بسم الله الرحمن الرحیم

اقتصاد و مدیریت صنعتی

بخش اول

تجزیه و تحلیل تصمیم‌گیری

روش‌های وزن‌دهی به مشخصه‌ها

مدرس: زهره قاسمی

مروری بر مطالب گذشته

ویژگی‌های ماتریس تصمیم

- وجود مقادیر وصفی بیانی (کمی‌سازی) ← طیف لیکرت یا ساعتی
- وجود ابعاد مختلف (نرمال‌سازی) ← نرم‌های خطی (بی‌نهایت)، مجموع، اقلیدسی و فازی
- وجود جنس‌های مختلف معیار (هم‌جهت سازی)
  - استفاده مناسب از طیف لیکرت یا ساعتی
  - حین نرمال‌سازی
  - بعد از نرمال‌سازی $(R'_j = 1 - R_j)$
- وجود معیار با اهمیت‌های متفاوت (وزن‌دهی)

دسته‌بندی روش‌های وزن‌دهی به مشخصه‌ها

وزن‌دهی

- بدون نیاز به دریافت اطلاعات از DM (وزن‌دهی از طریق ماتریس تصمیم)
- دریافت اطلاعات از DM
  - اخذ مستقیم وزن‌ها
  - روش‌درجه‌بندی
  - روش‌رتبه‌بندی
  - روش‌های مبتنی بر مقایسات زوجی

بدون نیاز به دریافت اطلاعات از DM (وزن‌دهی از طریق ماتریس تصمیم)

- برخی از روش‌ها به گونه‌ای توسعه یافته‌اند که در آن‌ها نیازی به دریافت اطلاعات از **DM** نیست. این روش‌ها تنها برای مواقعی مناسب هستند که امکان دسترسی به **DM** و دریافت ترجیحات وی وجود ندارد.

- از جمله این روش‌ها می‌توان به روش آنتروپی (**Entropy**) اشاره کرد. این روش ایده گرفته از تابع آنتروپی معرفی شده توسط شانون (**Shannon**) می‌باشد.

- منطق وزن‌دهی در این روش: هرچه پراکندگی در مقادیر یک مشخصه بیشتر باشد، آن مشخصه از اهمیت بیشتری برخوردار است. زیرا تمایز بین گزینه‌های مسئله را بیشتر پدیدار می سازد.

روش آنتروپی

گام۱) ماتریس تصمیم را به صورت روبرو نرمال کنید:

$$[a_{ij}]_{\mathrm{M}\times\mathrm{N}} \rightarrow [r_{ij}]_{M\times N}$$

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}$$

گام۲) شاخص آنتروپی را برای هر مشخصه به صورت زیر محاسبه کنید:

$$E_j = -\frac{1}{ln(m)}\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\, ln(r_{ij}) \qquad j = 1, \dots, n \qquad (0 \le E_j \le 1)$$

گام۳) میزان پراکندگی در هر مشخصه را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$d_j = 1 - E_j \qquad j = 1, \dots, n$$

گام ٤) وزن هر مشخصه را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{k=1}^{n} d_k} \qquad j = 1, \dots, n$$

روش آنتروپی (مثال)

طرح \ مشخصه	ارزش خالص فعلی	ریسک	تناسب با ماموریت‌ها
A	۱۲۰۰۰۰	۵	۵
B	۱۰۰۰۰۰	۳	۵
C	۸۰۰۰۰	۳	۷
D	۵۰۰۰۰	۱	۹

گام ۱) نرمال‌سازی ماتریس تصمیم

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}}$$

طرح \ مشخصه	ارزش خالص فعلی	ریسک	تناسب با ماموریت‌ها
A	۰/۳۴	۰/۴۲	۰/۱۹
B	۰/۲۹	۰/۲۵	۰/۱۹
C	۰/۲۳	۰/۲۵	۰/۲۷
D	۰/۱۴	۰/۰۸	۰/۳۵

روش آنتروپی (مثال) (ادامه)

گام۲) محاسبه شاخص آنتروپی

$$E_1 = -\frac{1}{ln(4)}\left(0.34ln(0.34) + 0.29ln(0.29) + 0.23ln(0.23) + 0.14ln(0.14)\right) = 0.966$$

$$E_2 = 0.909\,, E_3 = 0.975$$

گام۳) محاسبه میزان پراکندگی

$$d_j = 1 - E_j \quad j = 1, \dots, n \longrightarrow \begin{cases} d_1 = 0.034 \\ d_2 = 0.091 \\ d_3 = 0.025 \end{cases}$$

گام ٤) وزن هر مشخصه را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{k=1}^{n} d_k} \longrightarrow w_1 = \frac{0.034}{0.150} = 0.227 \quad w_2 = \frac{0.091}{0.150} = 0.607 \quad w_3 = \frac{0.025}{0.150} = 0.167$$

روش درجه‌بندی

- در این حالت از DM خواسته می‌شود، که به هر مشخصه با توجه به میزان اهمیت آن، امتیازی را از یک بازه مشخص (مثلا از ۱ تا ۵ یا ۱ تا ۱۰) تخصیص دهد. سپس وزن هر مشخصه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W_j = \frac{S_j}{\sum_{j=1}^{n} S_j}$$

n: تعداد مشخصه‌های ارزیابی

S_j: امتیاز تخصیص داده شده به مشخصه

W_j: وزن مشخصه j-ام

نکته: اگر DM قادر باشد با دقت قابل قبولی امتیاز هر مشخصه را بیان نماید، استفاده از این روش توصیه می شود. با این‌حال، در اغلب مسائل واقعی، تخصیص مستقیم امتیاز اهمیت مشخصه‌ها برای تصمیم‌گیرندگان دشوار است و از این رو استفاده از این روش را با چالش همراه می سازد.

روش درجه‌بندی (مثال)

- برای استخدام یک کارشناس در شرکتی، سه معیار تخصص، تجربه، توانمندی انجام کار گروهی موردنظر است. مدیر این شرکت اهمیت این مشخصه‌ها را به صورت زیر بیان کرده است. مقادیر وزنی این مشخصه‌ها را تعیین کنید.

مشخصه	اهمیت
تخصص	خیلی زیاد
تجربه	زیاد
توانمندی انجام کار گروهی	متوسط

پاسخ:

گام ۱) کمی سازی ترجیحات

بکارگیری یکی از طیف های کمی (مانند طیف ساعتی)

گام ۲) محاسبه اوزان

$$w_3 = \frac{5}{9+7+5} = 0.238 \qquad w_2 = \frac{7}{9+7+5} = 0.333 \qquad w_1 = \frac{9}{9+7+5} = 0.429$$

روش رتبه‌بندی

- گاهی اوقات DM در مقایسه دو مشخصه ارزیابی با یکدیگر، تنها قادر است پاسخ دهد که آیا این دو مشخصه به یک اندازه اهمیت دارند یا اهمیت یکی از دیگری بیشتر است، اما اینکه چه مقدار یک مشخصه از مشخصه دیگر مهم‌تر است را نتواند پاسخ دهد.
- در این حالت از DM خواسته می شود، که مشخصه‌ها را با توجه به اهمیت از زیاد به کم مرتب نماید. سپس وزن هر مشخصه به صورت یکی از روش‌های زیر به دست می‌آید:
- روش ۱) رتبه‌بندی مستقیم
- روش ۲) رتبه‌بندی معکوس
- روش ۳) رتبه‌بندی توان P ام

روش‌های رتبه‌بندی

$\boldsymbol{n}$: تعداد مشخصه‌های ارزیابی

$\boldsymbol{r_j}$: رتبه مشخصه $\boldsymbol{j}$ ام از نظر DM (مثال $\boldsymbol{r_3 = 2}$)

$\boldsymbol{W_j}$: وزن مشخصه قرار گرفته در رتبه j–ام

روش مستقیم

$$\boldsymbol{W_j = \frac{n - r_j + 1}{\sum_{j=1}^{n}(n - r_j + 1)}}$$

روش معکوس

$$\boldsymbol{W_j = \frac{\frac{1}{r_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}}}$$

روش توان P ام

$$\boldsymbol{W_j = \frac{(n - r_j + 1)^p}{\sum_{j=1}^{n}(n - r_j + 1)^p}}$$

$$0 \le W_j \le 1$$
$$\sum W_j = 1$$

مثال)

	روش مستقیم	روش معکوس
$r_1 = 3$	$W_1 = \frac{1}{6}$	$W_1 = \frac{2}{11}$
$r_2 = 1$	$W_2 = \frac{1}{2}$	$W_2 = \frac{6}{11}$
$r_3 = 2$	$W_2 = \frac{1}{3}$	$W_3 = \frac{3}{11}$

روش رتبه‌بندی مستقیم (مثال)

- مدیر یک شرکت برای استخدام یک کارشناس، پنج معیار زیر را به ترتیب اهمیت از زیاد به کم مرتب کرده است. مقادیر وزنی این مشخصه‌ها‌را با روش رتبه‌بندی مستقیم تعیین کنید.

مشخصه	رتبه اهمیت
تخصص	۱
تجربه	۲
توانمندی انجام کار گروهی	۳
سن	۴
مسئولیت پذیری	۵

$$W_1 = \frac{5-1+1}{15} = 0.333$$

$$W_2 = \frac{5-2+1}{15} = 0.267$$

$$W_3 = \frac{5-3+1}{15} = 0.200$$

$$W_4 = \frac{5-4+1}{15} = 0.133$$

$$W_5 = \frac{5-5+1}{15} = 0.067$$

$$\sum_{j=1}^{n} (n - r_j + 1) = 15$$

روش‌های مبتنی بر مقایسات زوجی

در این حالت از DM خواسته می شود، که مشخصه‌ها را دو به دو مقایسه کرده و میزان اهمیت هر یک را نسبت به دیگری بیان نماید. ماتریسی که از این طریق ساخته می‌شود، ماتریس مقایسات زوجی (Pairwise Comparison Matrix) نامیده می‌شود.

$$D = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{n\times n}$$

شدت ارجحیت	اهمیت یکسان	نسبتا مرجح	ترجیح زیاد	ترجیح خیلی زیاد	کاملا مرجح
ارزش	۱	۳	۵	۷	۹

روش‌های مبتنی بر مقایسات زوجی

- در ماتریس مقایسات زوجی، پایین قطر اصلی معکوس بالای قطر اصلی می‌باشد.
- تعداد مقایسات موردنیاز برای ساخت ماتریس مقایسات زوجی:

$$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

- با توجه به اینکه تعداد مقایسات زوجی با افزایش تعداد مشخصه ها به صورت فزاینده‌ای افزایش می‌یابد، توصیه می‌شود در مسائلی که بیش از ۷ مشخصه وجود دارد، از این روش استفاده نشود. زیرا با افزایش تعداد مقایسات، خطای DM نیز افزایش پیدا کرده و ناسازگاری ماتریس بیشتر می‌شود.
- یک ماتریس مقایسات زوجی را (کاملاً) سازگار (consistence) گویند، اگر: $\forall\, i,j,k: a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik}$

روش‌های مبتنی بر مقایسات زوجی

ماتریس مقایسات زوجی سازگار باشد.
- نرمال سازی یک ستون

ماتریس مقایسات زوجی ناسازگار باشد.
- روش بردار ویژه
- روش‌های تقریبی
- <u>روش حداقل مربعات</u>
- <u>روش برنامه‌ریزی آرمانی</u>
- <u>روش LINMAP</u>

سازگار بودن ماتریس مقایسات زوجی

- هنگامی که ماتریس مقایسات زوجی سازگار باشد، وزن هر مشخصه با یک نرمال‌سازی ساده به صورت زیر محاسبه می شود:

گام۱: یک ستون از ماتریس به دلخواه انتخاب کنید. (j)

گام۲: مجموع اعداد ستون مربوطه را بدست آورید. $(S_j = \sum_i a_{ij})$

گام۳: وزن هر مشخصه به صورت زیر تعیین می شود. $\left(w_i = \frac{a_{ij}}{S_j} \quad i = 1, \ldots, n\right)$

سازگار بودن ماتریس مقایسات زوجی (مثال)

- سازگاری ماتریس مقایسات زوجی زیر را بررسی کرده و سپس وزن مشخصه‌های ارزیابی را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 & 1 \\ 2 & 1 & 0.8 & 2 \\ 2.5 & 1.25 & 1 & 2.5 \\ 1 & 0.5 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

حل) الف: بررسی سازگاری ⟵ ماتریس سازگار است.

$$a_{24} = a_{23} \times a_{34} \qquad a_{14} = a_{12} \times a_{24} \qquad a_{12} = a_{13} \times a_{32}$$

$$2 = 0.8 \times 2.5 \checkmark \qquad 1 = 0.5 \times 2 \checkmark \qquad 0.5 = 0.4 \times 1.25 \checkmark$$

ب: محاسبه وزن مشخصه‌ها

با توجه به سازگاری ماتریس، یک ستون را به دلخواه بی مقیاس می‌کنیم:

گام ۱) انتخاب ستون اول

گام ۲) محاسبه مجموع ستون اول $(S = 6.5)$

گام ۳) وزن مشخصه‌ها

$$w_1 = \frac{1}{6.5} = 0.154 \qquad w_3 = \frac{2.5}{6.5} = 0.385$$

$$w_2 = \frac{2}{6.5} = 0.308 \qquad w_4 = \frac{1}{6.5} = 0.154$$

روش بردار ویژه (Eigenvector)

تعریف بردار ویژه و مقدار ویژه: ماتریس مربعی A را در نظر می گیریم. بردار غیر صفر x را بردار ویژه و اسکالر λ را مقدار ویژه نظیر آن بردار می‌گوییم، چنانچه معادله ماتریسی روبرو برقرار باشد:

$$Ax = \lambda x$$

- **منشا ایده استفاده بردار ویژه برای محاسبه وزن مشخصه‌ها:**

ماتریس مقایسات زوجی روبرو را در نظر بگیرید. با فرض سازگاری ماتریس و با توجه به اینکه $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

- برای یک ماتریس مقایسات زوجی سازگار (A) داریم:

$$\begin{cases} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n = nw_1 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2n}w_n = nw_2 \\ \vdots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n = nw_n \end{cases} \Rightarrow Aw = nw$$

بردار ویژه: بردار وزنی مشخصه‌ها (w)

مقدار ویژه: تعداد مشخصه‌ها (n)

روش بردار ویژه (ادامه)

- بر این اساس، ساعتی(Saaty) در سال ۱۹۷۷ برای یافتن بردار وزنی از روی ماتریس مقایسات زوجی مشخصه‌ها، یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس را به صورت زیر پیشنهاد نموده است:

- گام ۱: ماتریس $(A-\lambda.I)$ را ایجاد کنید.

- گام ۲: دترمینان ماتریس را محاسبه کرده و برابر صفر قرار دهید تا مقدار λ تعیین شود. در صورتی که چندین مقدار برای λ بدست آمد بزرگترین مقدار حقیقی را در نظر بگیرید (λ_{max}). (نکته: همواره $\lambda_{max} \geq n$ و در صورت سازگار بودن ماتریس $\lambda_{max}=n$)

گام ۳: دستگاه معادلات خطی زیر را حل کرده و مقادیر w_i را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} (A-\lambda_{max}.I)w=0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1n}w_n = \lambda_{max}w_1 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2n}w_n = \lambda_{max}w_2 \\ \vdots \\ a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n = \lambda_{max}w_n \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1 \end{cases}$$

روش بردار ویژه (مثال)

- اهمیت نسبی سه مشخصه ارزیابی از دیدگاه DM به صورت ماتریس مقایسات زوجی روبرو بوده است. با استفاده از روش بردار ویژه، مقادیر وزنی این مشخصه‌ها را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 9\\ 1/5 & 1 & 3\\ 1/9 & 1/3 & 1\end{bmatrix}$$

$$a_{12}\neq a_{13}\times a_{32}$$

$$5\neq 9\times 1/3$$

حل)

گام ۱:

$$A-\lambda.I=\begin{bmatrix}1-\lambda & 5 & 9\\ 1/5 & 1-\lambda & 3\\ 1/9 & 1/3 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

گام ۲:

$$det(A-\lambda.I)=0\rightarrow \lambda^3-3\lambda^2-0.26667=0\ \rightarrow \lambda_{max}=3.02906$$

گام ۳:

$$\begin{cases}-2.02906w_1+5w_2+9w_3=0\\ 0.2w_1-2.02906w_2+3w_3=0\\ 0.1111w_1+0.3333w_2-2.02906w_3=0\\ w_1+w_2+w_3=1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}w_1=0.751\\ w_2=0.178\\ w_3=0.071\end{cases}$$

روش بردار ویژه

- در یک ماتریس با سازگاری کامل:

$$a_{ij} \times a_{jk} = a_{ik} \rightarrow \frac{w_i}{w_j} \times \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k}$$

- شاخص ناسازگاری (Inconsistency Index):

$$II = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

- برای اینکه در یک مسئله مشخص شود که شاخص ناسازگاری مناسب است یا نه؛ از معیار دیگری بنام شاخص ناسازگاری تصادفی (Inconsistency Random Index) استفاده می‌شود.

معیار	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
IRI	۰	۰/۵۸	۰/۹	۱/۱۲	۱/۲۴	۱/۳۲	۱/۴۱	۱/۴۵	۱/۴۹	۱/۵۱	۱/۵۳	۱/۵۶

- نرخ (نسبت) ناسازگاری (Inconsistency Rate):

$$IR = \frac{II}{IRI}$$

- در صورتی که مقدار IR کمتر از ۰/۱ باشد؛ مقدار ناسازگاری قابل قبول است و در غیر اینصورت باید DM در مقایسات زوجی تجدیدنظر کند.

مثال قبل

$$IR = \frac{0.01453}{0.58} = 0.025$$

$$II = \frac{3.02906 - 3}{3 - 1} = 0.01453$$

روش‌های تقریبی: ۱) نرمال کردن مجموع سطرها

گام‌ها:

گام اول) مجموع سطرها

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1.833 \\ 7 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

گام دوم) نرمال کردن اعداد به دست آمده (نرم مجموع)

$$1.833 + 7 + 3.33 = 12.163 \qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{1.833}{12.163} = 0.151 \\ w_2 = \dfrac{7}{12.163} = 0.575 \\ w_3 = \dfrac{3.33}{12.163} = 0.274 \end{cases}$$

روش‌های تقریبی: ۲) نرمال کردن معکوس مجموع ستونی

گام‌ها:

گام اول) مجموع ستون

گام دوم) معکوس کردن اعداد

گام سوم) نرمال کردن اعداد به دست آمده (نرم مجموع)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$[6 \quad 1.66 \quad 4.5]$$

$$\downarrow$$

$$[\mathbf{0.167} \quad \mathbf{0.6} \quad \mathbf{0.22}]$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{0.167 + 0.6 + 0.22 = 0.987}$$

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{0.167}{0.987} = 0.170 \\ w_2 = \dfrac{0.6}{0.987} = 0.607 \\ w_3 = \dfrac{0.22}{0.987} = 0.223 \end{cases}$$

روش‌های تقریبی: ۳) میانگین حسابی ماتریس نرمال شده

گام‌ها:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

گام اول) نرمال‌سازی ستون‌ها (نرم مجموع)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

گام دوم) بدست آوردن میانگین حسابی از سطرها در ماتریس نرمال شده

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}}{3} = 0.15925$$

$$w_2 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{3} = 0.58890$$

$$w_3 = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{9}}{3} = 0.25185$$

روش‌های تقریبی: ۴) روش میانگین هندسی سطرها

- در این روش، وزن مشخصه ها با محاسبه میانگین هندسی سطرهای ماتریس تعیین می‌شود. این روش در عین سادگی نشان داده شده است که نتایج مناسبی ارائه می دهد.

- گام ۱) میانگین هندسی هر سطر را محاسبه کنید.

$$b_i = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad i = 1, \dots, n$$

- گام ۲) مجموع اعداد بردار ستونی بدست آمده را (b) را بدست آورید.

$$S = \sum_i b_i$$

- گام ۳) وزن هر مشخصه به صورت زیر تعیین می شود:

$$w_i = \frac{b_i}{S} \qquad i = 1, \dots, n$$

- نکته: در صورتی که ماتریس مقایسات زوجی از بعد ۳ باشد، نتایج روش میانگین هندسی با نتایج روش بردار ویژه یکسان خواهد بود.

روش میانگین هندسی سطرها (مثال)

- اهمیت نسبی سه مشخصه ارزیابی از دیدگاه DM به صورت ماتریس مقایسات زوجی روبرو بوده است. با استفاده از روش میانگین هندسی سطرها، مقادیر وزنی این مشخصه ها را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل)

گام ۱:

$$b = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{1 \times 5 \times 9} \\ \sqrt[3]{\frac{1}{5} \times 1 \times 3} \\ \sqrt[3]{\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.557 \\ 0.843 \\ 0.333 \end{bmatrix}$$

گام ۲:

$$S = \sum_i b_i = 4.733$$

گام ۳:

$$w_3 = \frac{0.333}{4.733} = 0.071 \qquad w_2 = \frac{0.843}{4.733} = 0.178 \qquad w_1 = \frac{3.557}{4.733} = 0.751$$