الف

① $T(n)=3T(\frac{n}{2})+1$, $T(\frac{n}{2})=3T(\frac{n}{4})+1$, ... $\Longrightarrow T(n)=3^i T(\frac{n}{2^i})+(1+3+\cdots+3^{i-1})(1$

$i=\log n \rightarrow T(n)=3^{\log n}T(1)+\frac{3^{\log n}-1}{2} \xrightarrow{T(1)=2}$ $\boxed{T(n)=2\times 3^{\log n}+\frac{3^{\log n}-1}{2}}$

② $T(n)=T(n-1)+2^{n-2}$, $T(n-1)=T(n-2)+2^{n-3}$, ... $\Longrightarrow T(n)=T(n-i)+(2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^{n-i-1})$

$i=n \rightarrow T(n)=T(0)+(2^{-1}+2^{0}+2^{1}+\cdots+2^{n-2}) \xrightarrow{T(0)=1}$ $\boxed{T(n)=1+\frac{1}{2}+2^{n-1}}$

③ $T(n)=2T(n-1)+2^{n-2}$, $T(n-1)=2T(n-2)+2^{n-3}$, ... $\Longrightarrow T(n)=2^i T(n-i)+i\times 2^{n-2}$

$i=n \rightarrow T(n)=2^n T(0)+n\times 2^{n-2}=$ $\boxed{2^n+n\times 2^{n-2}=T(n)}$

ب

① $\log_b a=\log_2 \frac{1}{2}=-1 \longrightarrow f(n)=\theta(n^{-1}) \longrightarrow T(n)=\theta(n^{-1}\log n)$

② $\log_b a=\log_2 \sqrt{2}=\frac{1}{2}$ نمی‌توان حل کرد $\xrightarrow{\sqrt{n}}$ به صورت Polynomial بزرگتر یا کوچکتر نیست

③ $\log_4 4=1 \longrightarrow f(n)=\theta(n) \longrightarrow$ $T(n)=\theta(n\log n)$

④ $\log_2 2=1 \longrightarrow$ $f(n)$ با Polynomial تفاوت n ندارد $\longrightarrow$ نمی‌توان حل کرد

⑤ $\log_4 3=1 \longrightarrow f(n)=O(n) \longrightarrow T(n)=\theta(n)$

⑥ $\log_4 7\simeq 1,77 \longrightarrow f(n)=\Omega(n^{1,77}) \longrightarrow T(n)=\theta(n^2)$

۲) برای حالت معمولی ابتدا $n-1$ دیسک بالایی را به وسیله C از A به B منتقل می‌کنیم. بعد دیسک زیرین را به C و در آخر $n-1$ دیسک را از B به C به وسیله A منتقل می‌کنیم.

$T(n)=2T(n-1)+1 \longrightarrow T(n)=2^i T(n-i)+(1+2+\cdots+2^{i-1}) \xrightarrow[T(1)=1]{i=n-1}$ $\boxed{T(n)=2^n-1}$

ادامه ۲) برای حالت دوم داریم: $T(n) = 3T(n-1) + 2 \longrightarrow T(n) = 3^i T(n-i) + (2 + 6 + \cdots + 2 \times 3^{i-1})$

$\xrightarrow[T(1)=2]{i=n-1} T(n) = 2 \times 3^{n-1} + 3^{n-1} - 1 = \boxed{3^n - 1 = T(n)}$

۴) برنامه زیر به زبان Python نوشته شده:

```
def func(a):
    if len(a) == 1:
        return a[0]
    i = func(a[0 : len(a) // 2])
    j = func(a[len(a) // 2 :])
    if i > j:
        return i
    else:
        return j
```

۵) ابتدا حلقه for را حساب می‌کنیم. برای بدست آوردن آن می‌توان از این ایده استفاده کرد که هر بار i در خودش ضرب می‌شود در نتیجه دو بار باید $\log_2 n$ بگیریم و با استفاده از چند مثال رابطه دقیق آنرا بدست می‌آوریم:

که برای ۴، ۱۶، ۲۵۶، ... برقرار است

$$c = \log_2 \log_2 n + 1$$

به طور کلی $\longrightarrow \boxed{c = [\log \log n] + 1}$ $\Longrightarrow \boxed{T(n) = cT(n/2) + \Theta(\log \log n)}$