

به نام خدا



تمرین پنجم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

استاد درس: دکتر مهدوی

اردیبهشت 1404

توجه: فقط سوالات قرمز رنگ را تحویل بدهید. مابقی برای تمرین بیشتر بوده و تحویل آن‌ها نمره تشویقی ندارد.

1 تبدیل فوریه سیگنال‌های $x(t)$ داده شده را حتی الامکان با استفاده از خواص تبدیل فوریه به دست آورید.

(الف)

$$\text{Rect}(t) = \begin{cases} 0 & t < -1/2 \\ 4 & -1/2 < t < 1/2 \\ 0 & 1/2 < t \end{cases},$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Rect}(t - 8n)$$

(ب)

$$x(t) = e^{-2|t|} \cos(3t)$$

(پ)

$$x(t) = \frac{\sin(t)\cos(t)}{t^2 + 2}$$

2 با توجه به تبدیل فوریه های داده شده $X(j\omega)$ ، سیگنال‌های حوزه زمان $x(t)$ را بیابید.

$$X(j\omega) = \frac{\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)}{j\omega + \pi} \quad \text{(الف)}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j^k \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right) \quad \text{(ب)}$$

$$X(j\omega) = \frac{\sin^2(3\omega)\cos(\omega)}{\omega^2} \quad (\text{پ})$$

(3) پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI و علی و پایدار داده شده است:

$$H(j\omega) = \frac{6 + \omega^2}{6 - \omega^2 + 5j\omega}$$

(الف) معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مربوط به این سیستم را به دست آورید.

(ب) پاسخ ضربه این سیستم یعنی $h(t)$ را به دست آورید.

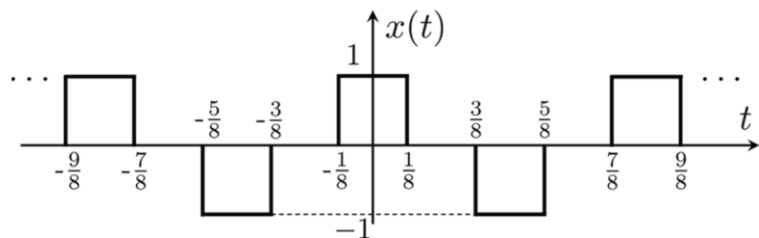
(پ) پاسخ حوزه فرکانس این سیستم به ورودی $x(t) = t^3 e^{-t} u(t)$ را محاسبه کنید.

(4) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت $h(t) = \cos(4\pi t) \text{sinc}(2t)$ است. پاسخ این سیستم را به ورودی‌های زیر بیابید.

(الف) $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$

(ب) $x(t) = |\cos(4\pi t)|$

(پ)



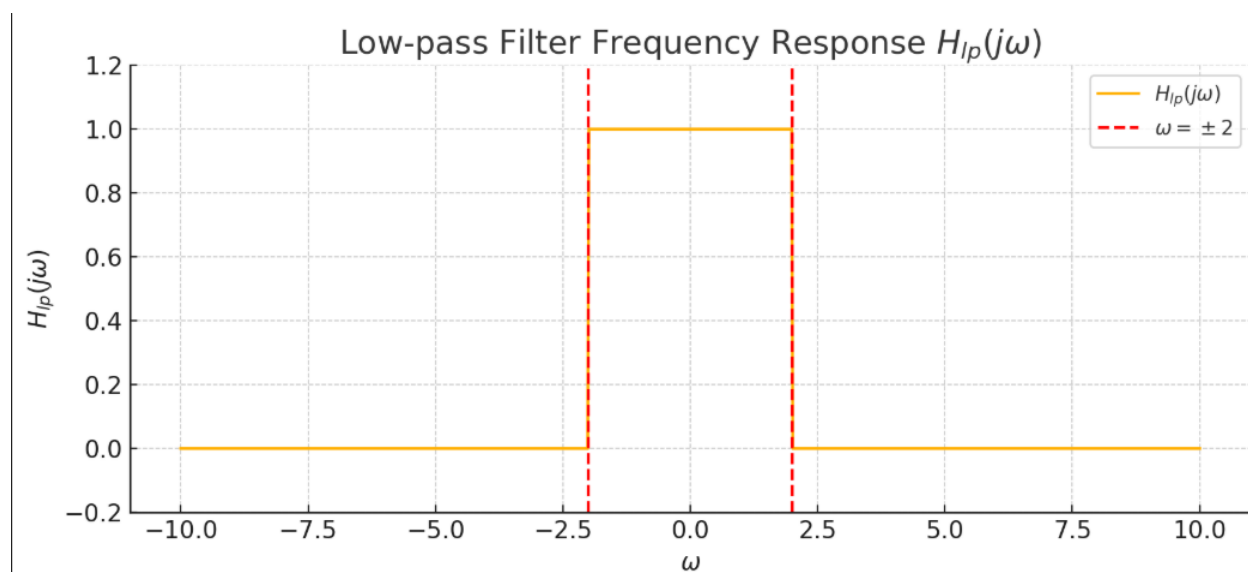
(5) یک سیستم زمان پیوسته و پایدار با پاسخ فرکانسی $H_1(j\omega)$ دارای معادله دیفرانسیل زیر است:

$$-\frac{d^4 y(t)}{dt^4} - 2\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 8\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 18\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = 5\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 12\frac{dx(t)}{dt} + 15x(t)$$

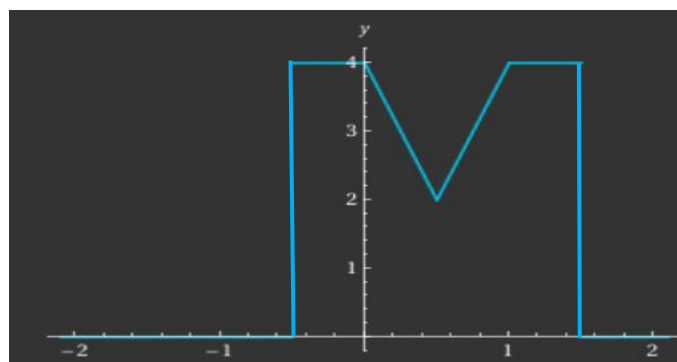
(الف) پاسخ ضربه این سیستم یعنی $h_1(t)$ را به دست آورید.

(ب) پاسخ خروجی این سیستم $y_1(t)$ به ازای ورودی $x_1(t) = e^{-t} u(t)$ را به دست آورید.

پ) خروجی سیستم ب را از یک فیلتر زمان پیوسته پایین گذر ایده آل با پاسخ ضربه زیر عبور می دهیم. مطلوب است دامنه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم معادل (سیستم کل).



6) سیگنال $x(t)$ به فرم زیر در نظر گرفته شده است و تبدیل فوریه آن را $X(j\omega)$ نامیده ایم. بدون محاسبه تبدیل فوریه و تنها با استفاده از خواص فوریه، مقادیر زیر را به دست آورید.



الف) $X(j\omega)$

ب) $X(0)$

پ) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega$

ت) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \frac{2\sin(\omega)}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$

ث) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

7 فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ باشد. با توجه به اطلاعات زیر فرم بسته $x(t)$ را بیابید.

1. $x(t)$ حقیقی است

2. $x(t) = 0$ برای $t \leq 0$

$$|t|e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}\{X(j\omega)\} e^{j\omega t} d\omega$$

8 سیستم LTI با پاسخ ضربه زیر را در نظر بگیرید:

$$h(t) = \frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$$

خروجی سیستم را به ازای هر یک از ورودی های زیر تعیین کنید.

الف) $x_1(t) = \cos(6t + \frac{\pi}{2})$

ب) $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \sin(3kt)$

پ) $x_3(t) = \frac{\sin(4(t+1))}{\pi(t+1)}$

ت) $x_4(t) = \frac{4}{\pi^2} \text{sinc}^2(\frac{2t}{\pi})$

9 تبدیل فوریه سیگنال های زمان گسسته زیر را بیابید:

پ- $x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n-3]$

الف- $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n \cos(4n)u(n)$

ت- $x_2[n] = \begin{cases} 2 & |n| \leq 2 \\ 3 & 3 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ب- $x_4[n] = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{3}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right)$

ج- $x_5[n] = \begin{cases} 2 & n = -1, 1, 5 \\ 1 & n = 0 \\ -1 & n = 2, 4 \end{cases}$ ، $x_5[3] = 0$

با دوره تناوب $N = 6$

10 سیگنال زمانی متناظر با طیف‌های زیر را با استفاده از خواص تبدیل فوریه بدست آورید:

$$X_1(\omega) = \cos^2 \omega + \sin^2 3\omega$$

پ -

$$X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right) \quad \text{الف -}$$

$$X_2(\omega) = \frac{1 - \frac{e^{-j\omega}}{3}}{1 - \frac{e^{-j\omega}}{4} - \frac{e^{-j2\omega}}{8}}$$

ت -

$$X_4(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \left(\sin \frac{3\omega}{2} \right) \quad \text{ب -}$$

11 اگر $x[n]$ سیگنال متناوب با دوره تناوب N و ضرائب سری فوریه a_k باشد، با استفاده از خواص تبدیل فوریه گسسته، ضرائب سری فوریه را در سیگنال‌های زیر بدست آورید:

a) $y_1[n] = x^*[-n]$

b) $y_2[n] = x[n] - x^*\left[n - \frac{N}{2}\right]$ و N : زوج

c) $y_3[n] = (-1)^n x[n]$ و N : فرد

12 سیگنال $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 6k]$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$ است. ضرائب سری فوریه خروجی را تعیین کنید.

13 سیگنال $x_2[n]$ در سوال 9 را در نظر بگیرید. صرفاً بر اساس نمایش زمانی $x_2[n]$ (بدون استفاده از $X_2(\omega)$ بدست آمده)، مقادیر خواسته شده در زیر را بدست آورید:

$$X_2(0) \quad \star \quad X_2(\omega) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} X_2(\omega) d\omega \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX_2(\omega)}{d\omega} \right|^2 d\omega \quad F^{-1}\{\text{Re}\{X_2(\omega)\}\}$$

موفق باشید (: