اثبات آن چیزی جز تغییر متغیر و سپس عوض کردن ترتیب انتگرال گیری دوگانه نیست).

قضیه ۵.۱۰.۴. (قضیه اساسی کانولوشن) فرض کنیم توابع f و g در قضیه وجود لاپلاس، قضیه ۲۲.۲.۴، صدق کنند و به ترتیب با تبدیل لاپلاس $F(s)$ و $G(s)$ باشند. در این صورت داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t).$$

مثال ۶.۱۰.۴. می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{1}{(s-1)(s+2)}$ را حساب کنیم. قرار می‌دهیم

$$F(s) = \frac{1}{s-1}, \quad G(s) = \frac{1}{s+2}.$$

اما واضح است که $f(t) = e^t$ و $g(t) = e^{-2t}$. حال طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t) =$$
$$\int_0^t e^x e^{-2(t-x)}dx = \frac{e^{2t} - e^{-3t}}{5}.$$

مثال ۷.۱۰.۴. *می‌خواهیم تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ را حساب کنیم. قرار می‌دهیم*

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} = G(s).$$

اما واضح است که $g(t) = f(t) = \cos t$. حال طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s^2}{(s^2+1)^2}) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f*g)(t) =$$
$$\int_0^t \cos x \cos(t-x)dx = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos t + \cos(2x-t))dx = \quad \frac{t\cos t - \sin t}{2}.$$

یکی از کاربردهای مهم لاپلاس را درادامه آموزش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱۰.۴. *در معادلاتی که تابع مجهول زیر انتگرال قرار دارد، معادلات انتگرالی گوییم. معادلات دیفرانسیل انتگرالی، آن معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز باشند.*

مثال ۹.۱۰.۴. *معادله $f(t) = t + \int_0^t f(x)\sin x dx$ یک معادله انتگرالی است.*

مثال ۱۰.۱۰.۴. *معادله $f(t) = f''(x) + \int_0^t f(x)\sin x dx$ یک معادله دیفرانسیل انتگرالی است.*

کانولوشن و لاپلاس کمک می‌کند که برخی از معادلات انتگرالی را حل کنیم. برای روشن شدن این مطلب مثال‌های زیر را دنبال کنید.

مثال ۱۱.۱۰.۴. *می‌خواهیم معادله انتگرالی $f(t) = t + \int_0^t f(x)\sin(t-x)dx$ را حل کنیم. از طرفین لاپلاس می‌گیریم. لذا داریم $F(s) = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}(\int_0^t f(x)\sin(t-x)dx)$. با کمی دقت و با فرض کردن $g(t) = \sin t$ داریم*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(x)\sin(t-x)dx.$$

اما طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم $\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f*g)(t)$. لذا

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(x)\sin(t-x)dx) = \mathcal{L}((f*g)(t)) = F(s)G(s) = F(s)\frac{1}{s^2+1}.$$

در نتیجه

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + F(s)\frac{1}{s^2+1}.$$

بنابراین $F(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$. لذا $f(t) = t + \frac{t^3}{6}$.

مثال ۱۲.۱۰.۴. *می‌خواهیم معادله دیفرانسیل*

$$y'' + y' = \cos t + \int_0^t y'(x)\sin(t-x)dx \qquad y(0) = 0 = y'(0)$$

را حل کنیم. فرض کنیم معادله جواب $y(t)$ دارد. حال با لاپلاس گیری از طرفین و با استفاده از قضیه اساسی کانولوشن، داریم

$$\begin{aligned}
s^2\mathcal{L}(y(t)) + s\mathcal{L}(y(t)) &= \frac{s}{s^2+1} + \mathcal{L}(\int_0^t y'(x)\sin(t-x)dx)\\
s^2\mathcal{L}(y(t)) + s\mathcal{L}(y(t)) &= \frac{s}{s^2+1} + \mathcal{L}(y'(t))\mathcal{L}(\sin t)\\
s^2\mathcal{L}(y(t)) + s\mathcal{L}(y(t)) &= \frac{s}{s^2+1} + (s\mathcal{L}(y(t))\frac{1}{s^2+1}\\
\mathcal{L}(y(t)) &= \frac{1}{s^3+s^2+s} = \frac{1}{s(s^2+s+1)}.
\end{aligned}$$

حال با روش‌های که از تبدیل معکوس لاپلاس آموخته‌ایم، داریم

$$\begin{aligned}
&y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2+s+1)}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s((s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}})) =\\
&\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t e^{\frac{-x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)dx.
\end{aligned}$$

انتگرال نهایی یک انتگرال گیری جزبه‌جز است که به عنوان تمرین رها می‌شود.

تمرین ۱۳.۱۰.۴. *معادله دیفرانسیل*

$$y'' + 9y = t, \;\; y(0), \;\; y'(0) = 0$$

را با روش کانولوشن حل کنید.

حل. فرض کنیم $y(t) = f(t)$ جواب معادله بالا باشد. داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(y'') + 9\mathcal{L}(y(t)) =\\
&s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0) + 9\mathcal{L}(f(t)) = (s^2+9)\mathcal{L}(f(t)).
\end{aligned}$$

لذا $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2(s^2+9)}$. حال قرار می‌دهیم $H(s) = \frac{1}{s^2+9}$ و $G(s) = \frac{1}{s^2}$. اما واضح است که $h(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$ و $g(t) = t$. حال طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2(s^2+9)}) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)G(s)) = (h*g)(t) = \int_0^t \frac{1}{3}\sin(3x)(t-x)dx.$$

لذا با انتگرال گیری جزبه‌جز داریم $y(t) = f(t) = \frac{1}{9}(t - \frac{1}{3}\sin(3t))$.

تمرین ۱۴.۱۰.۴. *معادله دیفرانسیل*

$$y' + 2y + \int_0^t y(x)dx = 0 \qquad\qquad y(0) = 1$$

را حل کنید.

حل. فرض کنیم معادله جواب $y(t)$ دارد. حال با لاپلاس گیری از طرفین و با استفاده از قضیه اساسی کانولوشن، داریم

$$\begin{aligned}
&s\mathcal{L}(y(t)) - 1 + 2\mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}(\int_0^t y(x)dx) = 0\\
&s\mathcal{L}(y(t)) - 1 + 2\mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}(y(t))\mathcal{L}(1) = 0\\
&s\mathcal{L}(y(t)) - 1 + 2\mathcal{L}(y(t)) + \mathcal{L}(y(t))\frac{1}{s} = 0\\
&\mathcal{L}(y(t)) = \frac{s}{(s+1)^2}.
\end{aligned}$$

حال با روش‌های که از تبدیل معکوس لاپلاس آموخته‌ایم، داریم

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s+1)^2}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}) = e^{-t} - e^{-t}t.$$

جدول تبدیلات لاپلاس توابع پرکاربرد

این جدول خلاصه از این فصل را در اختیار شما قرار می‌دهد.

	$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$		$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p,\ p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2-a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2+3a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

۱۱.۴ تمرین‌های کل فصل

تمرین ۱.۱۱.۴. مقدار $\int_0^1 x(\ln x)^3 dx$ را حساب کنید (اگر دوست ندارید سه با جز به جز بکار ببرید با تغییر متغیر مناسب به تابع گاما برسید!).

تمرین ۲.۱۱.۴. انتگرال $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ را با کمک لاپلاس حساب کنید.

تمرین ۳.۱۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 4e^{3t} - 2e^{-t} + \cos(2t)$ را حساب کنید.

تمرین ۴.۱۱.۴. تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+4)}$ را به دست آورید.

تمرین ۵.۱۱.۴. تبدیل لاپلاس $f(t) = t\sin(2t)$ را حساب کنید.

تمرین ۶.۱۱.۴. معادله دیفرانسیل

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 7$$

را با لاپلاس حل کنید.

تمرین ۷.۱۱.۴. تبدیل معکوس $G(s) = \frac{2}{s(s^2+4)}$ را حساب کنید.

تمرین ۸.۱۱.۴. تبدیل معکوس لاپلاس $G(s) = \frac{s-1}{s^2(s+1)}$ را پیدا کنید.

تمرین ۹.۱۱.۴. تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \le t < 2 \\ -2 & 2 \le t < 5 \\ 0 & 5 \le t \end{cases}$$

را با کمک تابع پله‌ای واحد حساب کنید.

تمرین ۱۰.۱۱.۴. برای تابع پیوسته $h(t)$ در فاصله $[0, \infty)$ نشان دهید که

$$\int_0^\infty \delta(t-b)h(t)dt = h(b).$$

مثال ۱۱.۱۱.۴. تبدیل لاپلاس $g(t) = e^{-t}(\sin(2t) + e^t)$ را با کمک قضیه اول انتقال حساب کنید.

تمرین ۱۲.۱۱.۴. تبدیل معکوس لاپلاس $F(s) = \frac{s-1}{s(s+1)^2}$ را حساب کنید.

تمرین ۱۳.۱۱.۴. برای مقادیر حقیقی ثابت c و d که $c > 0$ نشان دهید که

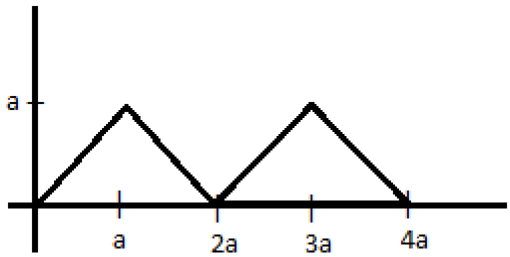
$$\mathcal{L}^{-1}(F(cs+d)) = \frac{1}{c}e^{\frac{-dt}{c}}f(\frac{t}{c}).$$

تمرین ۱۴.۱۱.۴. *معادله دیفرانسیل*

$$y'' - 4y' + 4y = 8e^{-3t} \qquad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$$

را حل کنید.

تمرین ۱۵.۱۱.۴. *تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به شکل*



را حساب کنید.

تمرین ۱۶.۱۱.۴. *انتگرال زیر را حساب کنید* $\int_0^\infty e^{3t} t \sinh(2t)dt$ *را حساب کنید.*

تمرین ۱۷.۱۱.۴. *تبدیل لاپلاس* $g(t) = \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}$ *را حساب کنید.*

تمرین ۱۸.۱۱.۴. *تبدیل معکوس لاپلاس* $G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+4s+5)^2}$ *را به روش کانولوشن پیدا کنید (محاسبه انتگرال نهایی لازم نیست).*

تمرین ۱۹.۱۱.۴. *تبدیل لاپلاس* $h(t) = \int_0^t (t-x)^2 \cos x dx$ *را پیدا کنید.*

۱۲.۴ نمونه سوالات امتحانی تشریحی

سوال ۱.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) تبدیل معکوس لاپلاس‌های زیر را حساب کنید.*
(الف) $\frac{s}{(1+s^2)(1+s)^2}$.
(ب) $\frac{se^{\frac{-\pi}{2}s}}{(1+s^2)(1+s)^2}$.

پاسخ. (الف) با کمک تفکیک کسر

$$\frac{s}{(1+s^2)(1+s)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(1+s)^2}$$

داریم $A = C = 0$ و $B = -D = \frac{1}{2}$. اکنون از قضیه اول انتقال داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(1+s^2)(1+s)^2}) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(1+s)^2}) =$$
$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+1}) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(1+s)^2})\right] = \frac{1}{2}\left[\sin t - e^{-t}t\right] = f(t).$$

(ب) فرض کنیم $F(s)=\frac{s}{(1+s^2)(1+s)^2}$ و در نتیجه طبق (الف)، $f(t)=\frac{1}{2}\left[\sin t-e^{-t}t\right]$. حال طبق قضیه دوم انتقال می‌دانیم که

$$\frac{se^{\frac{-\pi}{2}s}}{(1+s^2)(1+s)^2}=e^{\frac{-\pi}{2}s}F(s)=\mathcal{L}(u_{\frac{\pi}{2}}(t)f(t-\frac{\pi}{2})).$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{se^{\frac{-\pi}{2}s}}{(1+s^2)(1+s)^2})=u_{\frac{\pi}{2}}(t)f(t-\frac{\pi}{2})=$$
$$\frac{1}{2}u_{\frac{\pi}{2}}(t)\left[\sin(t-\frac{\pi}{2})-e^{-(t-\frac{\pi}{2})}(t-\frac{\pi}{2})\right].$$

سوال ۲.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی امیر کبیر با کمی تغییر) لاپلاس معکوس* $\frac{s}{s^2+1}\cot^{-1}(s+1)$ *را به روش کانولوشن پیدا کنید (محاسبه انتگرال نهایی لازم نیست).*

پاسخ. قرار می‌دهیم $F(s)=\frac{s}{s^2+1}$ و $G(s)=\cot^{-1}(s+1)$. واضح است که $f(t)=\cos t$. اما محاسبه $g(t)$ کمی دردسر دارد! می‌خواهیم از قضیه مشتق گیری از لاپلاس استفاده کنیم. داریم $G'(s)=\frac{-1}{(s+1)^2+1}$. بنابراین

$$\mathcal{L}(tg(t))=-G'(s)\ \Rightarrow\ tg(t)=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)^2+1}).$$

لذا

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)^2+1})=\mathcal{L}^1(\frac{1}{(s+1)^2+1})=e^{-t}\sin t.$$

در نتیجه $g(t)=\frac{1}{t}e^{-t}\sin t$ است. حال طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+1}\cot^{-1}(s+1))=\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))=(f*g)(t)=(g*f)(t)$$
$$\int_0^t\frac{1}{x}e^{-x}\sin x\cos(t-x).$$

سوال ۳.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) معادله دیفرانسیل زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید*

$$y''+2y'+2y=u_1(t),\ \ y'(0)=0=y(0).$$

پاسخ. داریم

$$\frac{e^{-s}}{s}=\mathcal{L}(u_1(t))=\mathcal{L}(y''+2y'+2y)=\mathcal{L}(y'')+2\mathcal{L}(y')+2\mathcal{L}(y)=$$
$$s^2\mathcal{L}(y(t))-sy(0)-y'(0)+2(s\mathcal{L}(y(t)-y(0))+2\mathcal{L}(y(t))=$$
$$s^2\mathcal{L}(y(t))+2s\mathcal{L}(y(t))+2\mathcal{L}(y(t)).$$

لذا $\mathcal{L}(y(t)) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+2)}$. حال فرض کنیم $F(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)}$. در نتیجه با کمک تبدیل لاپلاس انتگرال و سپس قضیه اول انتقال داریم

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \mathcal{L}(\frac{1}{s((s+1)^2+1)}) = \mathcal{L}(\int_0^t e^{-x}\sin x dx) =$$
$$\mathcal{L}(\frac{1}{2} - \frac{e^{-t}(\cos t + \sin t)}{2}).$$

بنابراین $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-t}(\cos t+\sin t)}{2}$. اکنون با کمک قضیه دوم انتقال داریم

$$\mathcal{L}(u_1(t)f(t-1)) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+2)}.$$

لذا

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+2)}) = (u_1(t)f(t-1) =$$
$$u_1(t)(\frac{1}{2} - \frac{e^{-(t-1)}(\cos(t-1)+\sin(t-1))}{2}).$$

سوال ۴.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی امیر کبیر) تبدیل معکوس* $F(s) = \frac{1}{s}\tan^{-1}(\frac{1}{s})$ *را پیدا کنید (انتگرال گیری نهایی لازم نیست).*

پاسخ. فرض کنیم $G(s) = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$. ابتدا $g(t)$ را با کمک مشتق گیری از تبدیل لاپلاس حساب می‌کنیم. داریم $G'(s) = \frac{-1}{s^2+1}$. از قضیه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس $G'(s) = \mathcal{L}(-tg(t))$ و لذا داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(G'(s)) = -tg(t) \ \Rightarrow\ g(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}(G'(s)).$$

اما

$$\mathcal{L}^{-1}(G'(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{-1}{s^2+1}) = -\sin t.$$

بنابراین $g(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}(G'(s)) = \frac{\sin t}{t}$. حال طبق قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال داریم $F(s) = \frac{1}{s}G(s) = \mathcal{L}(\int_0^t g(x)dx)$. لذا

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \int_0^t g(x)dx = \int_0^t \frac{\sin x}{x}dx.$$

سوال ۵.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) تبدیل لاپلاس* $f(t) = \int_0^t \sin^3 x dx$ *را حساب کنید.*

پاسخ. فرض کنیم $g(t)=\sin^3 t$. طبق قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال داریم

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(\int_0^t \sin^3 x dx)=\frac{1}{s}G(s).$$

اما می‌دانیم $\sin(3t)=3\sin t-4\sin^3 t$. بنابراین $g(t)=\frac{3\sin t-\sin(3t)}{4}$. لذا

$$G(s)=\mathcal{L}(\frac{3\sin t-\sin(3t)}{4})=\frac{1}{4}(\mathcal{L}(3\sin t)-\mathcal{L}(\sin(3t))=$$
$$\frac{1}{4}(\frac{3}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+9}).$$

پس

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{s}G(s)=\frac{1}{s}(\frac{1}{4}(\frac{3}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+9})).$$

سوال ۶.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی امیرکبیر) تبدیل لاپلاس* $f(t)=t^2e^{3t}\int_0^t \frac{e^{2x}-e^{4x}}{t}dt$ *را حساب کنید.*

پاسخ. یک سوال تقریبا کامل! ابتدا فرض کنیم

$$g(t)=e^{2x}-e^{4x},\ \ h(t)=\frac{e^{2x}-e^{4x}}{t}.$$

داریم $\lim_{x\to 0^+}\frac{g(t)}{t}=-2$. اما $G(s)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-4}$. بنابراین طبق قضیه انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس داریم

$$H(s)=\mathcal{L}(h(t))=\int_s^\infty G(x)dx=\int_s^\infty(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4})dx=$$
$$[\ln(x-2)-\ln(x-4)]_s^\infty=\left[\ln(\frac{x-2}{x-4})\right]_s^\infty=\ln(\frac{s-4}{s-2}).$$

اما طبق تبدیل لاپلاس انتگرال داریم

$$K(s)=\mathcal{L}(\int_0^t \frac{e^{2x}-e^{4x}}{t}dt)=\mathcal{L}(\int_0^t h(t)dt)=\frac{1}{s}H(s).$$

طبق قضیه اول انتقال داریم

$$T(s)=\mathcal{L}(e^{3t}\int_0^t \frac{e^{2x}-e^{4x}}{t}dt)=K(s-3).$$

اکنون طبق قضیه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(t^2e^{3t}\int_0^t \frac{e^{2x}-e^{4x}}{t}dt)=T''(s).$$

لذا

$$T''(s)=(K(s-3))''=(\frac{s-7}{(s-3)(s-5)})''=-\frac{s^2-14s+41}{(s-3)^2(s-5)^2}.$$

سوال ۷.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) فرض کنید $f(x)$ دارای تبدیل لاپلاس $F(s)$ باشد. در این صورت تبدیل لاپلاس $g(x)=xe^{ax}f(x)$ را بر حسب $F(s)$ به دست آورید.*

پاسخ. فرض کنیم $h(x)=e^{ax}f(x)$ باشد. طبق قضیه اول انتقال داریم

$$H(s)=\mathcal{L}(h(x))=\mathcal{L}(e^{ax}f(x))=F(s-a).$$

حال طبق قضیه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}(g(x))=\mathcal{L}(xh(x))=-H'(s)=-(F(s-a))'=-F'(s-a).$$

سوال ۸.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی امیرکبیر) تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{1}{s^2+2s+1}\ln\frac{s^2+4}{s^2}$ را حساب کنید*

پاسخ. از قضیه اساسی کانولوشن استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$F(s)=\frac{1}{s^2+2s+1},\ \ G(s)=\ln\frac{s^2+4}{s^2}.$$

اما واضح است که داریم $F(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}$ و بنابراین با کمک قضیه اول انتقال $f(t)=e^{-t}\sin t$. اما برای محاسبه $g(t)$ کمی دردسر داریم! داریم $G'(s)=\frac{-8}{s^3+4s}$. اما طبق قضیه مشتق گیری از تبدیل باپلاس داریم $G'(s)=\mathcal{L}(-tg(t))$. لذا داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(G'(s))=-tg(t)\ \Rightarrow\ g(t)=\frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}(G'(s)).$$

اما

$$\mathcal{L}^{-1}(G'(s))=\mathcal{L}^{-1}(\frac{-8}{s^3+4s})=-8\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2+4)})=$$
$$-4\int_0^t\sin(2x)dx=2\cos(2t).$$

بنابراین

$$g(t)=\frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}(G'(s))=\frac{-2}{t}\cos(2t).$$

حال طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+2s+1}\ln\frac{s^2+4}{s^2})=\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))=(f*g)(t)=$$
$$\int_0^t e^{-x}\sin x\frac{-2}{t-x}\cos(2(t-x))dx.$$

معمولا در سوالات کانولوشن انتگرال گیری نهایی مد نظر نیست!

سوال ۹.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی اصفهان با کمی تغییر) فرض کنیم $f(x)$ یک تابع با عدد اصلی تناوب $\sqrt{3}$ باشد و برای $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ داریم $f(x) = [x^2]$. تبدیل لاپلاس $f(x)$ را حساب کنید.*

پاسخ. طبق قضیه تبدیل لاپلاس تابع متناوب داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f(x)) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-sx} f(x)dx = \\
&\frac{1}{1-e^{-\sqrt{3}s}}\left[\int_0^1 e^{-sx}[x^2]dx + \int_1^{\sqrt{2}} e^{-sx}[x^2]dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} e^{-sx}[x^2]dx\right] = \\
&\frac{1}{1-e^{-\sqrt{3}s}}\left[0 + \int_1^{\sqrt{2}} e^{-sx}dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2e^{-sx}dx\right] = \\
&\frac{1}{1-e^{-\sqrt{3}s}}\left[\frac{e^{-s}+e^{-\sqrt{2}s}-2e^{-\sqrt{3}s}}{s}\right].
\end{aligned}$$

سوال ۱۰.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی امیرکبیر) معادله زیر را حل کنید*

$$xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0, \ \ y(0) = 0.$$

پاسخ. یک سوال امتحانی جالب! معادله به شکل زیر است

$$xy'' + 3xy' - y' - 4xy - 9y = 0.$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$0 = \mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(xy'') + 3\mathcal{L}(xy') - \mathcal{L}(y') - 4\mathcal{L}(xy(x)) - 9\mathcal{L}(y(x)).$$

حال باید تک به تک لاپلاس‌ها را حساب کنیم. برای راحتی فرض کنیم $Y = Y(s) = \mathcal{L}(y(x))$. واضح است که طبق تبدیل لاپلاس مشتق داریم $\mathcal{L}(y') = sY - y(0) = sY$. اما طبق مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}(xy(x)) = -[\mathcal{L}(y(x))]' = -Y'.$$

همچنین طبق مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم $\mathcal{L}(xy'') = -(\mathcal{L}(y''))'$. پس طبق تبدیل لاپلاس مشتق داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(xy'') = -(\mathcal{L}(y''))' = -(s^2Y - sy(0) - y'(0))' = \\
&-(s^2Y - y'(0))' = -2sY - s^2Y'.
\end{aligned}$$

همچنین طبق مشتق گیری از تبدیل لاپلاس داریم $\mathcal{L}(xy') = -(\mathcal{L}(y'))'$. پس طبق تبدیل لاپلاس مشتق داریم

$$\mathcal{L}(xy') = -(\mathcal{L}(y'))' = -(sY - y(0))' = -(sY)' = -Y - sY'.$$

اکنون موارد بالا را جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}(xy'') + 3\mathcal{L}(xy') - \mathcal{L}(y') - 4\mathcal{L}(xy(x)) - 9\mathcal{L}(y(x)) \\
0 &= -2sY - s^2Y' - 3Y - 3sY' - sY + 4Y' + 9Y \\
Y' &= \frac{-3s-12}{s^2+3s-4}Y = \frac{-3}{s-1}Y.
\end{aligned}$$

یعنی داریم $\frac{dY}{Y} = \frac{-3}{s-1}ds$. یک معادله مرتبه اول جدایی پذیر! لذا

$$\ln Y = -3\ln(s-1) + \ln c = \ln(c(s-1)^{-3}).$$

در نتیجه $Y = Y(s) = \frac{c}{(s-1)^3}$. بنابراین با کمک قضیه اول انتقال داریم

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{c}{(s-1)^3}) = c\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s-1)^3}) = ce^x x^2.$$

سوال ۱۱.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) معادله انتگرالی زیر را حل کنید*

$$e^x y(x) = xe^{-x} + \int_0^x y(u)e^u \cos(x-u)du.$$

پاسخ. یک سوال خوب امتحانی! از طرفین لاپلاس می‌گیریم. برای راحتی فرض کنیم $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))$. لذا از قضیه اول انتقال داریم

$$Y(s-1) = \frac{1}{(s+1)^2} + \mathcal{L}(\int_0^x y(u)e^u \cos(x-u)du).$$

با کمی دقت و با فرض کردن $f(x) = e^x y(x)$ و $g(t) = \cos x$ داریم

$$(f*g)(t) = \int_0^x y(u)e^u \cos(x-u)du.$$

اما طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم $\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f*g)(t)$ که در آن

$$F(s) = Y(s-1), \ \ G(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

لذا

$$F(s)G(s) = Y(s-1)\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}((f*g)(t)) = \mathcal{L}(\int_0^x y(u)e^u \cos(x-u)du).$$

در نتیجه

$$Y(s-1) = \frac{1}{(s+1)^2} + Y(s-1)\frac{s}{s^2+1}.$$

بنابراین $Y(s-1)=\frac{s^2+1}{(s+1)^2(s^2-s+1)}$. لذا

$$Y(s)=\frac{(s+1)^2+1}{(s+1+1)^2((s+1)^2-(s+1)+1)}=\frac{s^2+2s+2}{(s+2)^2(s^2+s+1)}.$$

حال داریم

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}(\frac{s^2+2s+2}{(s+2)^2(s^2+s+1)})=\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{3(s^2+s+1)}+\frac{2}{3(s+2)^2})=$$
$$\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+s+1})+\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+2)^2})=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}})$$
$$+\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+2)^2})=\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{2}{3}e^{-x}x.$$

سوال ۱۲.۱۲.۴. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) معادله زیر را حل کنید*

$$y''+y=u_{\frac{\pi}{2}}(x)\delta(x-\frac{\pi}{2})+\int_0^x u_{\frac{\pi}{2}}(x-u)\cos u du,\quad y(0)=y'(0)=0.$$

پاسخ. از طرفین لاپلاس می‌گیریم. اما برای راحتی کار ابتدا لاپلاس‌های طرف دوم را مجزا حساب می‌کنیم. طبق قضیه دوم انتقال داریم

$$\mathcal{L}(u_{\frac{\pi}{2}}(x)\delta(x-\frac{\pi}{2}))=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}(\delta(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}))=e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}(\delta(x))=e^{-\frac{\pi}{2}s}.$$

از قضیه اساسی کانولوشن استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $f(x)=\cos x$ و $g(x)=u_{\frac{\pi}{2}}(x)$. پس

$$\mathcal{L}(f*g(x))=\mathcal{L}(\int_0^x u_{\frac{\pi}{2}}(x-u)\cos u du)=$$
$$\mathcal{L}(\cos x)\mathcal{L}(u_{\frac{\pi}{2}}(x))=\frac{s}{s^2+1}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}.$$

حال سوال را پاسخ می‌دهیم. برای راحتی قرار می‌دهیم $\mathcal{L}(y(x))=Y(s)=Y$. با کمک قضیه تبدیل لاپلاس مشتق داریم

$$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(u_{\frac{\pi}{2}}(x)\delta(x-\frac{\pi}{2}))+\mathcal{L}(\int_0^x u_{\frac{\pi}{2}}(x-u)\cos u du)$$
$$s^2Y+Y=e^{-\frac{\pi}{2}s}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\ \Rightarrow\ Y=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2+1)^2}$$

اکنون باید تبدیل معکوس لاپلاس را به دست آوریم. طبق قضیه دوم انتقال داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1})=u_{\frac{\pi}{2}}(x)\sin(x-\frac{\pi}{2}).$$

برای تبدیل لاپلاس معکوس دوم کمی دردسر داریم! قرار می‌دهیم

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}, \;\; G(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}.$$

اما واضح است که $f(x) = \sin x$ و طبق بالا $g(x) = u_{\frac{\pi}{2}}(x)\sin(x-\frac{\pi}{2})$. حال طبق قضیه اساسی کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{(s^2+1)^2}) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f*g)(x) =$$
$$\int_0^x \sin v u_{\frac{\pi}{2}}(x-v)\sin(x-v-\frac{\pi}{2})dv = h(x).$$

انتگرال گیری کانولوشن معمولا لازم نیست. در نتیجه داریم $y(x) = u_{\frac{\pi}{2}}(x)\sin(x-\frac{\pi}{2})+h(x)$.

۱۳.۴ نمونه سوالات تستی

۱. (آزاد هوا و فضا ۸۰) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع $\frac{a(s+1)}{s^2+4}$ تبدیل لاپلاس برای $2\sin(2t)+4\cos(2t)$ باشد.

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۲. (سراسری ریاضی ۷۸) اگر $\mathcal{L}(\sin\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{-1}{4P}}}{2P^{\frac{3}{2}}}$ آنگاه $\mathcal{L}(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}})$ کدام است.

(۱) $\frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{-P}{4}}}{P^{\frac{1}{2}}}$ (۲) $\frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{-1}{4P}}}{P^{\frac{1}{2}}}$

(۳) $\frac{-3\sqrt{\pi}e^{\frac{-1}{4P}}}{2P^{\frac{5}{2}}} + \frac{e^{\frac{-1}{4P}}}{4P^{\frac{1}{3}}}$ (۴) $\frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{-1}{4P}}}{2P^{\frac{1}{2}}}$

۳. (سراسری مکانیک ۷۲) تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل $ty''+2y'+ty=0$ کدام است.

(۱) $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ (۲) $c-y(0)\tan^{-1}s$

(۳) $\frac{-y(0)}{1+s^2}$ (۴) $y(0)(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}s)$

۴. (سراسری ریاضی ۸۵) تبدیل لاپلاس $t-t\cos t$ کدام است.

(۱) $\frac{1-3s^2}{s+s^3}$ (۲) $-\frac{1+3s^2}{(s+s^3)^2}$

(۳) $\frac{1+3s^2}{(s+s^3)^2}$ (۴) $\frac{1+3s^2}{s+s^3}$

۵. (سراسری مکانیک ۷۶) اگر تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر با $\ln\frac{s}{s-1}$ باشد، $f(t)$ کدام است.

(۱) $\frac{e^{-t}-1}{t}$ (۲) $\frac{e^{-t}-t-1}{t}$

(۳) $\frac{e^{t}-1}{t}$ (۴) $\frac{e^{t}+t-1}{t}$

۶. (سراسری معماری کشتی ۷۹) تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{1}{(s-2)^{\frac{1}{2}}}$ برابر است با

(۱) $\frac{t^{\frac{-1}{2}}e^{t}}{\sqrt{\pi}}$ (۲) $\frac{t^{\frac{-1}{2}}e^{2t}}{\sqrt{\pi}}$

(۳) $\frac{t^{\frac{-1}{2}}e^{-2t}}{\sqrt{\pi}}$ (۴) $\frac{t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}}{\sqrt{\pi}}$

۷. (سراسری ریاضی ۸۴) تبدیل لاپلاس $te^{-3t}\cos(3t)$ کدام است.

(۱) $\frac{s^2+5s+7}{(s^2+6s+18)^2}$ (۲) $\frac{s^2+6s}{(s^2+6s+18)^2}$

(۳) $\frac{s^2-5s}{s^2+6s+18)}$ (۴) $\frac{s^2-6s}{s^2+6s-18}$

۸. (سراسری مکانیک ۷۰) اگر $F(s)=\frac{e^{-\pi s}}{(1+s)^2+1}$، $f(t)$ برابر است با

(۱) $u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$ (۲) $u_\pi(t)e^{(t-\pi)}\sin(t-\pi)$

(۳) $u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$ (۴) $u_\pi(t)e^{(t-\pi)}\sin(t)$

۹. (سراسری ریاضی ۸۷) تبدیل لاپلاس تابع $(a>0)$ $f(t)=|\sin(at)|$ کدام است.

(۱) $\frac{a}{s^2+a^2}\coth(\frac{\pi s}{a})$ (۲) $\frac{a}{s^2+a^2}\tanh(\frac{\pi s}{2a})$

(۳) $\frac{a}{s^2+a^2}\coth(\frac{\pi s}{2a})$ (۴) $\frac{a}{s^2+a^2}\tanh(\frac{\pi s}{a})$

۱۰. (سراسری هوا و فضا ۸۱) تبدیل لاپلاس $f(t)=e^{-t}\int_0^t xe^x dx$ برابر است با

(۱) $\frac{1}{s^2(s-1)^2}$ (۲) $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$

(۳) $\frac{1}{s^2(s+1)}$ (۴) $\frac{1}{s(s-1)^2}$

۱۱. (سراسری برق ۸۶) جواب معادله انتگرالی $y(t)+\int_0^t y(\tau)y(t-\tau)d\tau=\sin t$ کدام است.

(۱) $t+\sin t$ (۲) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3})-\frac{t}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}\sin(\sqrt{3})+\frac{t}{3}$ (۴) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3})+\frac{t}{3}$

۱۲. (سراسری هسته‌ای ۸۶) جواب معادله دیفرانسیل $x''+3x=2\delta(t)$ با شرایط اولیه $x'(0)=0$ $x(0)=0$ کدام است.

(۱) $2\sin\sqrt{3}t$ (۲) $\frac{2}{3}\sin 3t$

(۳) $\frac{2}{3}\sin\sqrt{3}t$ (۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$

۱۳. (سراسری هوا و فضا ۸۱) مقدار انتگرال $\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt$ برابر است با

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۱۴. (سراسری مکانیک ۸۱) مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{-\ln u}}$ برابر است با

(۱) $\sqrt{\pi}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (۴) $2\sqrt{\pi}$

فصل ۵

آشنایی با دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این فصل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را معرفی می‌کنیم. دستگاه معادلات معمولا از چند معادله دیفرانسیل معمولی تشکیل شده است. اما همه انواع دستگاه معادلات را بررسی نمی‌کنیم و خود را به دستگاه معادلات خطی مرتبه اول محدود می‌کنیم. البته تمرکز اصلی ما روی دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت است. با بخش مقدماتی زیر کار را آغاز می‌کنیم.

۱.۵ مقدمه‌ای بر جبر خطی

در این بخش کمی نیاز به مطالعه ماتریس‌ها و جبر خطی داریم. اندازه نیاز خودمان برای حل دستگاه‌ها مطالب جبر خطی را خواهیم آورد. فرض ما بر این است که دانشجو با مفاهیم زیر آشنا است: تعریف ماتریس- ماتریس صفر- ماتریس همانی- تساوی ماتریس‌ها- جمع ماتریس‌ها- تفاضل ماتریس‌ها- ضرب ماتریس‌ها- ضرب عدد در ماتریس- ماتریس ترانهاده- ماتریس الحاقی- دترمینان ماتریس- ماتریس معکوس- روش محاسبه ماتریس معکوس- ماتریس افزوده- روش گوس و جردن برای سطری پلکانی کردن ماتریس.

حال با تعریف زیر کار را شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۵. *به مجموعه‌ای از n معادله با n مجهول، یعنی*

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

یک دستگاه معادلات خطی عددی (جبری) گوییم. گاهی برای راحتی این دستگاه را به صورت $AX = B$ نمایش می‌دهیم که $A = (a_{ij})$ ماتریس ضرایب، $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ ماتریس مجهولات و $B = (b_1, \dots, b_n)^t$ ماتریس شرط است. اگر $B = O$ باشد به دستگاه همگن و در غیر این صورت دستگاه را غیر همگن گوییم.

حال قضیه‌های زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۲.۱.۵. *برای دستگاه $AX = B$ موارد زیر برقرار است.*
(۱) اگر A معکوس پذیر باشد یعنی دترمینان ناصفر داشته باشد آنگاه دستگاه فقط جواب $X = A^{-1}B$ دارد. به ویژه اگر $B = O$ باشد آنگاه دستگاه فقط جواب بدیهی صفر دارد.
(۲) اگر A معکوس پذیر نباشد یعنی دترمینان آن صفر باشد آنگاه دستگاه یا جواب ندارد یا بیشمار جواب دارد.
(۳) اگر A معکوس پذیر نباشد یعنی دترمینان آن صفر باشد آنگاه دستگاه همگن $AX = O$ علاوه بر جواب بدیهی بیشمار جواب دارد.
(۴) فرض کنیم ماتریس الحاقی A برابر A^* باشد. اگر A معکوس پذیر نباشد یعنی دترمینان آن صفر باشد آنگاه دستگاه غیر همگن $AX = B$ دارای بیشمار جواب است به شرطی که برای هر $W = (w_1, ..., w_n)^t$ که در $A^*W = 0$ صدق می‌کند، داشته باشیم

$$b_1w_1 + b_2w_2 + ... + b_nw_n = 0.$$

قضیه زیر به روش کرامر معروف است.

قضیه ۳.۱.۵. *(روش کرامر) فرض کنیم دستگاه $AX = B$ جواب منحصر به فرد دارد. قرار می‌دهیم $x_i = \frac{detA_i}{detA}$ که در آن A_i ماتریس حاصل از جایگذاری بردار ستونی B در ستون iام A است. در این صورت $X = (x_1, ..., x_n)^t$ همان جواب منحصر به فرد دستگاه است.*

در فصل سوم با استقلال خطی توابع آشنا شدید. اما استقلال خطی مفهومی کلی تر است. در ادامه کمی در مورد فضای برداری و استقلال خطی در حد آشنایی خواهیم گفت.

تعریف ۴.۱.۵. *فرض کنیم V یک مجموعه ناتهی باشد. همچنین فرض کنیم دو تابع به صورت زیر در اختیار داشته باشیم*

$$\alpha : V \times V \longrightarrow V \qquad \beta : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

منظور از فضای برداری روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یعنی یک سه‌تایی (V, α, β) که در خواص زیر صدق کند.
(۱) عضوی مانند $o \in V$ باشد که برای هر $v \in V$ داشته باشیم $\alpha(o, v) = \alpha(v, o)$.
(۲) برای هر $v \in V$، $u \in V$ موجود باشد که داشته باشیم $\alpha(u, v) = \alpha(v, u) = o$.
(۳) برای هر $u, v \in V$ داشته باشیم $\alpha(u, v) = \alpha(v, u)$.
(۴) برای هر $u, v, w \in V$ داشته باشیم $\alpha(u, \alpha(v, w)) = \alpha(\alpha(u, v), w)$.
(۵) برای هر $v \in V$ داشته باشیم $\beta(1, v) = v$.
(۶) برای هر $v \in V$ و هر $a, b \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\beta(ab, v) = \beta(a, \beta(b, v))$.
(۷) برای هر $v \in V$ و هر $a, b \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\beta(a + b, v) = \beta(a, v) + \beta(b, v)$.
(۸) برای هر $u.v \in V$ و هر $a \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\beta(a, \alpha(u, v)) = \beta(a, u) + \beta(a, v)$.
به اعضای یک فضای برداری معمولا بردار گوییم. به عضوی که در خاصیت (۱) صدق می‌کند عضو خنثی جمعی گوییم. همچنین به α تابع جمع و به β تابع ضرب در اسکالر (عدد) گوییم.

مثال ۵.۱.۵. *فرض کنیم $V = \mathbb{R}$ باشد و تابع α همان جمع معمولی اعداد حقیقی که از دبستان آن*

را آموخته‌اید $(+)$ و β هم همان ضرب معمولی باشد که از دبستان یاد گرفته‌اید $(.)$. در این صورت سه‌تایی $(\mathbb{R}, +, .)$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. زیرا در خواص زیر صدق می‌کند:

(۱) برای هر $a \in \mathbb{R}$ داریم $a + 0 = 0 + a = a$.

(۲) برای هر $a \in \mathbb{R}$ عدد حقیقی $-a$ وجود دارد که $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

(۳) برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم $a + b = b + a$.

(۴) برای هر سه عدد حقیقی a، b و c داریم $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(۵) برای هر عدد حقیقی a داریم $1.a = a$.

(۶) برای هر سه عدد حقیقی a، b و c داریم $(ab)c = a(bc)$.

(۷) برای هر سه عدد حقیقی a، b و c داریم $(a + b)c = ac + bc$.

(۸) برای هر سه عدد حقیقی a، b و c داریم $a(b + c) = ab + ac$.

مثال ۶.۱.۵. فرض کنیم V برابر با مجموعه ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های اعداد حقیقی باشد و تابع α همان جمع معمولی ماتریس‌ها که از دبیرستان آن را آموخته‌اید $(+)$ و β هم همان ضرب معمولی عدد حقیقی در ماتریس باشد که از دبیرستان یاد گرفته‌اید $(.)$. در این صورت سه‌تایی $(V, +, .)$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. زیرا در خواص زیر صدق می‌کند:

(۱) برای هر ماتریس A داریم $A + O = O + A = A$ که O ماتریس صفر است.

(۲) برای هر ماتریس A ماتریس $-A$ وجود دارد که $A + (-A) = (-A) + A = O$.

(۳) برای هر دو ماتریس A و B داریم $A + B = B + A$.

(۴) برای هر سه ماتریس A، B و C داریم $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(۵) برای هر ماتریس A داریم $1.A = A$.

(۶) برای هر ماتریس A و دو عدد حقیقی a و b داریم $(ab)A = a(bA)$.

(۷) برای هر ماتریس A و دو عدد حقیقی a و b داریم $(a + b)A = aA + bA$.

(۸) برای هر دو ماتریس A و B و عدد حقیقی a داریم $a(A + B) = aA + aB$.

مثال ۷.۱.۵. فرض کنیم V برابر با $\mathbb{R}^n$ باشد. می‌دانیم که اعضای V به صورت ماتریس سطری $X = (x_1, ..., x_n)$ است. یعنی ماتریس‌های $n \times 1$ (گاهی نیز از نمایش ماتریس ستونی $n \times 1$ نیز استفاده می‌کنیم). تابع α همان جمع معمولی مولفه به مولفه که از دبیرستان آن را آموخته‌اید $(+)$ و β هم همان ضرب معمولی عدد حقیقی در مولفه‌ها باشد که از دبیرستان یاد گرفته‌اید $(.)$. پس طبق مثال قبل سه‌تایی $(V, +, .)$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است.

مثال ۸.۱.۵. فرض کنیم V برابر با $\mathbb{R}^2$ باشد. می‌دانیم که اعضای V به صورت $X = (x_1, x_2)$ است. یعنی ماتریس‌های 2×1. حال فرض کنیم تابع α به صورت زیر باشد

$$\alpha((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 + 1, y_2 + 1)$$

و β هم همان ضرب معمولی عدد حقیقی در مولفه‌ها باشد که از دبیرستان یاد گرفته‌اید $(.)$. سه‌تایی $(V, +, .)$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ نیست. زیرا مثلا خاصیت (۳) را ندارد. برای مثال داریم

$$\alpha((1, 1), ((0, 2)) = (1 + 1, 2 + 1) = (2, 3) \neq$$
$$\alpha((0, 2), ((1, 1)) = (0 + 1, 1 + 1) = (1, 2).$$

تعریف ۹.۱.۵. منظور از ترکیب خطی چند بردار در یک فضای برداری، یعنی حاصل جمع جبری مضرب‌هایی از آن بردارها.

مثال ۱۰.۱.۵. بردار $(2,1)$ ترکیب خطی از دو بردار $(1,1)$ و $(0,1)$ در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ است. زیرا

$$(2,1) = 2.(1,1) - 1.(0,1).$$

تعریف ۱۱.۱.۵. فرض کنیم $(V,+,.)$ یک فضای برداری با عضو خنثی o باشد. گوییم بردارهای v_1، ...، v_n از V روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند هرگاه برای $c_i \in \mathbb{R}$ که در

$$c_1.v_1 + c_2.v_2 + ... + c_n.v_n = o$$

صدق کند، نتیجه شود $c_1 = ... = c_n = 0$. اگر v_iها مستقل خطی نباشند به آن‌ها وابسته خطی گوییم.

مثال ۱۲.۱.۵. در مثال‌های بالا دیدید که مثلا $V = \mathbb{R}^3$ روی $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمولی یک فضای برداری است که دارای عضو خنثی $o = (0,0,0)$ است. حال اگر برای اعداد حقیقی c_1، c_2 و c_3 داشته باشیم

$$c_1.(1,0,0) + c_2.(0,1,0) + c_3.(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(c_1,0,0) + (0,c_2,0) + (0,0,c_3) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; (c_1,c_2,c_3) = (0,0,0)$$

لذا $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. بنابراین $e_1 = (1,0,0)$، $e_2 = (0,1,0)$ و $e_3 = (0,0,1)$ مستقل خطی هستند.

مثال ۱۳.۱.۵. در مثال‌های بالا دیدید که مثلا $V = \mathbb{R}^3$ روی $\mathbb{R}$ با جمع و ضرب معمولی یک فضای برداری است که دارای عضو خنثی $o = (0,0,0)$ است. حال برای اعداد حقیقی $c_1 = 2$، $c_2 = -1$ و $c_3 = 0$ داریم

$$2.(1,1,0) + -1.(2,2,1) + 1.(0,0,1) =$$
$$(2,2,0) + (-2,-2,-1) + (0,0,1) = (0,0,0)$$

لذا $(1,1,0)$، $(2,2,1)$ و $(0,0,1)$ مستقل خطی نیستند.

تعریف ۱۴.۱.۵. فرض کنیم A ماتریسی مربعی با درایه‌های حقیقی باشد. به مقدارهای λ که از معادله $det(A - \lambda I) = 0$ حاصل می‌شود مقدارهای ویژه ماتریس A گوییم. بردار ستونی ناصفر V که در $(A - \lambda I)V = O$ صدق می‌کند را بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ گوییم.

مثال ۱۵.۱.۵. می‌خواهیم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ را پیدا کنیم. پس

$$0 = det(A - \lambda I) = det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

ریشه‌های معادله بالا $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = -1$ هستند که همان مقادیر ویژه A هستند. حال بردار ویژه نظیر λ_1 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = O = (A-\lambda_1 I)V = \begin{pmatrix}1 & -1\\4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

دستگاه بالا اجبار می‌کند که $v_1 = v_2$ باشد اما مقدارشان مشخص نیست و هر مقدار دلخواهی می‌تواند اختیار کند. می‌توانیم فرض کنیم $v_1 = v_2 = c$ و بنویسیم

$$V = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

پس بیشمار انتخاب برای V داریم. اما ساده ترین انتخاب را که برای $c = 1$ حاصل می‌شود، به عنوان نماینده در نظر می‌گیریم. پس بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = 2$ برابر است با $V = (1,1)^t$. به صورت مشابه برای $\lambda_2 = -1$ بردار ویژه $V = (1,4)^t$ حاصل می‌شود.

تمرین ۱۶.۱.۵. *با روش کرامر دستگاه زیر را حل کنید*

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

حل. دقت شود که ماتریس ضرایب دترمینان ناصفر دارد و این یعنی طبق قضیه متن درس دستگاه جواب یکتا دارد. حال طبق روش کرامر داریم

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{det\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}3 & -1\\4 & -2\end{pmatrix}} = \frac{1}{2}$$

و

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{det\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}3 & -1\\4 & -2\end{pmatrix}} = \frac{1}{2}$$

حال $X = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})^t$ جواب دستگاه است.

تمرین ۱۷.۱.۵. *مقادیر ویژه ماتریس زیر را پیدا کنید. آیا این ماتریس دو بردار ویژه مستقل خطی دارد؟*

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$$

حل. داریم

$$0 = det(A - \lambda I) = det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

ریشه‌های معادله بالا $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 2$ هستند که همان مقادیر ویژه A هستند و تکراری هستند. برای پاسخ به قسمت دوم، بردار ویژه نظیر $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_1 I)V = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

دستگاه بالا اجبار می‌کند که $v_1 + v_2 = 0$ باشد اما مقدارشان مشخص نیست و هر مقدار دلخواهی می‌تواند اختیار کند. می‌توانیم فرض کنیم $v_1 = c$ و در نتیجه $v_2 = -c$ و بنویسیم

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

پس بیشمار انتخاب برای V داریم. اما ساده ترین انتخاب را که برای $c = 1$ حاصل می‌شود، به عنوان نماینده در نظر می‌گیریم. پس بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ برابر است با $V = (1, -1)^t$. از نحوه ساختن بردار ویژه و تکرار مقادیر ویژه، مشخص است که هربردار ویژه دیگری باید مضربی ناصفر از V باشد. این یعنی این ماتریس بردار ویژهای مستقل خطی ندارد.

تمرین ۱۸.۱.۵. *برای ماتریس زیر دو بردار ویژه (مستقل خطی) پیدا کنید. سپس نشان دهید که هر بردار ویژه دیگر ترکیب خطی از آن دو بردار ویژه (مستقل خطی) است، به عبارت دیگر این ماتریس سه بردار ویژه مستقل خطی ندارد!*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

حل. با تشکیل معادله $det(A - \lambda I) = 0$ داریم $(\lambda - 1)^3 = 0$. پس این ماتریس فقط مقدار ویژه $\lambda = 1$ دارد که سه بار تکرار شده است. با تشکیل $(A - \lambda I)V = 0$ معادله $4v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 0$ حاصل می‌شود. با انتخاب $v_1 = 0$، $v_2 = 2$ داریم

$$V_1 = (0, 2, -3)^t$$

که یک بردار ویژه است. با انتخاب $v_1 = 1$، $v_2 = 0$ داریم $V_2 = (1, 0, 2)^t$ یک بردار ویژه است. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که V_1 و V_2 مستقل خطی هستند. زیرا اگر داشته باشیم $c_1.V_1 + c_2.V_2 = o$ باشد آنگاه $(c_2, 2c_1, -3c_1 + 2c) = (0, 0, 0)$. بلا فاصله نتیجه می‌شود که

$c_1 = c_2 = 0$. اکنون فرض کنیم $V = (x,y,z)^t$ یک بردار ویژه دلخواه باشد. پس درایه‌های V در معادله $4x - 3y - 2z = 0$ صدق می‌کند. یعنی $z = 2x - \frac{3}{2}y$. پس

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x - \frac{3}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -\frac{3}{2}y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = xV_2 - \frac{1}{2}yV_1$$

پس V ترکیب خطی از V_1 و V_2 است و حل مسئله تمام است.

۲.۵ دستگاه معادلات دیفرانسیل

همانطور که از بخش قبلی متوجه شده‌اید، منظور از دستگاه معادلات یعنی به جای داشتن یک مجهول یک تعداد مجهولات و به جای یک معلوم یک تعداد معلومات در اختیار دارید. طبیعی است که منظور ما از دستگاه معادلات دیفرانسیل یعنی مجهولات تابع‌ها باشند. در حقیقت دنبال دسته‌ای از تابع‌ها هستیم که در یک دسته از روابط صدق کنند.

اکنون کار را با تعریف آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۵. *منظور از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل (معمولی) مرتبه اول یعنی مشتقات مرتبه اول توابع مجهول y_1، ...، y_n را برحسب توابعی از متغییر مستقل t و توابع مجهول y_1، ...، y_n در اختیار داریم. به عبارت دیگر*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}.$$

همچنین به

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad y_1(a) = b_1,\ y_2(a) = b_2,\ ...,\ y_n(a) = b_n.$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط اولیه (مرزی) گوییم.

مثال ۲.۲.۵. *دستگاه زیر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل (معمولی) مرتبه اول است*

$$\begin{cases} y_1' = t + y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2^2 \\ y_3' = \cos t + y_1 \end{cases} .$$

در این دستگاه y_1، y_2 و y_3 توابع مجهول هستند و مثلا داریم $f_1(x, y_1, y_2, y_3) = t + y_2$.

تذکر ۳.۲.۵. *واضح است که منظور ما از جواب چیست! یعنی ارائه توابع y_1، ...، y_n که در*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (*)$$

صدق کنند. منظور ما از حل هم یعنی اینکه تمام جواب‌های ممکن را ارائه دهیم. ارائه همه جواب‌ها تحت یک فرمول را جواب عمومی و هرگاه جوابی مد نظر باشد که در یک دسته شرط صدق کند، جواب خصوصی گوییم (در ادامه مثال‌های مربوطه را خواهید دید). دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول، مشابه معادله دیفرانسیل ممکن است یک جواب، بیشمار جواب یا اصلا جواب نداشته باشد. بنابراین خیلی طبیعی است که در اینجا نیز قضیه وجود جواب و یکتایی جواب را داشته باشیم. اگر f_i ها در $(*)$ پیوسته باشند جواب وجود دارد ولی لزوما آن جواب روی کل اعداد حقیقی نیست و ممکن است روی یک بازه باشد. بعلاوه اگر مشتقات f_i ها نسبت به y_1، ...، y_n موجود و پیوسته باشد آن جواب یکتا است.

مثال ۴.۲.۵. *وقتی روش حل دستگاه* $\begin{cases} (y_1')^2 + 4 = 0 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ *را آموختید، خواهید دید که این دستگاه در اعداد حقیقی اصلا جواب ندارد. همچنین دستگاه*

$$\begin{cases} (y_1')^2 + y_2^2 = 0 \\ y_2' = y_1 \end{cases} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 3$$

اصلا جواب ندارد! همچنین دستگاه

$$\begin{cases} y_1' = 1 \\ y_2' = y_1 \end{cases} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

فقط یک جواب دارد.

تذکر ۵.۲.۵. *این که چرا ما دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را معرفی می‌کنیم به سبب مزیت آن است. یک مزیت آن است که با اضافه کردن تعداد مناسبی مجهول می‌شود یک معادله دیفرانسیل*

مرتبه بالاتر از یک را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد. مثلا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با شرایط اولیه

$$2y'' - 5y' + y = 0 \qquad y(3) = 6, \;\; y'(3) = -1$$

را می‌توان به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط اولیه تبدیل کرد. کافی است فرض کنیم $y = y_1$، $y' = y_2$. حال داریم

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = \frac{5}{2}y' - \frac{1}{2}y = \frac{5}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases} .$$

لذا

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{5}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases} \qquad y_1(3) = 6, \;\; y_2(3) = -1.$$

همانطور که در اول فصل اشاره شد تمرکز ما روی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول است. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی کمی پیچیده است و در این دوره درسی بررسی نمی‌شود. لذا در ادامه تعریف دستگاه معادلات دیفرانسیل را کمی ساده می‌کنیم. اما ابتدا لازم است کمی تعریف و نماد معرفی کنیم.

با تعریف جدید زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۶.۲.۵. *فرض کنیم درایه‌های یک ماتریس $m \times n$ مانند A به جای اعداد حقیقی توابع حقیقی مقدار باشد. در این صورت به A تابع ماتریسی گوییم و آن را با $A(t)$ نشان می‌دهیم. یعنی*

$$A(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & .. & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & ... & f_{2n}(t) \\ & \vdots & \\ f_{m1}(t) & ... & f_{mn}(t) \end{pmatrix} .$$

مثال ۷.۲.۵. *ماتریس $A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t^2 \\ 1+t^2 & \tan t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ یک تابع ماتریسی است.*

تعریف ۸.۲.۵. *اگر همه درایه‌های $A(t)$ در یک نقطه یا یک بازه پیوسته باشد آنگاه گوییم $A(t)$ در آن نقطه و یا آن بازه پیوسته است. به همین صورت گوییم $A(t)$ مشتق پذیر است هرگاه همه درایه‌های $A(t)$ مشتق پذیر باشد و این مطلب را با $A'(t)$ یا $\frac{dA}{dt}$ نشان می‌دهیم. همچنین انتگرال معین (یا نامعین) تابع ماتریسی را، انتگرال درایه‌های تعریف می‌کنیم و آن را به صورت $\int_a^b A(t)dt$ (یا $\int A(t)dt$) نشان می‌دهیم.*

مثال ۹.۲.۵. *تابع ماتریسی* $A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & t^2\\ 1+t^2 & e^t\\ 0 & \frac{1}{t}\end{pmatrix}$ *در* $t=0$ *پیوسته نیست! اما در سایر نقاط و بازه‌هایی که شامل* $t=0$ *نیستند، پیوسته است.*

مثال ۱۰.۲.۵. *برای* $A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & t^2\\ 1+t^2 & \tan t\end{pmatrix}$ *داریم* $A'(t)=\begin{pmatrix}\cos t & 2t\\ 2t & 1+\tan^2 t\end{pmatrix}$.

مثال ۱۱.۲.۵. *برای تابع ماتریسی* $A(t)=\begin{pmatrix}0 & \cos t\\ e^t & e^t+1\end{pmatrix}$ *داریم*

$$\int A(t)dt=\begin{pmatrix}c_1 & \sin t+c_2\\ e^t+c_3 & e^t+t+c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \sin t\\ e^t & e^t+t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}.$$

تذکر ۱۲.۲.۵. *بسیاری از قضیه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع ماتریسی قابل تعمیم است. مثلا برای توابع ماتریسی* $A(t)$ *و* $B(t)$ *داریم* $[A(t)B(t)]'=A(t)B'(t)+A'(t)B(t)$.

تعریف ۱۳.۲.۵. *هرگاه دستگاه معادلات مرتبه اول*

$$\begin{cases}y_1'=f_1(t,y_1,y_2,...,y_n)\\ y_2'=f_2(t,y_1,y_2,...,y_n)\\ \vdots\\ y_n'=f_n(t,y_1,y_2,...,y_n)\end{cases}$$

را بتوانیم به شکل زیر بنویسیم گوییم یک دستگاه معادلات خطی مرتبه اول داریم

$$\begin{cases}y_1'=f_{11}(t)y_1+f_{12}(t)y_2+...+f_{1n}(t)y_n+g_1(t)\\ y_2'=f_{21}(t)y_1+f_{22}(t)y_2+...+f_{2n}(t)y_n+g_2(t)\\ \vdots\\ y_n'=f_{11}(t)y_1+f_{n2}(t)y_2+...+f_{nn}(t)y_n+g_3(t)\end{cases}$$

که در آن $g_i(t)$ *ها و* $f_{ij}(t)$ *ها توابعی یک متغیر از متغییر مستقل* t *هستند. اگر همه* $g_i(t)$ *ها صفر باشند به دستگاه همگن گوییم. اگر حداقل یکی از* $g_i(t)$ *ها ناصفر باشد به دستگاه غیر همگن گوییم. اگر دستگاه به صورت بالا نوشته نشود به آن دستگاه غیر خطی گوییم. اگر* $f_{ij}(t)$ *ها توابعی ثابت (عدد حقیقی) باشند به دستگاه خطی با ضرایب ثابت گوییم.*

تذکر ۱۴.۲.۵. *با فرض*

$$A(t)=\begin{pmatrix}f_{11}(t) & ... & f_{1n}(t)\\ f_{21}(t) & ... & f_{2n}(t)\\ & \vdots & \\ f_{n1}(t) & ... & f_{nn}(t)\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\ B(t)=\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}$$

یک دستگاه معادلات خطی مرتبه اول شکل ماتریسی $Y' = A(t)Y + B(t)$ دارد.

مثال ۱۵.۲.۵. دستگاه $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{5}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases}$ همگن خطی با ضرایب ثابت است و همچنین $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

حال قضیه‌های زیر را بدون اثبات می‌پذیریم (این قضایا مشابه قضایای فصل سوم هستند!).

قضیه ۱۶.۲.۵. فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی $Y' = A(t)Y + B(t)$ را در اختیار داریم. اگر $A(t)$ و $B(t)$ روی بازه I پیوسته باشند آنگاه دستگاه جواب روی بازه I دارد.

قضیه ۱۷.۲.۵. فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ را در اختیار داریم. اگر Y_1 و Y_2 دو جواب این دستگاه باشند آنگاه برای عدد حقیقی c، $cY_1 + Y_2$ یک جواب دستگاه است.

قضیه ۱۸.۲.۵. فرض کنیم دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ را در اختیار داریم. اگر $A(t)$ روی بازه I پیوسته و ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد آنگاه دستگاه تعداد n تا جواب مستقل خطی مانند U_1، ...، U_n دارد که به این n جواب، جواب پایه گوییم و لزوما یکتا نیستند. هر جواب دیگر دستگاه ترکیب خطی از این جواب‌های پایه است.

تعریف ۱۹.۲.۵. فرض کنیم تعداد n تا جواب مانند U_1، ...، U_n برای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ را در اختیار داریم و $A(t)$ روی بازه I پیوسته و ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد آنگاه به دترمینان ماتریس $[U_1(t)|...|U_n(t)]$ رونسکین n تا جواب U_1، ...، U_n گوییم و با $W(U_1, ..., U_n)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۰.۲.۵. فرض کنیم تعداد n تا جواب مانند U_1، ...، U_n برای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ را در اختیار داریم و $A(t)$ روی بازه I پیوسته و ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد. U_1، ...، U_n مستقل خطی (جواب پایه) هستند اگر و تنها اگر $W(U_1, ..., U_n)$ ناصفر باشد.

قضیه ۲۱.۲.۵. فرض کنیم تعداد n تا جواب مانند U_1، ...، U_n برای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ را در اختیار داریم و $A(t)$ روی بازه I پیوسته و ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد. در این صورت $W(U_1, ..., U_n)$ روی I یا صفر است و یا هرگز صفر نمی‌شود.

نتیجه ۲۲.۲.۵. فرض کنیم تعداد n تا جواب مانند U_1، ...، U_n برای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ را در اختیار داریم و $A(t)$ روی بازه I پیوسته و ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد. در این صورت U_1، ...، U_n مستقل خطی (جواب پایه) هستند اگر و تنها اگر برای یک $x_0 \in I$، $W(U_1(x_0), ..., U_n(x_0))$ ناصفر باشد.

مثال ۲۳.۲.۵. رونسکین $U(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ و $V(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ برابر است با

$$W(U(t), V(t)) = det\,(U(t)|V(t)) = det \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} = 2t^2 - t^2 = t^2.$$

قضیه ۲۴.۲.۵. *فرض کنیم که Y_g جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ باشد و همچنین $A(t)$ روی بازه I پیوسته و ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد. اگر $Y' = A(t)Y + B(t)$ دارای جواب خصوصی Y_p باشد آنگاه $Y_G = Y_g + Y_p$ جواب عمومی برای دستگاه غیر همگن $Y' = A(x)Y + B(x)$ است.*

قضیه آخر این بخش تمرین ۲۶.۳.۳ را برای دستگاه بازسازی می‌کند که به قضیه آبل و در بعضی منابع به قضیه آبل_لیوویل معروف است.

قضیه ۲۵.۲.۵. *(قضیه آبل_لیوویل) فرض کنیم تعداد n تا جواب مانند U_1، ...، U_n برای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن $Y' = A(t)Y$ را در اختیار داریم و $A(t)$ روی بازه I پیوسته و ماتریسی مربعی $n \times n$ باشد و $W(t) = det\,[U_1(t)|...|U_n(t)]$. تابع $W(t)$ در معادله مرتبه اول زیر صدق می‌کند*

$$W' = (f_{11}(t) + ... + f_{nn}(t))W.$$

تمرین ۲۶.۲.۵. *(الف) معادله دیفرانسیل $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ را به یک دستگاه معادله دیفرانسیل تبدیل کنید.*
(ب) شکل ماتریسی دستگاه حاصل در (الف) را بنویسید.
(ج) قضیه آبل_لیوویل را برای دستگاه حاصل شده در (الف) نوشته و سپس با تمرین ۲۶.۳.۳ مقایسه کنید.

حل. دقت شود که در اینجا متغیر مستقل x است.
(الف) کافی است فرض کنیم $y = y_1$ $y' = y_2$. حال داریم

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = -f_1(x)y' - f_0(x)y = -f_1(x)y_2 - f_0(x)y_1 \end{cases}.$$

لذا

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -f_1(x)y_2 - f_0(x)y_1 \end{cases}.$$

(ب) طبق (الف) داریم

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f_0(x) & -f_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

که یک دستگاه همگن خطی است که در آن $A(x)$ ماتریسی مربعی و از اندازه دو است.
(ج) طبق قسمت (ب)، اگر W رونسکین دو جواب دلخواه مانند U_1 و U_2 باشد آنگاه طبق قضیه آبل_لیوویل داریم
$$W' = (0 + (-f_1(x))W = -f_1(x)W.$$
معادله بالا همانی است که در تمرین ۲۶.۳.۳ مطرح شده است.

تمرین ۲۷.۲.۵. *نشان دهید که رونسکین دو مجموعه جواب پایه برای دستگاه معادلات همگن $Y' = A(x)Y$ مضربی از هم هستند.*

حل. فرض کنیم U_1، ...، U_n یک مجموعه جواب پایه با رونسکین W_1 و V_1، ...، V_n یک مجموعه جواب پایه دیگر با رونسکین W_2 باشد. اگر $A(t) = (f_{ij}(t))$ باشد آنگاه طبق قضیه آبل_لیوویل داریم
$$W_1' = (f_{11}(t) + ... + f_{nn}(t))W_1, \quad W_2' = (f_{11}(t) + ... + f_{nn}(t))W_2.$$
این دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدایی پذیر دارای جواب‌های
$$W_1 = ce^{\int (f_{11}(t)+...+f_{nn}(t))dx}, \quad W_2 = c'e^{\int (f_{11}(t)+...+f_{nn}(t))dx}$$
هستند. حال اگر W_1 یا W_2 برابر صفر باشند یعنی $c = 0$ یا $c' = 0$ آنگاه واضح است که یکی مضرب دیگر است. بنابراین فرض کنیم W_1 و W_2 هر دو ناصفر هستند، یعنی c و c' ناصفرند.لذا $W_2 = \frac{c'}{c}W_1$.

۳.۵ روش اویلر برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (مقدار ویژه_ بردار ویژه)

با نگاهی گذرا به قضیه ۲۴.۲.۵ متوجه خواهیم شد که برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی غیر همگن مشابه با معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن، ابتدا نیاز داریم که دستگاه همگن را حل کنیم و سپس یک جواب خصوصی برای دستگاه پیدا کنیم. در حقیقت اگر بتوانیم معضل جواب عمومی دستگاه همگن نظیر از یک دستگاه معادلات خطی غیرهمگن را حل کنیم آن وقت برای ارائه جواب عمومی دستگاه معادلات غیرهمگن خطی با معضل دانستن یک جواب خصوصی مواجه هستیم! همیشه ارائه جواب خصوصی امکان ندارد. اما در زیر چند روش را آموزش می‌دهیم تا بتوانید جواب خصوصی را پیدا کنید.

روش اویلر برای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت استفاده می‌شود، یعنی ماتریس ضرایب $A(t)$ درایه‌هایش از اعداد حقیقی است. ابتدا روش حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را آموزش می‌دهیم و سپس نحوه یافتن یک جواب خصوصی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت. در نتیجه طبق قضیه ۲۴.۲.۵ جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به دست می‌آید. در کل این بخش ماتریس ضرایب با درایه‌هایی از اعداد حقیقی است.

دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت

با قضیه زیر شروع می‌کنیم و آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱.۳.۵. *فرض کنیم دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت $Y' = AY$ را در اختیار داریم که در آن A ماتریسی مربعی و $n \times n$ است. اگر مقادیر ویژه λ_1 ، ...، λ_n برای A حقیقی و متمایز باشند آنگاه بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه مستقل خطی هستند و جواب عمومی دستگاه به صورت*

$$Y_g = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t}$$

است که هر V_i بردار ویژه نظیر λ_i است (n برابر ۲ یا ۳ بیشتر مد نظر است).

مثال ۲.۳.۵. *می‌خواهیم جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

را پیدا کنیم. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ را پیدا کنیم. پس

$$0 = det(A - \lambda I) = det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

ریشه‌های معادله بالا $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = -1$ هستند که همان مقادیر ویژه A هستند. این مقادیر حقیقی و متمایز هستند. حال بردار ویژه نظیر λ_1 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

دستگاه بالا اجبار می‌کند که $v_1 = v_2$ باشد اما مقدارشان مشخص نیست و هر مقدار دلخواهی می‌تواند اختیار کند. می‌توانیم فرض کنیم $v_1 = v_2 = c$ و بنویسیم

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

پس بیشمار انتخاب برای V_1 داریم. اما ساده ترین انتخاب را که برای $c = 1$ حاصل می‌شود، به عنوان نماینده در نظر می‌گیریم. پس بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = 2$ برابر است با $V_1 = (1, 1)^t$. به صورت مشابه برای $\lambda_2 = -1$ بردار ویژه $V_2 = (1, 4)^t$ است. حال طبق قضیه ۱.۳.۵ داریم

$$Y_g = c_1 V_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x}.$$

تذکر ۳.۳.۵. در قضیه ۱.۳.۵ مطلبی که اهمیت دارد بردارهای ویژه مستقل خطی است که تعداد آنها باید با مرتبه ماتریس مربعی ضرایب دستگاه معادلات خطی همگن برابر باشد. اما گاهی مقدارهای ویژه ممکن است تکراری باشند! این مطلب سبب می‌شود که نتوانیم لزوما به تعداد مرتبه ماتریس مربعی بردار ویژه داشته باشیم. اما استثناهایی هم وجود دارد. برای مثلا اگر ماتریس ضرایب در یک دستگاه معادلات همگن خطی متقارن و حقیقی مقدار باشد آنگاه تمام مقدارهای ویژه آن ماتریس حقیقی هستند (این مطلب را می‌پذیریم) و بعلاوه می‌توان به اندازه مناسب بردارهای ویژه مستقل خطی از هم پیدا کرد هر چند مقدارهای ویژه متمایز نباشند و تکرار شوند. سپس از قضیه ۱.۳.۵ برای نوشتن جواب عمومی استفاده کرد. مثال زیر برای درک بهتر مفید است.

مثال ۴.۳.۵. می‌خواهیم جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

را پیدا کنیم. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس متقارن $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ را پیدا کنیم.
از حل معادله $det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$ مقادیر ویژه $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ به دست می‌آیند. این مقادیر ویژه حقیقی هستند اما یکی از آنها تکرار شده است! حال بردار ویژه نظیر λ_1 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A-\lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

با حل این دستگاه به بردار ویژه $V_1 = (1,1,1)^t$ می‌رسیم. حال بردار ویژه نظیر λ_2 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A-\lambda_1 I)V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

با حل این دستگاه داریم $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. می‌توانیم به v_1 و v_2 مقدار بدهیم و v_3 را مشخص کنیم. مثلا برای $v_1 = 0$ و $v_2 = 1$ داریم $v_3 = -1$. پس به بردار ویژه $V_2 = (0,1,-1)^t$ می‌رسیم. با انتخاب $v_1 = 1$ و $v_2 = 0$ داریم $v_3 = -1$. پس به بردار ویژه $V_3 = (1,0,-1)^t$ می‌رسیم. به راحتی می‌توان دید که V_2 و V_3 مستقل خطی هستند (حتی با V_1 نیز مستقل خطی می‌شوند) و طبق قضیه ۱.۳.۵ داریم

$$\begin{aligned} Y_g &= c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 V_3 e^{\lambda_2 t} = \\ & c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

تذکر ۵.۳.۵. *همانطور که در بالا اشاره کردیم تعداد بردارهای مستقل خطی اهمیت دارد. گاهی اوقات مقادیر ویژه تکرار دارد و ماتریس نیز متقارن نیست اما باز هم می‌توان بردار ویژه مستقل خطی به تعداد مناسب ارائه کرد. به مثال زیر توجه کنید.*

مثال ۶.۳.۵. *می‌خواهیم جواب دستگاه* $Y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} Y$ *را پیدا کنیم. ماتریس ضرایب این دستگاه فقط مقدار* $\lambda_1 = -4$ *و مقدار ویژه با دو تکرار* $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ *دارد. بردار ویژه* λ_1 *به صورت* $V_1 = (1, 3, -2)^t$ *است. اما برای بردار ویژه* $\lambda_2 = \lambda_3$ *داریم*

$$(A - \lambda_2 I)V_2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس دو معادله $v_1 - 2v_2 + 2v_3 = 0$ *و* $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ *دریافت می‌کنیم. این معادلات نشان می‌دهند* v_2 *و* v_3 *آزاد مقدار می‌پذیرند اما* v_1 *خیر! بنابراین یکبار فرض کنیم* $v_2 = 1$، $v_3 = 0$ *و در نتیجه* $v_1 = 1$. *پس* $V_2 = (1, 1, 0)^t$ *یک بردار ویژه برای* $\lambda_2 = \lambda_3$ *است. یکبار دیگر فرض کنیم* $v_2 = 0$، $v_3 = 1$ *و در نتیجه* $v_1 = -2$. *پس* $V_3 = (-2, 0, 1)^t$ *یک بردار ویژه برای* $\lambda_2 = \lambda_3$ *است. یک بررسی ساده نشان می‌دهد* V_1، V_2 *و* V_3 *سه بردار ویژه مستقل خطی هستند. پس طبق قضیه ۱.۳.۵ جواب به صورت* $Y_g = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + (c_2 V_2 + c_3 V_3) e^{\lambda_2 t}$ *است.*

در تمرین ۱۷.۱.۵ مشاهده کرده‌اید ممکن است یک ماتریس تکرر مقدار ویژه داشته باشد و لزوما بردارهای ویژه مستقل به دست ندهد و مانند تذکرات و مثال‌های بالا نباشد! دستگاه معادلات دیفرانسیل چنین ماتریسی را چگونه باید حل کرد؟ به این سوال در حالت کلی پاسخ نمی‌دهیم و تحت قضیه‌های زیر و برای حالتی که $n = 2$ یا $n = 3$ پاسخی را در اختیارتان قرار می‌دهیم.

قضیه‌های زیر را بدون اثبات می‌پذیریم. با قضیه زیر شروع می‌کنیم.

قضیه ۷.۳.۵. *فرض کنیم دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت* $Y' = AY$ *را در اختیار داریم که در آن* A *ماتریسی مربعی و* 2×2 *است. اگر دو مقدار ویژه* A *تکراری و برابر* λ *باشند و فقط یک بردار ویژه مستقل خطی* V *به دست بدهد، آنگاه جواب‌های پایه به صورت*

$$Y_1 = e^{\lambda t} V, \;\; Y_2 = e^{\lambda t}(W + t(A - \lambda I)W)$$

است که در آن W *برداری ستونی است که در*

$$(A - \lambda I)W \neq O, \;\; (A - \lambda I)^2 W = O$$

صدق می‌کند (به W *بردار ویژه تعمیم یافته گوییم).*

مثال ۸.۳.۵. *می‌خواهیم جواب دستگاه*

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$$

را پیدا کنیم. ماتریس ضرایب این دستگاه فقط مقدار ویژه تکراری $\lambda = 2$ دارد. بردار ویژه این مقدار ویژه $V = (1, -1)^t$ است و هر بردار ویژه مضربی ناصفر از V است (دقت شود ماتریس متقارن نیست و روش قبلی که آموخته‌اید کارساز نیست). پس یک جواب پایه به صورت زیر است

$$Y_1 = e^{\lambda t}V = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

حال باید یک بردار ویژه تعمیم یافته W پیدا کنیم. لذا

$$(A-\lambda I)^2 W = O$$
$$\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)^2\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

این دستگاه نشان می‌دهد که تا اینجا هر W را می‌توانیم انتخاب کنیم. اما باید $(A-\lambda I)W \neq 0$. یعنی

$$(A-2I)W = \begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

بنابراین با انتخاب $W = (1, 0)^t$ (ساده ترین انتخاب ممکن!) همه شرایط قضیه ۵.۳.۷ بر قرار است و لذا جواب پایه دیگر به صورت

$$Y_2 = e^{\lambda t}(W + t(A-\lambda I)W) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) =$$
$$e^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

حال طبق قضیه ۵.۲.۱۸ $Y_g = c_1Y_1 + c_2Y_2$ جواب است.

اکنون قضیه زیر را داریم.

قضیه ۵.۳.۹. *فرض کنیم دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت $Y' = AY$ را در اختیار داریم که در آن A ماتریسی مربعی و 3×3 است. اگر λ یک مقدار ویژه با بردار ویژه V و دو مقدار ویژه دیگر A تکراری و برابر λ' باشند که فقط بردار ویژه مستقل خطی V' را به دست می‌دهند، آنگاه جواب‌های پایه به صورت*

$$Y_1 = e^{\lambda t}V_1,\;\; Y_2 = e^{\lambda' t}V',\;\; Y_3 = e^{\lambda' t}(W + t(A-\lambda' I)W)$$

است که در آن W برداری ستونی است که در

$$(A-\lambda' I)W \neq O,\;\; (A-\lambda' I)^2 W = O$$

صدق می‌کند (W بردار ویژه تعمیم یافته است).

مثال ۱۰.۳.۵. می‌خواهیم جواب دستگاه $Y' = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} Y$ را پیدا کنیم. ماتریس ضرایب این دستگاه مقدار $\lambda = 0$ و مقدار ویژه با دو تکرار $\lambda' = 5$ دارد. بردار ویژه λ به صورت $V = (-4, -5, 2)^t$ است. پس جواب پایه زیر را داریم $Y_1 = e^{\lambda t} V = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$. اما بردار ویژه λ' به صورت $V' = (-2, 0, 1)^t$ است و هر بردار ویژه نظیر λ' مضربی ناصفر از V' است و بردار مستقل جدید به دست نمی‌دهد. پس جواب پایه دوم به صورت $Y_2 = e^{\lambda' t} V' = e^{5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ است. حال باید یک بردار ویژه تعمیم یافته W پیدا کنیم. لذا

$$
\begin{aligned}
&(A - \lambda' I)^2 W = O \\
&\left(\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} -4 & 20 & -8 \\ -5 & 25 & -10 \\ 2 & -10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

بعد از ساده سازی، این دستگاه اجبار می‌کند که $w_1 - 5w_2 + 2w_3 = 0$. از طرفی باید $(A - \lambda' I) \neq O$. یعنی $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. برای این که شرایط دستگاه آخر برقرار باشد باید $w_2 \neq 0$ یا $w_1 - 5w_2 + 2w_3 \neq 0$. با توجه به بالا $w_1 - 5w_2 + 2w_3 = 0$، پس باید $w_2 \neq 0$. با انتخاب $w_2 = 1$، $w_3 = 0$ داریم $w_1 = 5$. پس $W = (5, 1, 0)^t$ و طبق قضیه ۹.۳.۵ جواب پایه آخر به صورت

$$
Y_3 = e^{\lambda' t}(W + t(A - \lambda' I)W) = e^{5t} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
$$

است. طبق قضیه ۱۸.۲.۵ جواب به صورت $Y_g = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ است.

اکنون قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۱.۳.۵. *فرض کنیم دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت $Y' = AY$ را در اختیار داریم که در آن A ماتریسی مربعی و 3×3 است. همچنین λ یک مقدار ویژه با سه تکرار باشد. اگر λ فقط دو بردار ویژه مستقل خطی V_1 و V_2 به دست دهد آنگاه جواب‌های پایه به صورت*

$$Y_1 = e^{\lambda t}V_1, \;\; Y_2 = e^{\lambda t}V_2+, \;\; Y_3 = e^{\lambda t}(W + t(A - \lambda I)W)$$

است که در آن W برداری ستونی است که در

$$(A - \lambda I)W \neq 0, \;\; (A - \lambda I)^2 W = O$$

صدق می‌کند (W بردار ویژه تعمیم یافته است).

مثال ۱۲.۳.۵. *می‌خواهیم جواب دستگاه $Y' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} Y$ را پیدا کنیم. ماتریس ضرایب این دستگاه فقط مقدار $\lambda = 1$ دارد که سه بار تکرار شده است. با تشکیل $(A - \lambda I)V = 0$ معادله $4v_1 - 3v_2 - 2v_3 = 0$ حاصل می‌شود. با انتخاب $v_1 = 0$، $v_2 = 2$ داریم $V_1 = (0, 2, -3)^t$ یک بردار ویژه است. با انتخاب $v_1 = 1$، $v_2 = 0$ داریم $V_2 = (1, 0, 2)^t$ یک بردار ویژه است. طبق تمرین ۱۸.۱.۵ دیگر هیچ بردار ویژه که مستقل خطی با V_1 و V_2 باشد، نداریم. بنابراین دو جواب پایه به صورت زیر است*

$$Y_1 = e^{\lambda t}V_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \;\; Y_2 = e^{\lambda t}V_2 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

حال نیاز به W داریم. پس

$$\begin{aligned} &(A - \lambda I)^2 W = 0 \\ &\left(\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right)^2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

پس تا اینجا W می‌تواند هر ماتریس ستونی باشد. اما باید $(A - \lambda I)W \neq O$. یعنی

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس باید $4w_1 - 3w_2 - 2w_3 \neq 0$. پس می‌توانیم $W = (1,0,0)^t$ را انتخاب کنیم. اکنون از قضیه ۱۱.۳.۵ جواب پایه

$$Y_3 = e^{\lambda t}(W + t(A-\lambda I)W) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

به دست می‌آید. طبق قضیه ۱۸.۲.۵ جواب به صورت $Y_g = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3$ است.

قضیه ۱۳.۳.۵. *فرض کنیم دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت $Y' = AY$ را در اختیار داریم که در آن A ماتریسی مربعی و 3×3 است. همچنین λ یک مقدار ویژه با سه تکرار باشد. در این صورت اگر λ فقط یک بردار ویژه مستقل خطی V به دست دهد آنگاه جواب‌های پایه به صورت*

$$Y_1 = e^{\lambda t}V,\ \ Y_2 = e^{\lambda t}(W + t(A-\lambda I)W),$$
$$Y_3 = e^{\lambda t}(W' + t(A-\lambda I)W' + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2W')$$

است که در آن W بردار ستونی است که در

$$(A-\lambda I)W \neq O,\ \ (A-\lambda I)^2W = 0$$

صدق می‌کند و W' بردار ستونی است که در

$$(A-\lambda I)^2W' \neq O,\ \ (A-\lambda I)^3W' = O$$

صدق می‌کند. (W و W' بردارهای ویژه تعمیم یافته‌اند).

مثال ۱۴.۳.۵. می‌خواهیم جواب دستگاه $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} Y$ را پیدا کنیم. ماتریس ضرایب این دستگاه فقط مقدار $\lambda = 2$ دارد که سه بار تکرار شده است. با تشکیل $(A-\lambda I)V = 0$ به $v_1 = 0$ و $v_2 + v_3 = 0$ می‌رسیم. با انتخاب $v_2 = 1$ نتیجه می‌شود که $V = (0,1,-1)^t$ بردار ویژه است. هر بردار ویژه دیگر مضربی از V_1 است. پس تنها یک بردار ویژه داریم. یک جواب پایه به صورت $Y_1 = e^{\lambda t}V = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ است. اکنون باید دو بردار ویژه تعمیم یافته W و W' ارائه کنیم. پس

$$(A-\lambda I)^2 W = O$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس $w_1 - w_2 - w_3 = 0$. اما باید $(A-\lambda I)W \neq O$، یعنی

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

از اینجا هم نامعادله $2w_1 - w_2 - w_3 \neq 0$ (و دو نامعادله دیگر) نتیجه می‌شود. پس می‌توانیم $W = (1,1,0)^t$ انتخاب کنیم. در نتیجه جواب پایه دیگر از قضیه ۱۳.۳.۵ به صورت زیر است

$$Y_2 = e^{\lambda t}(W + t(A-\lambda I)W) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

حال W' را مشخص می‌کنیم

$$(A-\lambda I)^3 W' = W \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس تا اینجا W' می‌تواند هر چیزی باشد! اما با کمک شرط $(A-\lambda I)^2 W' \neq O$، یعنی

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

داریم که $w'_1 - w'_2 - w'_3 \neq 0$.پس می‌توانیم $W' = (1,0,0)^t$ انتخاب کنیم. در نتیجه جواب پایه سوم از قضیه ۱۳.۳.۵ به صورت زیر است

$$Y_3 = e^{\lambda t}(W' + t(A-\lambda I)W' + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2 W') =$$
$$e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

اکنون طبق قضیه ۱۸.۲.۵ جواب به صورت $Y_g = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3$ است.

اکنون وقت آن است که تکلیف مقادیر ویژه مختلط را معلوم کنیم. برای این منظور ابتدا لم زیر را داریم.

لم ۱۵.۳.۵. *فرض کنیم دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت $Y' = AY$ را در اختیار داریم که در آن A ماتریسی مربعی و $n \times n$ است. همچنین $Y = S(t) + iR(t)$ جواب دستگاه باشد که در آن $S(t)$ و $R(t)$ دو تابع ماتریسی $n \times 1$ هستند. در این صورت $S(t)$ و $R(t)$ نیز جواب دستگاه هستند.*

اثبات. سر راست است. □

اکنون قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم (اثبات آن با کمک لم بالا و قضیه ۱۸.۲.۵ است).

قضیه ۱۶.۳.۵. *فرض کنیم دستگاه معادلات خطی همگن با ضرایب ثابت $Y' = AY$ را در اختیار داریم که در آن A ماتریسی مربعی و $n \times n$ است. همچنین مقادیر ویژه اعداد مختلط متمایز به صورت $\lambda_1 = u_1 + iv_1$، $\lambda_2 = u_1 - iv_2$، ...، $\lambda_{2m-1} = u_m + iv_m$، $\lambda_{2m} = u_m - iv_m$ (مزدوج بودن دقت کنید) و اعداد متمایز حقیقی λ_{2m+1}، ...، λ_n باشد. در این صورت جواب عمومی دستگاه به صورت*

$$Y_g = c_1 Re[Y_1] + c_2 Im[Y_1] + ... + c_{2m-1} Re[Y_{2m-1}] + c_{2m} Im[Y_{2m-1}] + c_{2m+1} V_{2m+1} e^{\lambda_{2m+1} t} + ... + c_n V_n e^{\lambda_n t}$$

است که در آن هر V_i بردار ویژه نظیر λ_i است و $Y_i = V_i e^{\lambda_i t}$ (i برای Y_i فرد است).

مثال ۱۷.۳.۵. *می‌خواهیم جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

را پیدا کنیم. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ را پیدا کنیم. پس

$$0 = det(A - \lambda I) = det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2.$$

ریشه‌های معادله بالا $\lambda_1 = -1 + i$ و $\lambda_2 = -1 - i$ هستند که همان مقادیر ویژه A هستند. این مقادیر مختلط و متمایز هستند. حال بردار ویژه نظیر λ_1 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

دستگاه بالا اجبار می‌کند که $iv_1 = v_2$ باشد اما مقدارشان مشخص نیست و هر مقدار دلخواهی می‌تواند اختیار کند. می‌توانیم فرض کنیم $v_1 = 1$ و در نتیجه $v_2 = i$ است. پس بردار ویژه متناظر با λ_1 برابر است با $V_1 = (1, i)^t$. مقدار ویژه حقیقی نداریم! قرار می‌دهیم

$$Y = V_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$$

با کمک فرمول اویلر داریم

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t) =$$
$$\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + ie^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t + ie^{-t}\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

طبق قضیه ۱۶.۳.۵ $Y_g = c_1 Re[Y] + c_2 Im[Y] = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ -e^{-t}\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$.

دستگاه معادلات خطی غیر همگن با ضرایب ثابت

همانطور که در اول فصل اشاره شد، برای ارائه جواب دستگاه معادلات خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت نیاز به یک جواب خصوصی داریم. در ادامه نحوه یافتن جواب خصوصی را آموزش می‌دهیم. چگونگی و اثبات این روش را شرح نمی‌دهیم و صرفا آن را به صورت الگوریتمی بیان می‌کنیم.

روش لاگرانژ یا تغییر پارامترها: فرض کنیم دستگاه معادلات خطی غیر همگن خطی با ضرایب ثابت $Y' = AY + B(t)$ را در اختیار داریم. در این صورت برای یافتن جواب خصوصی Y_P مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مرحله (۱). جواب عمومی دستگاه همگن نظیر را نوشته و پارامترها موجود را عدد یک و یا صفر می‌دهیم و جواب‌های حاصل را در ستون یک ماتریس مانند $T(t)$ قرار می‌دهیم (این ماتریس، ماتریس اساسی نام دارد).

مرحله (۲). $T^{-1}(t)$ را حساب می‌کنیم (ماتریس اساسی حتما وارون پذیر است).

مرحله (۳). دستگاه معادله ساده $U'(t) = T^{-1}(t)B(t)$ را حل می‌کنیم که در آن داریم $U(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))^t$ و ثابت انتگرال را اعمال نمی‌کنیم.

مرحله (۴). $Y_p = T(t)U(t)$ جواب خصوصی است.

نکته: لزومی ندارد در این روش ماتریس ضرایب دستگاه ثابت باشد. اما چنین دستگاه‌های مورد بحث این دوره نیستند.

نکته: اگر به عملیات سطری مقدماتی مسلط هستید به جای وارون پیدا کردن ماتریس اساسی در مرحله (۲)، با عملیات سطر مقدماتی $T(t)$ را ساده‌تر (سطری پلکانی) کنید تا ماتریس $P(t)$ حاصل شود و سپس در مرحله (۳) دستگاه $P(t)U'(t) = B(t)$ را حل کنید.

مثال ۱۸.۳.۵. می‌خواهیم یک جواب خصوصی برای دستگاه معادلات خطی غیر همگن با ضرایب ثابت

$$Y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

را به روش لاگرانژ پیدا کنیم. مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مرحله (۱). جواب عمومی دستگاه همگن نظیر را می‌نویسیم. برای این منظور، مقادیر ویژه ماتریس ضرایب به صورت $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = -1$ و در نتیجه بردارهای ویژه نظیر به صورت

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

هستند. حال طبق قضیه ۱.۳.۵ داریم

$$Y_g = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

اکنون در جواب عمومی یک بار قرار می‌دهیم $c_1 = 1$، $c_2 = 0$ و یک بار قرار می‌دهیم $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$. سپس جواب‌های را در ستون‌های یک ماتریس قرار می‌دهیم و ماتریس اساسی $T(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$ حاصل می‌شود.

مرحله (۲). ماتریس وارون $T(t)$ با همان سبک عادی که می‌شناسید (محاسبه وارون ماتریس مربعی) محاسبه می‌شود $T^{-1}(t) = \frac{1}{2e^{-4t}} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$.

مرحله (۳). حال داریم

$$\begin{aligned} &U'(t) = T^{-1}(t)B(t) \\ &\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{2e^{-4t}} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \frac{3}{2}te^{-t} \\ 1 + \frac{3}{2}te^{t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اکنون دو معادله دیفرانسیل جدایی پذیر (فلاکت زده!) در اختیار ما است. جواب این دو معادله را بدون اعمال ثابت انتگرال گیری حساب می‌کنیم. لذا

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \\ u_2 = t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t} \end{cases}$$

مرحله (۴). جواب خصوصی عبارت است از

$$\begin{aligned} &Y_p = T(t)U(t) = \\ &\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \\ t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t} + t - \frac{4}{3} \\ te^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

طبق قضیه ۲۴.۲.۵ جواب دستگاه بالا برابر است با $Y_G = Y_g + Y_p$.

تمرین ۱۹.۳.۵. *جواب دستگاه معادلات* $Y' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} Y$ *را پیدا کنید.*

حل. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ را پیدا کنیم. از حل معادله

$$det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6 = -(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3) = 0$$

مقادیر ویژه $\lambda_1 = -2$، $\lambda_2 = -1 - i\sqrt{2}$ و $\lambda_3 = -1 + i\sqrt{2}$ به دست می‌آیند. حال بردار ویژه نظیر λ_1 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

با ساده سازی این دستگاه به معادلات $v_1 - 2v_3 = 0$ و $v_2 + 2v_3 = 0$ می‌رسیم. همانطور که از این دو معادله مشخص است با دادن مقدار به v_3 دوتای دیگر معلوم است. مثلا برای $v_3 = 1$ داریم $v_1 = 2$ و $v_2 = -2$. لذا به بردار ویژه $V_1 = (2, -2, 1)^t$ می‌رسیم. حال بردار ویژه نظیر λ_2 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$(A - \lambda_2 I)V_2 = \begin{pmatrix} -2 + i\sqrt{2} & 0 & 2 \\ 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 + i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با ساده سازی این دستگاه داریم $v_1 + (\frac{-2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3})v_3 = 0$ و $v_2 + (\frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3})v_3 = 0$. همانطور که از این دو معادله مشخص است با دادن مقدار به v_3 دوتای دیگر معلوم است. مثلا برای $v_3 = 1$ داریم $v_1 = \frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$ و $v_2 = -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$. لذا به بردار ویژه $V_2 = (\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}, 1)^t$ می‌رسیم. حال قرار می‌دهیم

$$Y = V_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-i\sqrt{2})t}.$$

با کمک قانون اویلر داریم

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-i\sqrt{2})t} = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right) (e^{-t}e^{-i\sqrt{2}t}) =$$

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right) (e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t) - i\sin(\sqrt{2}t))) =$$

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \right) +$$

$$i \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \right)$$

حال قسمت حقیقی و موهومی Y مشخص است و طبق قضیه ۱۶.۳.۵ داریم

$$Y_g = c_1V_1e^{\lambda_1 t} + c_2Re[Y] + c_3Im[Y].$$

تمرین ۲۰.۳.۵. *جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی غیر همگن با ضرایب ثابت*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{3x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

را پیدا کنید. سپس جوابی را مشخص کنید که در $Y(0) = (0,0,0)^t$ صدق کند.

حل. دقت شود که در این تمرین x متغیر مستقل است. ابتدا باید جواب عمومی دستگاه همگن نظیر را بنویسیم. پس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس متقارن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ را پیدا می‌کنیم. از حل معادله $det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ مقادیر ویژه $\lambda_1 = 3$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ به دست می‌آیند. این مقادیر ویژه حقیقی هستند اما یکی از آنها تکرار شده است! حال بردار ویژه نظیر λ_1 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

با حل این دستگاه به بردار ویژه $V_1 = (1,1,1)^t$ می‌رسیم. حال بردار ویژه نظیر λ_2 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = O = (A-\lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

با حل این دستگاه داریم $v_1+v_2+v_3 = 0$. می‌توانیم به v_1 و v_2 مقدار بدهیم و v_3 را مشخص کنیم. مثلا برای $v_1 = -1$ و $v_2 = 1$ داریم $v_3 = 0$. پس به بردار ویژه $V_2 = (-1,1,0)^t$ می‌رسیم. با انتخاب $v_1 = -1$ و $v_2 = 0$ داریم $v_3 = 1$. پس به بردار ویژه $V_3 = (-1,0,1)^t$ می‌رسیم. به راحتی می‌توان دید که v_2 و v_3 مستقل خطی هستند (حتی با V_1 نیز مستقل خطی می‌شوند) و طبق قضیه ۱.۳.۵ داریم

$$\begin{aligned}&Y_g = c_1V_1e^{\lambda_1 x} + c_2V_2e^{\lambda_2 x} + c_3V_3e^{\lambda_2 x} =\\ &c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3x} + c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

اکنون به جواب خصوصی نیاز داریم! روش لاگرانژ را در پیش می‌گیریم. پس
مرحله (۱). جواب عمومی در دسترس است! در جواب عمومی یک بار قرار می‌دهیم $c_1 = 1$، $c_2 = c_3 = 0$ و یک بار قرار می‌دهیم $c_1 = c_3 = 0$ و $c_2 = 1$ ، و یک بار قرار می‌دهیم $c_1 = c_2 = 0$ و $c_3 = 1$. سپس جواب‌های را در ستون‌های یک ماتریس قرار می‌دهیم و ماتریس اساسی زیر حاصل می‌شود $T(x) = \begin{pmatrix}e^{3x}&-1&-1\\e^{3x}&1&0\\e^{3x}&0&1\end{pmatrix}$.
مرحله (۲). ماتریس وارون $T(x)$ با همان سبک عادی که می‌شناسید (محاسبه وارون ماتریس مربعی) محاسبه می‌شود $T^{-1}(x) = \begin{pmatrix}\frac{1}{3e^{3x}}&\frac{1}{3e^{3x}}&\frac{1}{3e^{3x}}\\\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.
مرحله (۳). حال داریم

$$U'(x) = T^{-1}(x)B(x) \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\\u_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3e^{3x}}&\frac{1}{3e^{3x}}&\frac{1}{3e^{3x}}\\\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{3x}\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-e^{3x}\\-e^{3x}\end{pmatrix}$$

اکنون سه معادله دیفرانسیل جدایی پذیر در اختیار ما است. جواب این سه معادله را بدون اعمال ثابت انتگرال گیری حساب می‌کنیم. لذا

$$\begin{cases}u_1 = x\\u_2 = -\frac{1}{3}e^{3x}\\u_3 = -\frac{1}{3}e^{3x}\end{cases}$$

مرحله (۴). جواب خصوصی عبارت است از

$$Y_p = T(x)U(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & -1 & -1 \\ e^{3x} & 1 & 0 \\ e^{3x} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{3}e^{3x} \\ -\frac{1}{3}e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{3x} + \frac{2}{3}e^{3x} \\ xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} \\ xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} \end{pmatrix}$$

اکنون طبق قضیه ۲۴.۲.۵ جواب به صورت $Y_G = Y_g + Y_p$ است. یعنی

$$Y_G = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^{3x} + \frac{2}{3}e^{3x} \\ xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} \\ xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} \end{pmatrix}.$$

حال برای قسمت دوم؛ شرط $Y(0) = (0,0,0)^t$ را اعمال می‌کنیم. پس $x = 0$ را قرار می‌دهیم و داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

پس دستگاه زیر را داریم

$$\begin{cases} c_1 - c_2 - c_3 = \frac{-2}{3} \\ c_1 + c_2 = \frac{1}{3} \\ c_1 + c_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

که جواب $c_1 = 0$ و $c_2 = c_3 = \frac{1}{3}$ دارد.

تمرین ۲۱.۳.۵. *جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل* $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} Y$ *را پیدا کنید.*

حل. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب را پیدا کنیم. از حل معادله

$$det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

مقادیر ویژه $\lambda_1 = 1$، $\lambda_2 = i$ و $\lambda_3 = -i$ به دست می‌آیند. حال بردار ویژه نظیر λ_1 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

لذا به بردار ویژه $V_1 = (1,1,1)^t$ می‌رسیم. حال بردار ویژه نظیر λ_2 را پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_2 I)V_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

با ساده سازی این دستگاه داریم $v_1+iv_2=0$ و $0=0=iv_2-v_3$. لذا به بردار ویژه $V_2=(-i,1,i)^t$ می‌رسیم. حال قرار می‌دهیم $Y=V_2e^{\lambda_2 t}=\begin{pmatrix}-i\\1\\i\end{pmatrix}e^{it}$. با کمک قانون اویلر داریم

$$Y=\begin{pmatrix}-i\\1\\i\end{pmatrix}e^{it}=\begin{pmatrix}-i\\1\\i\end{pmatrix}(\cos t+i\sin t)=\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-\cos t\\\sin t\\\cos t\end{pmatrix}$$

حال قسمت حقیقی و موهومی Y مشخص است و طبق قضیه ۱۶.۳.۵ داریم (جایگذاری با شما!)

$$Y_g=c_1V_1e^{\lambda_1 t}+c_2Re[Y]+c_3Im[Y].$$

تمرین ۲۲.۳.۵. *جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل* $Y'=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}Y$ *را پیدا کنید.*

حل. ابتدا مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ را پیدا کنیم. پس

$$0=det(A-\lambda I)=(\lambda-1)^2.$$

ماتریس ضرایب این دستگاه فقط مقدار ویژه تکراری $\lambda=1$ دارد. بردار ویژه این مقدار ویژه $V=(1,0)^t$ است و هر بردار ویژه مضربی ناصفر از V است. پس یک جواب پایه به صورت زیر است $Y_1=e^{\lambda t}V=e^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. حال باید یک بردار ویژه تعمیم یافته W پیدا کنیم. لذا

$$(A-\lambda I)^2W=O\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

این دستگاه نشان می‌دهد که تا اینجا هر W را می‌توانیم انتخاب کنیم. اما باید $(A-\lambda I)W\neq 0$. یعنی

$$(A-2I)W=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

بنابراین با انتخاب $W=(0,1)^t$ (ساده ترین انتخاب ممکن!) همه شرایط قضیه ۷.۳.۵ بر قرار است و لذا جواب پایه دیگر به صورت

$$Y_2=e^{\lambda t}(W+t(A-\lambda I)W)=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=$$
$$e^t\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

حال طبق قضیه ۱۸.۲.۵ $Y_g=c_1Y_1+c_2Y_2$ جواب است.

۴.۵ تمرین‌های کل فصل

تمرین ۱.۴.۵. *مقادیر ویژه ماتریس زیر را مشخص کنید و سپس به دلخواه خود دو بردار ویژه برای آن پیدا کنید.*

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

تمرین ۲.۴.۵. *نشان دهید که سه بردار زیر در فضای برداری $\mathbb{R}^3$ روی $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند.*

$$(2,0,1),\ \ (0,1,2),\ \ (1,2,1).$$

تمرین ۳.۴.۵. *معادله دیفرانسیل $y^{(4)}+3y''-ty'+8y=t^2$ را به یک دستگاه تبدیل کنید.*

تمرین ۴.۴.۵. *فرض کنید که*

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad ...,\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

و A ماتریسی مربعی از اندازه n و U_1، ...، U_n جواب دستگاه $Y'=A(t)Y$ باشد که در شرایط اولیه

$$U_1(t_0)=e_1,\ \ ,...,\ \ U_n(t_0)=e_n$$

صدق می‌کنند که در آن t_0 در بازه مناسب I قرار دارد. نشان دهید U_1، ...، U_n جواب‌های اساسی هستند.

تمرین ۵.۴.۵. *منظور از مزدوج یک ماتریس یعنی مزدوج گیری از درایه‌های آن یعنی $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$. اکنون موارد زیر را نشان دهید.*

(الف) اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد که عدد مختلط است آنگاه بردار ویژه نظیر λ نیز درایه مختلط دارد.

(ب) فرض کنیم ماتریس ضرایب دستگاه معادلات با ضرایب ثابت $Y'=AY$ دو مقدار ویژه $a+ib$ و $a-ib$ دارد. نشان دهید V_1 بردار ویژه نظیر $a+ib$ و v_2 بردار ویژه نظیر $a-ib$ مزدوج مختلط هم هستند.

(ج) با فرضیات (ب)، V_1 و V_2 مستقل خطی هستند.

(د) با فرضیات (ب)، نشان دهید $Y_1=e^{(a+ib)t}V_1$ و $Y_2=e^{(a-ib)t}V_2$ جواب دستگاه هستند.

(ه) فرض کنیم مقادیر ویژه A اعداد مختلط متمایز به صورت $\lambda_1=u_1+iv_1$، $\lambda_2=u_1-iv_2$، ...، $\lambda_{2m-1}=u_m+iv_m$، $\lambda_{2m}=u_m-iv_m$ (مزدوج بودن دقت کنید) و اعداد متمایز حقیقی λ_{2m+1}، ...، λ_n باشد. در این صورت جواب عمومی دستگاه به صورت

$$Y_g=c_1e^{\lambda_1t}V_1+...+c_{2m}e^{\lambda_{2m}t}V_{2m}$$
$$c_{2m+1}V_{2m+1}e^{\lambda_{2m+1}t}+...+c_nV_ne^{\lambda_nt}$$

است که در آن هر V_i بردار ویژه نظیر λ_i است (این جواب، شکل جواب مختلط دستگاه نام دارد و جواب قضیه ۱۶.۳.۵ شکل جواب حقیقی نام دارد).

تمرین ۶.۴.۵. جواب دستگاه $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y$ را پیدا کنید.

تمرین ۷.۴.۵. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ e^t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}$$

(الف) جواب عمومی دستگاه همگن را بنویسید.
(ب) با روش تغییر پارامتر (روش لاگرانژ) جواب خصوصی دستگاه را بنویسید و سپس جواب عمومی کل دستگاه را بنویسید.

تمرین ۸.۴.۵. (الف) معادله کشی_اویلر همگن مرتبه دوم را به صورت دستگاه بنویسید.
(ب) دستگاه $xY' = AY$ دستگاه معادلات متناظر معادلات مرتبه دوم کشی_ اویلر می‌گوییم (پاسخ (الف) را ببینید). فرض کنید $Y = Dx^\lambda$ که D یک ماتریس ثابت $n \times 1$ است و نشان دهید که دستگاه معادلات کشی_ اویلر جواب نابدیهی Y دارد که D و λ در معادله $(A - \lambda I)D = 0$ صدق می‌کنند.
(ج) برای $x > 0$ جواب دستگاه $xY' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} Y$ را بنویسید.

۵.۵ نمونه سوالات امتحانی تشریحی

سوال ۱.۵.۵. (پایان ترم صنعتی اصفهان) دستگاه زیر را از روش مقدار ویژه_ بردار ویژه حل کنید.

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

پاسخ. ماتریس ضرایب این دستگاه مقدار $\lambda = 2$ و مقدار ویژه با دو تکرار $\lambda' = -1$ دارد. بردار ویژه λ به صورت $V = (1, -3, 3)^t$ است. پس جواب پایه زیر را داریم

$$Y_1 = e^{\lambda t} V = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

اما بردار ویژه λ' به صورت $V' = (1,0,0)^t$ است و هر بردار ویژه نظیر λ' مضربی ناصفر از V' است و بردار مستقل جدید به دست نمی‌دهد. پس جواب پایه دوم به صورت

$$Y_2 = e^{\lambda' t} V_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

است. حال باید یک بردار ویژه تعمیم یافته W پیدا کنیم. لذا

$$(A - \lambda' I)^2 W = O$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

این دستگاه اجبار می‌کند که $w_3 = 0$ و w_1، w_2 دلخواه باشند. از طرفی باید $(A - \lambda' I) \neq O$. یعنی

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

برای این شرایط دستگاه آخر برقرار باشد باید $w_2 \neq 0$ یا $w_3 \neq 0$. با توجه به بالا چون $w_3 = 0$، پس باید $w_2 \neq 0$. با انتخاب $w_2 = 1$، $w_3 = w_1 = 0$ داریم $W = (0,1,0)^t$. طبق قضیه ۹.۳.۵ جواب پایه آخر به صورت

$$Y_3 = e^{\lambda' t}(W + t(A - \lambda' I)W) = e^{-t} \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

است. طبق قضیه ۱۸.۲.۵ جواب به صورت $Y_g = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ است.

سوال ۲.۵.۵. (*پایان ترم صنعتی اصفهان*) *دستگاه معادلات خطی غیر همگن با ضرایب ثابت زیر را به روش مقدار ویژه‌ـ بردار ویژه حل کنید.*

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}$$

پاسخ. ابتدا جواب عمومی دستگاه همگن نظیر را معلوم می‌کنیم. برای این منظور ابتدا مقدار ویژه را نیاز داریم. پس

$$0 = det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

پس مقادیر ویژه $\lambda_1 = 1 + 2i$ و $\lambda_2 = 1 - 2i$ هستند. حال بردار ویژه نظیر λ_1 را حساب می‌کنیم. پس

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O = (A - \lambda_1 I)V_1 = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

و این نتیجه می‌دهد که $v_1 + iv_2 = 0$. با انتخاب $v_2 = 1$ داریم $v_1 = -i$. بنابراین $V_1 = (-i, 1)^t$. مقدار ویژه حقیقی نداریم! قرار می‌دهیم $Y = V_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t}$. با کمک فرمول اویلر داریم

$$Y = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^t e^{i2t} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^t(\cos(2t) + i\sin(2t)) =$$
$$\begin{pmatrix} e^t \sin(2t) - ie^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) + ie^t \sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -e^t \cos(2t) \\ e^{-t} \sin(2t) \end{pmatrix}$$

لذا

$$Re[Y] = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix} \qquad Im[Y] = \begin{pmatrix} -e^t \cos(2t) \\ e^t \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

حال طبق قضیه ۱۶.۳.۵ داریم

$$Y_g = c_1 Re[Y] + c_2 Im[Y] = c_1 \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^t \cos(2t) \\ e^t \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

اکنون نیاز به جواب خصوصی داریم! روش لاگرانژ را در پیش می‌گیریم.
مرحله (۱). جواب عمومی دستگاه همگن نظیر را در بالا یافته‌ایم. اکنون در جواب عمومی یک بار قرار می‌دهیم $c_1 = 1$، $c_2 = 0$ و یک بار قرار می‌دهیم $c_1 = 0$ و $c_2 = 1$. سپس جواب‌های را در ستون‌های یک ماتریس قرار می‌دهیم و ماتریس اساسی زیر حاصل می‌شود

$$T(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) & -e^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

مرحله (۲). ماتریس وارون $T(t)$ با همان سبک عادی که می‌شناسید (محاسبه وارون ماتریس مربعی) محاسبه می‌شود $T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin(2t) & e^{-t} \cos(2t) \\ -e^{-t} \cos(2t) & e^{-t} \sin(2t) \end{pmatrix}$.
مرحله (۳). حال داریم

$$U'(t) = T^{-1}(t) B(t)$$
$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin(2t) & e^{-t} \cos(2t) \\ -e^{-t} \cos(2t) & e^{-t} \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) - 3\cos(2t) \\ -\cos(2t) - 3\cos(2t) \end{pmatrix}$$

اکنون دو معادله دیفرانسیل جدایی پذیر در اختیار ما است. جواب دو معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} u_1' = \sin(2t) - 3\cos(2t) \\ u_2' = -\cos(2t) - 3\cos(2t) \end{cases}$$

را بدون اعمال ثابت انتگرال گیری حساب می‌کنیم. لذا

$$\begin{cases} u_1 = \frac{-1}{2}\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t) \\ u_2 = -\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) \end{cases}$$

مرحله (۴). جواب خصوصی عبارت است از $Y_p = T(t)U(t) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}e^t \\ \frac{-1}{2}e^t \end{pmatrix}$.
اکنون طبق قضیه ۲۴.۲.۵ جواب به صورت $Y_G = Y_g + Y_p$ است.

سوال ۳.۵.۵. (*پایان ترم صنعتی اصفهان*) *دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.*

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

پاسخ. ماتریس ضرایب این دستگاه فقط مقدار $\lambda = 2$ دارد که سه بار تکرار شده است. با تشکیل $(A - \lambda I)V = 0$ به $v_2 = v_3 = 0$ و $v_1 = 0$ آزاد می‌رسیم. با انتخاب $v_1 = 1$ نتیجه می‌شود که $V = (1, 0, 0)^t$ بردار ویژه است. هر بردار ویژه دیگر مضربی از V_1 است. پس تنها یک بردار ویژه داریم. یک جواب پایه به صورت $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Y_1 = e^{\lambda t}V = e^{2t}$ است. اکنون باید دو بردار ویژه تعمیم یافته W و W' ارائه کنیم. پس

$$\begin{aligned}
&(A - \lambda I)^2 W = O \\
&\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

پس $w_3 = 0$ و w_1 و w_2 آزاد هستند. اما باید $(A - \lambda I)W \neq O$، یعنی

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

از اینجا هم $w_2 \neq 0$ یا $w_3 \neq 0$ نتیجه می‌شود. با توجه به بالا حتما $w_2 \neq 0$ ولی w_1 آزاد است. پس می‌توانیم $W = (0, 1, 0)^t$ انتخاب کنیم. در نتیجه جواب پایه دیگر از قضیه ۱۳.۳.۵ به صورت زیر است

$$Y_2 = e^{\lambda t}(W + t(A - \lambda I)W) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

حال W' را مشخص می‌کنیم

$$(A-\lambda I)^3 W' = W$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس تا اینجا W' می‌تواند هر چیزی باشد! اما با کمک شرط $(A-\lambda I)^2 W' \neq O$، یعنی

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

داریم که $w'_3 \neq 0$.پس می‌توانیم $W' = (0,0,1)^t$ انتخاب کنیم. در نتیجه جواب پایه سوم از قضیه ۱۳.۳.۵ به صورت زیر است

$$Y_3 = e^{\lambda t}(W' + t(A-\lambda I)W' + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2 W') =$$
$$e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

اکنون طبق قضیه ۱۸.۲.۵ جواب به صورت $Y_g = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3$ است.

سوال ۴.۵.۵. *(پایان ترم صنعتی امیرکبیر) دستگاه معادله زیر را حل کنید.*

$$\begin{cases} y' = y_1 + y_2 - e^t + e^{-t} \\ y'_2 = y_2 + e^t \\ y'_3 = y_1 + y_3 - 2e^t - e^{-t} \end{cases}.$$

پاسخ. ابتدا دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t + e^{-t} \\ e^t \\ -2e^t - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

ماتریس ضرایب این دستگاه مقدار $\lambda = 2$ و مقدار ویژه با دو تکرار $\lambda' = 1$ دارد. بردار ویژه λ به صورت $V = (-1,0,1)^t$ است (چگونه؟). پس جواب پایه زیر را داریم

$$Y_1 = e^{\lambda t}V = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

اما بردار ویژه λ' به صورت $V' = (0,0,1)^t$ است (چگونه؟) و هر بردار ویژه نظیر λ' مضربی ناصفر از V' است و بردار مستقل جدید به دست نمی‌دهد. پس جواب پایه دوم به صورت

$$Y_2 = e^{\lambda' t} V_2 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

است. حال باید یک بردار ویژه تعمیم یافته W پیدا کنیم. لذا

$$(A - \lambda' I)^2 W = O$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

این دستگاه اجبار می‌کند که $w_1 + w_2 + w_3 = 0$. از طرفی باید $(A - \lambda' I) \neq O$. یعنی

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

برای این شرایط دستگاه آخر برقرار باشد باید $w_2 \neq 0$ یا $w_1 + w_3 \neq 0$. با توجه به بالا داریم $W = (-1,1,0)^t$ و طبق قضیه ۹.۳.۵ جواب پایه آخر به صورت

$$Y_3 = e^{\lambda' t}(W + t(A - \lambda' I)W) = e^t \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

است. طبق قضیه ۱۸.۲.۵ جواب به صورت $Y_g = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$ است. اکنون جواب خصوصی نیاز داریم! روش لاگرانژ پیاده می‌کنیم.

مرحله (۱). جواب عمومی در دسترس است! ماتریس اساسی زیر حاصل می‌شود (چگونه؟)

$$T(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} & 0 & -e^t + te^t \\ 0 & 0 & e^t \\ e^{2t} & e^t & -te^t \end{pmatrix}.$$

مرحله (۲). ماتریس وارون $T(t)$ با همان سبک عادی که می‌شناسید (محاسبه وارون ماتریس مربعی) محاسبه می‌شود $T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & (t-1)e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{pmatrix}$.

مرحله (۳). حال داریم (محاسبات را تکمیل کنید)

$$U'(t) = T^{-1}(t) B(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^t + e^{-t} - e^{-3t} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

اکنون سه معادله دیفرانسیل جدایی پذیر در اختیار ما است. جواب این سه معادله را بدون اعمال ثابت انتگرال گیری حساب می‌کنیم (معادله آخر خودش ثابت عددی است پس بدون ثابت آن یعنی صفر!)

$$\begin{cases} u_1 = te^t - 2e^t + \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-t} \\ u_2 = -2t \\ u_3 = t \end{cases}$$

مرحله (۴). جواب خصوصی عبارت است از (محاسبات را تکمیل کنید)

$$Y_p = T(x)U(x) = \begin{pmatrix} \frac{3te^t - 3e^{3t}t + 6e^{3t} - 1}{3} \\ e^t \\ \frac{3te^{3t} - 6e^{3t} + 1 - 9e^t - 3e^t t}{3} \end{pmatrix}$$

اکنون طبق قضیه ۲۴.۲.۵ جواب به صورت $Y_G = Y_g + Y_p$ است.

سوال ۵.۵.۵. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) دستگاه* $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$ *را حل کنید.*

پاسخ. ماتریس ضرایب این دستگاه فقط مقدار $\lambda = 1$ دارد که سه بار تکرار شده است. با تشکیل $(A - \lambda I)V = 0$ به $v_2 = v_3 = 0$ و $v_1 = 0$ آزاد می‌رسیم (چگونه؟). با انتخاب $v_1 = 1$ نتیجه می‌شود که $V = (1, 0, 0)^t$ بردار ویژه است. هر بردار ویژه دیگر مضربی از V است. پس تنها یک بردار ویژه داریم. یک جواب پایه به صورت $X_1 = e^{\lambda t}V = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ است. اکنون باید دو بردار ویژه تعمیم یافته W و W' ارائه کنیم. پس

$$(A - \lambda I)^2 W = O$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

پس $w_3 = 0$. اما باید $(A - \lambda I)W \neq O$، یعنی

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

از اینجا هم نامعادله $w_2 + w_3 \neq 0$ و $w_3 \neq 0$ نتیجه می‌شود. پس با توجه به بالا می‌توانیم $W = (0, 1, 0)^t$ انتخاب کنیم. در نتیجه جواب پایه دیگر از قضیه ۱۳.۳.۵ به صورت زیر است

$$X_2 = e^{\lambda t}(W + t(A - \lambda I)W) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

حال W' را مشخص می‌کنیم

$$(A-\lambda I)^3 W' = W$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w'_1\\w'_2\\w'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

پس تا اینجا W' می‌تواند هر چیزی باشد! اما با کمک شرط $(A-\lambda I)^2 W' \neq O$، یعنی

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w'_1\\w'_2\\w'_3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

داریم که $w'_3 \neq 0$.پس می‌توانیم $W' = (0,0,1)^t$ انتخاب کنیم. در نتیجه جواب پایه سوم از قضیه ۱۳.۳.۵ به صورت زیر است

$$X_3 = e^{\lambda t}(W' + t(A-\lambda I)W' + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2 W') =$$
$$e^t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

اکنون طبق قضیه ۱۸.۲.۵ جواب به صورت $X_g = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$ است.

۶.۵ نمونه سوالات تستی

۱. (سراسری شیمی ۸۴) جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+3y\\ \frac{dy}{dt}=2x+y\end{cases}$ عبارت است از

(۱) $x=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$ و $y=c_1e^{2t}+c_2e^{t}$

(۲) $x=c_1e^{-t}+3c_2e^{4t}$ و $y=c_1e^{-t}+2c_2e^{4t}$

(۳) $x=c_1e^{-t}+c_2e^{4t}$ و $y=c_1e^{-t}+c_2e^{4t}$

(۴) $x=c_1e^{-t}+3c_2e^{3t}$ و $y=c_1e^{-t}+2c_2e^{t}$

۲. (سراسری ریاضی ۸۳) ماتریس پایه‌های جواب دستگاه معادله دیفرانسیل $X'=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}$ کدام است

(۱) $e^{at}\begin{pmatrix}1&1+t\\0&1\end{pmatrix}$ (۲) $\begin{pmatrix}e^{at}&t\\0&e^{at}\end{pmatrix}$

(۳) $e^{at}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$ (۴) $\begin{pmatrix}e^{at}&0\\te^{at}&e^{at}\end{pmatrix}$

۳. (سراسری ریاضی ۷۹) رنسکین جواب‌های اساسی دستگاه $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$ کدام است

(۱) e^{2t} (۲) e^{4t} (۳) $4e^{3t}$ (۴) $4e^{2t}$

۴. (سراسری ریاضی ۸۳) جواب دستگاه معادله دیفرانسیل $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$ با شرط اولیه $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ کدام است

(۱) $\begin{pmatrix} e^t - 1 \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$ (۲) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} - 1 \\ e^t - e^{2t} \end{pmatrix}$

(۳) $\begin{pmatrix} 2e^t - 1 \\ e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$ (۴) $\begin{pmatrix} e^{2t} - 1 \\ 2e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix}$

فصل ۶

حل معادلات دیفرانسیل با کمک سری‌ها

در فصل سوم مشاهده کردید یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت حل تحلیلی داشت. اما وقتی ضرایب متغیر می‌شد، ارائه حل تحلیلی دشوار یا امکان پذیر نبود. اما در این فصل حل یک معادله دیفرانسیل (تمرکز روی مرتبه دوم است) را به کمک سری‌ها آموزش می‌دهیم. هر چند این روش مقدار دقیق پاسخ را در هر نقطه به دست نمی‌دهد، اما رفتار جواب را بسیار عالی مشخص می‌کند. در شمایل کلی بخواهیم روش سری برای حل معادله دیفرانسیل را شرح دهیم، باید بگوییم که فرض می‌کنیم جواب‌های معادله دیفرانسیل داده شده را می‌توان به صورت یک سری توانی گسترش داد و سپس ضرایب سری را معلوم کرد. همانطور که از فصل‌های گذشته متوجه شده‌اید، این روش هم مانند سایر روش‌های که آموخته‌اید، حتما نواقصی دارد و مطمئنا هر معادله دیفرانسیلی را نمی‌تواند حل کند! یک ایراد اساسی این روش این است که در برخی مواقع محاسبه ضرایب سری توانی عملا بسیار پیچیده است! لازم است که دانشجو از درس ریاضی عمومی روی مفاهیمی مانند دنباله، سری عددی، همگرایی و واگرایی تسلط نسبی داشته باشد.

۱.۶ مقدمات: سری توابع

این بخش مقدماتی است و ممکن است برخی دانشجویان در منابع ریاضی عمومی یا دوره ریاضی عمومی با آن آشنا شده باشند. در هر صورت به دلیل تغییر روند در دوره درسی ریاضی عمومی مدرس لازم می‌داند مروری گذرا بر مفاهیم زیر داشته باشد. اگر در این بخش دانشجو احساس کرد که مسلط نیست، بهتر است به منابع ریاضی عمومی مراجعه نماید.

تعریف ۱.۱.۶. *منظور از یک سری تابعی یعنی سری که جملات آن تابع‌های از متغیر x (یا t) باشند. یعنی $f(x) = s_1(x) + s_2(x) + s_3(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x)$. برای x های مختلف به سری‌های عددی مختلف دست می‌یابیم که برخی از این سری‌های عددی ممکن است همگرا و برخی ممکن است واگرا باشند. مجموعه همه مقادیر x که سری تابعی به ازای آن همگرا باشد دامنه همگرایی سری تابعی می‌نامیم.*

مثال ۲.۱.۶. سری $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx(1-x^2)^n$ *سری تابعی است و* $s_n(x) = nx(1-x^2)^n$

است. این سری تابعی برای $x=0$ سری عددی همگرای 0 را به دست می‌دهد و برای $x=2$ سری واگرای $\sum_{n=1}^{\infty} 2n(-3)^n$ را به دست می‌دهد.

مثال ۳.۱.۶. سری $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{j=1}^{\infty}(-x)^{j-1}$ یک سری تابعی است که $s_j(x)=(-x)^{j-1}$ است. بدون خللی در تعریف می‌توان فرض کرد $s_n(x)=(-x)^n$. این سری تابعی برای $x=\frac{1}{2}$ سری عددی همگرای $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{2})^n$ را به دست می‌دهد و برای $x=-2$ سری واگرای $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ را به دست می‌دهد.

تعیین دامنه همگرایی یک سری تابعی کار ساده‌ای نیست! اما برای معروفترین سری تابعی، که سری توانی نام دارد دامنه همگرایی دقیق مشخص می‌شود که آن را در ادامه مشاهده می‌کنید.

تعریف ۴.۱.۶. هرگاه یک سری تابعی بر حسب توان‌های صعودی، صحیح و مثبت از متغیر مستقل x مرتب شود به آن سری توانی گوییم. به عبارت دیگر سری تابعی به یکی از دو فرم زیر باشد

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

مثال ۵.۱.۶. سری تابعی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$ یک سری توانی است که $a_n=(-1)^n$ است.

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۶.۱.۶. (دامنه همگرایی سری توانی) برای سری توانی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دامنه همگرایی برابر $|x|<R$ است که در آن $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ (به R شعاع همگرایی گوییم. در حقیقت حد قدر مطلق دو جمله متوالی عکس شعاع است).

مثال ۷.۱.۶. می‌خواهیم دامنه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ را مشخص کنیم. واضح است که $a_n=\frac{1}{n+1}$. پس

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{n+1}{n+2}|=1$$

در نتیجه $R=1$ است. بنابراین $|x|<1$ یا بطور معادل $(-1,1)$ دامنه همگرایی است.

مثال ۸.۱.۶. می‌خواهیم دامنه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n+1}$ را مشخص کنیم. فرض کنیم $u=x-2$. پس $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n+1}$ اکنون واضح است که $a_n=\frac{1}{n+1}$. پس

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{n+1}{n+2}|=1$$

در نتیجه $R=1$ است. بنابراین $|u|<1$ یا بطور معادل $|x-2|<1$ دامنه همگرایی است. یعنی بازه $(1,3)$.

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۹.۱.۶. *اگر دامنه همگرایی سری $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر $|x|<R$ باشد آنگاه دو سری زیر نیز همین دامنه همگرایی را دارند*
(الف) سری مشتق: $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
(ب) سری انتگرال: $\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$.

اما چه توابعی به صورت یک سری توانی هستند؟ پاسخ این پرسش در حالت خاصی منجر به تعریف سری تیلور و سری مک‌لورن می‌شود (جزییات بیشتر را در منابع ریاضی عمومی دنبال کنید).

تعریف ۱۰.۱.۶. *فرض کنیم $f(x)$ تابعی روی بازه (x_0-R,x_0+R) (یا $|x-x_0|<R$) و از هر مرتبه دلخواهی مشتق پذیر باشد. در این صورت به سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ سری تیلور (یا بسط تیلور) حول نقطه x_0 گوییم. اگر x_0 برابر صفر باشد آنگاه به سری تیلور، سری مک‌لورن گوییم. یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.*

تذکر ۱۱.۱.۶. *سری مک‌لورن یک چندجمله‌ای خودش است.*

مثال ۱۲.۱.۶. *می‌خواهیم سری مک‌لورن تابع $f(x)=e^x$ را بنویسیم. می‌دانیم که این تابع از هر مرتبه‌ای مشتق پذیر است و $f^{(n)}(x)=e^x$ است. لذا $f^{(n)}(0)=1$. بنابراین داریم*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

شعاع همگرایی این سری برابر با بینهایت است یعنی دامنه همگرایی کل اعداد حقیقی است. زیرا $a_n=\frac{1}{n!}$ و

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{n!}{(n+1)!}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{1}{n+1}|=0.$$

مثال ۱۳.۱.۶. *می‌خواهیم سری تیلور تابع $f(x)=e^x$ را در $x_0=1$ بنویسیم. می‌دانیم که این تابع از هر مرتبه‌ای مشتق پذیر است و $f^{(n)}(x)=e^x$ است. لذا $f^{(n)}(1)=e$. بنابراین داریم*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n=e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

شعاع همگرایی این سری برابر با بینهایت است یعنی دامنه همگرایی کل اعداد حقیقی است. زیرا $a_n=\frac{1}{n!}$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{n!}{(n+1)!}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{1}{n+1}|=0.$$

مثال ۱۴.۱.۶. *می‌خواهیم سری مک‌لورن تابع $f(x) = \sin x$ را بنویسیم. می‌دانیم که این تابع از هر مرتبه‌ای مشتق پذیر است. داریم $f'(x) = \cos x$ و لذا $f'(0) = 1$. اما $f''(x) = -\sin x$ و در نتیجه $f''(0) = 0$. به همین صورت $f'''(0) = -1$. با ادامه این روند مشاهده می‌شود که مشتقات مرتبه زوج همگی صفر هستند. بنابراین داریم*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... =$$

$$0 + x + 0 - \frac{1}{3!} x^3 + 0 - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

دامنه همگرایی این سری نیز کل اعداد حقیقی است (بررسی کنید).

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱۵.۱.۶. *شعاع همگرایی سری تیلور (یا مک‌لورن) یک تابع کسری در $x = x_0$ برابر است با کمترین فاصله ریشه‌های مخرج از x_0.*

مثال ۱۶.۱.۶. *شعاع همگرایی سری تیلور تابع $\frac{1}{x-1}$ در $x_0 = 2$ برابر یک است. چون ریشه مخرج یک است و فاصله این ریشه تا x_0 یک است.*

مثال ۱۷.۱.۶. *شعاع همگرایی سری مک‌لورن تابع $\frac{1}{x^2+1}$ برابر یک است. چون ریشه مخرج i و $-i$ است و فاصله این ریشه‌ها تا 0 یک است.*

مثال ۱۸.۱.۶. *شعاع همگرایی سری مک‌لورن تابع $\frac{1}{(x-1)(x-4)}$ برابر یک است. چون ریشه مخرج 1 و 4 است و کمترین فاصله این ریشه‌ها تا 0 یک است.*

سری مک‌لورن برای ما اهمیت بیشتری دارد! در کادر زیر سری مک‌لورن برخی توابع پرکاربرد همراه با شعاع همگرایی را می‌بینیم (بهتر است دانشجو آن را حفظ کند!).

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	$R = 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$R = \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$R = \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$R = \infty$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$R = 1$
$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \dots$	$R = 1$

تمرین ۱۹.۱.۶. *دامنه همگرایی سری* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)3^n}$ *را به دست آورید.*

حل. واضح است که $a_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}$. پس

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^{n+1}}|=\frac{1}{3}$$

در نتیجه $R=3$ است. بنابراین $|x|<3$ یا بطور معادل $(-3,3)$ دامنه همگرایی است.

تمرین ۲۰.۱.۶. *قانون اویلر،* $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ *را اثبات کنید.*

حل. طبق کادر بالا برای سری مک‌لورن، می‌دانیم که

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots.$$

لذا

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\cdots.$$

در نتیجه

$$e^{ix}=(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...).$$

طبق کادر بالا، پرانتز اول $\cos x$ و پرانتز دوم $\sin x$ است و حل کامل است.

تمرین ۲۱.۱.۶. *سری مک‌لورن تابع* $f(x)=\cosh x$ *را بنویسید.*

حل. می‌دانیم که $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. پس طبق جدول بالا داریم

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=$$
$$\frac{1}{2}\left((1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)+(1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\cdots)\right)=$$
$$\frac{1}{2}(2+x^2+\frac{2x^4}{24}+\cdots)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

تمرین ۲۲.۱.۶. *سری مک‌لورن* $\frac{-1}{(x+1)^2}$ *را به دست آورید.*

حل. طبق جدول بالا داریم

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1-(-x)}=$$
$$1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots=1-x+x^2-x^3+\cdots.$$

اما با کمی دقت داریم که $(\frac{1}{1+x})'=\frac{-1}{(x+1)^2}$. پس

$$(\frac{1}{x+1})'=-1+2x-3x^2+\cdots.$$

۲.۶ حل معادله دیفرانسیل به روش سری توانی: نقطه عادی

در این بخش حل یک معادله دیفرانسیل را به کمک سری توانی آموزش می‌دهیم. البته این روش را برای معادلات مرتبه دوم خطی استفاده می‌کنیم. قبل از شروع هر کاری به دو مثال زیر دقت نمایید که برای معادلات مرتبه اول آورده‌ایم تا در ادامه با روند کار آشنا شوید.

مثال ۱.۲.۶. *معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول*

$$y' - 3xy = x \qquad y(0) = 1$$

را در نظر بگیرید (معادله خطی مرتبه اول است و جواب آن مشخص است). فعلا می‌پذیریم که جواب این معادله تابعی است که به شکل سری توانی است. پس کافی است یک سری توانی را جواب فرض کنیم و سپس ضرایب سری را مشخص کنیم. مثلا سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ را در نظر می‌گیریم. هدف ما تعیین b_nها است. داریم

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots.$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم

$$(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots) - 3x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) = x.$$

کمی مرتب می‌کنیم (هم درجه‌ها زیر هم هستند و توان kام را هم نوشته‌ایم)

$$\begin{array}{llllllll} b_1 & +2b_2x & +3b_3x^2 & +\cdots & +kb_kx^{k-1} & +\cdots & & \\ & -3b_0x & -3b_1x^2 & +\cdots & -3b_{k-2}x^{k-1} & +\cdots & = x. & \end{array}$$

حال هم درجه‌ها را متحد قرار می‌دهیم. سمت راست تساوی ضریب x^0 برابر صفر است. پس باید $b_1 = 0$. سمت راست تساوی ضریب x برابر یک است. پس باید $2b_2 - 3b_0 = 1$ بطور معادل $b_2 = \frac{3b_0+1}{2}$. ضریب x^2 در سمت راست تساوی صفر است پس باید $3b_3 - 3b_1 = 0$ یا بطور معادل $b_3 = 0$. همین روند را ادامه می‌دهیم، ضریب x^{k-1} در سمت راست صفر است پس باید $kb_k - 3b_{k-2} = 0$ یعنی $b_k = \frac{3}{k} b_{k-2}$. این دنباله (بازگشتی) برای $k \geq 2$، ضرایب را مشخص می‌کند. مثلا برای $k = 3$ داریم $b_3 = \frac{3}{3} b_1 = 0$. با همین روند برای kهای فرد به مضربی از b_1 خواهیم رسید و در نتیجه ضریب‌های فرد همگی صفر هستند. اما داریم

$$b_4 = \frac{3}{4} b_2 = \frac{3}{4} . \frac{3b_0 + 1}{2}.$$

اما

$$b_6 = \frac{3}{6} . b_4 = \frac{3}{6} . \frac{3}{4} . \frac{3b_0 + 1}{2}.$$

با همین روند برای kهای زوج به مضربی از b_2 خواهیم رسید. بنابراین داریم

$$b_{2n} = \frac{3^{n-1}}{2^n n!}(3b_0 + 1).$$

لذا

$$y = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \cdots = b_0 + (\frac{3b_0+1}{2})x^2 + (\frac{3}{4}.\frac{3b_0+1}{2})x^4 + \cdots.$$

اما $y(0) = 1$ نتیجه می‌دهد که $b_0 = 1$ و لذا

$$y = 1 + 2x^2 + \frac{3}{2}x^4 + \cdots.$$

اگر جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بالا را به دست آورید و سری مک‌لورن بنویسید به سری بالا می‌رسید جواب معادله دیفرانسیل با شرط اولیه بالا $y = \frac{4e^{\frac{3}{2}x^2}}{3} - \frac{1}{3}$ است).

مثال ۲.۲.۶. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $xy' = 1$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم این معادله دارای جواب عمومی $y = \ln x + c$ است. فعلا می‌پذیریم که جواب این معادله تابعی است که به شکل سری توانی است. پس کافی است یک سری توانی را جواب فرض کنیم و سپس ضرایب سری را مشخص کنیم. مثلا سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ را در نظر می‌گیریم. هدف ما تعیین b_nها است. داریم

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots.$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم

$$x(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots) = 1.$$

یعنی

$$b_1 x + 2b_2 x^2 + 3b_3 x^3 + \cdots = 1.$$

حال هم درجه‌ها را متحد قرار می‌دهیم. سمت راست تساوی ضریب x^0 برابر یک است. اما سمت چپ اصلا x^0 ندارد! بنابراین فرض ما مبنی بر این که این معادله جوابی به صورت سری توانی دارد از بیخ، بن، پایه و اساس مشکل دارد!

دو مثال بالا ما را به طرف این سوال طبیعی سوق می‌دهد که چه زمانی یک معادله دیفرانسیل جوابی به صورت سری توانی دارد؟ پاسخ این پرسش را در ادامه و بخش بعد خواهیم داد. ابتدا مقدمات زیر لازم است.

تعریف ۳.۲.۶. گوییم تابع $f(x)$ در $x = x_0$ تحلیلی است هرگاه در $x = x_0$ سری تیلور داشته باشد. اگر $f(x)$ در سراسر دامنه خود تحلیلی باشد گوییم $f(x)$ تحلیلی است.

مثال ۴.۲.۶. *توابع $\sin x$ و e^x تحلیلی هستند. چندجمله‌ای‌ها همواره تحلیلی هستند. مجموع و حاصل ضرب توابع تحلیلی، تحلیلی است. تقسیم دو تابع تحلیلی، به شرط آن که مخرج صفر نشود، تحلیلی است.*

تعریف ۵.۲.۶. *فرض کنیم توابع $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در $x = x_0$ تحلیلی باشند. در این صورت نقطه $x = x_0$ را برای معادله دیفرانسیل $f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$ عادی یا معمولی گوییم هرگاه $f_2(x_0) \neq 0$. در غیر این صورت به x_0 نقطه غیر عادی یا منفرد گوییم.*

مثال ۶.۲.۶. *برای معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y'' + xy' = 3x$ نقطه $x_0 = 1$ و $x_0 = -1$ نقطه منفرد هستند و سایر نقاط عادی می‌باشند.*

مثال ۷.۲.۶. *اگر $f_2(x) = 1$ و $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ تحلیلی باشند آنگاه هر نقطه‌ای عادی است.*

وقت آن است که بخشی از پاسخ سوال مطرح شده در بالا را در قضیه زیر ارائه کنیم. قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۸.۲.۶. *فرض کنیم توابع $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در $x = x_0$ تحلیلی باشند. اگر $x = x_0$ نقطه معمولی باشد آنگاه معادله دیفرانسیل $f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$ دارای جوابی به صورت سری تیلور $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ است که این جواب به فرم*

$$y = c\sum_i u_i(x-x_0)^i + c'\sum_j v_j(x-x_0)^j + \sum_l c_l(x-x_0)^l$$

قابل نوشتن است (c و c' ثابت هستند).

مثال‌های زیر را دنبال کنید تا نحوه استفاده از قضیه ۸.۲.۶ را بیاموزید.

مثال ۹.۲.۶. *می‌خواهیم جواب معادله دیفرانسیل $(x^2-2x)y'' - (5x-5)y' - 7y = 0$ را به روش سری در $x_0 = 1$ پیدا کنیم و سپس شعاع همگرایی سری را به دست آوریم. داریم*

$$f_2(x) = x^2 - 2x, \quad f_1(x) = -5x + 5, \quad f_0(x) = -7, \quad g(x) = 0.$$

تمام توابع بالا در $x_0 = 1$ تحلیلی هستند و $f_2(1) = -1$ است. لذا شرایط قضیه ۸.۲.۶ بر قرار است. چون طبق قضیه ۸.۲.۶، جواب به صورت سری بر حسب توان‌های $x - 1$ است، لذا نیاز داریم که سری تیلور $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بنویسیم، یعنی بر حسب توان‌های $x - 1$ مرتب کنیم. بنابراین $f_2(x) = -1 + (x-1)^2$. اما $f_1(x) = -5(x-1)$ خودش بر حسب توان‌های $x - 1$ مرتب شده است. همینطور $f_3(x) = -7 = -7(x-1)^0$. اکنون فرض کنیم جواب به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ است. لذا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$(-1+(x-1)^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - 5(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} -$$
$$7\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0.$$

ضرب پرانتزها را انجام و سپس عبارات را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم و سیگماهای هم اندیس را کنار هم قرار می‌دهیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} -n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)-5n-7)]a_n(x-1)^n = 0.$$

ضریب $(x-1)^0$ در سمت راست تساوی برابر با صفر است. اما ضریب $(x-1)^0$ در سیگمای اول برابر با $-2a_2$ است. زیرا برای $n=0$ و $n=1$ سیگمای اول صفر می‌شود. همچنین ضریب $(x-1)^0$ در سیگمای دوم برابر با $-7a_0$ است (چرا؟). لذا ضریب $(x-1)^0$ در سمت چپ تساوی برابر با $-2a_2-7a_0$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $-2a_2-7a_0=0$ یا بطور معادل $a_2=\frac{-7}{2}a_0$.
داریم که ضریب $x-1$ در سمت راست تساوی برابر با صفر است. اما ضریب $x-1$ در سیگمای اول برابر با $-6a_3$ است (چرا؟). ضریب $x-1$ در سیگمای دوم برابر با $-12a_1$ است (چرا؟). لذا ضریب $x-1$ در سمت چپ تساوی برابر با $-6a_3-12a_1$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $-6a_3-12a_1=0$ یا بطور معادل $a_3=-2a_1$. روند را ادامه می‌دهیم.
داریم که ضریب $(x-1)^k$ در سمت راست تساوی برابر با صفر است. اما ضریب $(x-1)^k$ در سیگمای اول برابر با $-(k+2)(k+1)a_{k+2}$ است (چرا؟). ضریب $(x-1)^k$ در سیگمای دوم برابر با $(k^2-6k-7)a_k$ است (چرا؟). لذا ضریب $(x-1)^k$ در سمت چپ تساوی برابر با $-(k+2)(k+1)a_{k+2}+(k^2-6k-7)a_k$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم

$$-(k+2)(k+1)a_{k+2}+(k^2-6k-7)a_k=0.$$

با ساده سازی دنباله بازگشتی زیر را داریم $a_{k+2}=\frac{k-7}{k+2}a_k$. حال همه ضرایب برحسب a_0 و a_1 قابل محاسبه است. برای مثال داریم

$$a_4=\frac{2-7}{2+2}a_2=\frac{-5}{4}.\frac{-7}{2}a_0=\frac{35}{8}a_0$$
$$a_5=\frac{3-7}{3+2}a_3=\frac{-4}{5}(-2a_1)=\frac{8}{5}a_1.$$

در واقع ضرایب زوج مضربی از a_0 و ضرایب فرد مضربی از a_1 است. اکنون جواب y در دسترس است! زیرا

$$\begin{aligned}
&y = a_0(x-1)^0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \ldots = \\
&a_0(x-1)^0 + a_1(x-1) - \frac{7}{2}a_0(x-1)^2 - 2a_1(x-1)^3 + \ldots \\
&a_0(1 - \frac{7}{2}(x-1)^2 + \frac{35}{8}(x-1)^2 + \ldots) + \\
&a_1((x-1) - 2(x-1)^3 + \frac{8}{5}(x-1)^5 + \ldots).
\end{aligned}$$

a_0 و a_1 همان c و c' در قضیه ۶.۲.۸ هستند. چون $g(x) = 0$ است فرم جواب سیگمای سوم را در قضیه ۶.۲.۸ ندارد. اکنون شعاع همگرایی را حساب می‌کنیم (قضیه ۶.۱.۶ را به دقت ببینید)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+2}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n-7}{n+2}| = 1$$

لذا $R = 1$ است.

مثال ۶.۲.۱۰. می‌خواهیم معادله دیفرانسیل با شرط اولیه

$$y'' + 2x^2y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$$

را به روش سری حل کنیم (دنبال جواب خصوصی هستیم). داریم

$$f_2(x) = 1,\ \ f_1(x) = 0,\ \ f_0(x) = 2x^2,\ \ g(x) = 0.$$

تمام توابع بالا در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و $f_2(0) = 1$ است. لذا شرایط قضیه ۶.۲.۸ بر قرار است. چون طبق قضیه ۶.۲.۸، جواب به صورت سری بر حسب توان‌های x است، لذا نیاز نداریم که سری تیلور (مک‌لورن) $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را بنویسیم، زیرا به صورت خودکار بر حسب توان‌های x مرتب شده‌اند. اکنون فرض کنیم جواب به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ است. لذا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} \qquad\qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 2x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

عبارت را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+2} = 0.$$

ضریب x^0 در سمت راست تساوی برابر با صفر است. اما ضریب x^0 در سیگمای اول برابر با $2a_2$ است. زیرا برای $n=0$ و $n=1$ سیگمای اول صفر می‌شود. همچنین ضریب x^0 در سیگمای دوم برابر با 0 است (چرا؟). لذا ضریب x^0 در سمت چپ تساوی برابر با $2a_2$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $2a_2=0$ یا بطور معادل $a_2=0$.

داریم که ضریب x در سمت راست تساوی برابر با صفر است. اما ضریب x در سیگمای اول برابر با $6a_3$ است (چرا؟). ضریب x در سیگمای دوم برابر با 0 است (چرا؟). لذا ضریب x در سمت چپ تساوی برابر با $6a_3$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $6a_3=0$ یا بطور معادل $a_3=0$. روند را ادامه می‌دهیم.

داریم که ضریب x^k در سمت راست تساوی برابر با صفر است. اما ضریب x^k در سیگمای اول برابر با $(k+2)(k+1)a_{k+2}$ است (چرا؟). ضریب x^k در سیگمای دوم برابر با $2a_{k-2}$ است (چرا؟). لذا ضریب x^k در سمت چپ تساوی برابر با $(k+2)(k+1)a_{k+2}+2a_{k-2}$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+2a_{k-2}=0.$$

با مرتب سازی دنباله بازگشتی زیر را داریم $a_{k+2}=\frac{-2}{(k+2)(k+1)}a_{k-2}$. حال همه ضرایب برحسب a_0 و a_1 قابل محاسبه است. برای مثال داریم

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{-2}{(2+2)(2+1)}a_0=\frac{-1}{6}a_0\\
a_5 &= \frac{-2}{(3+2)(3+1)}a_1=\frac{-1}{10}a_1\\
a_6 &= a_7=0\\
a_8 &= \frac{-2}{(6+2)(6+1)}a_4=\frac{-1}{28}.\frac{-1}{6}a_0=\frac{1}{168}a_0\\
a_9 &= \frac{-2}{(7+2)(7+1)}a_5=\frac{-1}{36}.\frac{-1}{10}a_0=\frac{1}{360}a_0
\end{aligned}$$

اکنون جواب y در دسترس است! زیرا

$$\begin{aligned}
&y=a_0x^0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...=\\
&a_0x^0+a_1x+0+0-\frac{1}{6}a_0x^4-\frac{1}{10}a_1x^5+...\\
&a_0(1-\frac{1}{6}x^4+...)+a_1(x-\frac{1}{10}x^5+...).
\end{aligned}$$

a_0 و a_1 همان c و c' در قضیه ۸.۲.۶ هستند. چون $g(x)=0$ است فرم جواب سیگمای سوم را در قضیه ۸.۲.۶ ندارد. بد نیست که بدانید شعاع همگرایی این سری بینهایت است. زیرا

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+2}}{a_{n-2}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{-2}{(n+2)(n+1)}|=0.$$

اما $y(0)=0$ ایجاب می‌کند که $a_0=0$. یعنی $y=a_1(x-\frac{1}{10}x^5+\dots)$. اما $y'=a_1(1-\frac{1}{2}x^4+\dots)$ است و شرط $y'(0)=1$ ایجاب می‌کند که $a_1=1$. پس جواب خصوصی مد نظر به صورت $y=x-\frac{1}{10}x^5+\dots$ است.

برای دیدن یک مثال که در آن $g(x)$ ناصفر است تمرین‌های حل شده را ببینید. روند کار همان مثال‌های بالا است.

اکنون از قضیه ۸.۲.۶ و قضیه ۱۵.۱.۶ نتیجه زیر را داریم که برای محاسبه شعاع همگرایی مفید است.

نتیجه ۱۱.۲.۶. *فرض کنیم توابع $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در $x=x_0$ چندجمله‌ای باشند. اگر $x=x_0$ نقطه معمولی باشد آنگاه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم*

$$f_2(x)y''+f_1(x)y'+f_0(x)y=0 \quad \text{یا} \quad y''+\frac{f_1(x)}{f_2(x)}y'+\frac{f_0(x)}{f_2(x)}y=0$$

دارای جوابی به صورت سری تیلور $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ است و شعاع همگرایی سری جواب برابر با کمترین فاصله x_0 از نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل است.

مثال ۱۲.۲.۶. *می‌خواهیم شعاع همگرای سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل*

$$(x^2-2x)y''-(5x-5)y'-7y=0$$

را در $x_0=1$ پیدا کنیم. داریم

$$f_2(x)=x^2-2x,\quad f_1(x)=-5x+5,\quad f_0(x)=-7.$$

تمام توابع بالا چندجمله‌ای هستند. نقاط غیر عادی 0 و 2 هستند که طبق نتیجه ۱۱.۲.۶ کمترین فاصله از 1 $x_0=$ برابر با $R=1$ شعاع است (همانطورکه در مثال بالا دیدید).

تمرین ۱۳.۲.۶. *جواب معادله دیفرانسیل $x^2y''+2y'+(x-1)y=x^2+2$ را به روش سری در $x_0=1$ پیدا کنید. جواب خصوصی با شرط اولیه $y(1)=0$، $y'(1)=0$ ارائه دهید.*

حل. داریم

$$f_2(x)=x^2,\quad f_1(x)=2,\quad f_0(x)=x-1, g(x)=x^2+2.$$

تمام توابع بالا در $x_0=1$ تحلیلی هستند و $f_2(1)=1$ است. لذا شرایط قضیه ۸.۲.۶ بر قرار است. چون طبق قضیه ۸.۲.۶، جواب به صورت سری بر حسب توان‌های $x-1$ است، لذا نیاز داریم که سری تیلور $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بنویسیم، یعنی بر حسب توان‌های $x-1$ مرتب کنیم. بنابراین

$$f_2(x)=1+2(x-1)+(x-1)^2,\quad g(x)=3+2(x-1)+(x-1)^2.$$

اما $f_0(x)$ و $f_1(x)$ خودشان بر حسب توان‌های $x-1$ مرتب شده است. اکنون فرض کنیم جواب به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ است. لذا

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} \qquad\qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$\begin{aligned}&(1+2(x-1)+(x-1)^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}+\\&2\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}+(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=3+2(x-1)+(x-1)^2.\end{aligned}$$

ضرب پرانتزها را انجام و سپس عبارات را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم و سیگماهای هم اندیس را کنار هم قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}+\\&\sum_{n=0}^{\infty} 2n^2a_n(x-1)^{n-1}+\\&\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n}\\&\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}=3+2(x-1)+(x-1)^2.\end{aligned}$$

ضریب $(x-1)^0$ در سمت راست تساوی برابر با 3 است. اما ضریب $(x-1)^0$ در سیگمای اول سیگمای دوم، سوم و چهارم به ترتیب برابر با $2a_2$، $2a_1$، 0 و 0 است (چرا؟). لذا ضریب $(x-1)^0$ در سمت چپ تساوی برابر با $2a_2$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $2a_1+2a_2=3$.

داریم که ضریب $x-1$ در سمت راست تساوی برابر با 2 است. اما ضریب $x-1$ در سیگمای اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب $6a_3$، $8a_2$، 0 و a_0 است (چرا؟). لذا ضریب $x-1$ در سمت چپ تساوی برابر با $6a_3+8a_2+a_0$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $6a_3+8a_2+a_0=2$.

داریم که ضریب $(x-1)^2$ در سمت راست تساوی برابر با 1 است. اما ضریب $(x-1)^2$ در سیگمای اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب $12a_4$، $18a_3$، $2a_2$ و a_1 است (چرا؟). لذا ضریب $(x-1)^2$ در سمت چپ تساوی برابر با $12a_4+18a_3+a_1$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $12a_4+18a_3+a_1=1$. روند را ادامه می‌دهیم.

داریم که ضریب $(x-1)^k$ در سمت راست تساوی برای $k \geq 3$ برابر با صفر است. اما ضریب $(x-1)^k$ در سمت چپ تساوی برابر با

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+2(k+1)^2a_{k+1}+k(k-1)a_k+a_{k-1}=0$$

است. حال همه ضرایب برحسب a_0 و a_1 قابل محاسبه است. برای مثال داریم

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3-2a_1}{2} \\ a_3 &= \frac{2-a_0-8a_2}{6} = \frac{8a_1-a_0-10}{6} \\ a_4 &= \frac{1-a_1-18a_3}{12} = \frac{31-25a_1+3a_0}{12} \end{aligned}$$

اکنون جواب y در دسترس است! زیرا

$$\begin{aligned} & y = a_0(x-1)^0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+\ldots = \\ & a_0(x-1)^0+a_1(x-1)+(\frac{3-2a_1}{2})(x-1)^2+ \\ & (\frac{8a_1-a_0-10}{6})(x-1)^3+\ldots = \\ & a_0(1-\frac{1}{6}(x-1)^3+\ldots)+a_1((x-1)-(x-1)^2+\frac{4}{3}(x-1)^3+\ldots)+ \\ & (\frac{3}{2}(x-1)^2-\frac{5}{3}(x-1)^3+\ldots). \end{aligned}$$

a_0 و a_1 همان c و c' در قضیه ۸.۲.۶ هستند. پرانتز سوم همان سیگمای سوم در فرم جواب قضیه ۸.۲.۶ است. با کمک دو شرط اولیه بالا $a_0=a_1=0$ است. زیرا $y(1)=a_0=0$ و $y'(1)=a_1=0$. پس جواب خصوصی مد نظر $y=\frac{3}{2}(x-1)^2-\frac{5}{3}(x-1)^3+\ldots$ است.

تمرین ۱۴.۲.۶. *جواب معادله دیفرانسیل $y''-2xy'-2y=e^x$ را به روش سری توانی در $x_0=0$ پیدا کنید.*

حل. داریم

$$f_2(x)=1,\ \ f_1(x)=-2x,\ \ f_0(x)=-2,\ \ g(x)=e^x.$$

تمام توابع بالا در $x_0=0$ تحلیلی هستند و $f_2(0)=1$ است. لذا شرایط قضیه ۸.۲.۶ بر قرار است. چون طبق قضیه ۸.۲.۶، جواب به صورت سری بر حسب توان‌های x است، لذا نیاز داریم که سری تیلور (مک‌لورن) $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را بنویسیم، اما فقط نیاز است که سری مک‌لورن $g(x)$ را بنویسیم و بقیه به صورت خودکار بر حسب توان‌های x مرتب شده‌اند. واضح است که $g(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots$. اکنون فرض کنیم جواب به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ است. لذا

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} \qquad\qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots.$$

عبارت را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-2n-2)a_n x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots.$$

ضریب x^0 در سمت راست تساوی برابر با 1 است. اما ضریب x^0 در سمت چپ تساوی برابر با $2a_2 - 2a_0$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $2a_2 - 2a_0 = 1$ و لذا $a_2 = \frac{1}{2} + a_0$.
داریم که ضریب x در سمت راست تساوی برابر با 1 است. اما ضریب x در سمت چپ تساوی برابر با $6a_3 - 4a_1$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $6a_3 - 4a_1 = 1$ و لذا $a_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}a_1$. روند را ادامه می‌دهیم.
داریم که ضریب x^k در سمت راست تساوی برابر با $\frac{1}{k!}$ است. اما ضریب x^k در سمت چپ تساوی برابر با $(k+2)(k+1)a_{k+2} - (2k+2)a_k$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی دنباله بازگشتی زیر را داریم

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - (2k+2)a_k = \frac{1}{k!}.$$

حال همه ضرایب برحسب a_0 و a_1 قابل محاسبه است. برای مثال داریم $12a_4 - 6a_2 = \frac{1}{2}$ و لذا

$$a_4 = \frac{1}{24} + \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + a_0) = \frac{7}{24} + \frac{1}{2}a_0.$$

اکنون جواب y در دسترس است! زیرا

$$\begin{aligned}
&y = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = \\
&a_0x^0 + a_1x + (\frac{1}{2} + a_0)x^2 + (\frac{1}{6} + \frac{2}{3}a_1)x^3 + (\frac{7}{24} + \frac{1}{2}a_0)x^4 + \cdots \\
&a_0(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots) + a_1(x + \frac{2}{3}x^3 + \cdots) + \\
&(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \cdots).
\end{aligned}$$

a_0 و a_1 همان c و c' در قضیه ۸.۲.۶ هستند. چون $g(x) \neq 0$ است و پرانتز سوم فرم جواب در قضیه ۸.۲.۶ را دارد.

۳.۶ حل معادله دیفرانسیل به روش سری توانی: روش مشتقات متوالی یا روش لایبنیتز_مک‌لورن

از این روش برای حل معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه استفاده می‌شود. در بخش قبل متوجه شدید که چه زمانی یک معادله دیفرانسیل دارای جواب تحلیلی است (قضیه ۸.۲.۶ را ببینید). در حقیقت چه زمانی جواب معادله دیفرانسیل به صورت سری تیلور است. حال یک روش جدید به کمک خود معادله دیفرانسیل معرفی می‌کنیم.

روش مشتقات متوالی: شرایط قضیه ۸.۲.۶ را بررسی می‌کنیم تا جواب معادله دیفرانسیل تحلیلی باشد. سپس جواب معادله دیفرانسیل را به صورت سری تیلور در $x = x_0$ در نظر می‌گیریم. سپس با کمک خود معادله دیفرانسیل مشتقات را حساب می‌کنیم و در سری جایگذاری می‌کنیم.

مثال ۱.۳.۶. *می‌خواهیم معادله دیفرانسیل*

$$y'' - xy' + 3y = 0 \qquad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$$

را به روش مشتقات متوالی حل کنیم. تمام شرایط ۸.۲.۶ بر قرار است. پس سری مک‌لورن (سری تیلور در $x_0 = 0$) را می‌نویسیم. یعنی

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y(4)(0)}{4!}x^4 + \cdots.$$

طبق شرایط اولیه دو مقدار $y(0)$ و $y'(0)$ مشخص هستند. اما $y'' = xy' - 3y$ بنابراین داریم که $y''(0) = 0 \times y'(0) - 3y(0) = -3$. حال

$$y''' = (xy' - 3y)' = y' + xy'' - 3y'$$

و لذا $y'''(0) = y'(0) + 0 \times y''(0) - 3y'(0) = 0$. همچنین

$$y^{(4)} = (y''')' = y'' + y'' + xy'' - 3y'' = xy'' - y''$$

و در نتیجه $y^{(4)}(0) = 3$. می‌توان روند را ادامه داد و لذا با جایگذاری، سری مک‌لورن زیر حاصل می‌شود

$$y = 1 - \frac{3}{2!}x^2 + \frac{3}{4!}x^4 + \cdots.$$

تمرین ۲.۳.۶. *جواب معادله دیفرانسیل $(x^2 - 2x)y'' - (5x - 5)y' - 7y = 0$ را به روش مشتقات متوالی در $x_0 = 1$ پیدا کنید.*

حل. شرایط اولیه داده نشده است! اما برای $x_0 = 1$ تمام شرایط ۸.۲.۶ بر قرار است. پس سری تیلور را در $x_0 = 1$ می‌نویسیم. یعنی

$$y = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y(4)(1)}{4!}(x-1)^4 + \cdots.$$

برای دو مقدار $y(1)$ و $y'(1)$ کاری از ما ساخته نیست! سایر مشتقات بر حسب این دو قابل محاسبه است. مثلا داریم $y'' = \frac{5x-5}{x^2-2x}y' + 7y$. لذا $y''(1) = -7y(1)$. همچنین

$$0 = ((x^2-2x)y'' - (5x-5)y' - 7y)' =$$
$$(2x-2)y'' + (x^2-2x)y''' - 5y' - (5x-5)y'' - 7y'.$$

در نتیجه $y'''(1) = -12y'(1)$. می‌توان روند را ادامه داد و لذا با جایگذاری، سری مک‌لورن زیر حاصل می‌شود

$$y = y(1) + y'(1)(x-1) - \frac{7y(1)}{2!}(x-1)^2 - \frac{12y''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots =$$
$$y(1)(1 - \frac{7}{2}(x-1)^2 + \cdots) + y'(1)((x-1) - 2(x-1)^3 + \cdots).$$

$y(1)$ و $y'(1)$ همان c و c' قضیه ۸.۲.۶ هستند. جواب بالا را با جواب مثال ۹.۲.۶ مقایسه کنید!

۴.۶ حل معادله دیفرانسیل به روش سری توانی: نقطه غیر عادی یا روش فروبنیوس

در بسیاری از مواقع توابع $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ در معادله دیفرانسیل

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y + f_0(x)y = 0$$

در $x = x_0$ تحلیلی نیستند و لذا نقطه x_0 یک نقطه عادی نمی‌باشد. یا این که $f_2(x_0) = 0$ است و در نتیجه روش نقطه عادی کار نمی‌کند برای زمانی که جواب معادله را در x_0 لازم داریم. در هر صورت قضیه ۸.۲.۶ کارگشا نیست. اما ریاضیدان آلمانی به نام فروبنیوس این مشکل را مطالعه کرد و توانستند روشی ابداع کند که امروزه در بعضی منابع این روش را با نام روش فروبنیوس می‌شناسند. در این بخش روش فروبنیوس را آموزش می‌دهیم. با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۶. *گوییم نقطه غیر عادی $x = x_0$ از معادله دیفرانسیل*

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

غیر عادی منظم (نامنفرد منظم) است هرگاه معادله دیفرانسیل بالا را بتوانیم با تقسیم بر $f_2(x)$ به صورت $y'' + \frac{\alpha(x)}{x-x_0}y' + \frac{\beta(x)}{(x-x_0)^2}y = 0$ بنویسیم که در آن $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ در x_0 تحلیلی هستند. در غیر این صورت نقطه را غیر عادی نامنظم (منفرد نامنظم) گوییم.

مثال ۲.۴.۶. *برای معادله دیفرانسیل $2x(x-2)^2 + 3xy' + (x-2)y = 0$ نقاط $x_0 = 0, 2$ غیر عادی است. با تقسیم معادله بر $2x(x-2)^2$ داریم $y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2x(x-2)}y = 0$. حال نقطه $x_0 = 0$ را مد نظر قرار می‌دهیم و داریم*

$$0 = y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2x(x-2)}y = y'' + \frac{\frac{3x}{2(x-2)^2}}{x}y' + \frac{\frac{x}{2(x-2)}}{x^2}y.$$

واضح است که $\alpha(x) = \frac{3x}{2(x-2)^2}$ و $\beta(x) = \frac{x}{2(x-2)}$ در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ نقطه غیرعادی منظم است. حال نقطه $x_0 = 2$ را مد نظر قرار می‌دهیم و داریم

$$0 = y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2x(x-2)}y = y'' + \frac{\frac{3}{2(x-2)}}{x-2}y' + \frac{\frac{(x-2)}{2x}}{(x-2)^2}y.$$

واضح است که $\alpha(x) = \frac{3}{2(x-2)}$ در $x_0 = 2$ تحلیلی نیست و در نتیجه $x_0 = 2$ نقطه غیرعادی نامنظم است.

اکنون قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۳.۴.۶. *فرض کنیم $x = x_0$ یک نقطه غیر عادی منظم برای معادله دیفرانسیل*

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

باشد که در آن $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ تحلیلی هستند. در این صورت معادله دیفرانسیل بالا دست کم یک جواب به فرم

$$y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (a_0 \neq 0)$$

دارد که در آن r یک عدد حقیقی یا مختلط است و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که a_0 ناصفر باشد.

قضیه ۳.۴.۶ فرم سری تیلور یک جواب از معادله $f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ را در نقطه غیر عادی منظم x_0 اختیار ما قرار می‌دهد (نقطه غیر عادی نامنظم مورد بحث ما نیست). اما برای نوشتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل بالا نیاز به دو جواب مستقل خطی داریم. زیرا مرتبه معادله دیفرانسیل بالا، دو است! در ادامه روش مربوط به ساختن دو جواب مستقل خطی را با کمک فرم جواب داده شده در قضیه ۳.۴.۶ به دست می‌دهیم. با تذکر زیر شروع می‌کنیم.

تذکر ۴.۴.۶. *چون قضیه ۳.۴.۶ فرم سری تیلور یک جواب از معادله دیفرانسیل بالا را برای ما مشخص کرده است، با جایگذاری این سری تیلور در معادله دیفرانسیل بالا به همان روش بخش دوم این فصل (روش نقطه عادی)، از این که ضریب x^r در سمت راست صفر است و در سمت چپ عبارت $r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0)$ ضریب x^r است، معادله مهمی برای ما به دست می‌آید که شسته و رفته آن منجبر به تعریف زیر می‌شود.*

تعریف ۵.۴.۶. *فرض کنیم x_0 برای معادله دیفرانسیل $f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$ غیر عادی منظم باشد. در این صورت به معادله درجه دوم (بر حسب متغیر مجهول r)*

$$r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = 0$$

معادله شاخصی برای x_0 گوییم که در آن $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ با تقسیم معادله دیفرانسیل بر $f_2(x)$ به صورت $y'' + \frac{\alpha(x)}{x-x_0}y' + \frac{\beta(x)}{(x-x_0)^2}y = 0$ حاصل می‌شوند. به ریشه‌های معادله شاخصی نمادهای تکینگی در x_0 گوییم.

مثال ۶.۴.۶. *برای معادله دیفرانسیل* $2xy'' + y' - 2y = 0$ *نقطه* $x_0 = 0$ *غیر عادی است. داریم* $y'' + \frac{\frac{1}{2}}{x} y' - \frac{x}{x^2} y = 0$*. اکنون* $\alpha(x) = \frac{1}{2}$ *و* $\beta(x) = x$ *و هر دو در* $x_0 = 0$ *تحلیلی هستند. پس* $x_0 = 0$ *نقطه غیر عادی منظم است. معادله شاخصی برای* $x_0 = 0$ *به صورت*

$$r^2 + [\alpha(0) - 1]r + \beta(0) = r^2 - \frac{1}{2}r = 0$$

است. 0 *و* $\frac{1}{2}$ *نمادهای تکینگی* $x_0 = 0$ *هستند.*

اکنون آمادگی داریم که قضیه اساسی این بخش را بیان کنیم. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم. سپس برای درک بهتر قضیه ۷.۴.۶ مثال‌هایی را خواهیم آورد. همین جا باید خاطر نشان کنیم که ریشه‌های معادله شاخصی مختلط باشد (یعنی حالت (۱)) از قضیه زیر مورد بررسی ما نیست. زیرا نیاز به تعریف دقیق تابع x^{a+ib} است که در درس ریاضی مهندسی یا توابع مختلط با این نوع توابع آشنا می‌شوید.

قضیه ۷.۴.۶. *فرض کنیم r_1 و r_2 ریشه‌های معادله شاخصی معادله دیفرانسیل*

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

در نقطه غیر عادی منظم $x = x_0$ باشد. همچنین فرض کنیم

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

جواب پایه اول باشد که از قضیه ۳.۴.۶ حاصل می‌شود. در این صورت داریم
حالت (۱). اگر r_1 و r_2 دو ریشه متمایز و تفاضل آنها عددی غیر صحیح (و خودکار ناصفر) باشد آنگاه جواب پایه دوم به فرم

$$y_2 = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

است (دو ریشه مختلط در همین حالت جای می‌گیرد. زیرا ریشه‌ها مزدوج هم هستند و متمایز با تفاضل غیر صحیح).
حالت (۲). اگر $r_1 = r_2 = r$ ریشه مضاعف (تکراری) باشد آنگاه جواب پایه دوم به فرم

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

است (اندیس سیگمای دوم از یک شروع می‌شود).
حالت (۳). اگر r_1 و r_2 دو ریشه متمایز و تفاضل آنها عددی صحیح (و خودکار ناصفر) باشد و $r_2 < r_1$ آنگاه جواب پایه دوم به فرم

$$y_2 = c y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

است (c در y_2 ثابت است).

مثال ۸.۴.۶. *می‌خواهیم جواب معادله دیفرانسیل $4xy'' + 2(1 - x)y' - y = 0$ را پیدا کنیم. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله دیفرانسیل بر $4x$ داریم*

$$y'' + \frac{\frac{1-x}{2}}{x} y' - \frac{\frac{-x}{4}}{x^2} = 0$$

و لذا $\alpha(x) = \frac{1-x}{2}$ و $\beta(x) = \frac{-x}{4}$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی

منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = r^2 - \frac{1}{2}r.$$

بنابراین $r_1 = 0$ و $r_2 = \frac{1}{2}$ که متمایز هستند و تفاضل غیر صحیح دارند. پس حالت (۱) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. اکنون در این حالت از قضیه ۷.۴.۶، برای راحتی و پرهیز از محاسبات زیاد موقتا طبق قضیه ۳.۴.۶ فرض می‌کنیم یک جواب به صورت زیر داریم

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = (x - 0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

لذا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$4x \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) a_n x^{n+r-2} + 2(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) a_n x^{n+r-1}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

عبارت را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n + r)(2n + 2r - 1)] a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} -(2n + 2r + 1) a_n x^{n+r} = 0.$$

داریم که ضریب x^{k+r} در سمت راست تساوی برابر با صفر است. لذا ضریب x^{k+r} در سمت چپ تساوی برابر با $[2(k + r + 1)(2k + 2r + 1)] a_{k+1} - (2k + 2r + 1) a_k$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم

$$[2(k + r + 1)(2k + 2r + 1)] a_{k+1} - (2k + 2r + 1) a_k = 0.$$

با مرتب سازی دنباله بازگشتی زیر را داریم $a_{k+1} = \frac{1}{2(k+r+1)} a_k$. اکنون $r = r_1 = 0$ را در دنباله بازگشتی قرار می‌دهیم و لذا $a_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)} a_k$. حال همه ضرایب برحسب a_0 محاسبه است. برای مثال داریم

$$a_1 = \frac{1}{2(0 + 1)} a_0 = \frac{1}{2} a_0$$
$$a_2 = \frac{1}{2(1 + 1)} a_1 = \frac{1}{8} a_0$$

اکنون جواب y_1 در دسترس است! زیرا کافی است در y، a_nها و $r = r_1 = 0$ را جایگذاری کنیم. پس

$$y_1 = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + ... = a_0(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + ...).$$

می‌توانیم $a_0 = 1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و a_0 مانند پارامتر (ثابت) است. پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم و $a_0 = 1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \cdots.$$

شعاع همگرایی این سری توانی بینهایت است. زیرا $\frac{1}{R} = \lim_{x\to 0} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$. حال جواب پایه دوم را طبق قضیه ۷.۴.۶ می‌نویسیم. کافی است در دنباله بازگشتی $r = r_2 = \frac{1}{2}$ قرار دهیم و نقش a_k را با b_k عوض کنیم. پس $b_{k+1} = \frac{1}{2k+3}b_k$. حال همه ضرایب برحسب b_0 محاسبه است. برای مثال داریم

$$b_1 = \frac{1}{2 \times 0 + 3}b_0 = \frac{1}{3}b_0$$
$$b_2 = \frac{1}{2 \times 1 + 3}b_1 = \frac{1}{15}b_0$$

اکنون جواب y_2 در دسترس است! زیرا در y مقدار $r = r_2 = \frac{1}{2}$ جایگذاری و به جای a_n مقادیر b_n را جایگذاری می‌کنیم. پس

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}}[b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + ...] = b_0x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{15}x^2 + ...).$$

می‌توانیم $b_0 = 1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و b_0 مانند پارامتر است. پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم و $b_0 = 1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{15}x^2 + \cdots).$$

شعاع همگرایی این سری توانی بینهایت است (بررسی کنید). بنابراین جواب عمومی به صورت $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ است و این جواب در کل اعداد حقیقی است زیرا شعاع هر دو سری پایه جواب بینهایت بود.

مثال ۹.۴.۶. می‌خواهیم جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + y' + 2y = 0$ را پیدا کنیم. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله بر x داریم $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{2x}{x^2}y = 0$ و لذا $\alpha(x) = 1$ و $\beta(x) = 2x$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = r^2.$$

بنابراین $r = r_1 = r_2 = 0$. پس حالت (۲) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. بنابراین یک جواب پایه به صورت زیر داریم

$$y_1 = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = (x-0)^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

لذا

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y_2'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا و مرتب سازی داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$$

داریم که ضریب x^k در سمت راست تساوی برابر با صفر است. لذا ضریب x^k در سمت چپ تساوی برابر با $(k+1)^2 a_{k+1} + 2a_k$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم

$$(k+1)^2 a_{k+1} + 2a_k = 0.$$

پس دنباله بازگشتی زیر را داریم $a_{k+1} = \frac{-2}{(k+1)^2} a_k$. حال همه ضرایب برحسب a_0 قابل محاسبه است. برای مثال داریم

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-2}{1} a_0 = -2a_0 \\ a_2 &= \frac{-2}{(1+1)^2} a_1 = a_0 \end{aligned}$$

اکنون جواب y_1 در دسترس است! پس

$$y_1 = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = a_0(1 - 2x + x^2 + ...).$$

می‌توانیم $a_0 = 1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و a_0 مانند پارامتر است. پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم و $a_0 = 1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس $y_1 = 1 - 2x + x^2 + \cdots$. حال جواب پایه دوم را به کمک قضیه ۷.۴.۶ می‌نویسیم

$$y_2 = y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

لذا

$$y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$
$$y_2'' = y_1'' \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل و مرتب سازی داریم

$$(xy_1'' + y_1' + 2y_1) \ln x + 2y_1' + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n + 2) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} = 0.$$

دقت شود که y_1 جواب است پس ضریب $\ln x$ در بالا صفر است (چگونه؟). پس

$$2y_1' + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n + 2) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} = 0.$$

با جایگذاری y_1' داریم

$$-4 + 4x + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n + 2) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} = 0.$$

حال چند ضریب b_n را حساب می‌کنیم. مثلا ضریب x^0 معادله $-4 + b_1 = 0$ را می‌دهد. یعنی $b_1 = 4$. یا مثلا ضریب x معادله $4 + 2b_1 + 2b_2 = 0$ را می‌دهد. پس $b_2 = -6$ و الی آخر. اکنون جواب پایه y_2 در دسترس است! زیرا

$$y_2 = y_1 \ln x + (4x - 6x^2 + \cdots).$$

بنابراین جواب عمومی به صورت $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ است.

مثال ۱۰.۴.۶. می‌خواهیم جواب معادله دیفرانسیل $xy'' - 2y' + y = 0$ را پیدا کنیم. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله بر x داریم $y'' + \frac{-2}{x} y' + \frac{x}{x^2} y = 0$ و لذا $\alpha(x) = -2$ و $\beta(x) = x$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1] r + \beta(x_0) = r^2 - 3r.$$

بنابراین $r_1 = 3$ و $r_2 = 0$. پس حالت (۳) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. دقت شود $r_1 > r_2$. یعنی یک جواب پایه به صورت

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3}.$$

لذا

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)a_n x^{n+2} \qquad y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_n x^{n+1}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل و مرتب سازی داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+3)a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = 0$$

لذا ضریب x^{k+3} در سمت چپ تساوی برابر است با $(k+1)(k+4)a_{k+2} + a_k$. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم

$$(k+1)(k+4)a_{k+2} + a_k = 0.$$

لذا دنباله بازگشتی زیر را داریم

$$a_{k+2} = \frac{-1}{(k+1)(k+4)}a_k.$$

حال همه ضرایب برحسب a_0 محاسبه است. برای مثال داریم

$$a_1 = \frac{-1}{4}a_0$$
$$a_2 = \frac{-1}{10}a_1 = \frac{-1}{40}a_0$$

اکنون جواب y_1 در دسترس است! زیرا

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + ... = a_0(x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + ...).$$

می‌توانیم $a_0 = 1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و a_0 مانند پارامتر است. پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم و $a_0 = 1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم.
پس

$$y_1 = x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{40}x^5 - \cdots.$$

حال جواب پایه دوم را به کمک قضیه ۷.۴.۶ می‌نویسیم

$$y_2 = cy_1\ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = cy_1\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

لذا

$$y_2' = cy_1' \ln x + \frac{cy_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} nb_n x^{n-1}$$
$$y_2'' = cy_1'' \ln x + \frac{2cy_1'}{x} - \frac{cy_1}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل و مرتب سازی داریم

$$(xy_1'' - 2y_1' + y_1)c \ln x + 2cy_1' - \frac{3cy_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-3)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

دقت شود که y_1 جواب است پس ضریب $c \ln x$ در بالا صفر است (چگونه؟). پس

$$2cy_1' - \frac{3cy_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-3)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

با جایگذاری y_1 و y_1' داریم

$$2c(3x^2 - x^3 + \cdots) - 3c(x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots) +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-3)b_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

حال چند ضریب b_n را حساب می‌کنیم. همه ضرایب بر حسب b_0 و b_3 به دست می‌آیند. مثلا ضریب x^0 معادله $-2b_1 + b_0 = 0$ را می‌دهد. یعنی $b_1 = \frac{1}{2}b_0$. یا مثلا ضریب x معادله $-2b_2 + b_1 = 0$ را می‌دهد. پس $b_2 = \frac{1}{4}b_0$. ضریب x^2 معادله $6c - 3c + 0 + b_2 = 0$ را می‌دهد. پس $c = \frac{-1}{12}b_0$. مشابه ضریب x^3 به صورت $b_4 = \frac{-1}{4}b_3 - \frac{5}{192}b_0$ است و الی آخر. اکنون جواب پایه y_2 در دسترس است! زیرا

$$y_2 = \frac{-1}{12}b_0 y_1 \ln x + b_0(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{192}x^4 + \cdots) +$$
$$b_3(x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots).$$

پس b_3 هم یک پارامتر جدید علاوه بر b_0 است. چون مرتبه معادله دیفرانسیل دو است، دو پارامتر بیشتر لازم نیست یکی برای y_1 و دیگری برای y_2. اما y_2 خود دو پارامتر دارد. در نتیجه می‌توانیم از b_3 صرف نظر کنیم یعنی $b_3 = 0$. ضمنا دقت شود که پرانتز متناظر با b_3 همان y_1 است! حال مشابه قبل فرض می‌کنیم $b_0 = 1$ و پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم. لذا

$$y_2 = \frac{-1}{12}y_1 \ln x + (1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{192}x^4 + \cdots).$$

بنابراین جواب عمومی به صورت $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ است.

تذکر ۱۱.۴.۶. *در مثال‌های بالا همیشه ضرایب معادله دیفرانسیل چندجمله‌ای بودند که به صورت خودکار تحلیلی هستند و سری تیلور (سری مک‌لورن) آنها خودشان می‌شد! اما گاهی ضرایب توابع تحلیلی مانند e^x یا $\cos x$ و ... هستند. در چنین شرایطی باید سری تیلور (سری مک‌لورن) این توابع تحلیلی را لحاظ کنیم (تمرین ۱۲.۴.۶ را ببینید).*

تمرین ۱۲.۴.۶. جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$ را به روش فروبنیوس پیدا کنید.

حل. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله دیفرانسیل بر x داریم $y'' + \frac{2x}{x}y' + \frac{6xe^x}{x^2}y = 0$ و لذا $\alpha(x) = 2x$ و $\beta(x) = 6xe^x$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = r^2 - r.$$

بنابراین $r_1 = 1$ و $r_2 = 0$. پس حالت (۳) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. دقت شود $r_1 > r_2$. یعنی یک جواب پایه به صورت

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

لذا

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n \qquad y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n x^{n-1}$$

همچنین می‌دانید که سری تیلور (سری مک‌لورن) e^x در $x_0 = 0$ به صورت

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

است. حال با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$x \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n +$$
$$6(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

مرتب سازی می‌کنیم (به شدت حوصله کنید و دقتتان را مراقبت کنید!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_n x^{n+1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+3} + \cdots = 0$$

همه ضرایب بر حسب a_0 قابل محاسبه هستند. چند ضریب را حساب می‌کنیم. ضریب x به ما معادله $2a_1+2a_0+6a_0=0$ را می‌دهد. لذا $a_1=-4a_0$. ضریب x^2 به ما معادله $6a_2+4a_1+6a_1+6a_0=0$ را می‌دهد. لذا $a_2=\frac{17}{3}a_0$. ضریب x^3 به ما معادله $12a_3+6a_2+6a_2+6a_1+3a_0=0$ را می‌دهد. لذا $a_3=\frac{-47}{12}a_0$ و الی آخر. اکنون جواب y_1 در دسترس است! زیرا

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=$$
$$a_0x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+...=a_0(x-4x^2+\frac{17}{3}x^3-\frac{47}{12}x^4+\cdots).$$

می‌توانیم $a_0=1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و a_0 مانند پارامتر است. پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم و $a_0=1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس

$$y_1=x-4x^2+\frac{17}{3}x^3-\frac{47}{12}x^4+\cdots.$$

حال جواب پایه دوم را به کمک قضیه ۷.۴.۶ می‌نویسیم

$$y_2=cy_1\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x-x_0)^n=cy_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

لذا

$$y_2'=cy_1'\ln x+\frac{cy_1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}nb_nx^{n-1}$$
$$y_2''=cy_1''\ln x+\frac{2cy_1'}{x}-\frac{cy_1}{x^2}+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم (با حوصله!)

$$cxy_1''\ln x+2cy_1'-\frac{cy_1}{x}+\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}+$$
$$2cxy_1'\ln x+2cy_1+\sum_{n=0}^{\infty}2nb_nx^n+$$
$$(6+6x+3x^2+\cdots)(cy_1\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=0$$

و مرتب سازی داریم

$$(xy_1''+2xy_1'+6(1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots)y_1)c\ln x+$$
$$2cy_1'-\frac{cy_1}{x}+2cy_1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2nb_nx^n+$$
$$(6+6x+3x^2+\cdots)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=0$$

دقت شود که y_1 جواب است پس ضریب $c\ln x$ در بالا صفر است (چگونه؟). پس

$$2cy_1'-\frac{cy_1}{x}+2cy_1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2nb_nx^n+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}6b_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}6b_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}3b_nx^{n+2}+\cdots=0$$

با جایگذاری y_1 و y_1' داریم (برای راحتی فقط دو جمله را می‌نویسیم)

$$2c(1-8x+\cdots)-c(1-4x+\cdots)+2c(x-4x^2+\cdots)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2nb_nx^n+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}6b_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}6b_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}3b_nx^{n+2}+\cdots=0$$

حال چند ضریب b_n را حساب می‌کنیم. همه ضرایب بر حسب b_0 و b_1 به دست می‌آیند. مثلا ضریب x^0 معادله $2c-c+6b_0=0$ را می‌دهد. یعنی $c=-6b_0$. یا مثلا ضریب x معادله $-16c+4c+2c+2b_2+2b_1+6b_1+6b_0=0$ را می‌دهد. پس $b_2=-33b_0-4b_1$ (برای تمرین، ضریب x^2، $b_3=\frac{449}{6}b_0+\frac{34}{6}b_1$است) و الی آخر. اکنون جواب پایه y_2 در دسترس است! زیرا

$$y_2=cy_1\ln x+(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)=-6b_0y_1\ln x+$$
$$(b_0+b_1x+(-33b_0-4b_1)x^2+(\frac{449}{6}b_0+\frac{34}{6}b_1)x^3+\cdots)=$$
$$-6b_0y_1\ln x+b_0(1-33x^2+\frac{449}{6}x^3+\cdots)+b_1(x-4x^2+\frac{17}{3}x^3+\cdots).$$

پس b_1 هم یک پارامتر جدید علاوه بر b_0 است. چون مرتبه معادله دیفرانسیل دو است، دو پارامتر بیشتر لازم نیست یکی برای y_1 و دیگری برای y_2. اما y_2 خود دو پارامتر دارد. در نتیجه می‌توانیم از b_1 صرف نظر کنیم یعنی $b_1 = 0$. ضمنا دقت شود که پرانتز متناظر با b_1 همان y_1 است! حال مشابه قبل فرض می‌کنیم $b_0 = 1$ و پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم. لذا

$$y_2 = -6y_1 \ln x + (1 - 33x^2 + \frac{449}{6}x^3 + \cdots).$$

بنابراین جواب عمومی به صورت $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ است (خسته نباشید!).

تمرین ۱۳.۴.۶. *جواب معادله دیفرانسیل $2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0$ را به روش فروبنیوس در $x_0 = 0$ پیدا کنید.*

حل. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله دیفرانسیل بر $2x$ داریم $y'' + \frac{\frac{1+x}{2}}{x}y' - \frac{x}{x^2}y = 0$ و لذا $\alpha(x) = \frac{1+x}{2}$ و $\beta(x) = -x$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = r^2 - \frac{1}{2}r.$$

بنابراین $r_1 = 0$ و $r_2 = \frac{1}{2}$ که متمایز هستند و تفاضل غیر صحیح دارند. پس حالت (۱) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. اکنون در این حالت از قضیه ۷.۴.۶، برای راحتی و پرهیز از محاسبات زیاد موقتا طبق قضیه ۳.۴.۶ فرض می‌کنیم یک جواب به صورت زیر داریم

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = (x - 0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

لذا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$\begin{aligned} &2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \\ &- 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \end{aligned}$$

عبارت را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم و مرتب می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-2)a_n x^{n+r} = 0.$$

داریم که ضریب x^{k+r} در سمت راست تساوی برابر با صفر است. لذا ضریب x^{k+r} در سمت چپ تساوی برابر با $(k+r+1)(2k+2r+1)a_{k+1}+(k+r-2)a_k$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم

$$(k+r+1)(2k+2r+1)a_{k+1}+(k+r-2)a_k=0.$$

با مرتب سازی دنباله بازگشتی زیر را داریم $a_{k+1}=-\frac{k+r-2}{(k+r+1)(2k+2r+1)}a_k$. اکنون $r=r_1=0$ را در دنباله بازگشتی قرار می‌دهیم و لذا $a_{k+1}=-\frac{k-2}{(k+1)(2k+1)}a_k$. حال همه ضرایب برحسب a_0 محاسبه است. برای مثال داریم

$$a_1=\frac{2}{1}a_0=2a_0 \qquad a_2=\frac{1}{6}a_1=\frac{1}{3}a_0$$

اکنون جواب y_1 در دسترس است! زیرا کافی است در y، a_nها و $r=r_1=0$ را جایگذاری کنیم. پس

$$y_1=a_0x^0+a_1x+a_2x^2+...=a_0(1+2x+\frac{1}{3}x^2+...).$$

می‌توانیم $a_0=1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و a_0 مانند پارامتر (ثابت) است. پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم و $a_0=1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس

$$y_1=1+2x+\frac{1}{3}x^2+\cdots.$$

شعاع همگرایی این سری توانی بینهایت است. زیرا $\frac{1}{R}=\lim_{x\to 0}\frac{a_{k+1}}{a_k}=0$. حال جواب پایه دوم را طبق قضیه ۷.۴.۶ می‌نویسیم. کافی است در دنباله بازگشتی $r=r_2=\frac{1}{2}$ قرار دهیم و نقش a_k را با b_k عوض کنیم. پس $b_{k+1}=-\frac{k-\frac{3}{2}}{(k+\frac{3}{2})(2k+2)}b_k$. حال همه ضرایب برحسب b_0 محاسبه است. برای مثال داریم

$$b_1=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\times 2}b_0=\frac{1}{2}b_0 \quad b_2=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}\times 4}b_1=\frac{1}{40}b_0$$

اکنون جواب y_2 در دسترس است! زیرا در y مقدار $r=r_2=\frac{1}{2}$ جایگذاری و به جای a_n مقادیر b_n را جایگذاری می‌کنیم. پس

$$y_2=x^{\frac{1}{2}}[b_0x^0+b_1x+b_2x^2+...]=b_0x^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{40}x^2+...).$$

می‌توانیم $b_0=1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و b_0 مانند پارامتر است. پارامتر را در انتها اعمال می‌کنیم و $b_0=1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس

$$y_2=x^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{40}x^2+\cdots).$$

شعاع همگرایی این سری توانی بینهایت است (بررسی کنید). بنابراین جواب عمومی به صورت $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ است و این جواب در کل اعداد حقیقی است زیرا شعاع هر دو سری پایه جواب بینهایت بود.

۵.۶ تمرین‌های کل فصل

تمرین ۱.۵.۶. *دامنه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}(n!)x^n$ را مشخص کنید.*

تمرین ۲.۵.۶. *سری مک‌لورن $\sin(2x)$ و e^{3x} را بنویسید.*

تمرین ۳.۵.۶. *سری مک‌لورن $\cos^2 x$ را حساب کنید.*

تمرین ۴.۵.۶. *شعاع همگرای سری تیلور جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 2x^2y = 0$ را در $x_0 = 0$ پیدا کنید (نتیجه ۱۱.۲.۶).*

تمرین ۵.۵.۶. *جواب معادله دیفرانسیل (ایری) $y'' - xy = 0$ را به روش سری توانی در $x_0 = 0$ پیدا کنید. شعاع همگرایی را مشخص نمایید.*

تمرین ۶.۵.۶. *معادله دیفرانسیل*

$$y'' = \sin(xy) \qquad y(\pi) = 1,\ \ y'(\pi) = -1$$

را به روش مشتقات متوالی حل کنید.

تمرین ۷.۵.۶. *جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 2x^2y = 0$ را به روش مشتقات متوالی در $x_0 = 1$ پیدا کنید.*

تمرین ۸.۵.۶. *نقاط غیر عادی منظم و نمادهای تکینگی معادله $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$ را بیابید.*

تمرین ۹.۵.۶. *جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + y' - y = 0$ را به روش سری (فروبینیوس) پیدا کنید.*

۶.۶ نمونه سوالات امتحانی تشریحی

سوال ۱.۶.۶. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) با استفاده از روش سری‌ها فقط یک جواب از معادله دیفرانسیل $xy'' - 2y = 0$ را حول $x_0 = 0$ به دست آورید.*

پاسخ. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله دیفرانسیل بر x داریم $y'' - \frac{2x}{x^2}y = 0$ و لذا $\alpha(x) = 0$ و $\beta(x) = -2x$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = r^2 - r.$$

بنابراین $r_1 = 1$ و $r_2 = 0$. پس حالت (۳) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. دقت شود $r_1 > r_2$.
یعنی یک جواب پایه به صورت

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

لذا

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n \qquad\qquad y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل و مرتب سازی داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -2a_n x^{n+1} = 0$$

لذا ضریب x^{k+1} در سمت چپ تساوی برابر است با $(k+1)(k+2)a_{k+1} - 2a_k$. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم

$$(k+1)(k+2)a_{k+1} - 2a_k = 0.$$

لذا دنباله بازگشتی زیر را داریم $a_{k+1} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}a_k$. حال همه ضرایب برحسب a_0 محاسبه است. برای مثال داریم

$$a_1 = \frac{2}{2}a_0 = a_0 \qquad\qquad a_2 = \frac{2}{6}a_1 = \frac{1}{3}a_0$$

اکنون جواب y_1 در دسترس است! زیرا

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + ... = a_0(x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...).$$

می‌توانیم $a_0 = 1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و a_0 مانند پارامتر است. $a_0 = 1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس

$$y_1 = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots.$$

سوال ۲.۶.۶. *(پایان ترم صنعتی امیر کبیر) در معادله دیفرانسیل زیر نقاط عادی، غیر عادی، غیر عادی منظم و غیر عادی نامنظم را معلوم کنید.*

$$x(x-1)^3y'' + (2x-2)y' + x(x+1)y = 0$$

پاسخ. ابتدا دقت شود که ضرایب چندجمله‌ای هستند و لذا در کل اعداد حقیقی تحلیلی هستند. از حل معادله $x(x-1)^3=0$ نقاط غیر عادی یعنی $x_0=0,1$ به دست می‌آید. بنابراین کلیه نقاط اعداد حقیقی جز 0 و 1 نقطه عادی معادله دیفرانسیل است. اکنون با تقسیم معادله بر $x(x-1)^3$ داریم $y''+\frac{2}{x(x-1)^2}y'+\frac{x+1}{(x-1)^3}y=0$. حال نقطه $x_0=0$ را مد نظر قرار می‌دهیم و داریم

$$0=y''+\frac{2}{x(x-1)^2}y'+\frac{x+1}{(x-1)^3}y=y''+\frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{x}y'+\frac{\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^3}}{x^2}y.$$

واضح است که $\alpha(x)=\frac{2}{(x-1)^2}$ و $\beta(x)=\frac{x^2(x+1)}{(x-1)^3}$ در $x_0=0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0=0$ نقطه غیر عادی منظم است. حال نقطه $x_0=1$ را مد نظر قرار می‌دهیم و داریم

$$0=y''+\frac{2}{x(x-1)^2}y'+\frac{x+1}{(x-1)^3}y=y''+\frac{\frac{2}{x(x-1)}}{x-1}y'+\frac{\frac{(x+1)}{x-1}}{(x-1)^2}y.$$

واضح است که $\alpha(x)=\frac{2}{x(x-1)}$ در $x_0=2$ تحلیلی نیست و در نتیجه $x_0=1$ نقطه غیر عادی نامنظم است.

سوال ۳.۶.۶. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) معادله دیفرانسیل با شرط اولیه زیر را به روش سری توانی حل کنید.*

$$y''+2xy'+y=3x-4 \qquad\qquad y(1)=y'(1)=0$$

پاسخ. داریم

$$f_2(x)=1,\quad f_1(x)=2x,\quad f_0(x)=1, g(x)=3x-4.$$

تمام توابع بالا در $x_0=1$ تحلیلی هستند و $f_2(1)=1$ است. لذا شرایط قضیه ۸.۲.۶ بر قرار است. چون طبق قضیه ۸.۲.۶، جواب به صورت سری بر حسب توان‌های $x-1$ است، لذا نیاز داریم که سری تیلور $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بنویسیم، یعنی بر حسب توان‌های $x-1$ مرتب کنیم. بنابراین

$$f_1(x)=2+2(x-1),\quad g(x)=-1+3(x-1).$$

اما $f_0(x)$ و $f_2(x)$ خودشان بر حسب توان‌های $x-1$ مرتب شده است. اکنون فرض کنیم جواب به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ است. لذا

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1} \qquad\qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}+(2+2(x-1))\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n=-1+3(x-1).$$

ضرب پرانتزها را انجام و سپس عبارات را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم و سیگماهای هم اندیس را کنار هم قرار می‌دهیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n(x-1)^{n-1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n(x-1)^n = -1 + 3(x-1).$$

ضریب $(x-1)^0$ در سمت راست تساوی برابر با -1 است. اما ضریب $(x-1)^0$ در سمت چپ تساوی برابر با $2a_2 + 2a_1 + a_0$ است. با متحد کردنضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $2a_2 + 2a_1 + a_0 = -1$. بنابراین $a_2 = -a_1 - \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}$.
داریم که ضریب $x-1$ در سمت راست تساوی برابر با 3 است. اما ضریب $x-1$ در سمت چپ تساوی برابر با $6a_3 + 4a_2 + 3a_1$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $6a_3 + 4a_2 + 3a_1 = 3$. بنابراین $a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{3}a_0$.
داریم که ضریب $(x-1)^k$ در سمت راست تساوی برای $k \geq 2$ برابر با صفر است. پس ضریب $(x-1)^k$ معادله زیر را می‌دهد

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+1)a_{k+1} + (2k+1)a_k = 0$$

حال همه ضرایب برحسب a_0 و a_1 قابل محاسبه است. برای مثال داریم

$$(2+2)(2+1)a_{2+2} + 2(2+1)a_{2+1} + (2\times 2+1)a_2 = 0$$
$$12a_4 + 6a_3 + 5a_2 = 0$$
$$a_4 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{24}a_0 - \frac{1}{24}$$

اکنون جواب y در دسترس است! زیرا

$$y = a_0(x-1)^0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \ldots =$$
$$a_0(x-1)^0 + a_1(x-1) + (-a_1 - \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2})(x-1)^2 +$$
$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{3}a_0)(x-1)^3 + \ldots =$$
$$a_0(1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots) +$$
$$a_1((x-1) - (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \ldots) +$$
$$(\frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \ldots).$$

a_0 و a_1 همان c و c' در قضیه ۸.۲.۶ هستند. پرانتز سوم همان سیگمای سوم در فرم جواب قضیه ۸.۲.۶ است. با کمک دو شرط اولیه بالا $a_0 = a_1 = 0$ است. زیرا $y(1) = a_0 = 0$ و

$y'(1) = a_1 = 0$. پس جواب خصوصی مد نظر

$$y = \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + ...$$

است.

سوال ۴.۶.۶. *(پایان ترم صنعتی امیر کبیر) اگر یک جواب پایه معادله دیفرانسیل*

$$x^2y'' - x(2x+3)y' + 4y = 0$$

به صورت $y_1 = x^2 + 4x^3 + 12x^4 + \cdots$ *باشد، جواب پایه دوم را بیابید.*

پاسخ. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله دیفرانسیل بر x^2 داریم

$$y'' - \frac{2x+3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

و لذا $\alpha(x) = -2x - 3$ و $\beta(x) = 4$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = r^2 - 4r + 4.$$

بنابراین $r = r_1 = r_2 = 2$. پس حالت (۲) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. اما در صورت سوال جواب پایه اول را داده است. زیرا طبق قضیه ۷.۴.۶ جواب پایه دوم جمله لگاریتمی دارد. پس می‌نویسیم

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = y_1 \ln x + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$
$$= y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2}.$$

لذا

$$y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) b_n x^{n+1}$$
$$y_2'' = y_1'' \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) b_n x^n$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$
\begin{aligned}
&x^2y_1''\ln x+2y_1'x-y_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)b_nx^{n+2}\\
&-2y_1'x^2\ln x-2y_1x+\sum_{n=1}^{\infty}-2(n+2)b_nx^{n+3}+\\
&4y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}4b_nx^{n+2}=0
\end{aligned}
$$

با مرتب سازی داریم

$$
\begin{aligned}
&(x^2y_1''-x(2x+3)y_1'+4y_1)\ln x+2y_1'x-2y_1x-4y_1+\\
&\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_nx^{n+2}-\sum_{n=1}^{\infty}2(n+2)b_nx^{n+3}=0.
\end{aligned}
$$

دقت شود که y_1 جواب است پس ضریب $\ln x$ در بالا صفر است (چگونه؟). پس

$$
\begin{aligned}
&2y_1'x-2y_1x-4y_1+\\
&\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_nx^{n+2}-\sum_{n=1}^{\infty}2(n+2)b_nx^{n+3}=0.
\end{aligned}
$$

با جایگذاری y_1 و y_1' داریم

$$
\begin{aligned}
&(4x^2+24x^3+96x^4\cdots)-(2x^3+8x^4+\cdots)-(4x^2+16x^3+48x^4\cdots)\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_nx^{n+2}-\sum_{n=1}^{\infty}2(n+2)b_nx^{n+3}=0.
\end{aligned}
$$

پس

$$
(6x^3+40x^4+\cdots)+\sum_{n=1}^{\infty}n^2b_nx^{n+2}-\sum_{n=1}^{\infty}2(n+2)b_nx^{n+3}=0.
$$

حال چند ضریب b_n را حساب می‌کنیم. مثلا ضریب x^3 معادله $6+b_1=0$ را می‌دهد. یعنی $b_1=-6$. یا مثلا ضریب x^4 معادله $40+4b_2-6b_1=0$ را می‌دهد. پس $b_2=-19$ (چون طراح ضرایب بیشتری از y_1 را در اختیار قرار نداده است، روند همین جا متوقف می‌شود). اکنون جواب پایه y_2 در دسترس است! زیرا

$$
y_2=y_1\ln x+(-6x^3-19x^4+\cdots).
$$

سوال ۵.۶.۶. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری توانی حول $x_0 = 1$ به دست آورید (محاسبه ۵ جمله اول سری‌ها ضروری است).*

$$y'' + x^2y - y = 1 + 3x^2 \qquad y(1) = 1,\ \ y'(1) = -1$$

پاسخ. داریم

$$f_2(x) = 1,\ \ f_1(x) = x^2,\ \ f_0(x) = -1, g(x) = 1 + 3x^2.$$

تمام توابع بالا در $x_0 = 1$ تحلیلی هستند و $f_2(1) = 1$ است. لذا شرایط قضیه ۸.۲.۶ بر قرار است. چون طبق قضیه ۸.۲.۶، جواب به صورت سری بر حسب توان‌های $x - 1$ است، لذا نیاز داریم که سری تیلور $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بنویسیم، یعنی بر حسب توان‌های $x - 1$ مرتب کنیم. بنابراین

$$f_1(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2,\ \ g(x) = 4 + 6(x-1) + 3(x-1)^2.$$

اما $f_0(x)$ و $f_2(x)$ خودشان بر حسب توان‌های $x - 1$ مرتب شده است. اکنون فرض کنیم جواب به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ است. لذا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + (1 + 2(x-1) + (x-1)^2)\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 4 + 6(x-1) + 3(x-1)^2.$$

ضرب پرانتزها را انجام و سپس عبارات را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم و سیگماهای هم اندیس را کنار هم قرار می‌دهیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)a_n(x-1)^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1} = 4 + 6(x-1) + 3(x-1)^2.$$

ضریب $(x-1)^0$ در سمت راست تساوی برابر با 4 است. اما ضریب $(x-1)^0$ در سمت چپ تساوی برابر با $2a_2 + a_1 - a_0$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $2a_2 + a_1 - a_0 = 4$. بنابراین $a_2 = 2 - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_0$.

داریم که ضریب $x-1$ در سمت راست تساوی برابر با 6 است. اما ضریب $x-1$ در سمت چپ تساوی برابر با $6a_3+2a_2+a_1$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $6a_3+2a_2+a_1=6$. بنابراین $a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}a_0$.
داریم که ضریب $(x-1)^2$ در سمت راست تساوی برابر با 3 است. اما ضریب $(x-1)^2$ در سمت چپ تساوی برابر با $12a_4+3a_3+3a_2+a_1$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $12a_4+3a_3+3a_2+a_1=3$. بنابراین $a_4=-\frac{1}{3}+\frac{1}{24}a_1-\frac{1}{24}a_0$.
داریم که ضریب $(x-1)^3$ در سمت راست تساوی برابر با 0 است. اما ضریب $(x-1)^3$ در سمت چپ تساوی برابر با $20a_5+4a_4+5a_3+2a_2$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $20a_5+4a_4+5a_3+2a_2=0$. بنابراین $a_5=-\frac{13}{60}-\frac{5}{6}a_1$(طراح ۵ ضریب سری را خواسته پس همین جا کفایت می‌کند). اکنون جواب y در دسترس است! زیرا

$$\begin{aligned}
&y=a_0(x-1)^0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+a_4(x-1)^4+\\
&a_5(x-1)^5+...=a_0(x-1)^0+a_1(x-1)+\\
&(2-\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_0)(x-1)^2+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}a_0)(x-1)^3+\\
&(-\frac{1}{3}+\frac{1}{24}a_1-\frac{1}{24}a_0)(x-1)^4+(-\frac{13}{60}-\frac{5}{6}a_1)(x-1)^5+...=\\
&a_0(1+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4)\\
&a_1((x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{24}(x-1)^4-\frac{5}{6}(x-1)^5)\\
&(2(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{3}(x-1)^4-\frac{13}{60}(x-1)^5)
\end{aligned}$$

a_0 و a_1 همان c و c' در قضیه ۸.۲.۶ هستند. پرانتز سوم همان سیگمای سوم در فرم جواب قضیه ۸.۲.۶ است. با کمک دو شرط اولیه بالا $a_0=a_1=0$ است. زیرا $y(1)=a_0=1$ و $y'(1)=a_1=-1$. پس جواب خصوصی مد نظر

$$y=1+3(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+...$$

است.

سوال ۶.۶.۶. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) جواب معادله $y''-y=x^2+1$ را به صورت سری توانی حول نقطه $x_0=0$ بیابید. محاسبه ضرایب سری لازم است.*

پاسخ. داریم

$$f_2(x)=1,\quad f_1(x)=0,\quad f_0(x)=-1, g(x)=x^2+1.$$

تمام توابع بالا در $x_0=0$ تحلیلی هستند و $f_2(1)=1$ است. لذا شرایط قضیه ۸.۲.۶ بر قرار است. چون طبق قضیه ۸.۲.۶، جواب به صورت سری بر حسب توان‌های x است، لذا نیاز داریم که سری تیلور $g(x)$، $f_0(x)$، $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بنویسیم، یعنی بر حسب توان‌های x مرتب کنیم. اما همه

چندجمله‌ای هستند و خودشان بر حسب توان‌های x مرتب شده هستند. اکنون فرض کنیم جواب به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است. لذا

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad\qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 + 1$$

ضریب x^0 در سمت راست تساوی برابر با 1 است. اما ضریب x^0 در سمت چپ تساوی برابر با $2a_2 - a_0$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $2a_2 - a_0 = 1$.
پس $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_0$.
داریم که ضریب x در سمت راست تساوی برابر با 0 است. اما ضریب x در سمت چپ تساوی برابر با $6a_3 - a_1$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $6a_3 - a_1 = 0$.
پس $a_3 = \frac{1}{6} a_1$.
داریم که ضریب x^2 در سمت راست تساوی برابر با 1 است. اما ضریب x^2 در سمت چپ تساوی برابر با $12a_4 - a_2$ است. با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $12a_4 - a_2 = 1$.
روند را ادامه می‌دهیم. پس $a_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} a_0$.
داریم که ضریب x^k که $k \geq 3$ معادله زیر را به دست می‌دهد

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_k = 0.$$

حال همه ضرایب برحسب a_0 و a_1 قابل محاسبه است. برای مثال داریم

$$\begin{aligned} &20a_4 - a_3 = 0 \\ &a_4 = \frac{1}{20} a_3 = \frac{1}{120} a_1 \end{aligned}$$

اکنون جواب y در دسترس است! زیرا

$$\begin{aligned} &y = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \ldots = \\ &a_0 x^0 + a_1 x + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_0) x^2 + (\frac{1}{6} a_1) x^3 + (\frac{1}{8} + \frac{1}{24} a_0) x^4 + \ldots = \\ &a_0 (1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + \ldots) + a_1 (x + \frac{1}{6} x^3 + ..) + \\ &(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} x^4 + \ldots). \end{aligned}$$

a_0 و a_1 همان c و c' در قضیه ۸.۲.۶ هستند. پرانتز سوم همان سیگمای سوم در فرم جواب قضیه ۸.۲.۶ است.

سوال ۷.۶.۶. *(پایان ترم صنعتی اصفهان) به روش سری یک پایه جواب برای معادله دیفرانسیل زیر را بیابید. سپس فقط فرم پایه جواب دیگر را بنویسید.*

$$x^2y'' + 2xy' - xy = 0$$

پاسخ. واضح است که $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی است. اما با تقسیم معادله دیفرانسیل بر x^2 داریم $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{x}{x^2}y = 0$ و لذا $\alpha(x) = 2$ و $\beta(x) = -x$ که در $x_0 = 0$ تحلیلی هستند و در نتیجه $x_0 = 0$ غیر عادی منظم است. از طرفی دیگر داریم

$$0 = r^2 + [\alpha(x_0) - 1]r + \beta(x_0) = r^2 + r.$$

بنابراین $r_1 = 0$ و $r_2 = -1$ که متمایز هستند و تفاضل صحیح دارند. پس حالت (۳) در قضیه ۷.۴.۶ رخ داده است. دقت شود که $r_1 > r_2$. اکنون قرار می‌دهیم

$$y_1 = (x - x_0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = (x - 0)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

لذا

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} \qquad\qquad y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

و با جایگذاری همه موارد بالا در معادله دیفرانسیل داریم

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

عبارت را به داخل سیگما منتقل می‌کنیم و مرتب می‌کنیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + n)a_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1} = 0.$$

داریم که ضریب x^{k+1} در سمت راست تساوی برابر با صفر است. لذا با متحد کردن ضرایب هم درجه‌ها در دو طرف تساوی داریم $(k+1)(k+2)a_{k+1} - a_k = 0$. با مرتب سازی دنباله بازگشتی زیر را داریم $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}a_k$. حال همه ضرایب برحسب a_0 محاسبه است. برای مثال داریم

$$a_1 = \frac{1}{2}a_0 \qquad\qquad a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{12}a_0$$

اکنون جواب y_1 در دسترس است!

$$y_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = a_0(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + ...).$$

می‌توانیم $a_0 = 1$ در نظر بگیریم. زیرا دنبال جواب پایه هستیم و هر مضرب جواب یک جواب است و a_0 مانند پارامتر (ثابت) است. $a_0 = 1$ را به عنوان نماینده می‌گیریم. پس

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \cdots.$$

حال جواب پایه دوم به فرم

$$y_2 = cy_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n = \quad cy_1 \ln x + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

است (c در y_2 ثابت است).

۷.۶ نمونه سوالات تستی

۱. (سراسری برق ۷۸) وضعیت نقطه تکین (منفرد_ غیر عادی) معادله دیفرانسیل

$$x^2(1 - x)y'' + y' - y = 0$$

عبارت است از

(۱) $x = 0$ منظم و $x = 1$نامنظم است

(۲) $x = 0$ نامنظم و $x = 1$ منظم است

(۳) $x = 0$ و $x = 1$ هر دو نامنظم هستند

(۳) $x = 0$ و $x = 1$ هر دو منظم هستند

۲. (آزاد معدن ۸۰) ضریب x^3 در حل معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + y^2$ با شرط $y(0) = 1$ کدام است

(۱) $\frac{1}{3!}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۰

۳. (سراسری مکانیک ۷۰) اگر حل سری معادله $(2 + x^2)y'' + y' + y = 0$ حول $x = 1$ محاسبه شود، شعاع همگرایی سری حاصل برابر است با

(۱) ∞ (۲) 3 (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۱

۴. (سراسری برق ۸۰) اگر $y(x)$ جواب معادله $e^{-x}y''+xy'+y = 3$ با شرط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$ باشد آنگاه $y'''(0)$ کدام است

(۱) 1 (۲) 2 (۳) 5 (۴) نمی‌توان پاسخ داد

۵. (سراسری ریاضی ۸۱) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y'' + x^2y = 0$ باشد آنگاه

(۱) $a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ (۲) $a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+4)}$

(۳) $a_{n+3} = \frac{a_{n-1}}{(n+3)(n+4)}$ (۴) $a_{n+4} = \frac{-a_n}{(n+3)(n+4)}$

۶. (سراسری برق ۸۴) به ازای کدام مقدار مثبت a شعا همگرایی پاسخ سری معادله دیفرانسیل $(a^2 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$ در اطراف $x = \frac{-3}{2}$ برابر $R = \frac{5}{2}$ است

(۱) 3 (۲) 3 (۳) 2 (۴) 1

۷. (سراسری ریاضی ۸۶) معادله شاخصی جواب به صورت سری معادله دیفرانسیل $4x^2y'' + (3x+1)y = 0$ کدام است

(۱) $4r^2 - 4r + 1 = 0$ (۲) $4r^2 + 4r + 1 = 0$

(۳) $4r^2 - 4r - 1 = 0$ (۴) $4r^2 + 4r - 1 = 0$

۸. (سراسری مکانیک ۸۶) کدام یک از سری‌های توانی زیر می‌تواند یک جواب برای معادله دیفرانسیل $2x^2y'' + xy' - (x+1)y = 0$ باشد.

(۱) $y = x^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (۲) $y = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(۳) $y = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (۴) $y = x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

۹. (سراسری مکانیک ۸۷) اگر جواب معادله دیفرانسیل زیر را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ فرض کنیم آنگاه مقادیر r کدامند

$$2x^2y'' - 3xy + (x+3)y = 0$$

(۱) $-1, -\frac{3}{2}$ (۲) $-1, \frac{3}{2}$ (۳) $1, \frac{3}{2}$ (۴) $1, -\frac{3}{2}$

کتاب‌نامه

[۱] معادلات دیفرانسیل معمولی، داریوش شادمان و بهمن مهری، ویرایش دوم، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۲.

[۲] معادلات دیفرانسیل، بیژن طائری، ویرایش سوم، مرکز انتشارات جهاد دانشگاهی واحد صنعتی اصفهان، ۱۳۸۵.

[۳] معادلات دیفرانسیل معمولی، مسعود نیکوکار، انتشارات آزاده، ۱۳۸۸.

[۴] فیلم آموزشی معادلات دیفرانسیل معمولی دکتر امیر جعفری، دانشگاه صنعتی شریف.

[5] F. Ayres, Differential Equations, Schaum's Outline Series, 1952.

[6] W. E. Boyce and R. C. Diprima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 10th ed., John Wiley and sons, 2008.