بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

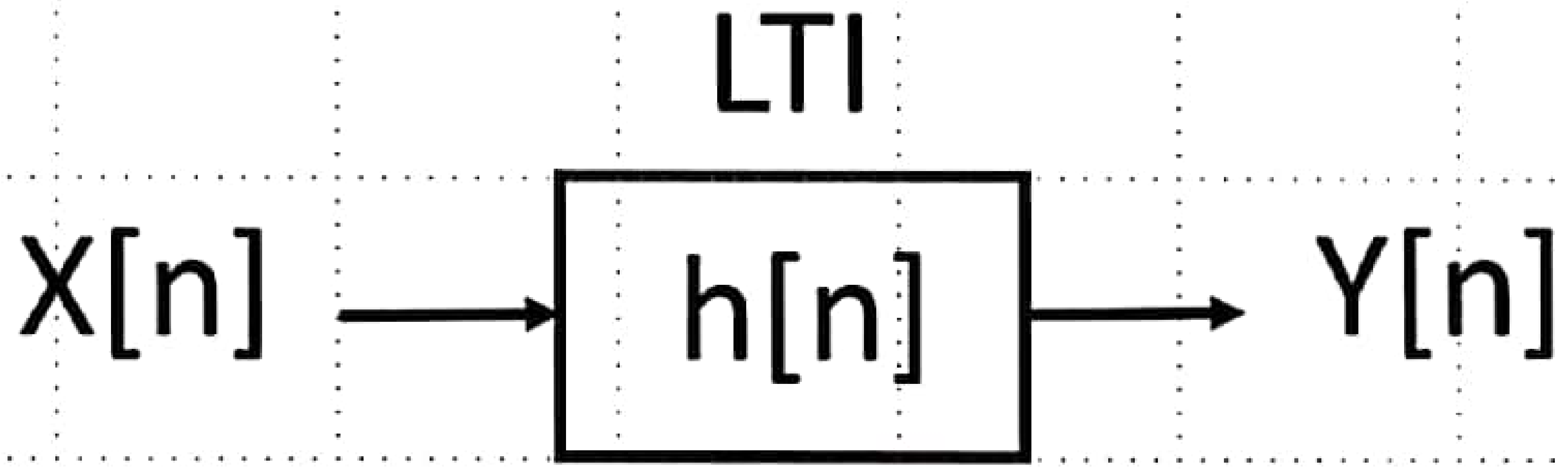
تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه نوزدهم _ بخش‌های 10.1 و 10.2 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

THE z-TRANSFORM تبدیل Z



فرض : $x[n] = z^n \quad (z = re^{j\omega})$ ورودی نمایی مختلط

$$\Rightarrow y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}}_{H(z)}$$

$$= z^n \cdot H(z)$$

نتیجه: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط z^n ، یک دنباله نمایی مختلط به شکل $H(z)z^n$ است که در آن $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$ را تبدیل Z دنباله $h[n]$ می نامیم. اصطلاحاً به سیگنال های نمایی مختلط z^n ، توابع ویژه سیستمهای LTI گفته می شود.

تعریف تبدیل Z

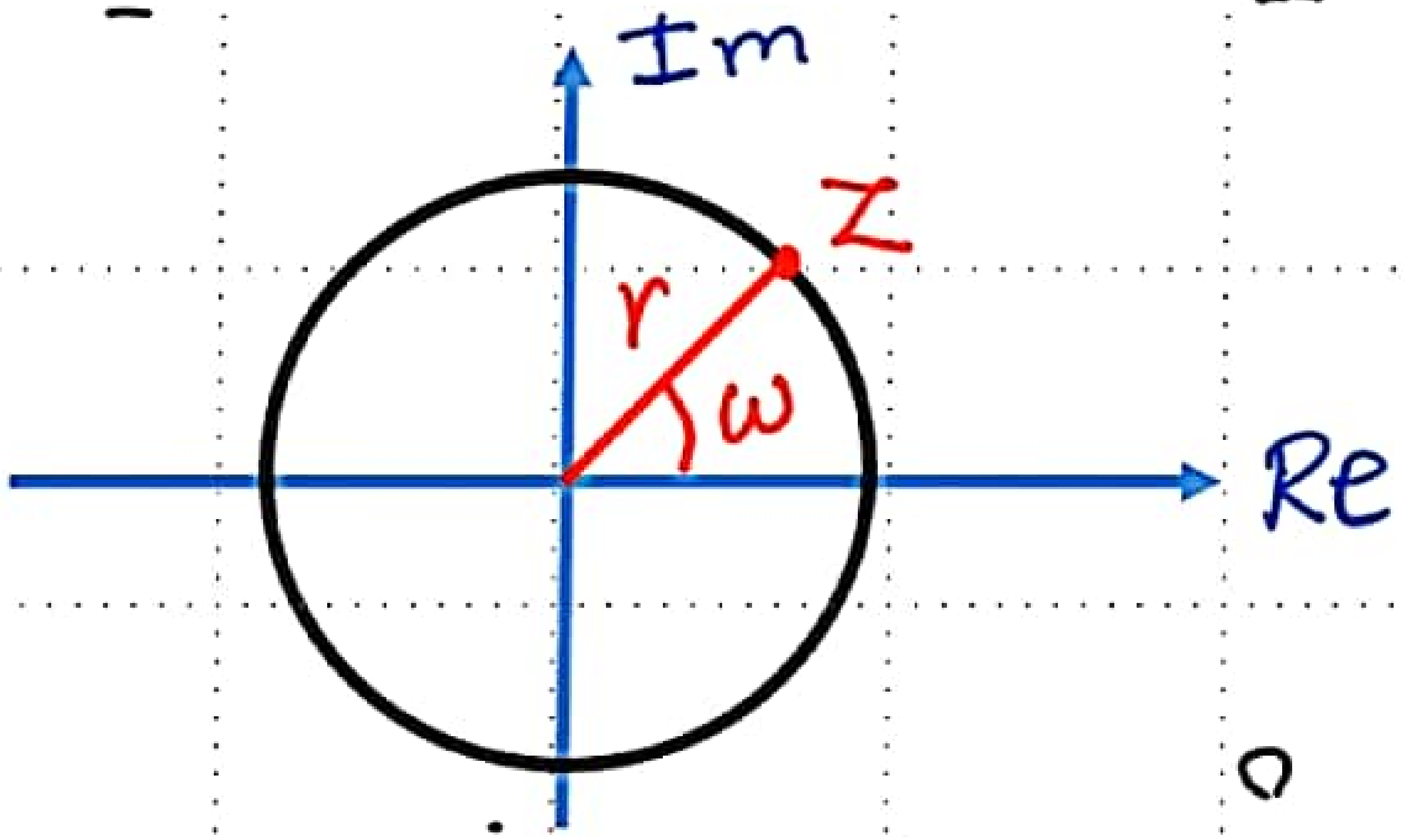
The z-transform of a general discrete-time signal $x[n]$ is defined as

$$\boxed{X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n},}$$

where z is a complex variable. For convenience, the z-transform of $x[n]$ will sometimes be denoted as $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ and the relationship between $x[n]$ and its z-transform indicated as

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z).$$

نکته ۱: تبدیل Z ، $X(z) = Z\{x[n]\}$ ، سیگنال زمان گسسته $x[n]$ را به تابع جدید $X(z)$ در حوزهٔ جدیدی بنام حوزهٔ مختلط Z ، یعنی $Z = re^{j\omega}$ تبدیل می‌کند.



صفحهٔ Z مختلط

$$\begin{cases} r = |Z| \\ \omega = \measuredangle Z \end{cases}$$

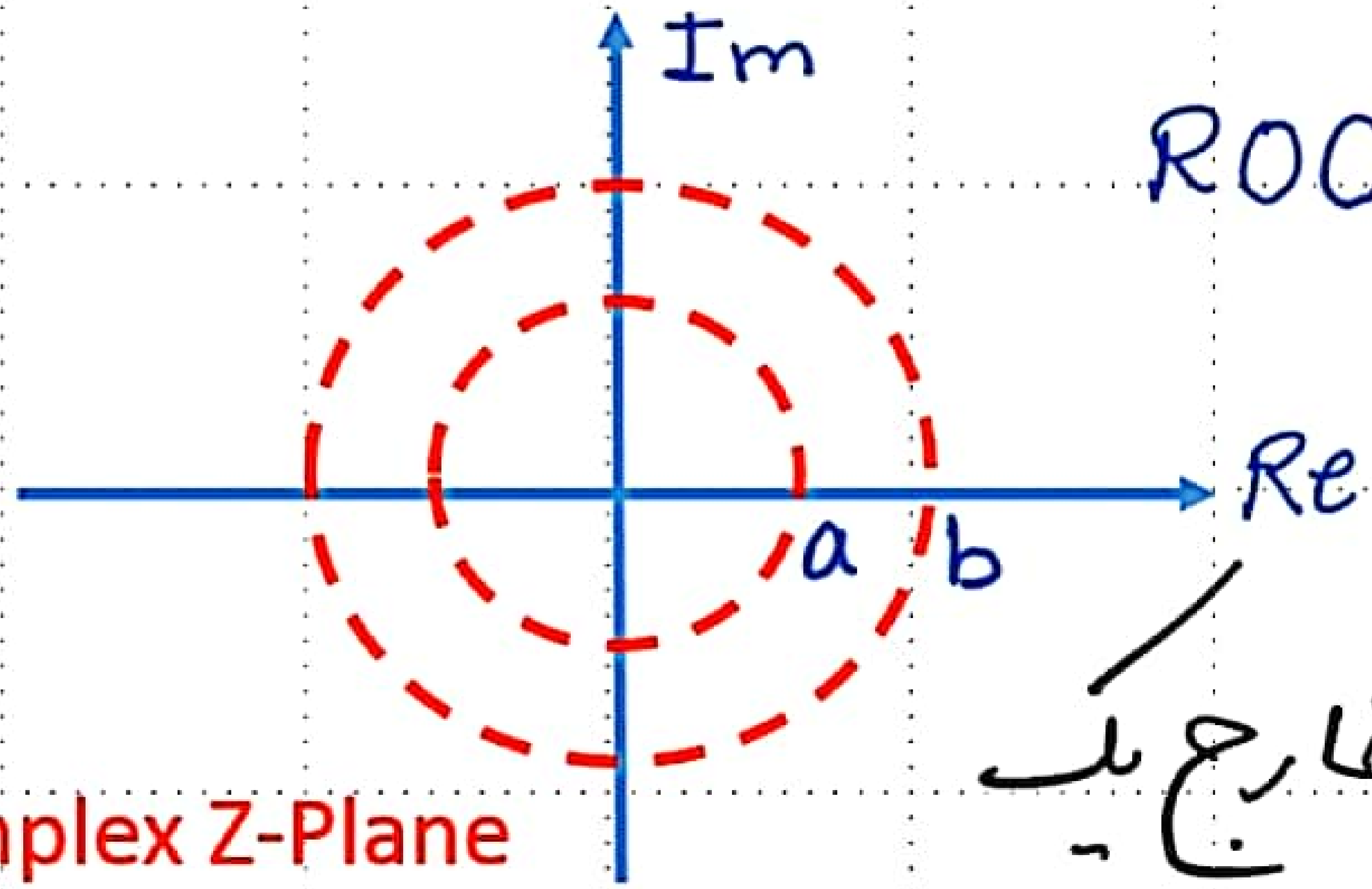
نکته ۲: اگر تبدیل Z ، $x[n]$ ، فقط بر روی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحهٔ Z محاسبه شود:

$$r = 1 \Rightarrow Z = e^{j\omega} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

تبدیل جدیدی به نام تبدیل فوریه گسسته تعریف خواهد شد (مباحث آینده درس)

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x(t)\} \iff X(z) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

نکته ۳ : وجود یا عدم وجود تبدیل Z برای یک سیگنال زمان گسسته $x[n]$ بستگی به همگرا شدن یا واگرا شدن مجموع $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{n}$ دارد و لذا مقدار $r = |z|$ در میرایی یا رویندگی عبارت r^n تعیین‌کننده است. به عبارت دیگر $X(z)$ برای یک سیگنال $x[n]$ ، ممکن است فقط برای محدوده‌ای خاص از $r = |z|$ قابل تعریف باشد. به محدوده همگرا شدن تبدیل Z با توجه به مقدار r ، ناحیهٔ همگرایی آن گفته می‌شود. Region Of Convergence (ROC)



Complex Z-Plane

$$\text{ROC}:\quad a < r = |z| < b \;,\quad 0 < a, b < \infty$$

ناحیهٔ همگرایی تبدیل Z، همواره به صورت حلقه‌ای بین دو دایره با مرکزیت مبدأ مختصات، داخل یک دایره و یا خارج یک دایره است.

تبدیل Z برخی از سیگنال‌های مهم

مثال ۱) $x[n] = a^n u[n]$ (ثابت a)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$ اگر $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad ROC: |z|>|a|$$

مثال ۲) $x[n] = -a^n u[-n-1]$ (a ثابت)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] . z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z}$$

$$= \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{-1}{az^{-1}-1} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$ ، اگر $|a^{-1}z|<1$

$$\Rightarrow |z|<|a|$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad ROC: |z| < |a|$$

مثال ۳) نتیجهٔ دو مثال اخیر

اگر $a=1 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{Z}\{u[n]\} = \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{1}{1-z^{-1}} , & ROC: |z|>1 \\ \mathcal{Z}\{-u[-n-1]\} = \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{1}{1-z^{-1}} , & ROC: |z|<1 \end{cases}$

مثال ۴) $x[n] = \delta[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = (1)\cdot z^{0} = 1 \quad , \forall z$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1 \quad , \quad \forall z$$

Let us consider a signal that is the sum of two real exponentials: (مثال ۵

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} z^{-n} = 7\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n} - 6\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n}$$

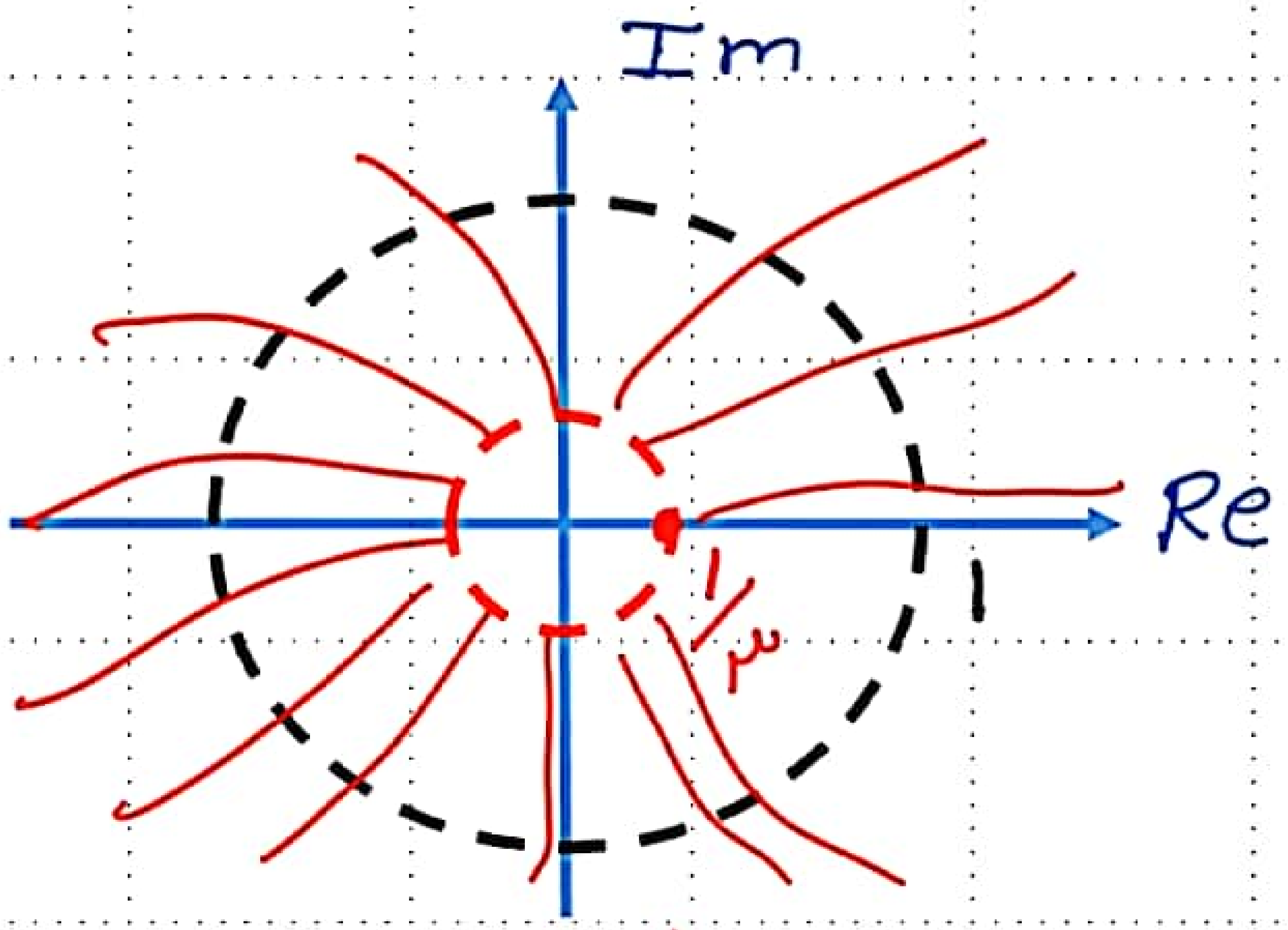
$$= 7\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \frac{7}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

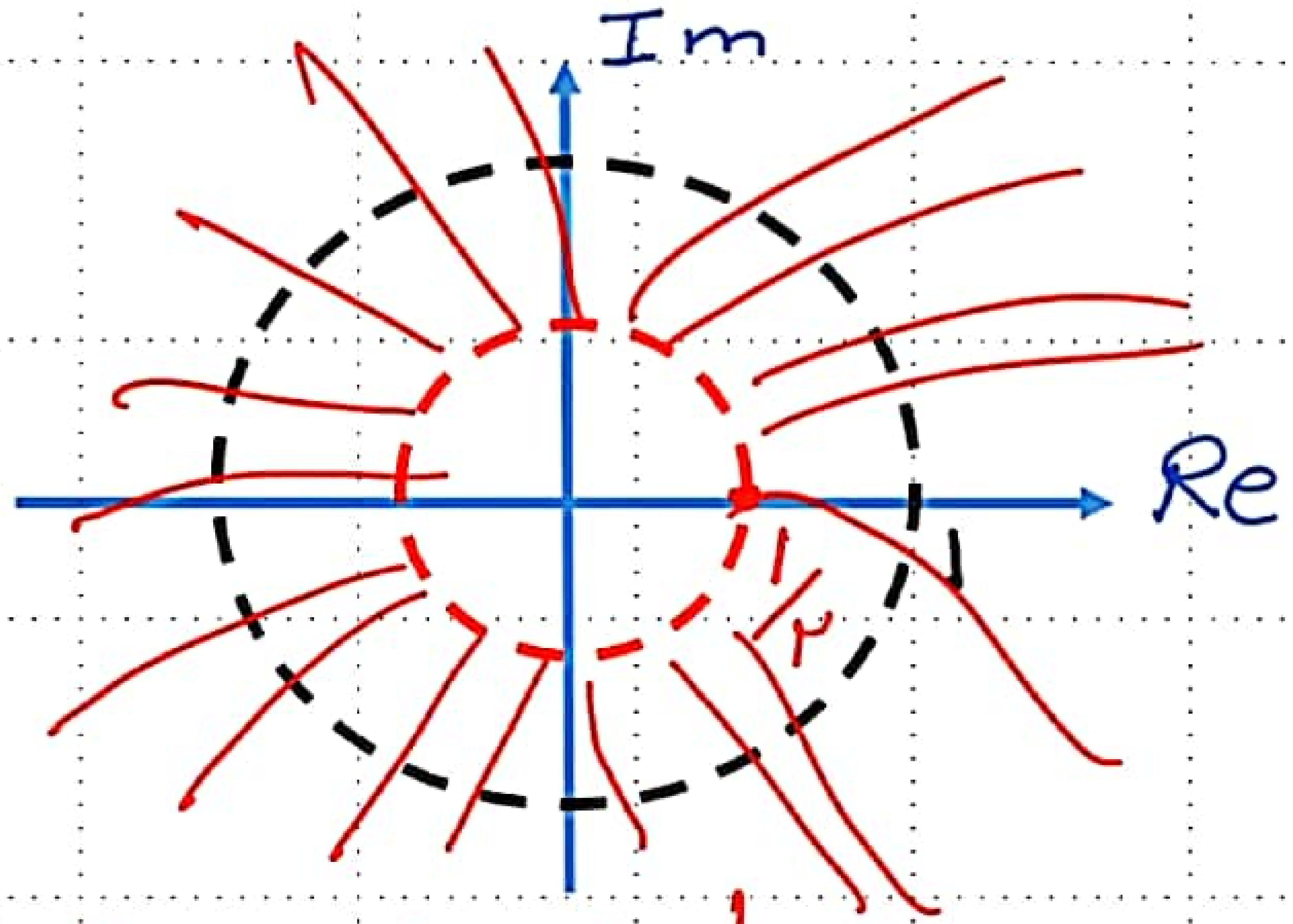
$$= \frac{z(z-\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}.$$

ناحیه همگرایی: $|(1/3)z^{-1}| < 1$ and $|(1/2)z^{-1}| < 1$

equivalently, $|z| > 1/3$ and $|z| > 1/2$.

Thus, the region of convergence is $|z| > 1/2$.





$ROC_۱ : |z| > \frac{1}{۳}$ $\qquad$ $ROC_۲ : |z| > \frac{1}{۲}$

ROC نهایی بایستی شامل اشتراک دو ناحیهٔ $ROC_۱$ و $ROC_۲$ باشد، در نتیجه:

$$ROC : |z| > \frac{1}{۲}$$

Let us consider the signal مثال ۶)

$$x[n] = (\tfrac{1}{3})^n \sin(\tfrac{\pi}{4}n)u[n] = \frac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{j\pi/4})^n u[n] - \frac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{-j\pi/4})^n u[n].$$

$$\Rightarrow \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \right\} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}} \Rightarrow X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4})}$$

$$|(1/3)e^{j\pi/4}z^{-1}| < 1 \text{ and } |(1/3)e^{-j\pi/4}z^{-1}| < 1 \Rightarrow \quad |z| > 1/3$$

ناحیهٔ همگرایی :

نکته مهم: تبدیل z هر ترکیب خطی از توابع نمایی (حقیقی یا مختلط) $a^n u[n]$

یا $a^n u[-n-1]$ به صورت ترکیب خطی از کسرهای ساده $\frac{z}{z-a}$ است که به صورت

یک کسر گویای $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ تبدیل خواهد شد.

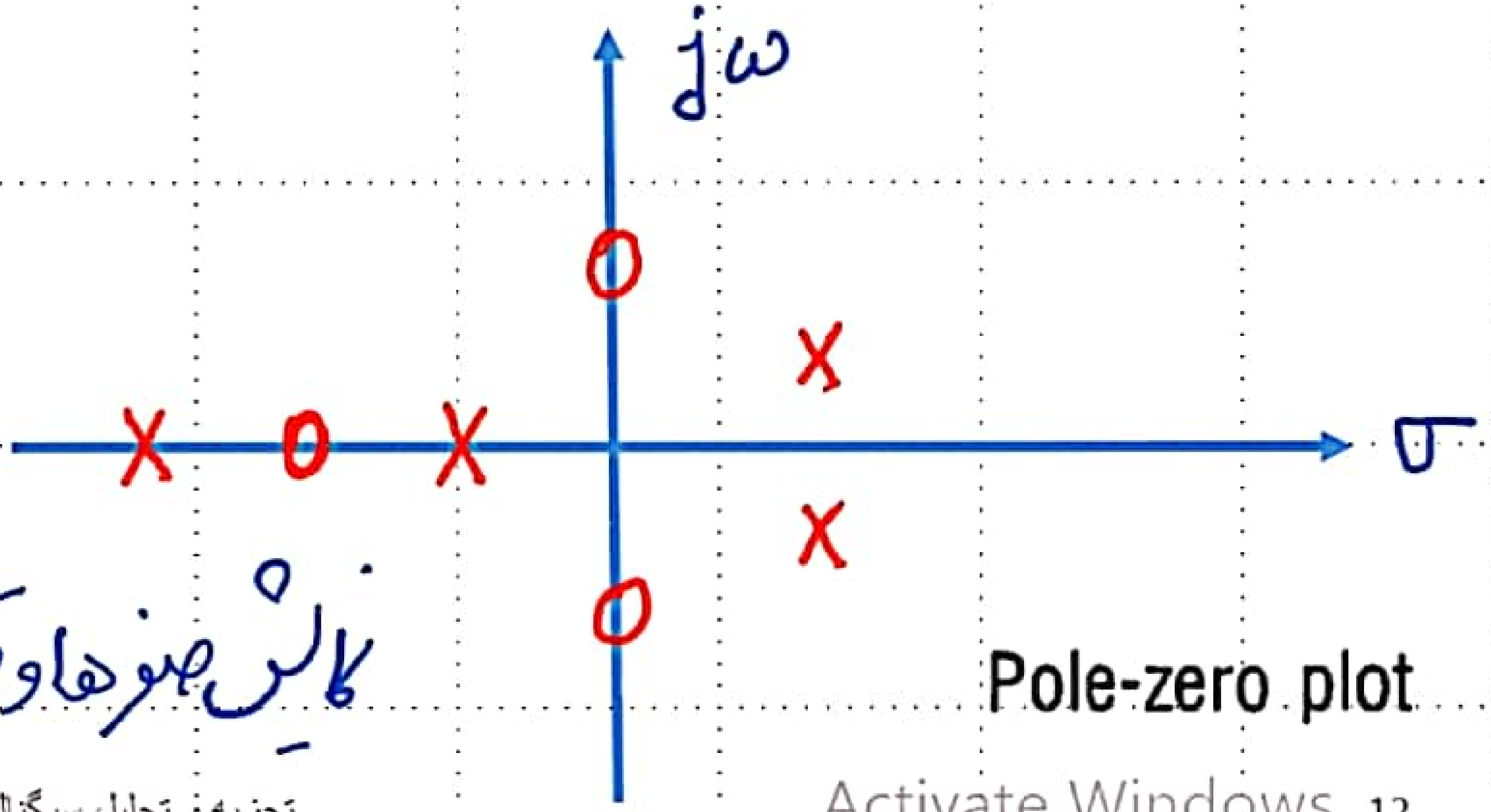
$N(z)$ (چندجمله‌ای صورت) و $D(z)$ (چندجمله‌ای مخرج) دارای ضرائب حقیقی هستند.

ریشه‌های $N(z)$: صفرهای $X(z)$

(zeros) o

$D(z)$ // : قطب‌های $X(z)$

(poles) X



نمایش صفرها و قطب‌های $X(z)$ (مثال)

ناحیهٔ همگرایی در تبدیل Z و خواص آن

In the preceding section, we saw that a complete specification of the z transform requires not only the algebraic expression for $X(z)$, but also the associated region of convergence.

very different signals can have identical algebraic expressions for $X(z)$ so that their z transforms are distinguishable *only* by the region of convergence.

In this section, we explore some specific constraints on the ROC for various classes of signals.

Property 1: The ROC of $X(z)$ consists of a ring in the z-plane centered about the origin.

خاصیت اول: ROC در تبدیل Z همواره به صورت حلقه هایی به مرکزیت مبدأ مختصات صفحهٔ Z است. (ممکن است داخل یا خارج یک دایره باشد)

That is, the ROC of the z-transform of $x[n]$ consists of the values of z for which $x[n]r^{-n}$ is absolutely summable:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty.$$

این شرط فقط به r بستگی دارد.

Property 2: The ROC does not contain any poles.

خاصیت دوم: برای $X(z)$ های به فرم کسرهای گویا ، هیچکدام از قطب ها درون ROC قرار نمی گیرند. (چون $X(z)$ در محل قطب ها بی نهایت می شود)

Property 3: If $x[n]$ is of finite duration, then the ROC is the entire z-plane, except possibly $z = 0$ and/or $z = \infty$.

خاصیت سوم: ROC برای دنباله های با پهنای زمانی محدود ، تمام صفحهٔ z (مگر احتمالاً $z=0$ و یا $z=\infty$) است.

A finite-duration sequence has only a finite number of nonzero values, extending, say, from $n = N_1$ to $n = N_2$, where N_1 and N_2 are finite. Thus, the z-transform is the sum of a finite number of terms; that is,

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}.$$

For z not equal to zero or infinity, each term in the sum will be finite, and consequently, $X(z)$ will converge.

اگر $Z \neq 0$ و $Z \neq \infty$ ، مجموع فوق حتماً همگرا خواهد بود.

اگر $N_1 < 0$ & $N_2 > 0$ $\Rightarrow$ در مجموع فوق توان های مثبت و منفی Z موجود است و

لذا $Z=0$ و $Z=\infty$ نمی توانند در ROC باشند.

اگر $N_1 \geq 0$ $(N_2 > N_1)$ $\Rightarrow$ در مجموع فوق فقط توان های منفی Z موجود است

لذا $Z=\infty$ می تواند در ROC باشد اما $Z=0$ نه.

اگر $N_2 \leq 0 \; (N_1 < N_2) \Rightarrow$ در مجموع فوق فقط توان های مثبت Z موجود است

لذا $Z=0$ می تواند در ROC باشد اما $Z=\infty$ نه.

مثال)

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] Z^{-n} = \delta[0] Z^0 = 1 \quad , \quad ROC: \forall Z$$

$$Z\{\delta[n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] Z^{-n} = \delta[0] Z^{-1} = \frac{1}{Z} \quad , \quad ROC: \forall Z \neq 0$$

$$Z\{\delta[n+1]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] Z^{-n} = \delta[0] Z = Z \quad , \quad ROC: \forall Z \neq \infty$$

Property 4: If $x[n]$ is a right-sided sequence, and if the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then all finite values of z for which $|z| > r_0$ will also be in the ROC.

خاصیت چهارم: اگر $x[n]$ یک دنباله سمت راستی باشد و دایرهٔ $|z| = r_0$ در ROC آن قرار داشته باشد، همهٔ مقادیر محدود z که $|z| > r_0$، نیز در ROC آن قرار دارند.

به عبارت دیگر ROC دنباله‌های سمت راستی، همهٔ نقاط خارج یک دایره (شاید $z \neq \infty$) است.

A right-sided sequence is zero prior to some value of n, say, N_1. For right-sided sequences in general,

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

where N_1 is finite and may be positive or negative.

نکته: $z = 0$ قطعاً در ROC نیست چون در $X(z)$ توان های مثبت $\frac{1}{z}$ وجود دارد.

$z = \infty$ درصورتی در ROC قرار دارد که $N_1 \geq 0$.

If the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then $x[n]r_0^{-n}$ is absolutely summable.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty \quad \Rightarrow \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

Now consider $|z| = r_1$ with $r_1 > r_0$, $\quad \Rightarrow \frac{r_0}{r_1} < 1$

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n \cdot r_0^{-n}$$

$$< \underbrace{\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1}}_{<\infty} \cdot \underbrace{\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n}}_{<\infty} < \infty \quad \Rightarrow |z| = r_1 \subset ROC$$

Property 5: If $x[n]$ is a left-sided sequence, and if the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then all values of z for which $0 < |z| < r_0$ will also be in the ROC.

خاصیت پنجم: اگر $x[n]$ یک دنبالهٔ سمت چپی باشد و دایرهٔ $|Z| = r_0$ در ROC آن قرار داشته باشد، همهٔ مقادیر Z که $0 < |Z| < r_0$ نیز در ROC آن قرار دارند.

به عبارت دیگر، ROC دنباله‌های سمت چپی، همهٔ نقاط داخل یک دایره (شاید $(Z \neq 0$ است.

A left-sided sequence is zero after some value of n, say, N_2. For left-sided sequence in general,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n] z^{-n},$$

where N_2 is finite and may be positive or negative.

نکته: $Z = \infty$ قطعاً در ROC نیست چون در $X(Z)$ توان‌های مثبت Z وجود دارد، $Z = 0$ درصورتی در ROC قرار دارد که $N_2 \leq 0$.

If the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then $x[n]r_0^{-n}$ is absolutely summable.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty \quad \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

Now consider $|z| = r_1$ with $0 < r_1 < r_0$ $\quad \Rightarrow \dfrac{r_0}{r_1} > 1$

$$\sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]| \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n} \cdot r_0^{-n}$$

$$< \underbrace{\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_2}}_{<\infty} \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{N_2} |x[n]| r_0^{-n}}_{<\infty} < \infty \quad \Rightarrow \quad |z| = r_1 \subset ROC$$

Property 6: If $x[n]$ is two sided, and if the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then the ROC will consist of a ring in the z-plane that includes the circle $|z| = r_0$.

خاصیت ششم: اگر $x[n]$ یک دنباله دوسمتی باشد و دایره $|z| = r_0$ در ROC آن قرار داشته باشد، آنگاه ROC به صورت حلقه‌ای از صفحهٔ z است که دایره $|z| = r_0$ را دربر می‌گیرد.

$$\begin{cases} x_R[n] = 0, & \forall n < N_1 \\ x_R[n] \neq 0, & N_1 \leq n < +\infty \end{cases}$$

$$\underbrace{x[n]}_{\text{دوسمتی}} = \underbrace{x_R[n]}_{\text{سمت راستی}} + \underbrace{x_L[n]}_{\text{سمت چپی}}$$

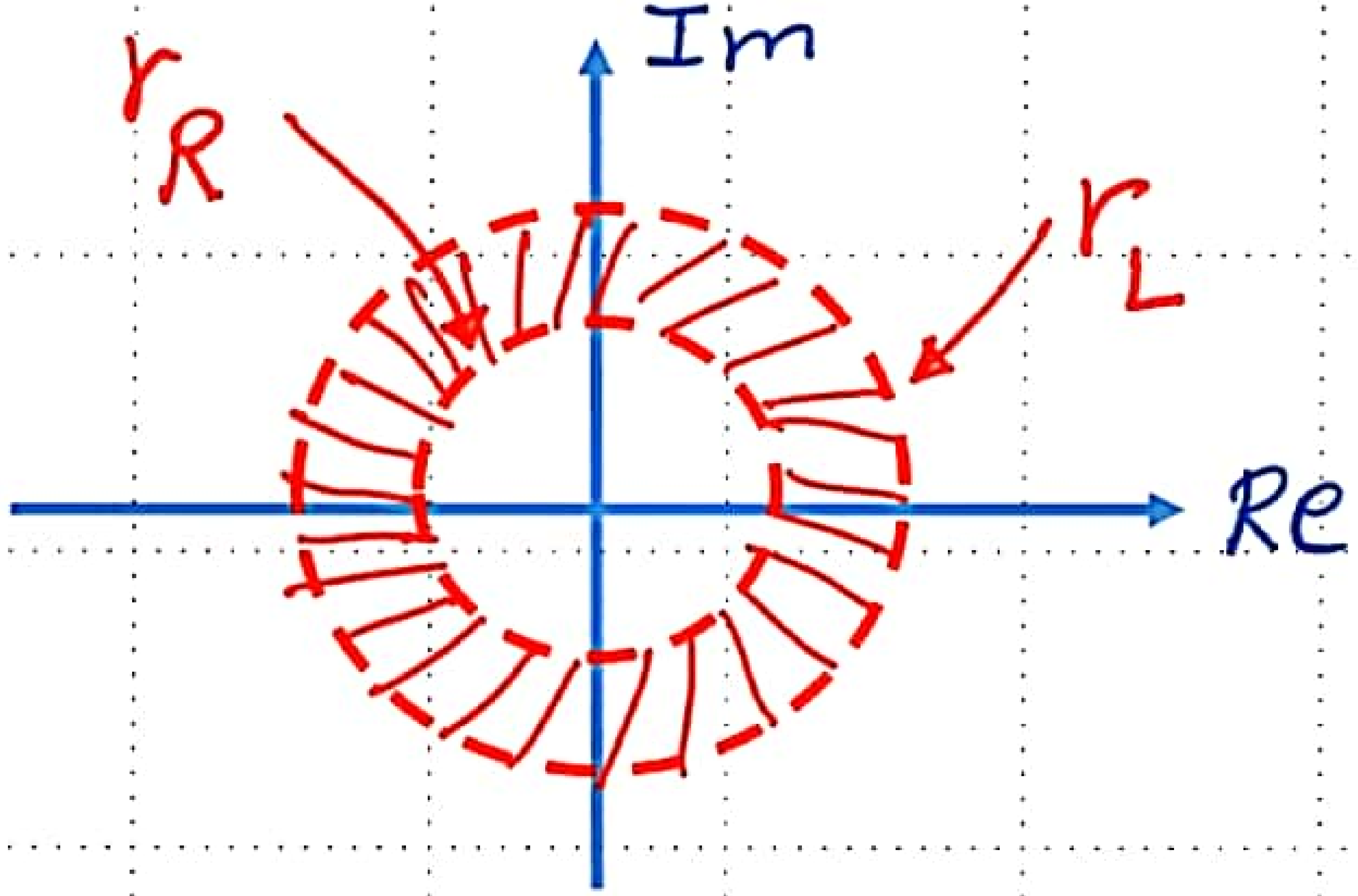
$$\begin{cases} x_L[n] = 0, & \forall n > N_2 \\ x_L[n] \neq 0, & -\infty < n \leq N_2 \end{cases}$$

با فرض وجود تبدیل z برای $x[n] = x_R[n] + x_L[n]$ ، داریم:

ناحیه همگرایی تبدیل z دنباله دوسمتی $\Rightarrow ROC_x = ROC_{x_R} \cap ROC_{x_L}$

$x[n]$ ، فصل مشترک نقاط خارج یک دایره با نقاط داخل یک دایره هم مرکز آن

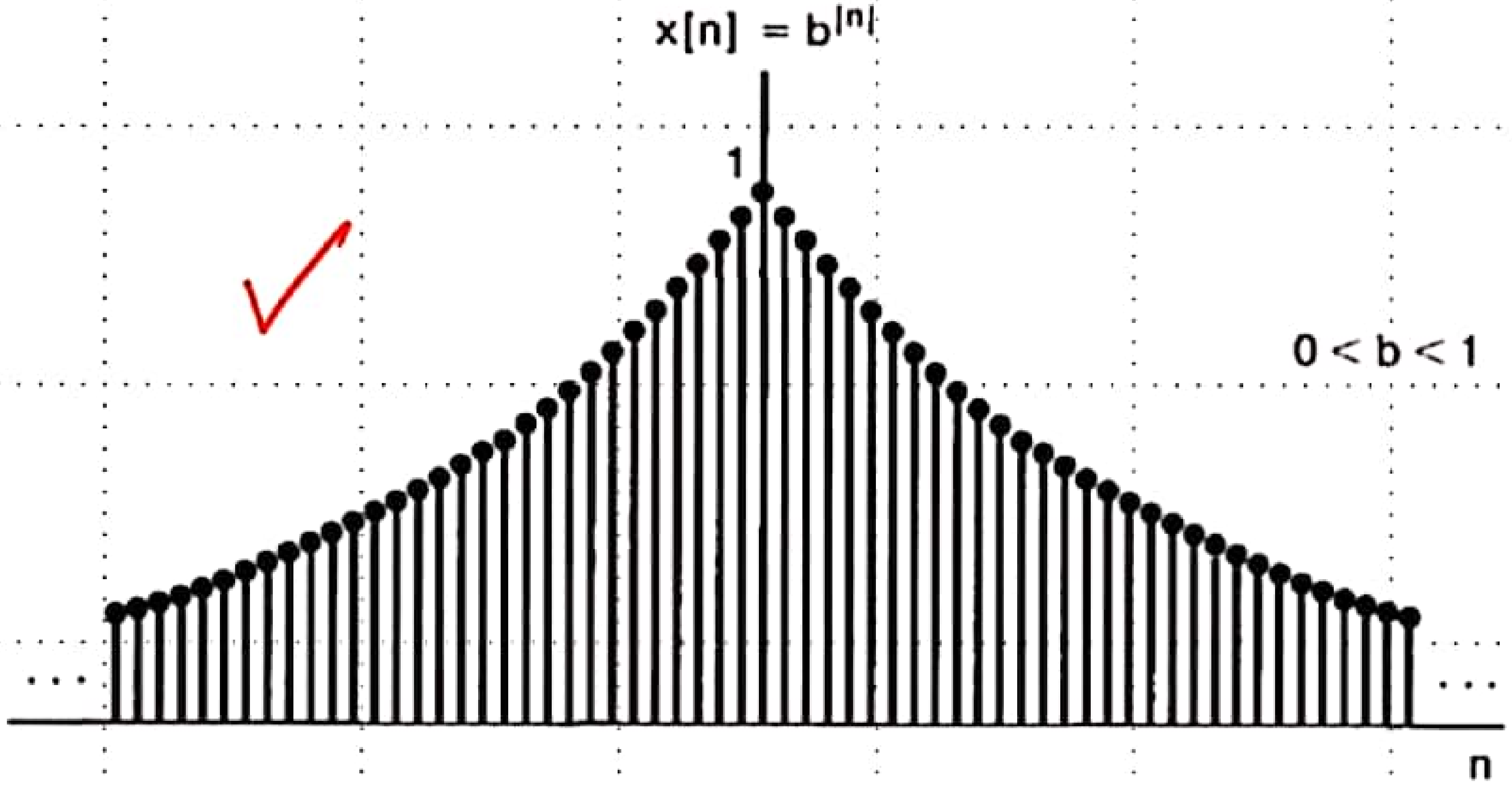
است، که درصورت وجود به صورت یک حلقه است.

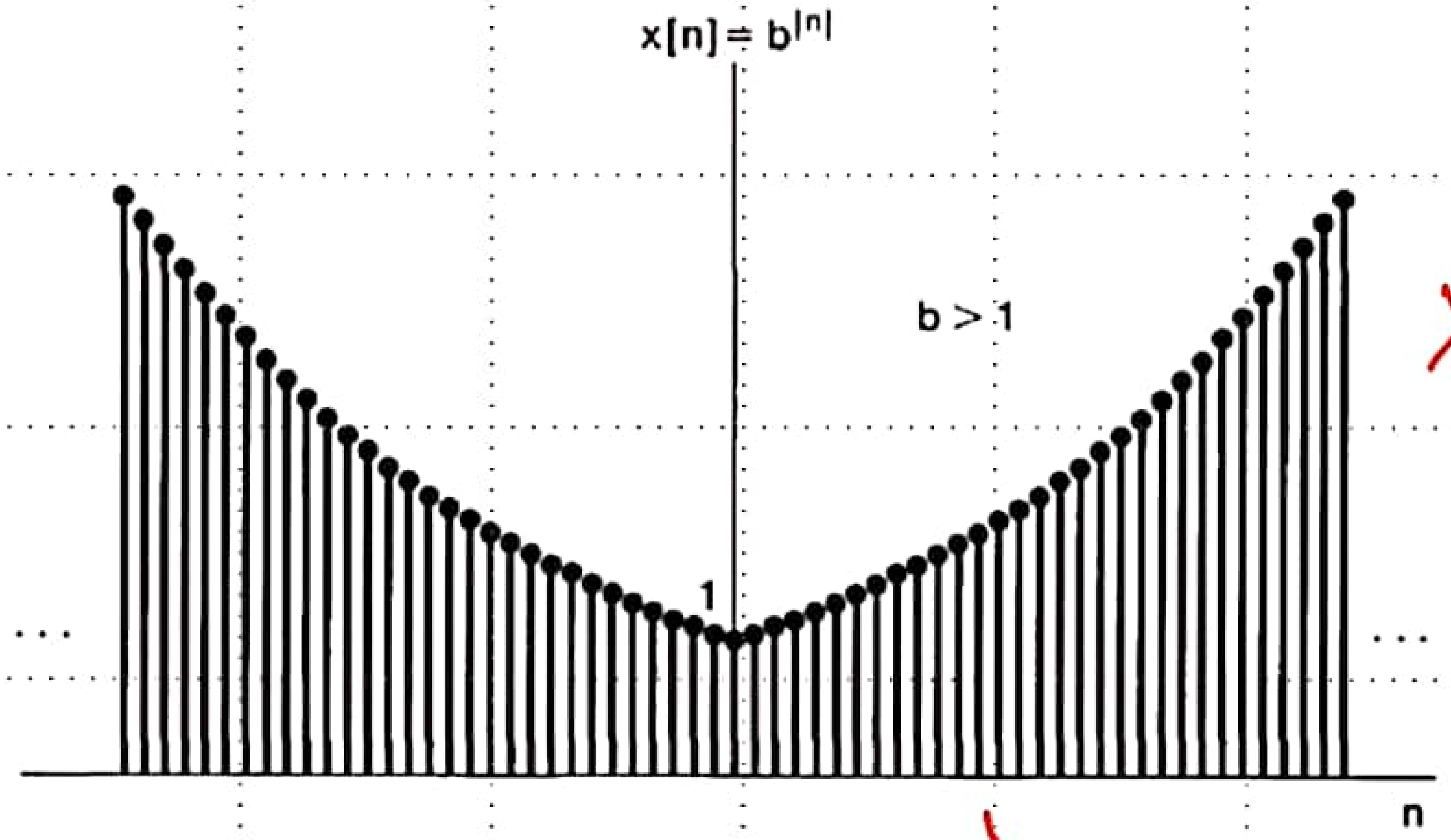


$r_R < r_L$

مثال)

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0. \Longrightarrow x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1].$$





تبدیل Z ندارد.

$$b^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b,$$

$$b^{-n} u[-n-1] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{1 - b^{-1} z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}.$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1} z^{-1}} = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}.$$

$0 < b < 1$

مثال)

Consider the signal $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1,\ a>0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$.

Then $$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}(az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N - a^N}{z-a}.$$

Since $x[n]$ is of finite length, it follows from Property 3 that the ROC includes the entire z- plane except possibly the origin and/or infinity.

$x[n]$ دنباله با طول محدود است و ناحیه همگرایی تبدیل Z آن همه صفحه Z است، اما:

$Z=0$ در ROC نیست، زیرا $X(Z)$ شامل توان های مثبت $\frac{1}{Z}$ است.

$|Z|=\infty$ در ROC هست، زیرا $X(Z)$ فاقد توان های مثبت Z است.

نکته : صفرها و قطب های کسر گویای

$$X(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

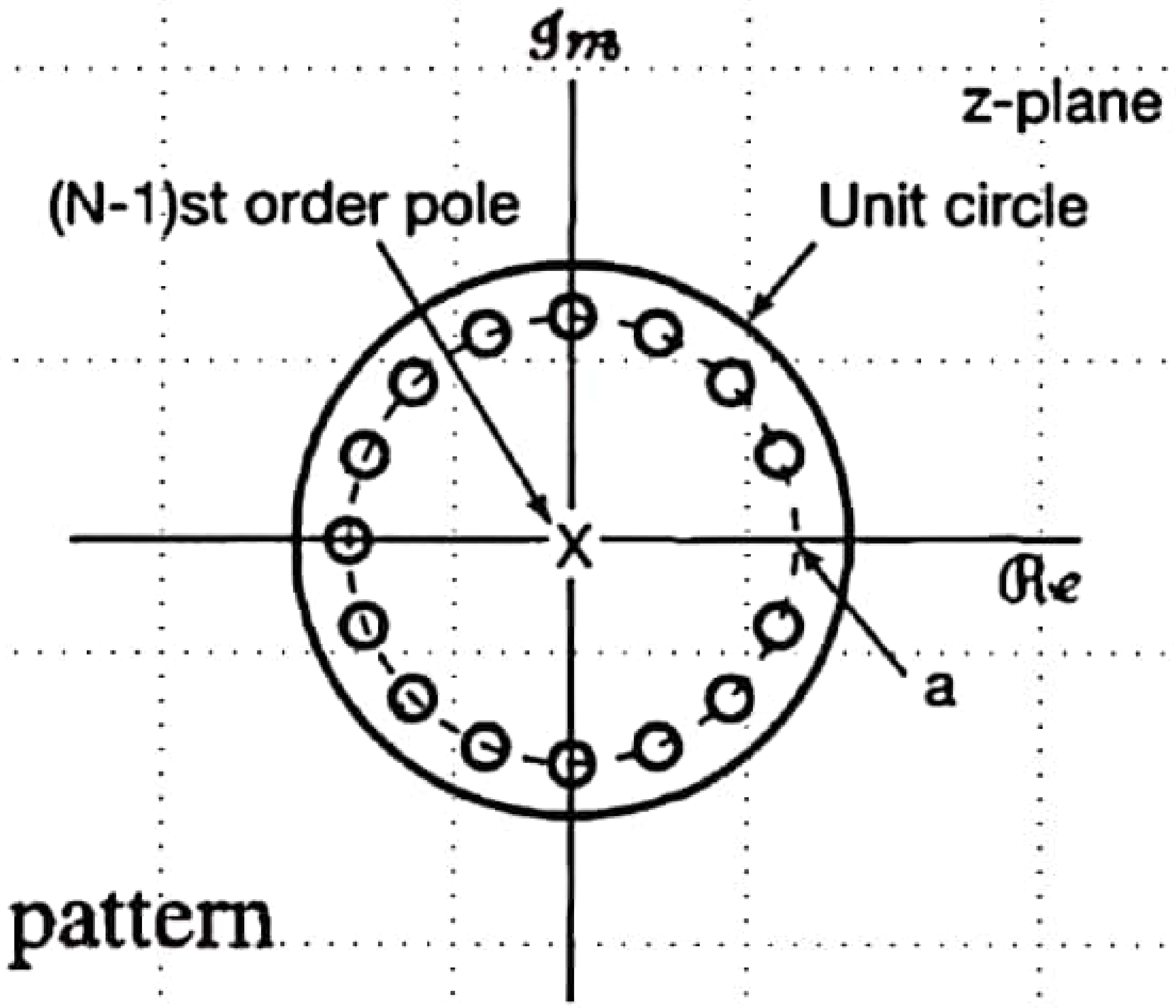
The N roots of the numerator polynomial are at

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

The root for $k = 0$ cancels the pole at $z = a$. Consequently, there are no poles other than at the origin. The remaining zeros are at

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \ldots, N-1.$$

This is evident that there is a pole of order $N-1$ at $z = 0$.



The pole-zero pattern

نکته: با توجه به خواص گفته شده در مورد ROC تا به اینجا، می توان نتیجه گرفت که:

یک دنباله یا سیگنال زمان گسسته یا تبدیل Z ندارد و یا در یکی از ۴ گروه زیر قرار می گیرد:

۱ـ دنباله با طول محدود است و ROC همهٔ صفحهٔ Z است مگر احتمالاً مبدأ و بی نهایت.

۲ـ دنباله سمت راستی است و ROC آن نقاط خارج یک دایره مگر احتمالاً بی نهایت است.

۳ـ دنباله سمت چپی است و ROC آن نقاط داخل یک دایره مگر احتمالاً مبدأ است.

۴ـ دنباله دوسمتی است و ROC آن حلقه ای محدود بین دو دایره با مرکزیت مبدأ است.

در هر صورت ناحیهٔ همگرایی نمی تواند هیچ قطبی از $X(Z)$ را در برگیرد.

Property 7: If the z-transform $X(z)$ of $x[n]$ is rational, then its ROC is bounded by poles or extends to infinity.

خاصیت هفتم: ROC در تبدیل Z هایی که به صورت کسر گویا هستند، حلقه ای محدود به دو قطب و یا ناحیهٔ خارج یک دایره محدود به قطب و یا ناحیهٔ داخل یک دایره محدود به قطب است.

Property 8: If the z-transform $X(z)$ of $x[n]$ is rational, and if $x[n]$ is right sided, then the ROC is the region in the z-plane outside the outermost pole—i.e., outside the circle of radius equal to the largest magnitude of the poles of $X(z)$. Furthermore, if $x[n]$ is causal (i.e., if it is right sided and equal to 0 for $n < 0$), then the ROC also includes $z = \infty$.

خاصیت هشتم: اگر $x[n]$ دنباله‌ای سمت راستی و $X(z)$، تبدیل Z آن یک کسر گویا باشد، ROC آن ناحیه‌ای خارج از یک دایره با شعاع برابر با اندازه بزرگ‌ترین قطب $X(z)$ است. از طرف دیگر، اگر $x[n]$ دنباله‌ای علّی باشد یعنی برای $n<0$، صفر باشد، آنگاه ROC شامل $z=\infty$ هم می‌شود.

Property 9: If the z-transform $X(z)$ of $x[n]$ is rational, and if $x[n]$ is left sided, then the ROC is the region in the z-plane inside the innermost nonzero pole—i.e., inside the circle of radius equal to the smallest magnitude of the poles of $X(z)$ other than any at $z = 0$ and extending inward to and possibly including $z = 0$. In particular, if $x[n]$ is anticausal (i.e., if it is left sided and equal to 0 for $n > 0$), then the ROC also includes $z = 0$.

خاصیت مهم: اگر $x[n]$ دنباله‌ای سمت چپی و $X(z)$، تبدیل Z آن یک کسر گویا باشد، ROC آن ناحیه‌ای داخل یک دایره با شعاع برابر با اندازه کوچک‌ترین قطب $X(z)$ است. از طرف دیگر، اگر $x[n]$ دنباله‌ای ضدّعلّی باشد، یعنی برای $n>0$ صفر باشد آنگاه ROC شامل $z=0$ هم می‌شود.

✓ Thus, for right-sided sequences with rational transforms, the poles are all closer to the origin than is any point in the ROC.

✓ Thus, for left-sided sequences, the poles of $X(z)$ other than any at $z = 0$ are farther from the origin than is any point in the ROC.

For a given pole-zero pattern, or equivalently, a given rational algebraic expression $X(z)$, there are a limited number of different ROCs that are consistent with the preceding properties. To illustrate how different ROCs can be associated with the same pole-zero pattern, we present the following example.

مثال ۵)

Let us consider all of the possible ROCs that can be connected with the function

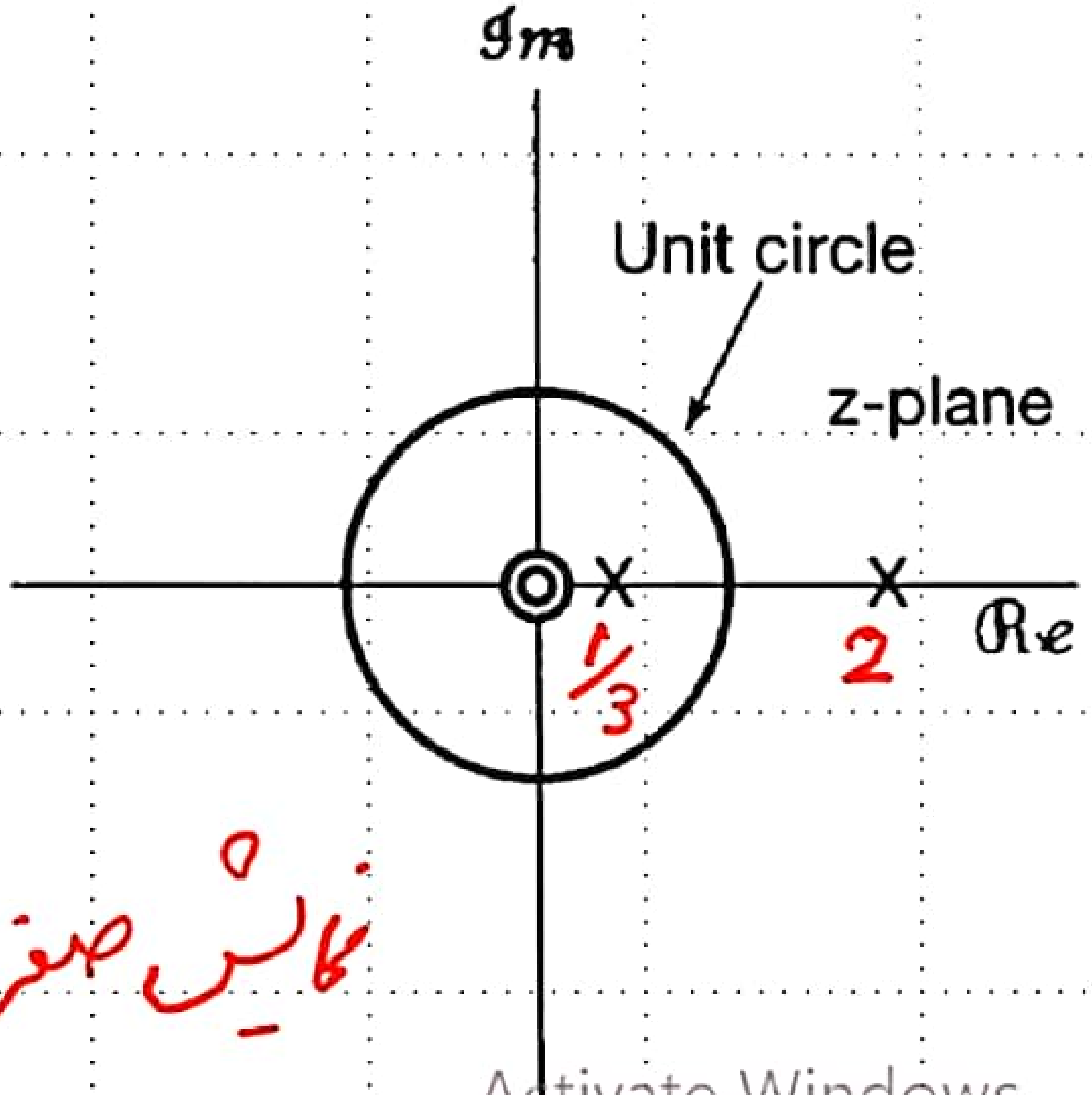
$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

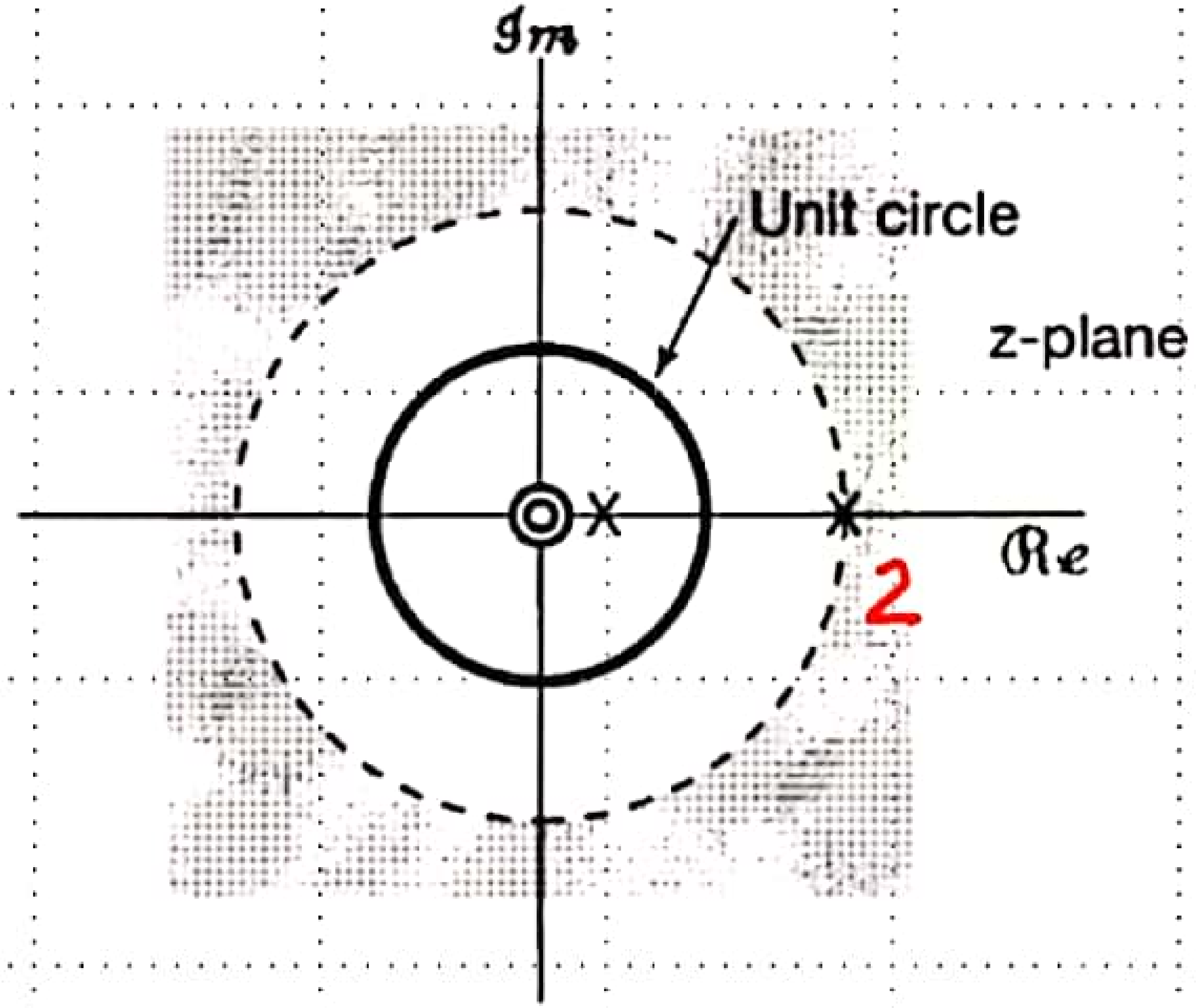
$$X(z) = \frac{z^{۲}}{(z - ۱/۳)(z - ۲)}$$

قطب های $X(z)$ عبارتند از :

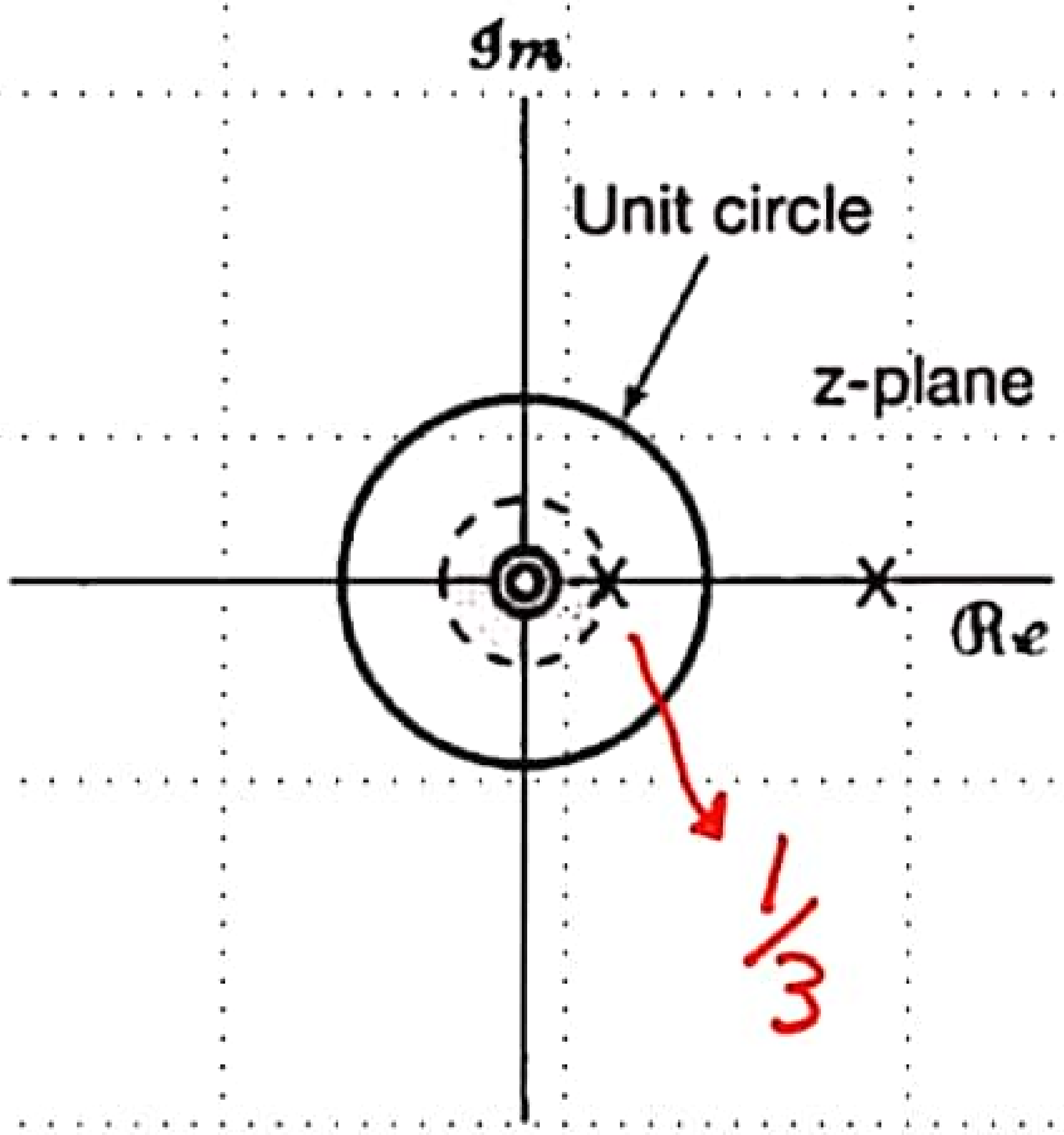
$$P_1 = \frac{1}{۳} \quad , \quad P_۲ = ۲$$

نمایش صفر و قطب $X(z)$

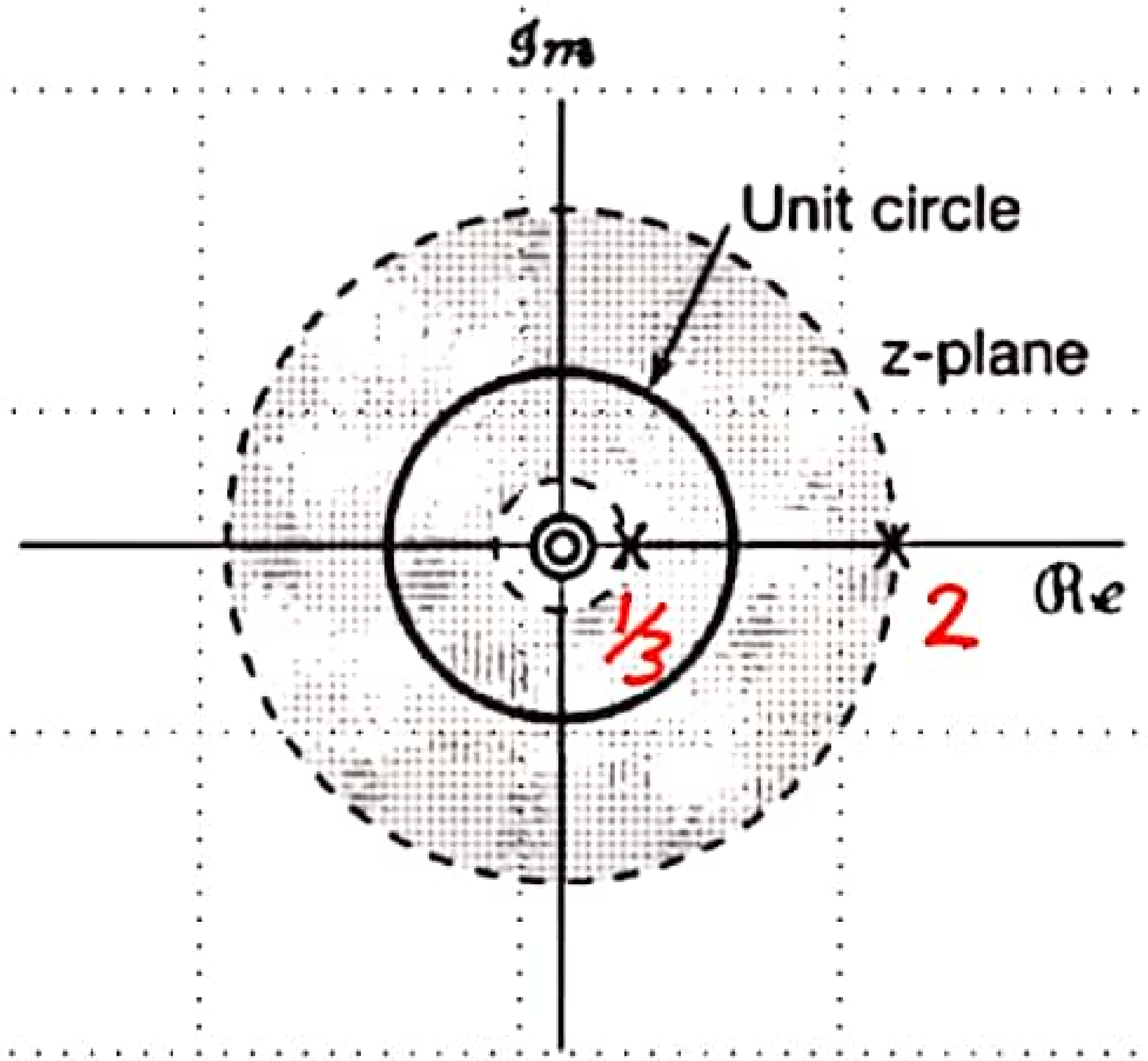




نمایش صفر و قطب و ROC برای دنباله سمت راستی



نمایش صفر و قطب و ROC برای دنباله سمت چپی



نمایش صفر و قطب و ROC برای دنباله دوسمتی

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه بیستم _ بخش‌های 10.3 ، 10.5 و 10.6 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

خواص تبدیل Z

۱. خطی بودن **Linearity**

If $\quad x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z), \quad \text{with ROC} = R_1,$

and $\quad x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z), \quad \text{with ROC} = R_2,$

then $\quad \boxed{a x_1[n] + b x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} a X_1(z) + b X_2(z), \quad \text{with ROC containing } R_1 \cap R_2.}$

نکته: ناحیه همگرایی نهایی مربوط به ترکیب خطی دو سیگنال بایستی شامل $R_1 \cap R_2$ باشد (شاید بزرگتر)

مثال) امکان توسعهٔ ناحیهٔ همگرایی در اثر ترکیب خطی دو سیگنال $x[n] = x_1[n] - x_2[n]$

$x_1[n] = a^n u[n]$, $x_2[n] = a^n u[n-1]$

$X_1(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > a$ $\qquad$ $X_2(z) = \dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}}$, $|z| > a$

$x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = 1$, $\forall z$

۲. انتقال زمانی **Time Shifting**

If $\quad x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, with ROC $= R$,

then

$$\boxed{x[n-n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z), \quad \text{with ROC} = R\text{, except for the possible addition or deletion of the origin or infinity.}}$$

نکته :

Because of the multiplication by z^{-n_0}, for $n_0 > 0$ poles will be introduced at $z = 0$, which may cancel corresponding zeros of $X(z)$ at $z = 0$. Consequently, $z = 0$ may be a pole of $z^{-n_0}X(z)$ while it may not be a pole of $X(z)$. In this case the ROC for $z^{-n_0}X(z)$ equals the ROC of $X(z)$ but with the origin deleted. Similarly, if $n_0 < 0$, zeros will be introduced at $z = 0$, which may cancel corresponding poles of $X(z)$ at $z = 0$. Consequently, $z = 0$ may be a zero of $z^{-n_0}X(z)$ while it may not be a pole of $X(z)$. In this case $z = \infty$ is a pole of $z^{-n_0}X(z)$, and thus the ROC for $z^{-n_0}X(z)$ equals the ROC of $X(z)$ but with the $z = \infty$ deleted.

اگر $n_0 > 0 \Rightarrow$ در $Z^{-n_0}X(Z)$ در $Z=0$ می‌تواند قطب داشته باشد
در حالی که $Z=0$ قطب $X(Z)$ نباشد.

اگر $n_0 < 0 \Rightarrow$ در $Z^{-n_0}X(Z)$ در $Z=0$ می‌تواند صفر داشته باشد
(در $Z=\infty$ قطب داشته باشد) در حالی که $Z=\infty$ قطب $X(Z)$ نباشد.

Scaling in the z-Domain ۳. تغییر مقیاس در حوزهٔ Z

If $x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, with ROC $= R$,

then $\boxed{z_0^n x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \text{ with ROC} = |z_0|R,}$

اثبات :

$$\mathcal{Z}\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n}$$

$$= X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$$r_1 < \left|\frac{z}{z_0}\right| < r_2 \Rightarrow r_1|z_0| < |z| < r_2|z_0|$$

$$\Rightarrow \quad ROC = |z_0| R$$

۴. وارونگی زمانی Time Reversal

If $\quad x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z), \quad \text{with ROC} = R,$

then $\quad \boxed{x[-n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{with ROC} = \frac{1}{R}.}$

That is, if z_0 is in the ROC for $x[n]$, then $1/z_0$ is in the ROC for $x[-n]$.

اثبات:

$$\mathcal{Z}\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{z}\right)^{-m}$$

$$= X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$r_1 < \left|\frac{1}{z}\right| < r_2 \Rightarrow \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \Rightarrow ROC = \frac{1}{R}$$

Time Expansion ۵. کشیدگی یا انبساط زمانی

However, the discrete-time concept of time expansion—i.e., of inserting a number of zeros between successive values of a discrete-time sequence $x[n]$—can be defined and does play an important role in discrete-time signal and system analysis.

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$$

has $k-1$ zeros inserted between successive values of the original signal.

In this case, if $\quad x[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z), \quad \text{with ROC} = R,$

then $\quad \boxed{x_{(k)}[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z^k), \quad \text{with ROC} = R^{1/k}.}$

That is, if z is in the ROC of $X(z)$, then the point $z^{1/k}$ is in the ROC of $X(z^k)$. Also, if $X(z)$ has a pole (or zero) at $z = a$, then $X(z^k)$ has a pole (or zero) at $z = a^{1/k}$.

$$\mathcal{Z}\{x_{(k)}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n] z^{-n} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n=mk)}}^{\infty} x\left[\frac{n}{k}\right] z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-mk}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] (z^k)^{-m} = X(z^k)$$

$$r_1 < |z^k| < r_2 \Rightarrow r_1^{1/k} < |z| < r_2^{1/k}$$

$$\Rightarrow ROC = R^{1/k}$$

۶. مزدوج گیری Conjugation

If $x[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, with ROC $= R$,

then $\boxed{x^*[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \quad \text{with ROC } = R.}$

Consequently, if $x[n]$ is real, we can conclude $X(z) = X^*(z^*)$.

۷. خاصیت کانولوشن Convolution Property

If $x_1[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$, with ROC $= R_1$,

and $x_2[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$, with ROC $= R_2$, then $\boxed{x_1[n] * x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \quad \text{with ROC containing } R_1 \cap R_2.}$

$$\mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k] \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[\underbrace{n-k}_{m}]\, z^{-\underbrace{(n-k)}_{m}} \right) z^{-k}$$

$$= X_2(z) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, z^{-k} = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

نکته: ناحیه همگرایی نهایی مربوط به کانولوشن دو دنباله بایستی شامل $R_1 \cap R_2$ باشد (شاید بزرگتر)

ممکن است در اثر ضرب $X_1(z)$ در $X_2(z)$، حذف صفر و قطبی اتفاق بیافتد و ROC بزرگتر شود.

First Difference

۸. تفاضل‌گیری زمانی مرتبهٔ اول

If $x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, with ROC $= R$, $\Rightarrow \mathcal{Z}\{x[n]-x[n-1]\} = ?$

$h[n] \triangleq \delta[n]-\delta[n-1]$ پاسخ ضربهٔ سیستم تفاضل مرتبهٔ اول

$\Rightarrow H(z) = 1-z^{-1}$ & $x[n] * h[n] = x[n]-x[n-1]$

$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x[n]-x[n-1]\} = X(z)H(z) = (1-z^{-1})X(z)$ ✓

ROC جدید همان R است، اما احتمال حذف $z=0$ از ROC و اضافه شدن $z=1$ به آن

وجود دارد. چرا؟

۹. انباشتگی یک دنباله

Accumulation or Summation

If $x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, with ROC $= R$, $\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right\} = ?$

$h[n] = u[n]$ پاسخ ضربهٔ سیستم انباره

$$y[n] = x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \checkmark$$

$$\text{ROC} \supset R \cap \{z : |z| > 1\} \checkmark$$

Differentiation in the z-Domain

۱۰. مشتق گیری در حوزه Z

If $x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, with ROC $= R$, then $\boxed{nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{with ROC} = R.}$

مثال)

If $X(z) = \log(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$,

then $nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$, $|z| > |a|$.

By differentiating, we have converted the z-transform to a rational expression.

Specifically, $a(-a)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{a}{1 + az^{-1}}$, $|z| > |a|$.

Combining this with the time-shifting property yields $a(-a)^{n-1} u[n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$, $|z| > |a|$.

Consequently, $x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$.

As another example of the use of the differentiation property, consider determining the inverse z-transform for مثال)

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

$$a^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

and hence,

$$na^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

۱۱. قضیهٔ مقدار اولیه

The Initial-Value Theorem

If $x[n] = 0,\ n < 0$, then $\quad x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$.

This property follows by considering the limit of each term individually in the expression for the z-transform, with $x[n]$ zero for $n < 0$. With this constraint, $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$.

$$X(z) = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to \infty} X(z) = x[0] + \lim_{z \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0]$$

نکته: از این قضیه می‌توان برای درستی آزمایی محاسبهٔ تبدیل Z دنباله‌ها استفاده نمود.

جدول خواص تبدیل Z

TABLE 10.1 PROPERTIES OF THE z-TRANSFORM

Section	Property	Signal	z-Transform	ROC
		$x[n]$	$X(z)$	R
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
10.5.1	Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.2	Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R, except for the possible addition or deletion of the origin
10.5.3	Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R
		$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
		$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Scaled version of R (i.e., $\|a\|R$ = the set of points $\{\|a\|z\}$ for z in R)
10.5.4	Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R (i.e., R^{-1} = the set of points z^{-1}, where z is in R)
10.5.5	Time expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some integer r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$, where z is in R)
10.5.6	Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R

10.5.7	Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.7	First difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	At least the intersection of R and $\lvert z\rvert > 0$
10.5.7	Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	At least the intersection of R and $\lvert z\rvert > 1$
10.5.8	Differentiation in the z-domain	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R

10.5.9

Initial Value Theorem

If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

جدول تبدیل Z های مهم

TABLE 10.2 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z, except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| < \|\alpha\|$

7.	$n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
8.	$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
9.	$[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10.	$[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11.	$[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12.	$[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

مثال

$$x[n] = [\cos\omega_0 n]u[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n] + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2-(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})z^{-1}}{1-(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})z^{-1}+z^{-2}} \quad , \quad |z|>1$$

$$= \frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}} \quad , \quad |z|>1$$

مثال

$$x[n] = [\sin\omega_0 n]u[n] = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n}u[n] - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}u[n]$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2j}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{(e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0})z^{-1}}{1-(e^{j\omega_0}+e^{-j\omega_0})z^{-1}+z^{-2}}, \quad |z|>1$$

$$= \frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, \quad |z|>1$$

The basic inverse Z transform equation:

تبدیل Z معکوس

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n d\omega.$$

That is, we can recover $x[n]$ from its z-transform evaluated along a contour $z = re^{j\omega}$ in the ROC, with r fixed and ω varying over a 2π interval.

Let us now change the variable of integration from ω to z.

With $z = re^{j\omega}$ and r fixed, $dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$, or $d\omega = (1/j)z^{-1}dz$.

The integration is over a 2π interval in ω, which, in terms of z, corresponds to one traversal around the circle $|z| = r$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz,}$$

انتگرال گیری روی مسیر دایره ای لبسته درون ROC
و در جهت مثلثاتی انجام می شود.

تبدیل Z معکوس کسرهای گویا

However, for the class of rational transforms, the inverse Z transform can be determined using the technique of partial-fraction expansion

Basically, the procedure consists of expanding the rational algebraic expression into a linear combination of lower order terms.

روش گسترش به کسرهای جزئی

فرض : $X(Z)$ به صورت یک کسر گویاست و ROC آن داده شده است.

ایدهٔ اصلی : اگر $\frac{X(Z)}{Z}$ را که آن هم به صورت کسر گویاست بتوان به صورت مجموعی از کسرهای جزئی و سادهٔ $\frac{A_i}{Z-P_i}$ نوشت، خواهیم داشت :

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_i \frac{A_i}{z-P_i} \Rightarrow X(z) = \sum_i \frac{A_i z}{z-P_i} = \sum_i \frac{A_i}{1-P_i z^{-1}}$$

یادآوری:

$$x[n] = a^n u[n] \Longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|.$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \Longleftrightarrow X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|.$$

مراحل کار:

$$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$$

$$M = \deg\{N(z)\} \quad , \quad N = \deg\{D(z)\}$$

اگر $M<N$ ، $F(z)=\frac{X(z)}{z}$ یک کسر مناسب است.

اگر $M\geq N$ ، $F(z)$ یک کسر نامناسب است و با تقسیم $N(z)$ بر $D(z)$ داریم:

$$F(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\underbrace{Q(z)}_{\text{خارج قسمت}}+\underbrace{\frac{R(z)}{D(z)}}_{\text{باقیمانده}}\ ,\ \deg\{R(z)\}<\deg\{D(z)\}$$

$\frac{R(z)}{D(z)}$ کسر مناسب است

$$\deg\{Q(z)\}=M-N\geq 0 \Rightarrow Q(z)=\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{M-N-k}$$

$q[n]=Z^{-1}\{Q(z)\}$ ترکیبی از ضربه واحد و شیفت یافته های آن است.

مثال: $Z^{-1}\{2z^2-5z+3\}=2\delta[n+2]-5\delta[n+1]+3\delta[n]$

در ادامه فرض می‌کنیم $F(z)=\frac{X(z)}{z}$ یک کسر مناسب است.

گسترش به کسرهای جزئی کسر مناسب $F(z)=\frac{X(z)}{z}=\frac{N(z)}{D(z)}$

حالت اول: قطب‌های $F(z)$ ساده (غیر تکراری) باشند.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K\,N(z)}{(z-P_1)(z-P_2)\cdots(z-P_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-P_i}\,,\quad ROC_X$$

ROC هر کدام از کسرهای جزئی بایستی با توجه به ROC داده شده برای $X(z)$ تعیین شود.

$$ROC_1\cap\cdots\cap ROC_n\subset ROC_X$$

مانده نظیر قطب P_i : $A_i=(z-P_i)X(z)\Big|_{z=P_i}$

$$Z^{-1}\left\{\frac{A_i z}{z-P_i}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{A_i}{1-P_i z^{-1}}\right\} = \begin{cases} A_i (P_i)^n u[n] & , \quad |z| > |P_i| \\ -A_i (P_i)^n u[-n-1] & , \quad |z| < |P_i| \end{cases}$$

مثال)

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6} z^{-1}}{(1-\frac{1}{4} z^{-1})(1-\frac{1}{3} z^{-1})} , \ |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow X(z) = \frac{3z^2 - 5/6\, z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{3z - 5/6}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})} = \frac{A_1}{z-\frac{1}{4}} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{3}}$$

$$A_1 = (z-\tfrac{1}{4})F(z)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = 1 \quad \& \quad A_2 = (z-\tfrac{1}{3})F(z)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-\frac{1}{4}} + \frac{2}{z-\frac{1}{3}} \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{2z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$|z| > \frac{1}{4} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

مثال) همان مثال قبلی با $ROC: \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{2z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$|z| > \frac{1}{4} \qquad |z| < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

مثال) همان مثال قبلی با ROC : $|z| < \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{2z}{z-\frac{1}{3}}$$

$$|z| < \frac{1}{4} \qquad |z| < \frac{1}{3}$$

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

مثال)

$$X(z) = \frac{4z^4 + z^3 - 2z^2 + z - 3}{z^2} \quad , \quad 0 < |z| < \infty$$

$$X(z) = 4z^2 + z - 2 + z^{-1} - 3z^{-2}$$

$$\Rightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + \delta[n+1] - 2\delta[n] + \delta[n-1] - 3\delta[n-2]$$

حالت دوم : $F(z)$ قطب تکراری داشته باشد.

فرض : $F(z)$ فقط قطب تکراری P_1 را از مرتبهٔ n_1 دارد و سایر قطب های آن ساده اند.

$$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{K\,N(z)}{(z-P_1)^{n_1}(z-P_2)\cdots(z-P_r)} \quad , \quad n_1 + r - 1 = N$$

$$= \sum_{i=2}^{r} \frac{A_i}{z-P_i} + \frac{B_1}{z-P_1} + \frac{B_2}{(z-P_1)^2} + \cdots + \frac{B_{n_1}}{(z-P_1)^{n_1}}$$

ماندهٔ نظیر قطب سادهٔ P_i : $A_i = (z-P_i)F(z)\Big|_{z=P_i}$

$2 \leq i \leq r$

$$B_{n_1} = (z-P_1)^{n_1} F(z) \Big|_{z=P_1}$$

$$B_{n_1-1} = \frac{d}{dz}\left[(z-P_1)^{n_1} F(z)\right] \Big|_{z=P_1}$$

$$\vdots$$

$$B_2 = \frac{1}{(n_1-2)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n_1-2}\left[(z-P_1)^{n_1} F(z)\right] \Big|_{z=P_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{(n_1-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n_1-1}\left[(z-P_1)^{n_1} F(z)\right] \Big|_{z=P_1}$$

ماندهٔ نظیر قطب تکراری: P_1 از مرتبهٔ n_1

$$B_j = \frac{1}{(n_1-j)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n_1-j}\left[(z-P_1)^{n_1} F(z)\right] \Big|_{z=P_1} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n_1$$

مثال)

$$X(z) = \frac{z^2}{(z+\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{4})}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-\frac{1}{4}} + \frac{B_1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{B_2}{(z+\frac{1}{2})^2}$$

$$A_1 = (z-\frac{1}{4})F(z)\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{z}{(z+\frac{1}{2})^2}\Big|_{z=\frac{1}{4}} = \cdots = \frac{4}{9}$$

$$B_2 = (z+\frac{1}{2})^2 F(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{z}{z-\frac{1}{4}}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \cdots = \frac{2}{3}$$

$$B_1 = \frac{d}{dz}\left[(z+\frac{1}{2})^2 F(z)\right]\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{z=-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{(z-\frac{1}{4})^2}\Big|_{z=-1/2} = \cdots = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{4}{9}}{z-\frac{1}{4}} - \frac{\frac{4}{9}}{z+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{(z+\frac{1}{2})^2}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{\frac{4}{9}z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{\frac{4}{9}z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}z}{(z+\frac{1}{2})^2} \quad \text{و} \quad |z|>\frac{1}{2}$$

یادآوری :

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \ |z|>|a| \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} a^n u[n]$$

(مشتق گیری در حوزه z)

$$\mathcal{Z}\{n x[n]\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$\Rightarrow -z \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-a}\right] = \frac{az}{(z-a)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} n a^n u[n]$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n]$$

محاسبهٔ تبدیل معکوس Z به روش بسط سری توانی

اگر بتوان $X(z)$ را به صورت یک سری توانی برحسب z بسط داد، از ضرایب این بسط می‌توان دنبالهٔ $x[n]$ را تشخیص داد. این روش برای $X(z)$ هایی که به فرم کسر گویا نیستند مفید است.

Consider the z-transform $X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|.$ (مثال

With $|z| > |a|$, or, equivalently, $|az^{-1}| < 1$, $X(z)$ can be expanded in a power series using the Taylor's series expansion

$$\log(1 + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}, \quad |v| < 1.$$

$$\Rightarrow \quad X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n},$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \dfrac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1].$$

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

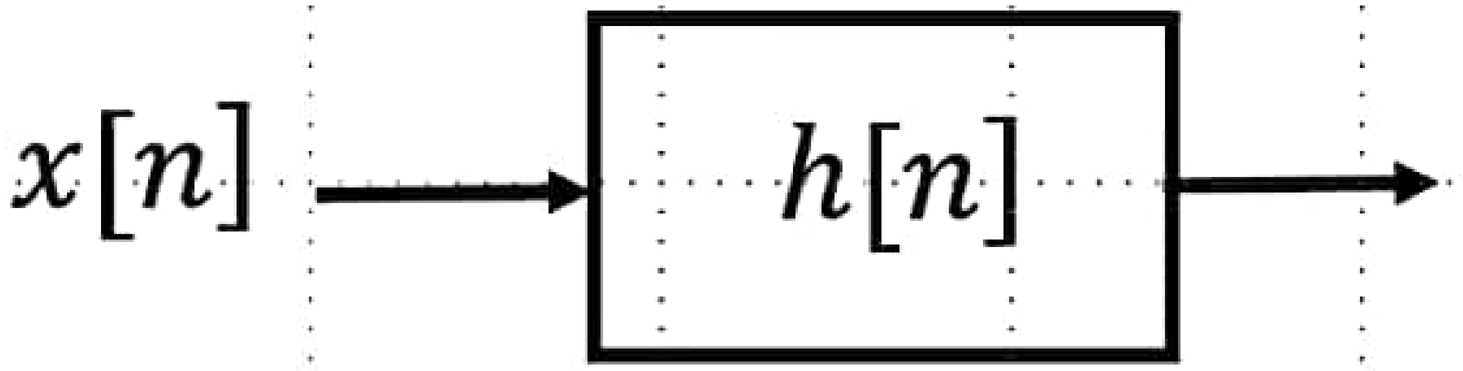
تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

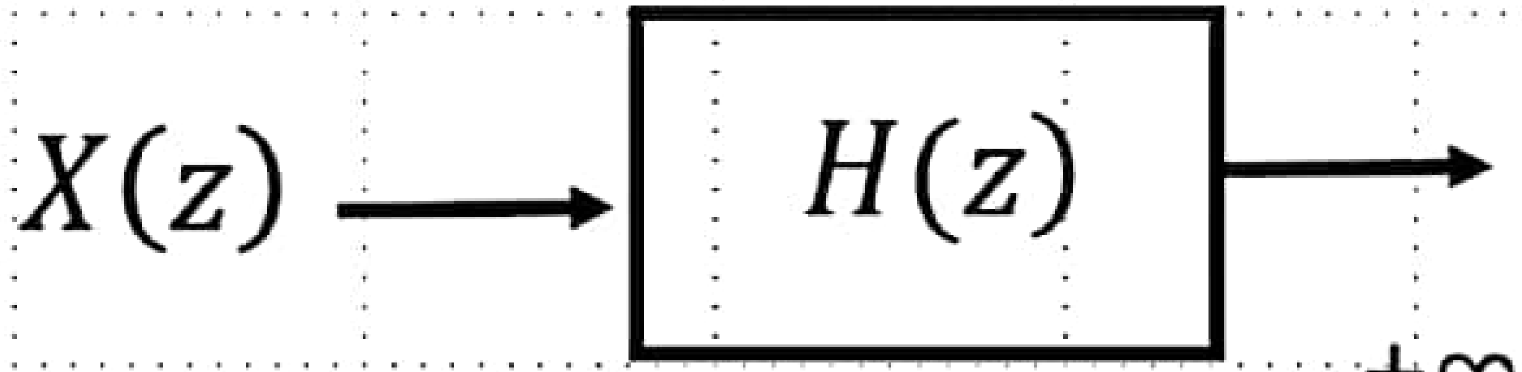
جلسه بیست و یکم _ بخش 10.7 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI به کمک تبدیل Z



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$



$$Y(z) = X(z).H(z) \Longrightarrow y[n] = z^{-1}\{Y(z)\}$$

$$H(z) = z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$ with z in the ROC of H(z)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Longrightarrow h[n] = z^{-1}\{H(z)\}$$

H(z) is commonly referred to as the *system function* تابع سیستم

or, alternatively, the *transfer function*. تابع انتقال (تبدیل)

خواص سیستم‌های LTI بر اساس تابع سیستم (تابع انتقال یا تابع تبدیل) آنها

Many properties of LTI systems can be closely associated with the characteristics of the *system function* in the z-plane.

۱. علیّت

A causal LTI system has an impulse response $h[n]$ that is zero for $n < 0$, and therefore is right-sided. For a causal system the power series $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$ does not include any positive powers of z. Consequently, the ROC includes infinity.

> A discrete-time LTI system is causal if and only if the ROC of its system function is the exterior of a circle, including infinity.

ناحیهٔ همگرایی در تابع انتقال یک سیستم LTI زمان گسستهٔ علّی، خارج از یک دایره و شامل $Z=\infty$ در صفحهٔ Z مختلط است.

نکته : در یک سیستم LTI زمان گسستهٔ علی که $H(z)$ در آن به صورت یک کسر گویاست، درجهٔ صورت کسر نمی‌تواند بیش از درجهٔ مخرج آن باشد، زیرا $\lim_{z \to \infty} H(z)$ بایستی محدود باشد.

همچنین ناحیهٔ همگرایی $H(z)$، خارج دایره‌ای است که شعاع آن برابر با اندازهٔ دورترین قطب $H(z)$ از مبدأ صفحهٔ z است.

A discrete-time LTI system with rational system function $H(z)$ is causal if and only if: (a) the ROC is the exterior of a circle outside the outermost pole; and (b) with $H(z)$ expressed as a ratio of polynomials in z, the order of the numerator cannot be greater than the order of the denominator.

Consider a system with system function whose algebraic expression is مثال)

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}.$$

سیستم غیرعلّی

Without even knowing the ROC for this system, we can conclude that the system is not causal, because the numerator of $H(z)$ is of higher order than the denominator.

Consider a system with system function مثال)

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

سیستم علّی

$$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}, \quad \Rightarrow \quad h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right]u[n].$$

$$\lim_{z \to \infty} H(z) = ۲$$

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0$$

سیستم‌های ضدعلّی (Anticausal) و شرایط آن

یک سیستم ضدعلی است، اگر $h[n]=0 \;,\; \forall n \geq 0$ ، در نتیجه $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} h[n] z^{-n}$.

پاسخ ضربه، یک دنبالهٔ سمت چپی است و ناحیهٔ همگرایی $H(z)$ داخل یک دایره است و $z=0$ را هم شامل می‌شود. به علاوه اگر $H(z)$ به صورت یک کسر گویا باشد، ناحیهٔ همگرایی داخل دایره‌ای است که شعاع آن برابر با اندازهٔ نزدیک‌ترین قطب $H(z)$ به مبدأ صفحهٔ z است.

مثال) سیستم ضدعلّی $H(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{3}z}{z+1} + \frac{\frac{1}{3}z}{z-2}$ ، $|z|<1$

$$h[n] = \left[\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)^n + \frac{1}{3}(2)^n\right]u[-n-1] = 0 \quad , \quad \forall n \geq 0$$

۲. پایداری

An LTI system is stable if and only if the ROC of its system function $H(z)$ includes the unit circle, $|z| = 1$.

شرط مطلقاً جمع پذیر بودن پاسخ ضربه : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

شرط لازم و کافی پایداری یک سیستم LTI ، آن است که ROC تابع $H(z)$ آن دربرگیرندهٔ دایرهٔ با شعاع واحد $(r=1)$ در صفحهٔ z باشد.

مثال)

$$H(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-2}=\frac{2z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

الف) اگر $ROC: |z|>2$

سیستم علّی و غیرپایدار $\quad h[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2)^n\right]u[n]$

ب) اگر $ROC: \frac{1}{2}<|z|<2$

سیستم غیرعلّی و پایدار $\quad h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-(2)^n u[-n-1]$

ج) اگر $ROC: |z|<\frac{1}{2}$

سیستم ضدعلّی و ناپایدار $\quad h[n]=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+(2)^n\right]u[-n-1]$

شرط پایداری برای سیستمهای LTI علّی با تابع سیستم H(z) به صورت کسر گویا

However, if we focus on causal systems, stability can easily be checked by examining the locations of the poles. Specifically, for a causal system with rational system function, the ROC is outside the outermost pole. For this ROC to include the unit circle, $|z| = 1$, all of the poles of the system must be inside the unit circle. That is:

> A causal LTI system with rational system function $H(z)$ is stable if and only if all of the poles of $H(z)$ lie inside the unit circle—i.e., they must all have magnitude smaller than 1.

مثال)

The system function for a second-order system with complex poles was given in

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}},$$

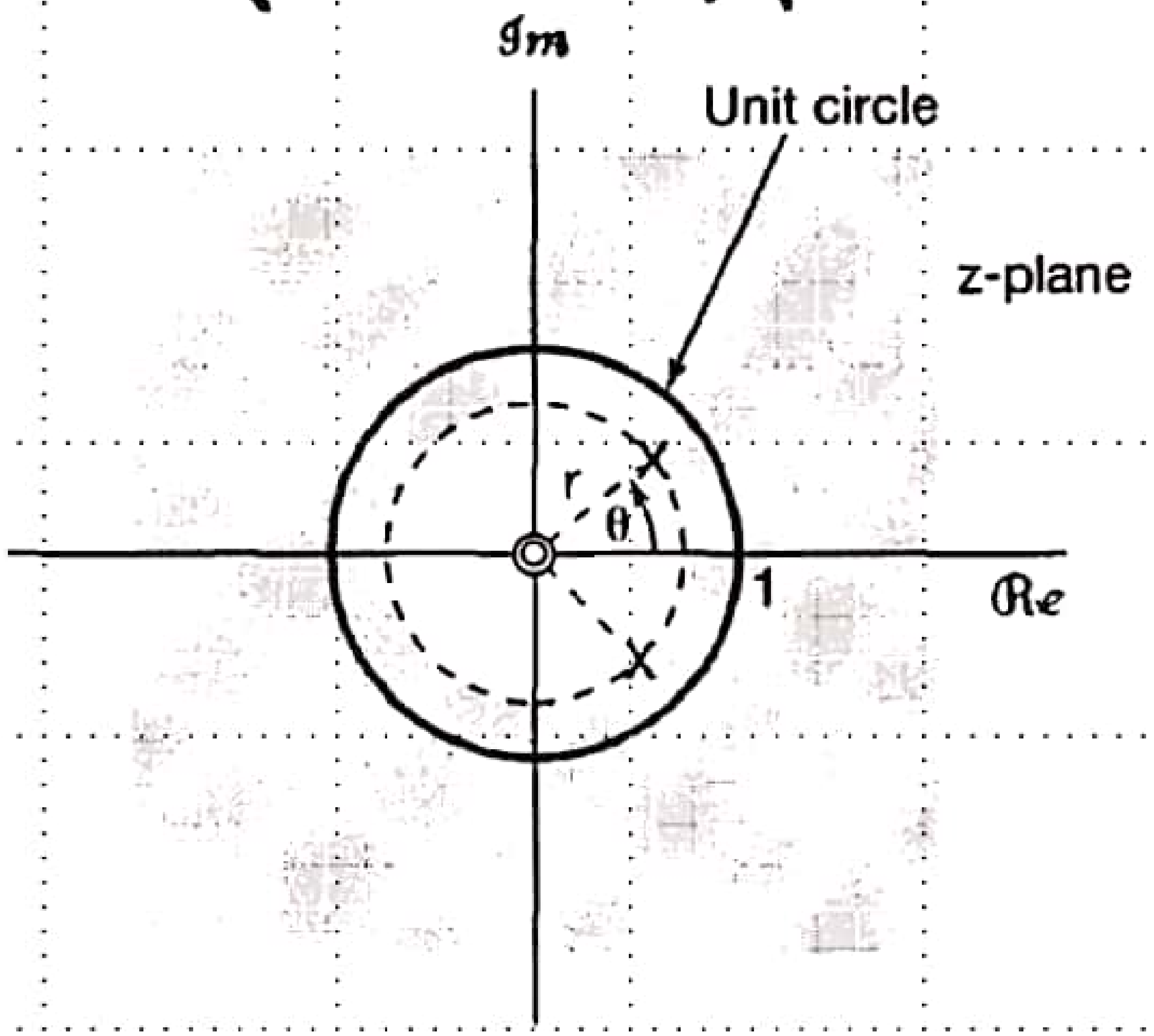
با فرض علّی بودن

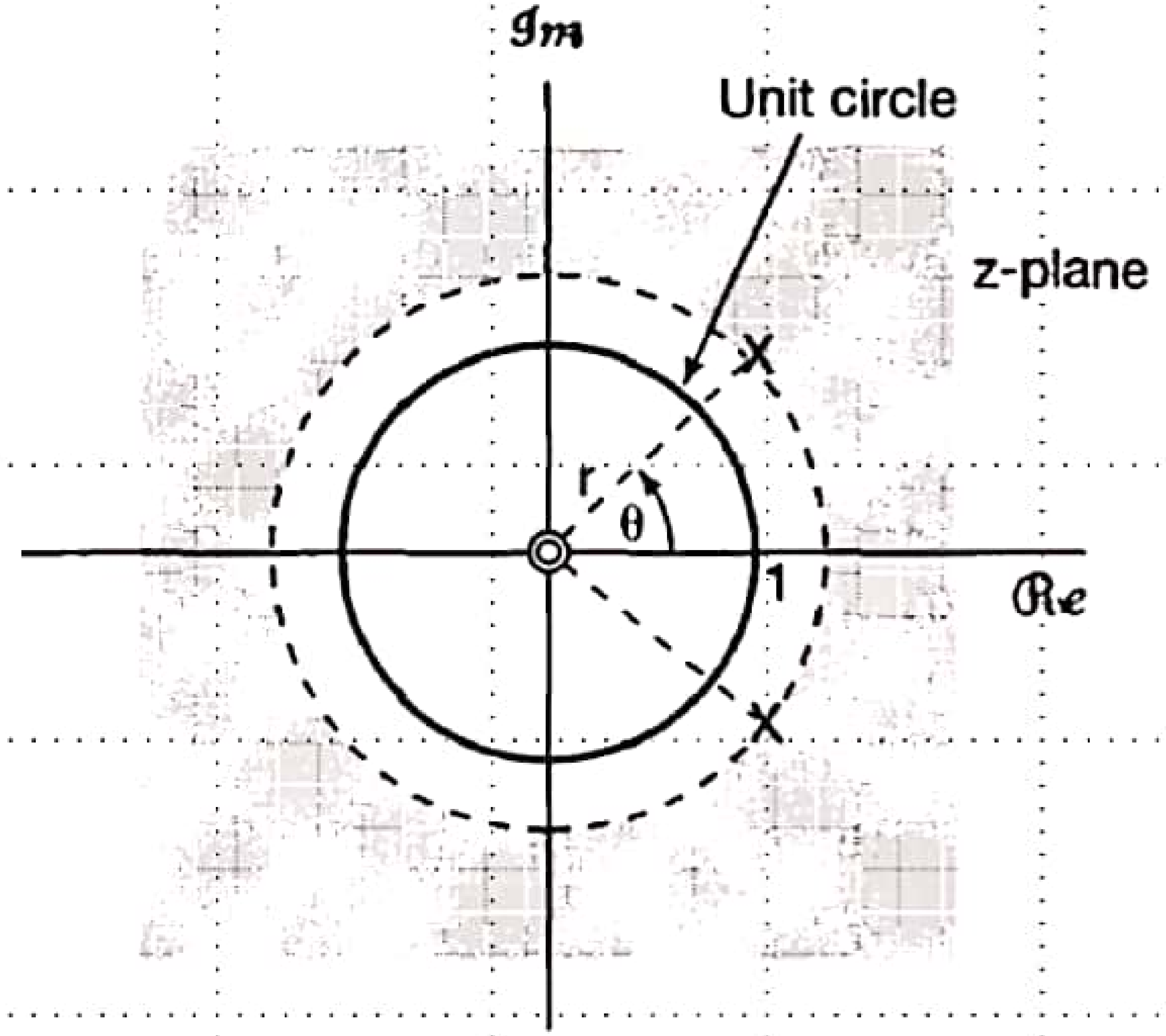
$$H(z) = \frac{z^2}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})}$$

$$P_1 = re^{j\theta}, \quad P_2 = re^{-j\theta}$$

$r < 1$

سیستم پایدار





$r > 1$

سیستم ناپایدار

تابع سیستم در سیستم‌های LTI توصیف‌شده توسط معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \quad \xRightarrow{\mathcal{Z}} \quad \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z),$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}.$$

$$\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(z) \text{ صفرهای}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(z) \text{ قطب‌های}$$

$$H(z) = z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n} \qquad h[n] = z^{-1}\{H(z)\}$$

معادلهٔ تفاضلی توصیف کنندهٔ سیستم و در نتیجه تابع $H(z)$ به تنهایی اطلاعاتی در مورد ناحیهٔ همگرایی نمی‌دهد. براساس ویژگی‌های علّی / غیرعلّی / ضدعلّی و پایدار / ناپایدار بودن سیستم می‌توان ROC را تعیین کرده و پاسخ ضربهٔ $h[n]$ را به دست آورد.

مثال)

Suppose that we are given the following information about an LTI system:

1. If the input to the system is $x_1[n] = (1/6)^n u[n]$, then the output is

$$y_1[n] = \left[a\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n],$$

where a is a real number.

2. If $x_2[n] = (-1)^n$, then the output is $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$.

مطلوبست تعیین : ۱) مقدار ثابت a ۲) تابع سیستم H(z)

۳) ویژگیهای پایداری و علیت سیستم ۴) معادله تفاضلی توصیف کننده سیستم

Scanned by CamScanner

The z-transforms of the signals specified in the first piece of information are

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6}, \qquad Y_1(z) = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{(a + 10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

it follows that the algebraic expression for the system function is

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{[(a + 10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}][1 - \frac{1}{6}z^{-1}]}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Furthermore, we know that the response to $x_2[n] = (-1)^n$ must equal $(-1)^n$ multiplied by the system function $H(z)$ evaluated at $z = -1$.

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{4} = H(-1) = \frac{[(a + 10) + 5 + \frac{a}{3}][\frac{7}{6}]}{(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})}. \quad \Rightarrow \quad a = -9 \ \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}},$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{z^2-\frac{13}{6}z+\frac{1}{3}}{z^2-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}}. \quad \checkmark$$

تعیین ROC برای $H(z)$:

Also, from the convolution property, we know that the ROC of $Y_1(z)$ must include at least the intersections of the ROCs of $X_1(z)$ and $H(z)$. Examining the three possible ROCs for $H(z)$ (namely, $|z| < 1/3$, $1/3 < |z| < 1/2$, and $|z| > 1/2$), we find that the only choice that is consistent with the ROCs of $X_1(z)$ and $Y_1(z)$ is $|z| > 1/2$.

$$ROC_H \cap \underset{\downarrow\atop |z|>1/4}{ROC_{X_1}} \subset \underset{\downarrow\atop |z|>1/2}{ROC_{Y_1}} \qquad Y_1(z) = H(z)X_1(z)$$

$$\Rightarrow \quad ROC_H : |z| > 1/2$$

Since the ROC for the system includes the unit circle, we know that the system is stable.

$|z|=1 \subset ROC_H \Rightarrow$ سیستم پایدار است.

$H(\infty)=1 \Rightarrow z=\infty \subset ROC_H \Rightarrow$ سیستم علّی است

$$H(z) = \frac{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}, \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow \quad y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{13}{6}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2].$$

مثال ۹)

Consider a stable and causal system with impulse response $h[n]$ and rational system function $H(z)$. Suppose it is known that $H(z)$ contains a pole at $z = 1/2$ and a zero somewhere on the unit circle. The precise number and locations of all of the other poles and zeros are unknown.

با توجه به اطلاعات فوق درباره سیستم LTI مفروض، درستی هر یک از گزاره‌های زیر بررسی شود:

الف) $|Z| = 2$ درون ROC متناظر با $H(Z)$ است؟ ✓

چون سیستم پایدار و علّی است، ناحیهٔ همگرایی $H(Z)$ خارج از یک دایره و دربرگیرندهٔ دایرهٔ $r=1$ است، درنتیجه حتماً $|Z|=2$ را هم دربرمی‌گیرد.

ب) برای مقداری از ω ، $H(e^{j\omega}) = 0$ است؟ ✓

چون $H(Z)$ بر روی دایره به شعاع واحد ، یک صفر دارد پس $H(re^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) = 0$

برای حداقل یک مقداری از ω برقرار است.

ج) $h[n]$ دارای دوره زمانی محدود است؟ X

در این صورت لازم است ناحیه همگرایی $H(Z)$ همه صفحه Z (مگر احتمالاً ۰ و ∞)

باشد. در صورتی که طبق فرض $H(Z)$ در $Z = 1/2$ قطب دارد و قطب نمی‌تواند درون

ROC واقع شود.

د) $h[n]$ یک دنبالهٔ حقیقی است؟ ؟؟

اگر $h[n] = h^*[n]$ آنگاه $H(z) = H^*(z^*)$. یعنی اگر z_0 قطب یا صفر $H(z)$ باشد، z_0^* هم قطب یا صفر آن هست. اطلاعات داده شده درباره سیستم برای راستی آزمایی این گزاره کافی نیست.

هـ) $g[n] = n(h[n] * h[n])$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم پایدار و علّی است؟ ✓

$$G(z) = -z \frac{d}{dz} H^2(z) = -2z\, H(z)\, H'(z)$$

همه قطب های $G(z)$ در همان موقعیت قطب های $H(z)$ (درون دایرهٔ واحد) قرار دارند.

البته ممکن است $H(z)$ در مبدأ قطب داشته است که $G(z)$ آن قطب را ندارد.

در هر صورت قطب‌های $G(z)$ هم درون دایره به شعاع واحد قرار می‌گیرند.

چون $n<0$, $h[n]=0$ پس $g[n]=nh[n]*h[n]$ هم برای $n<0$ صفر

است و سیستم با پاسخ ضربهٔ $g[n]$ علّی است.

موقعیت قطب‌های $G(z)$ و علّی بودن $g[n]$ مستلزم آن است که ناحیه همگرایی آن

دایره به شعاع واحد را شامل شود، پس سیستم پایدار هم هست.