



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیوتر

بسم الله الرحمن الرحيم

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه شانزدهم - بخش‌های 4.1 و 4.2 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم



نمایش سری فوریه (فرکانسی) سیگنال‌های متناوب

Representation of periodic signals as linear combinations of complex exponentials.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \quad \xleftarrow{\mathcal{FS}} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t} dt$$

ریاضی

تحليل

This representation can be used in describing the effect of LTI systems on signals.

THE CONTINUOUS-TIME FOURIER TRANSFORM

تبدیل فوریه زمان پیوسته

۱. نمایش فرکانسی سیگنال‌های غیرمتناوب (تعیین سری فوریه)

۲. حالت خاص تبدیل لاپلاس (فقط روی محور موهومی)

Whereas for periodic signals the complex exponential building blocks are harmonically related, for aperiodic signals they are infinitesimally close in frequency, and the representation in terms of a linear combination takes the form of an integral rather than a sum. The resulting spectrum of coefficients in this representation is called the Fourier transform, and the synthesis integral itself, which uses these coefficients to represent the signal as a linear combination of complex exponentials, is called the inverse Fourier transform.

در رابطه غیر تناوی، ضرایب سرکی فوریه سیگنال به دلیل ناباع میوسته از فرکانسی می‌شوند که برآن طبق فرکانسی مایل فوریه سیگنال گفته می‌شود. همچنین ناچنین سرکی فوریه برای جمیع سیگنال بردی انتقال ننموده که برآن سیگنال فوریه نعلوس سیگنال گفته می‌شود.

In particular, Fourier reasoned that an aperiodic signal can be viewed as a periodic signal

with an infinite infinite period. ($T \rightarrow \infty$)

More precisely, in the Fourier series representation of a periodic signal, as the period increases the fundamental frequency decreases and the harmonically related components become closer in frequency. As the period becomes infinite, the frequency components form a continuum and the Fourier series sum becomes an integral.

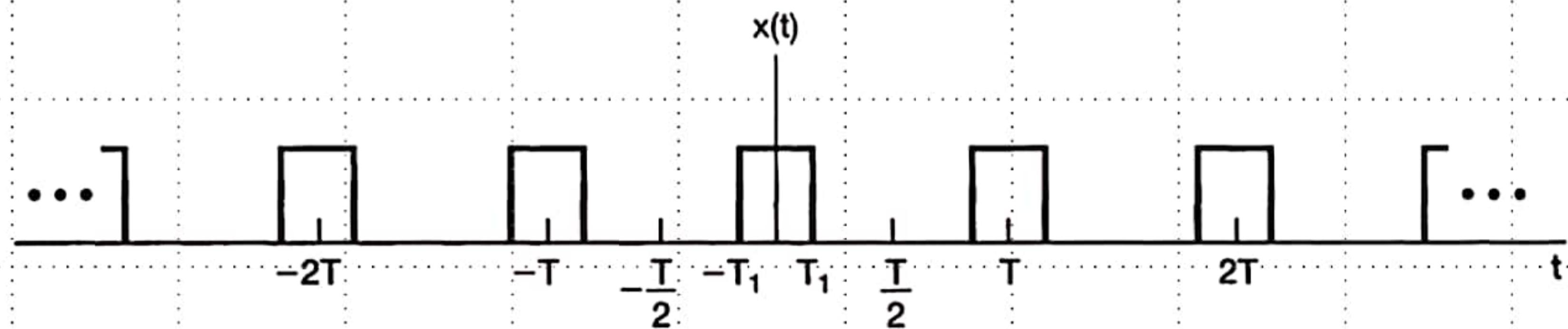
با افزایش دوره تناوب، فرکانس اصلی کاهش می‌ابد و مؤلفه‌های والاتر هارمونیکی در

حوزه فرکانس بهم نزدیک و نزدیک تر شده و درازای $T \rightarrow \infty$ و درازای فرکانسی

را کنترل می‌دهد و ناکنترل به ناکنترل تبدیل می‌شود.

طیف فرکانسی آن می‌گردد.

ایدہ اصلی یہ دست آوردن کا لیں تبدیل فوریہ برائی کے سینکڑاں خیر متناسب



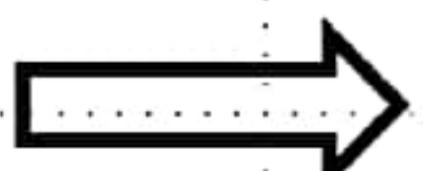
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

and periodically repeats with period T , as shown in the figure

$$\xrightarrow{\mathcal{FS}}$$

$$a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T},$$

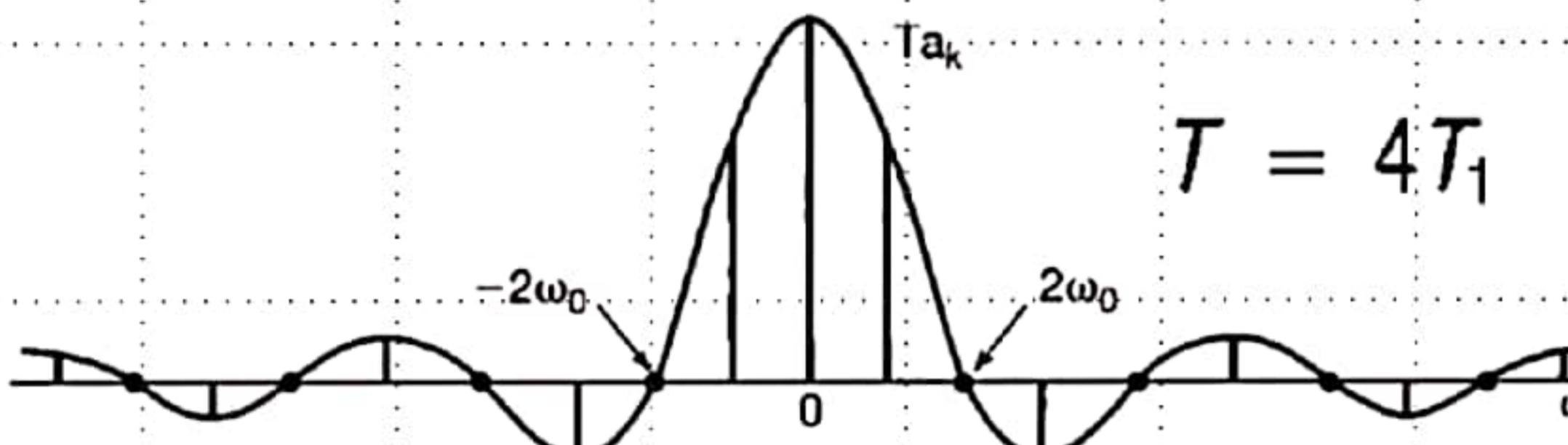
$$\text{where } \omega_0 = 2\pi/T$$



$$Ta_k = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \Bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

$$\omega T_1 = \pm \pi \Rightarrow \omega = \pm \frac{\pi}{T_1}$$

That is, with ω thought of as a continuous variable, the function $(2 \sin \omega T_1)/\omega$ represents the envelope of Ta_k , and the coefficients a_k are simply equally spaced samples of this envelope. Also, for fixed T_1 , the envelope of Ta_k is independent of T .

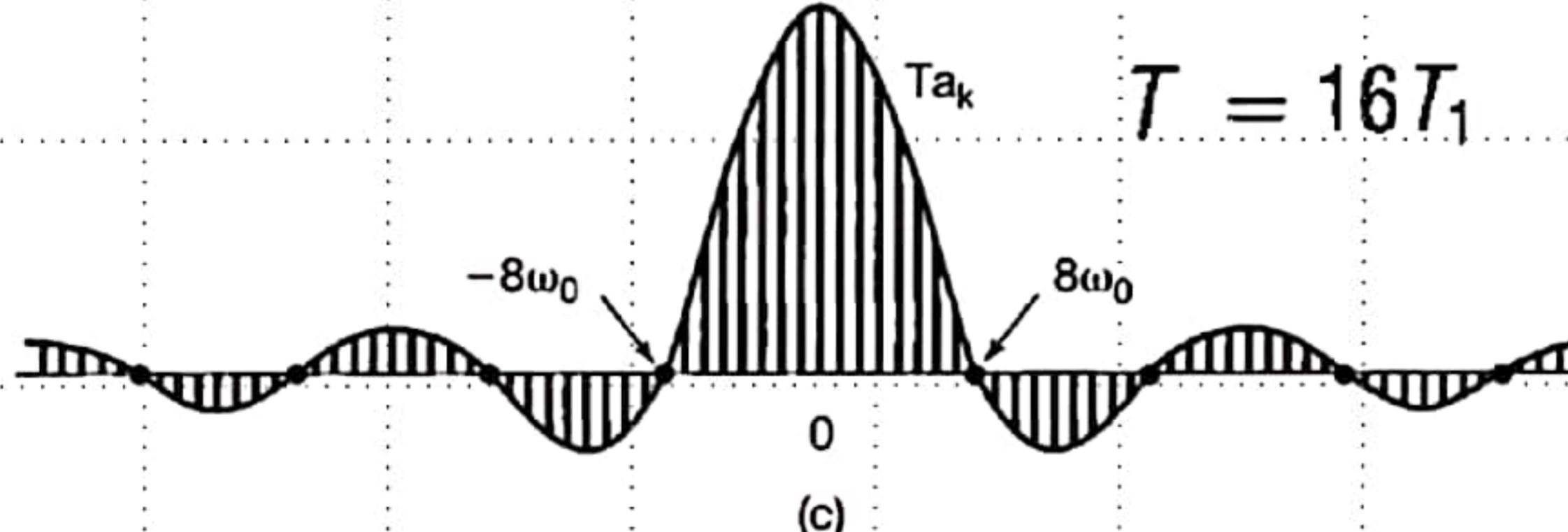


$$T = 4T_1$$

(a)

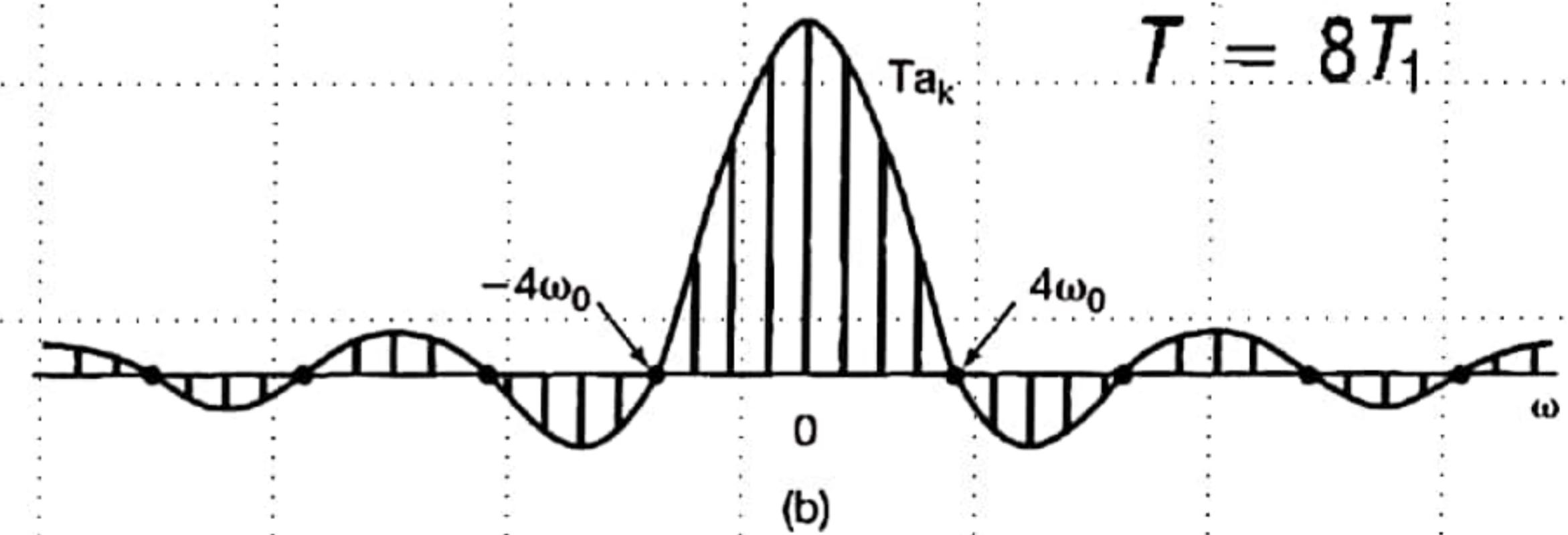
$$\frac{\pi}{T_1} = \frac{4\pi}{T} = 4\omega_0$$

$$\frac{\pi}{T_1} = \frac{8\pi}{T} = 8\omega_0$$



$$T = 16T_1$$

(c)



$$T = 8T_1$$

(b)

$$\frac{\pi}{T_1} = \frac{16\pi}{T} = 16\omega_0$$

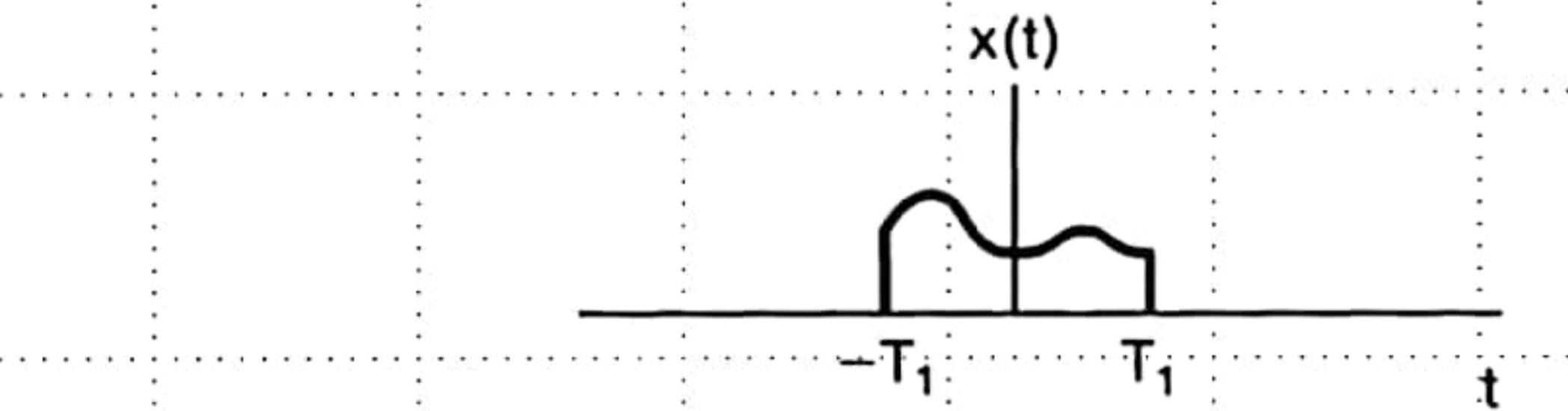
نکردهم: این مصلحت طرح تبدیل فوری

From the figure, we see that as

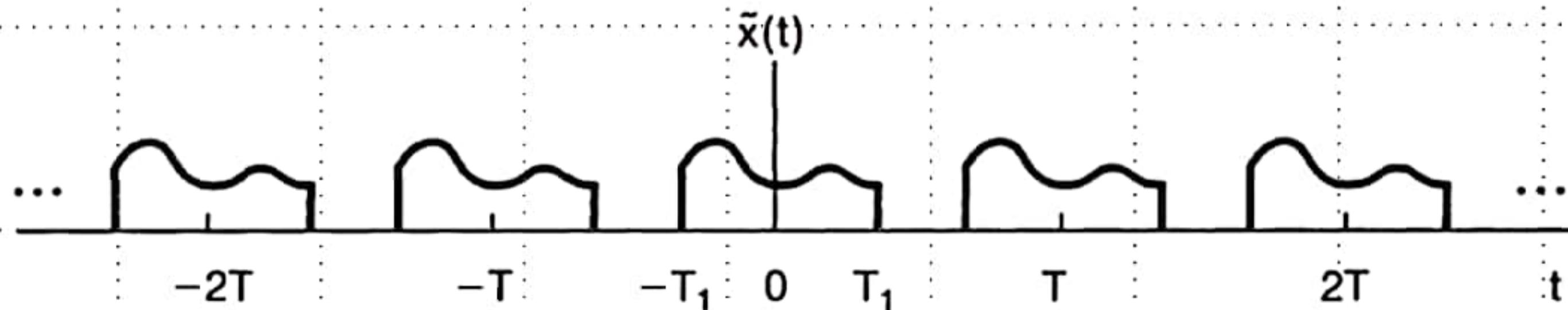
T increases, or equivalently, as the fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$ decreases, the envelope is sampled with a closer and closer spacing. As T becomes arbitrarily large, the original periodic square wave approaches a rectangular pulse (i.e., all that remains in the time domain is an aperiodic signal corresponding to one period of the square wave). Also, the Fourier series coefficients, multiplied by T , become more and more closely spaced samples of the envelope, so that in some sense (which we will specify shortly) the set of Fourier series coefficients approaches the envelope function as $T \rightarrow \infty$.

افزایش محدود T سینال $x(t)$ را به یک پالس غرسناوب تبدیل می‌کند (یک دوره سناوب از پالس متناظر). دنباله معادیر Ta_k نمونه‌های نزدیک تر و فرود مردی خواهد بود و بر ازای $T \rightarrow \infty$ از تابع پوسون $\frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$ مطابق می‌شود.

استخراج روابط بدل فوریه با تحریم سری فوریه برای سیگنال های غیر متناوب



(a)



(b)

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها _ دکتر عصوی

سیگنال نامتناوب $x(t)$ با پهنای زمانی محدود

$$x(t) = 0, \quad |t| > T_1$$

سیگنال متناوب

با دوره متناوب T

یک دوره متناوب آن است.

حد $\tilde{x}(t) = x(t)$ لوحه: $T \rightarrow \infty$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \xleftarrow{\mathcal{FS}} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

$\omega_0 = 2\pi/T$

Since $\tilde{x}(t) = x(t)$ for $|t| < T/2$, and also, since $x(t) = 0$ outside this interval, we can write

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Therefore, defining the envelope $X(j\omega)$ of Ta_k as $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$,

we have, for the coefficients a_k ,

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0).$$

therefore we can express $\tilde{x}(t)$ in terms of $X(j\omega)$ as

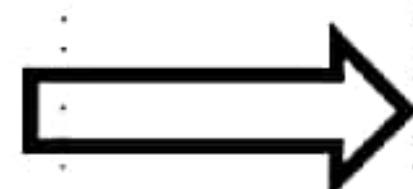
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t},$$

or equivalently, since $2\pi/T = \omega_0$,

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$

$$\text{as } \tilde{x}(t) = x(t) \\ T \rightarrow \infty \quad (\omega_0 \rightarrow 0)$$

در حد با میل کردن ω_0 به ۰ میتوان $x(t)$ را از $\tilde{x}(t)$ بازست.^۱



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

آنکه این انتقال زیر تبدیل خواهد شد.

لذ در آن:

به روابط انتدراکی اخیر، زوج تبدیل فوریه لغنه حی سود.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

$$X(j\omega) = F\{x(t)\}$$

رابطه تحلیل (آنالیز)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\}$$

رابطه ترکیب (سنتز)

نکته: با وجوده به تعریف فوق برای تبدیل لاپلکس (ارم) کان با تعریف تبدیل فوریه و معادله آن با تعریف تبدیل لاپلکس داریم:

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad | s=j\omega$$

(حالت خاص تبدیل لاپلکس)

اگر خط $\omega = j\omega$ برروی $X(s)$ در ناحیهٔ همگرایی تبدیل شود، $x(t)$ باشد.

محور $j\omega$ همان $X(j\omega)$ و تبدیل فوریهٔ $x(t)$ خواهد بود.

از سوی دکتر می‌توان لفت که تبدیل لپلکس تعمیم‌افزایش تبدیل فوریه است، زیرا:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \\ &= F\{x(t)e^{-\sigma t}\} \end{aligned}$$

همگرایی تبدیلات فوریه

با وجود این که استخراج روابط نزوح تبدیلات فوریه بربراست فرض سینالی با پهنه ای زمانی

محصور احتمالاً این روابط برای دسته گسترده‌ای از سینال‌های رمان پوچش ببرقرار

است. فرض کنیم $X(j\omega)$ برای یک سینال معروف و (لحواه $x(t)$) از رابطه

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

که از رابطه سنتز (تبدیل فوریه معلوک) حاصل

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt$$

می‌سود، تا چه اندازه سینال اصلی ($x(t)$) مطابقت دارد؟

چند نکته در مورد حملهای انتگرالی بدل فوریه:

۱- اگر $x(t)$ سینال با مرزی محدود یا مربع‌پذیر (square integrable) باشد، یعنی:

$$X(j\omega) = F\{x(t)\} \quad \text{آن‌طوره} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

و هم‌راست و مرزی سینال خطای صفر است، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt = 0$$

$$\hat{x}(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

۱- صغر بودن ارزی سینال خطای به معنای برابری کامل $(t)x$ و ناکام انتقال فوریه آن در کافی لحظات t نیست.

۲- سوابط همراهی (Dirichlet) سوابط سه گانه در نظر دارد، برابری $(t)x$ و انتقال فوریه آن را در حجم زمان ها مترک در زمان ها مترکی که $(t)x$ حملن است ناپیوگانی (جنس) داشته باشد تضمین می کند:

الف) $(t)x$ مطعاً انتقال پذیر باشد، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

ب) تعداد نعَاطِ آکْتَرَم (ماکزِیم رُفِیْنِیْم) $\mathcal{X}(t)$ در طول هر بازهٔ محدود زمانی، محدود باشد.

ج) تعداد نعَاطِ ناپِوِستَلَی $\mathcal{X}(t)$ در هر بازهٔ محدود زمانی، محدود باشد و علاوه بر این هر ناپِوِستَلَی اندازهٔ محدودی داشته باشد.

Therefore, absolutely integrable signals that are continuous or that have a finite number of discontinuities have Fourier transforms.

نکته: سیگنال‌های مستمر علی‌رغم آن‌که نه مطلقًا و نه مرتبًا انتگرال پذیر نباشند،

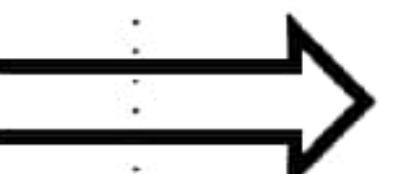
اگر لوان برای آنها به لحاظ لوایح ضربه، نمونه فوریه تعریف کرد.

تبدیلات فوریه برخی از سیگنال‌های مهم

Consider the signal $x(t) = e^{-at}u(t)$ $a > 0$.

سیگنال ناکی حقیقی

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}.$$



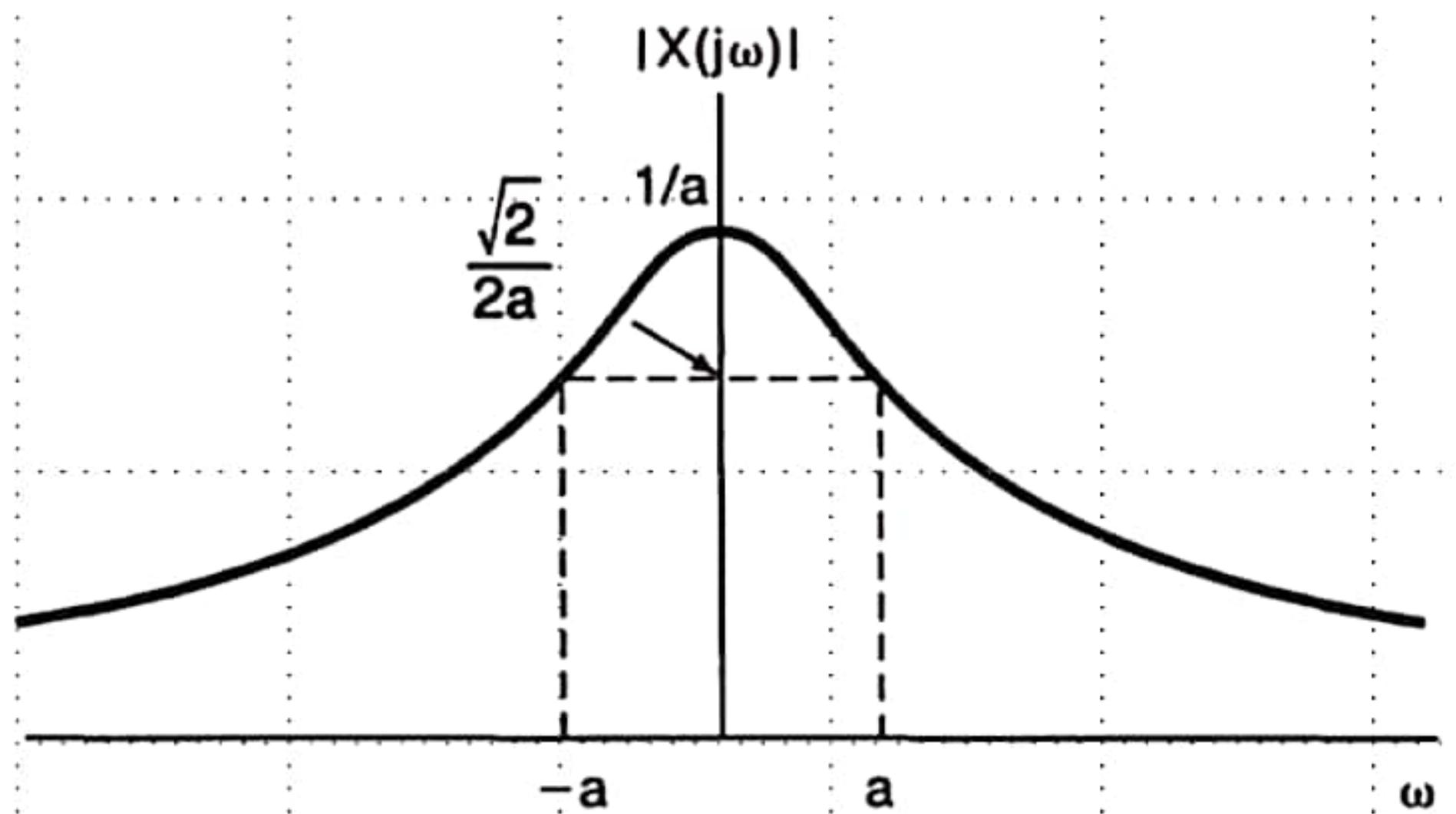
$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0.$$

Since this Fourier transform is complex valued, to plot it as a function of ω , we express $X(j\omega)$ in terms of its magnitude and phase:

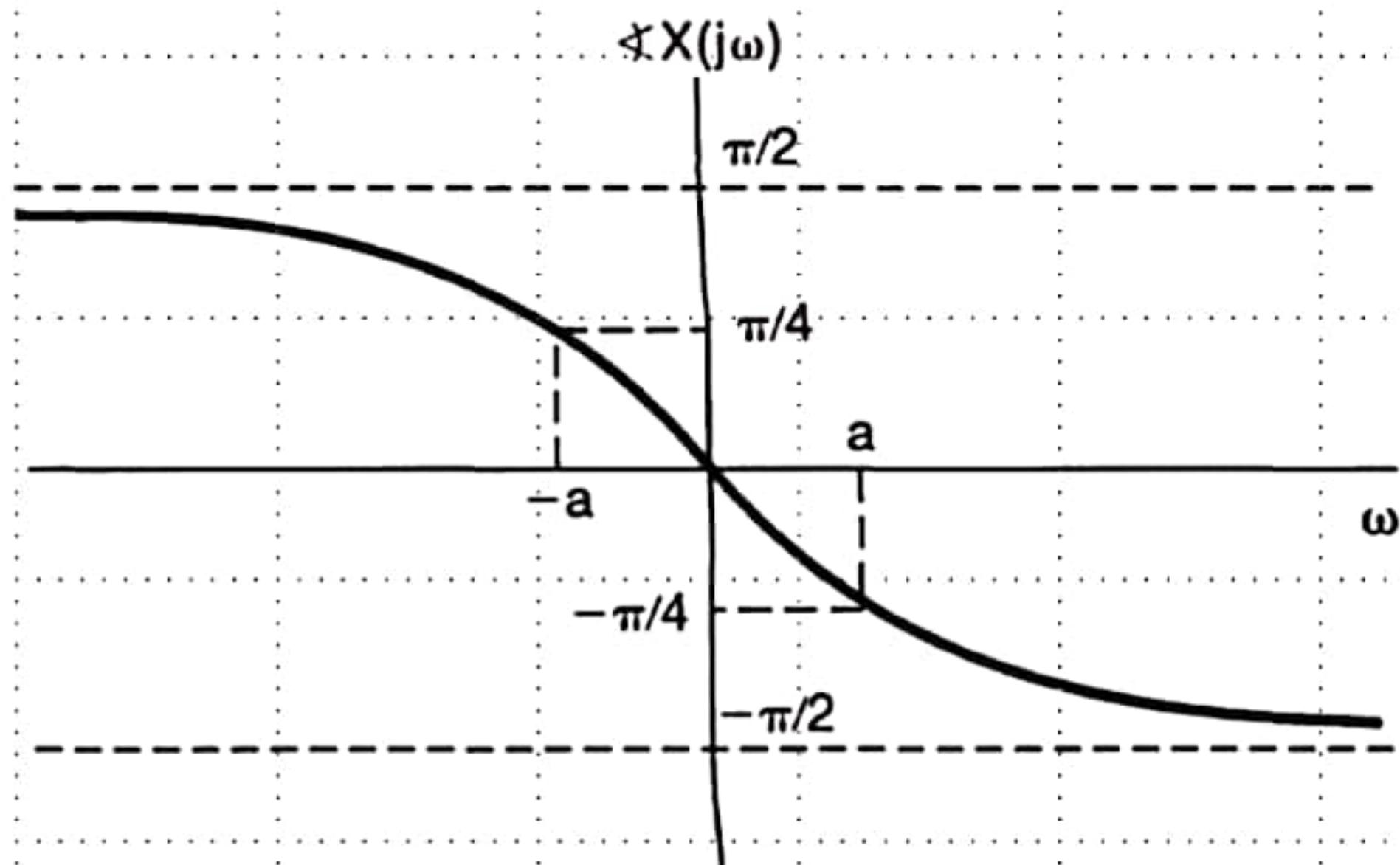
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

رسم مختلطی اندازه و فاز $X(j\omega)$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}},$$



(a)



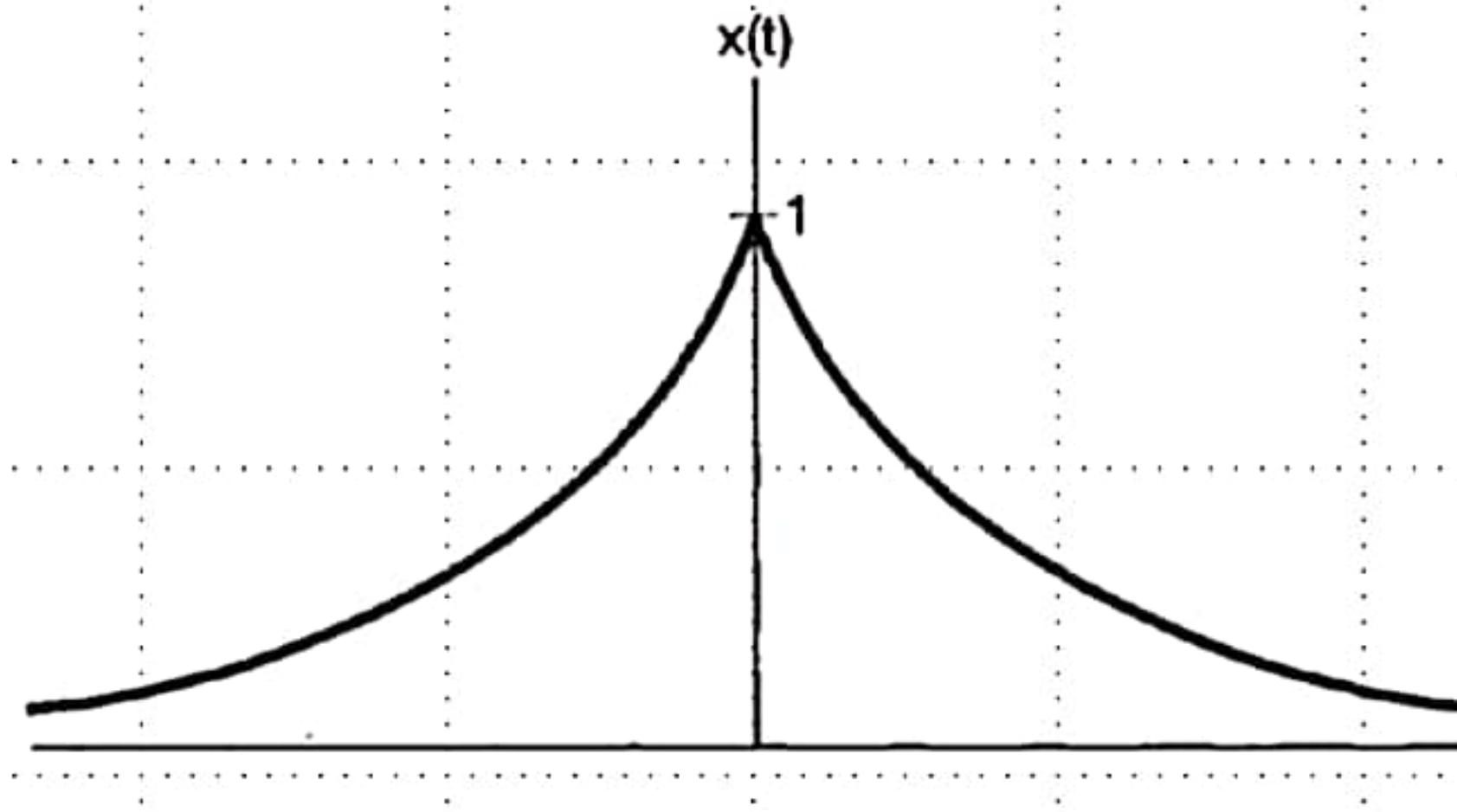
(b)

$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Note that if a is complex rather than real, then $x(t)$ is absolutely integrable as long as $\operatorname{Re}\{a\} > 0$, and in this case the preceding calculation yields the same form for $X(j\omega)$. That is,

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad \operatorname{Re}\{a\} > 0.$$

$$x(t) = e^{-at}, \quad a > 0.$$



$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

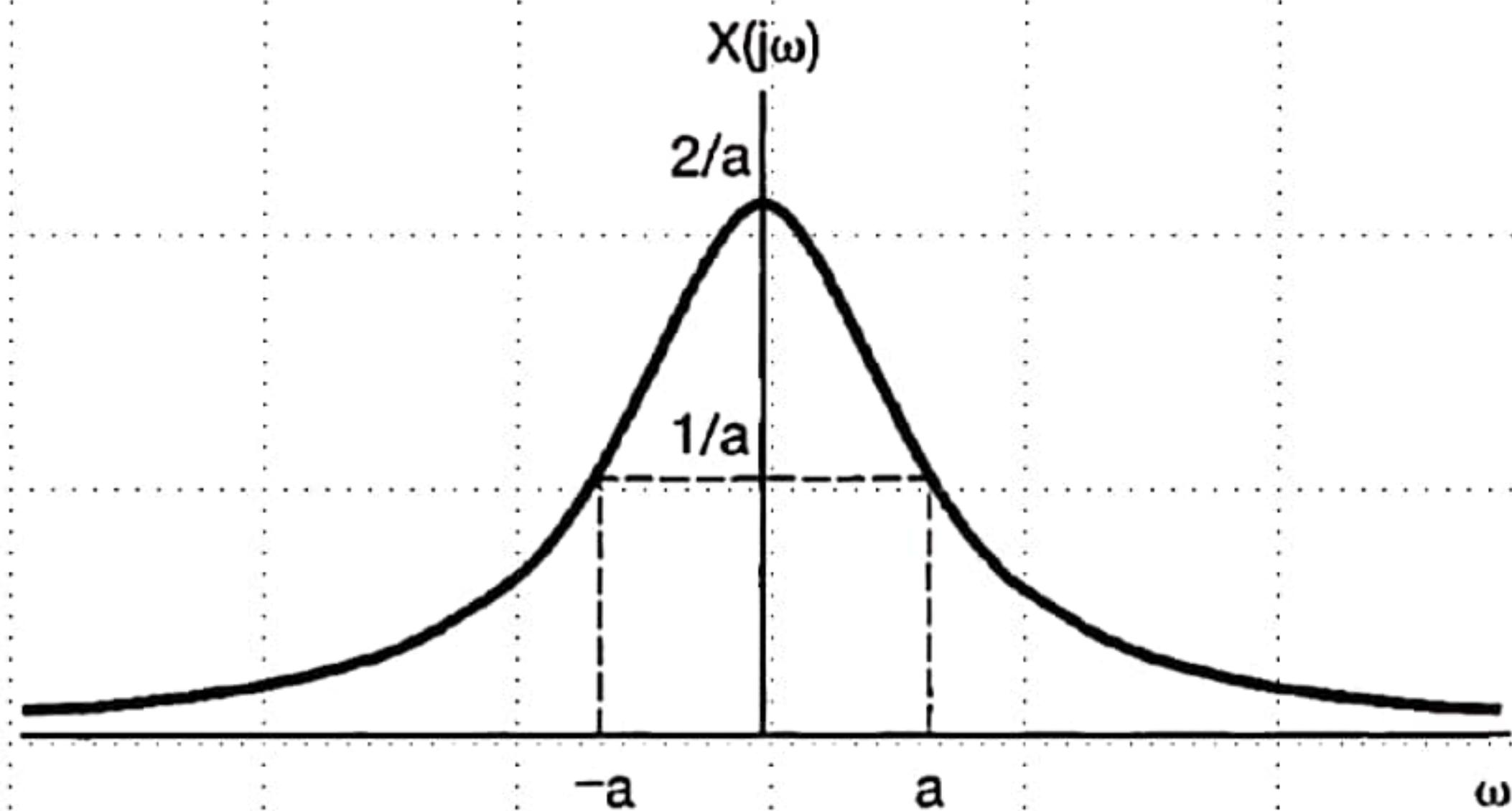
سؤال

در این مثال $X(j\omega)$ یک تابع حقیقی

از دست درست کرد:

$$|X(j\omega)| = X(j\omega)$$

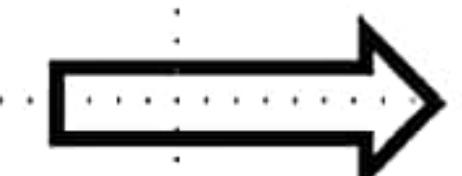
$$\Rightarrow X(j\omega) = 0$$



Now let us determine the Fourier transform of the unit impulse

مثال ۳

$$x(t) = \delta(t).$$



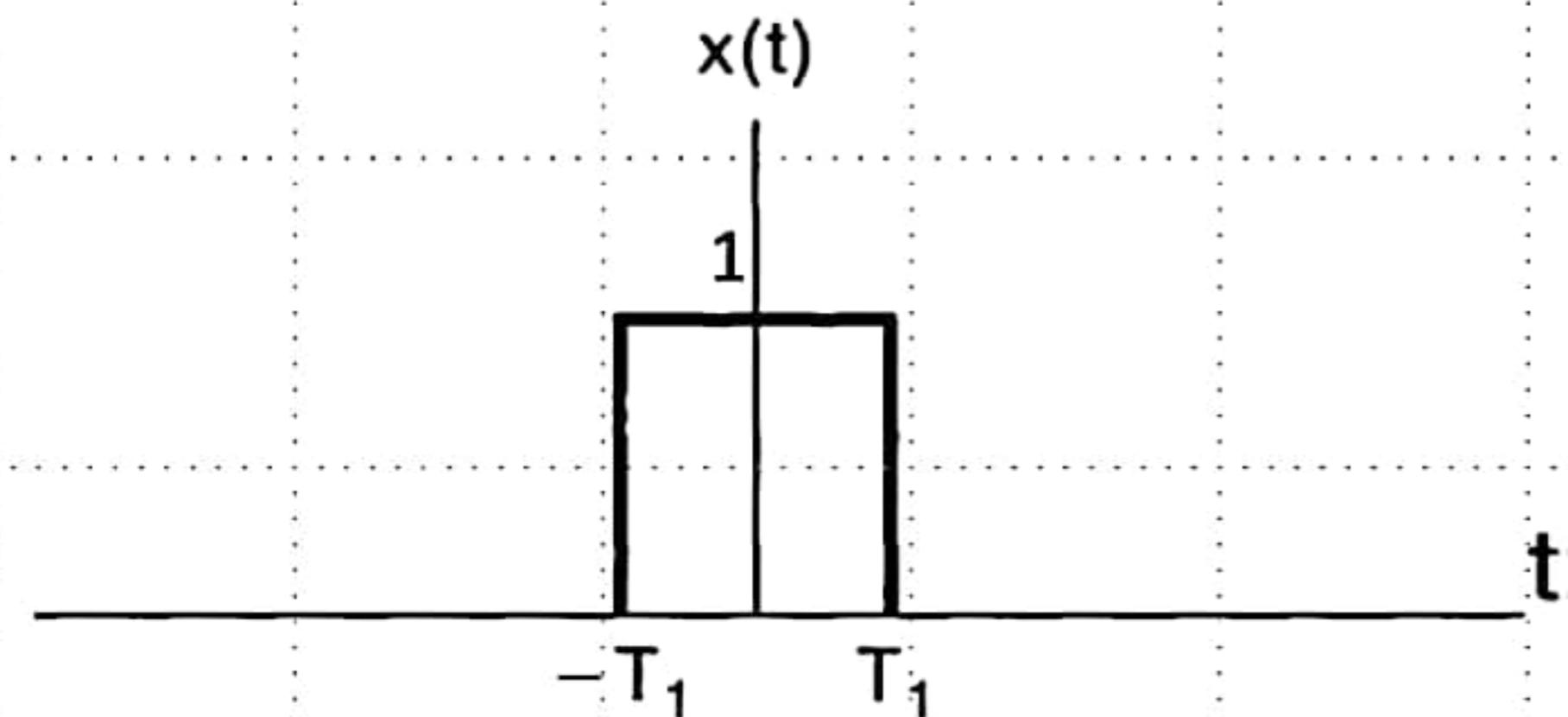
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

در این مثال، $X(j\omega)$ تابع حقیقی و مثبت است.

سؤال ٤

Consider the rectangular pulse signal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



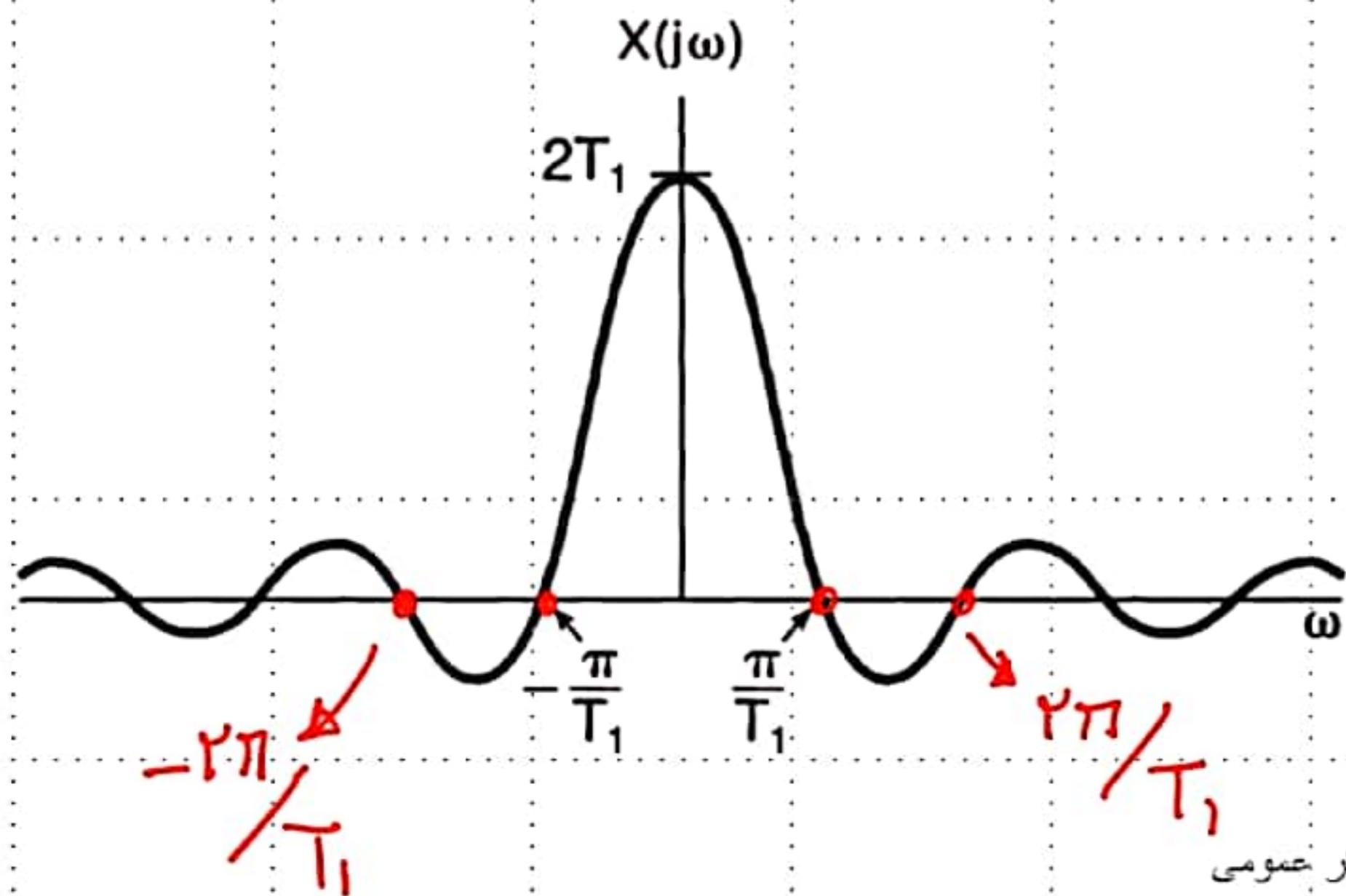
$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega},$$

$$- \frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}] = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$$

$X(j\omega)$ يک تابع حقیقی است.

نکته: بر حسب عدد T_1 میزان فاصله نماینده

عبور از صفر در $X(j\omega)$ کمتر است.

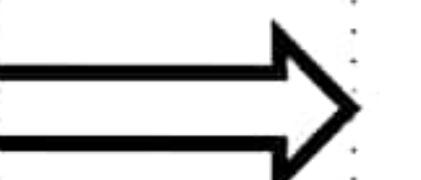


نکته: پالس استطیلی ($x(t)$ در این مثال را می‌توان حد تابع پالس متناوب در سرایه که دوره متناوب آن به مدت بی‌نهایت می‌باشد) در نظر گرفت. انتظاری رو داشت که همکرانی معادله ترکیب (سنتر) برای این پالس، شبیه همکرانی ناچیز سرکی فوریه برای پالس مساوی باشد.

Specifically, consider the inverse Fourier transform for the rectangular pulse signal:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Then, since $x(t)$ is square integrable,



$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = 0.$$

Furthermore, because $x(t)$ satisfies the Dirichlet conditions, $\hat{x}(t) = x(t)$, except at the points of discontinuity, $t = \pm T_1$, where $\hat{x}(t)$ converges to $1/2$, which is the average of the values of $x(t)$ on both sides of the discontinuity.

پس تحلیلی (درسته) را برابر آورده می‌کنیم.

In addition, the convergence of $\hat{x}(t)$ to $x(t)$ exhibits the Gibbs phenomenon, much as was illustrated for the periodic square wave.

نحوه کلیس

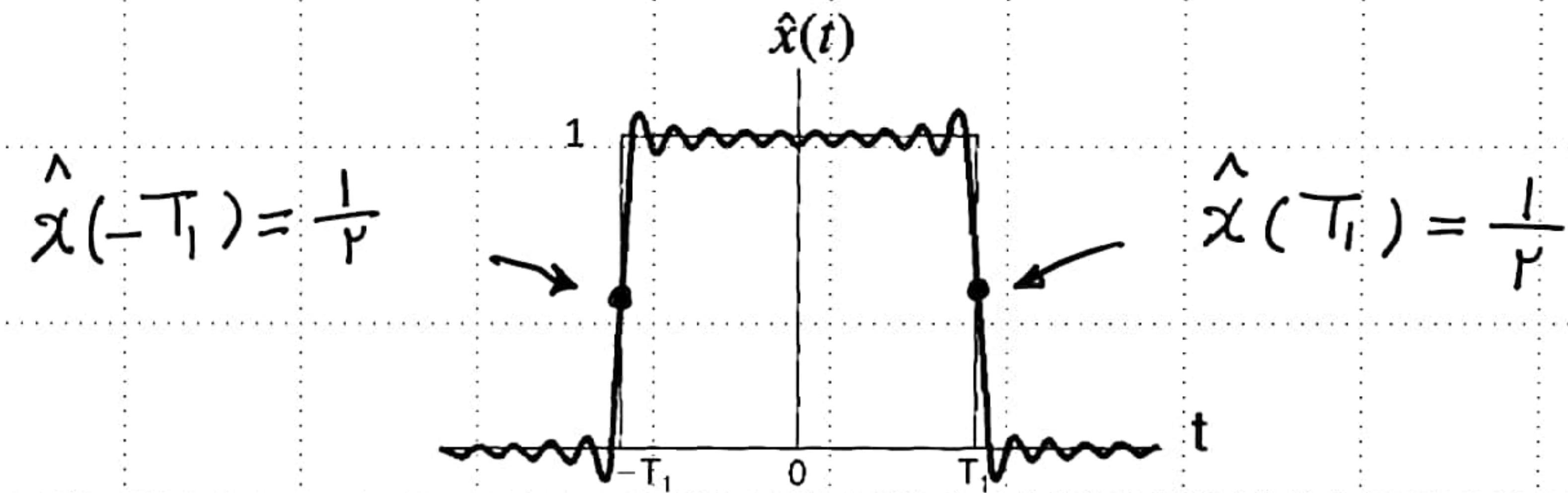
Specifically, in analogy with the finite Fourier series approximation, consider the following integral over a finite-length interval of frequencies:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

As $W \rightarrow \infty$, this signal converges to $x(t)$ everywhere, except at the discontinuities.

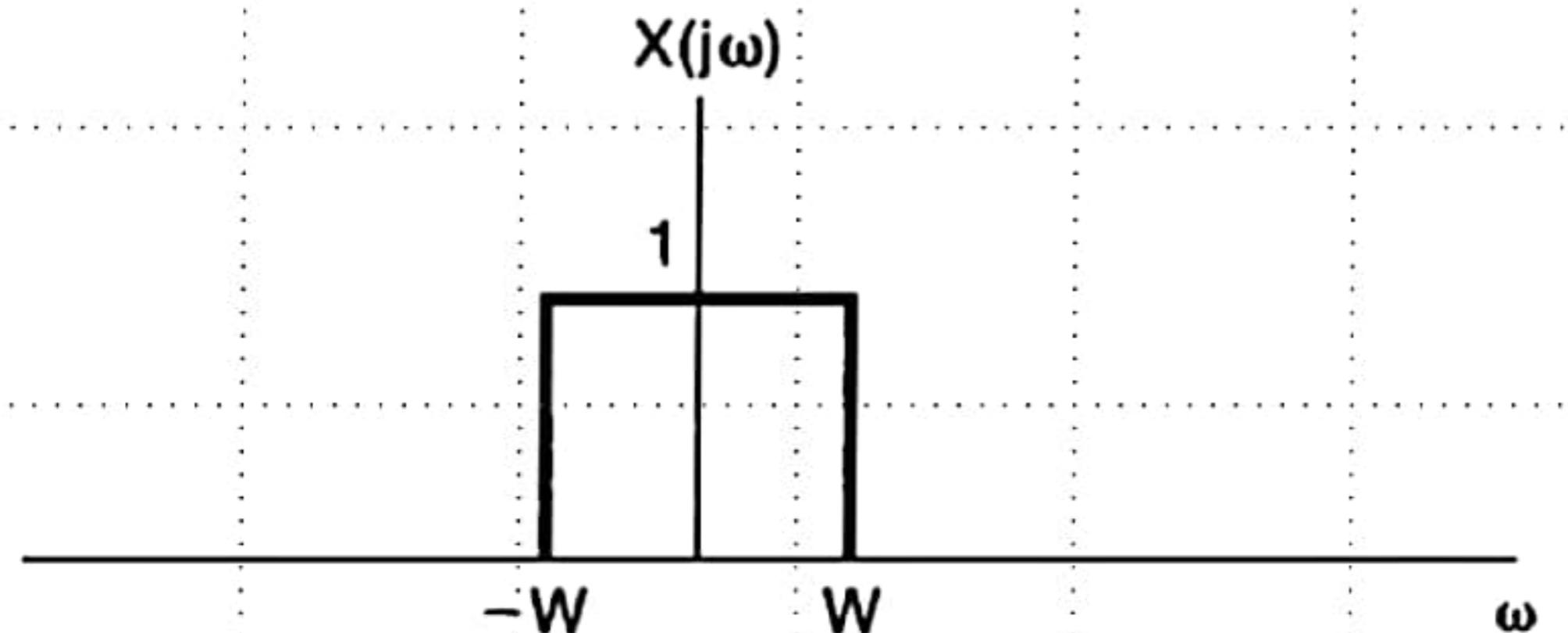
Moreover, the signal exhibits ripples near the discontinuities. The peak amplitude of these ripples does not decrease as W increases, although the ripples do become compressed toward the discontinuity, and the energy in the ripples converges to zero.

وجود بالازدگی و سعی زدن سینال استرد به توطیع بدل معلوس فوریه در اطراف نقاط ناپیوستگی پلس و عدم تغیر ارتفاع آن علیرغم افزایش W



Consider the signal $x(t)$ whose Fourier transform is $X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$.

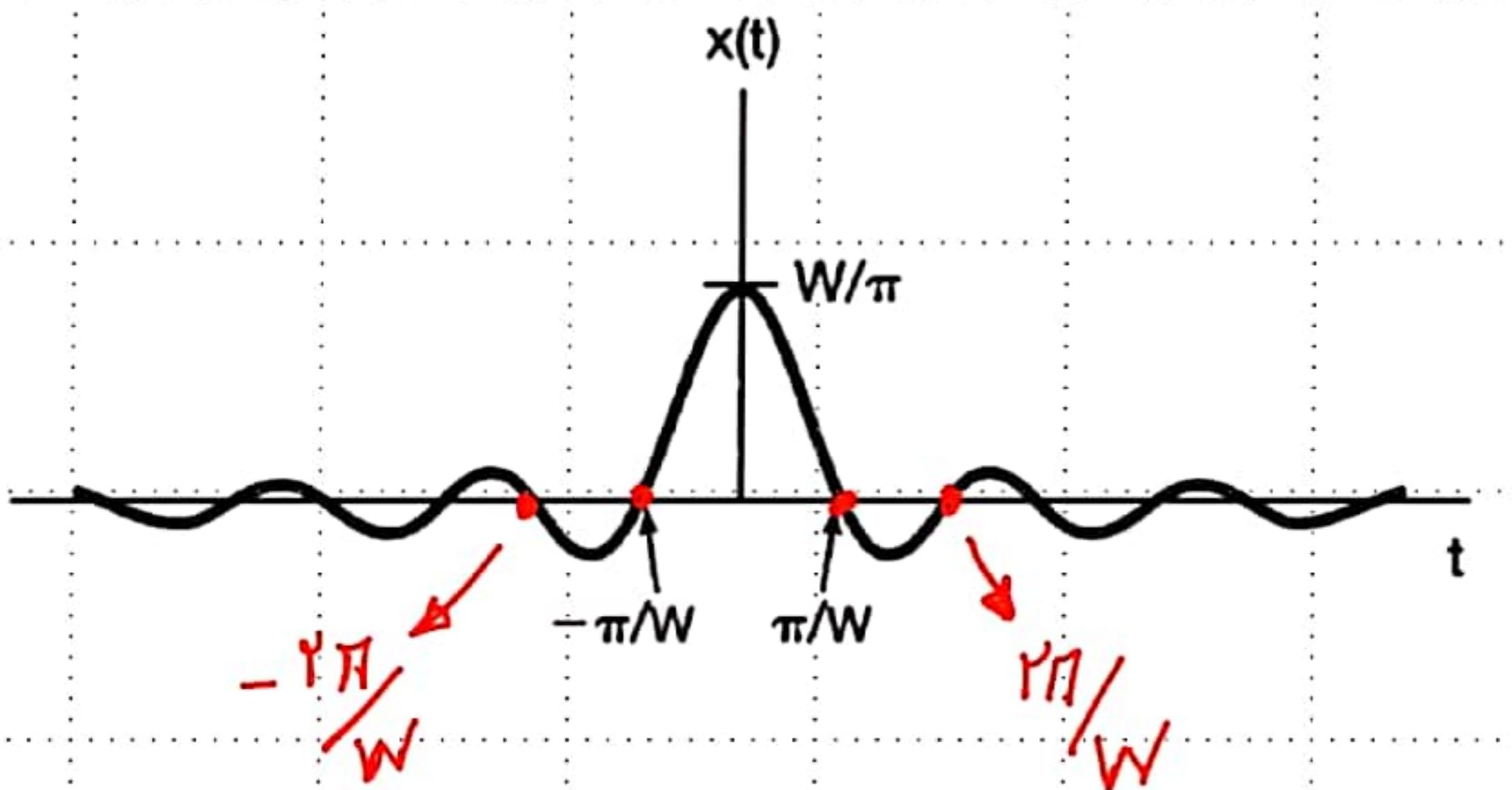
مثال



then determine

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t},$$

which is depicted.



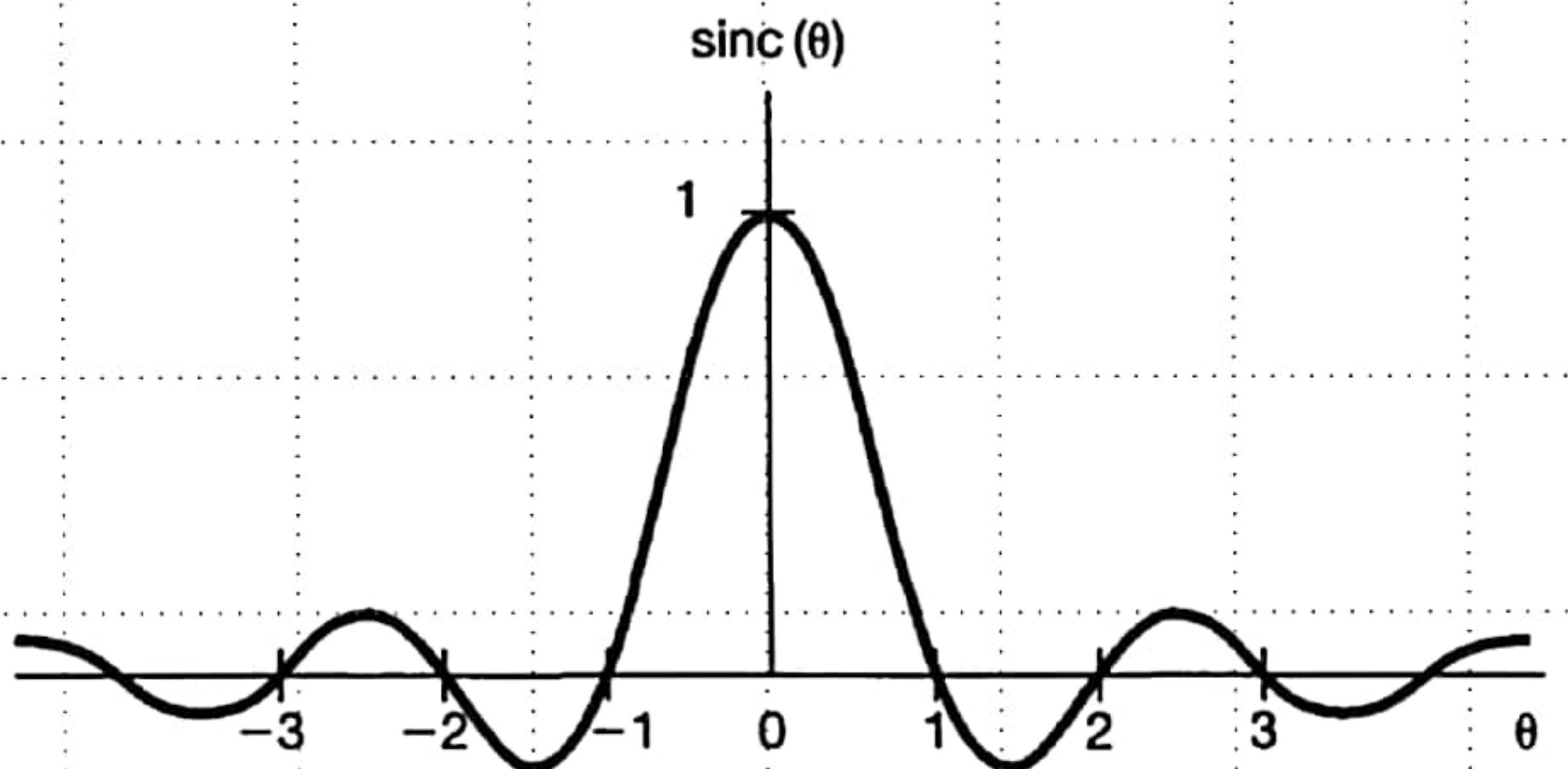
نکته: هر جهود W بزرگ تر باشد،

فاصله نعط از عبور از صفر در $x(t)$

کمتر و سیگنال در حوزه زمان فروده تر است.

ملخص: معرفی تابع sinc و معالیہ دوہل

the sinc function is $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}$.



$$\text{sinc}(0) = 1$$

$$\text{sinc}(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (k \neq 0)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}, \quad \rightarrow X(j\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$T_1 \uparrow \Rightarrow \frac{\pi}{T_1} \downarrow$

$$X(0) = 2T_1, \quad X(jk\frac{\pi}{T_1}) = 0 \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$K \neq 0$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad \rightarrow x(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right).$$

$W \uparrow \Rightarrow \frac{\pi}{W} \downarrow$

$$X(0) = \frac{W}{\pi}, \quad X(jk\frac{\pi}{W}) = 0 \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$K \neq 0$$

تبدیل فوریه برای سیگنال‌های متناوب

While our attention was focused on aperiodic signals, we can also develop Fourier transform representations for periodic signals, thus allowing us to consider both periodic and aperiodic signals within a unified context.

چگونه می‌توان برای سیگنال‌های متناوب که نه مطلقاً انتگرال پذیر نیستند، تبدیل فوریه تعریف کرد؟ در ناکمین سرکی فوریه سیگنال‌های متناوب داشتم:

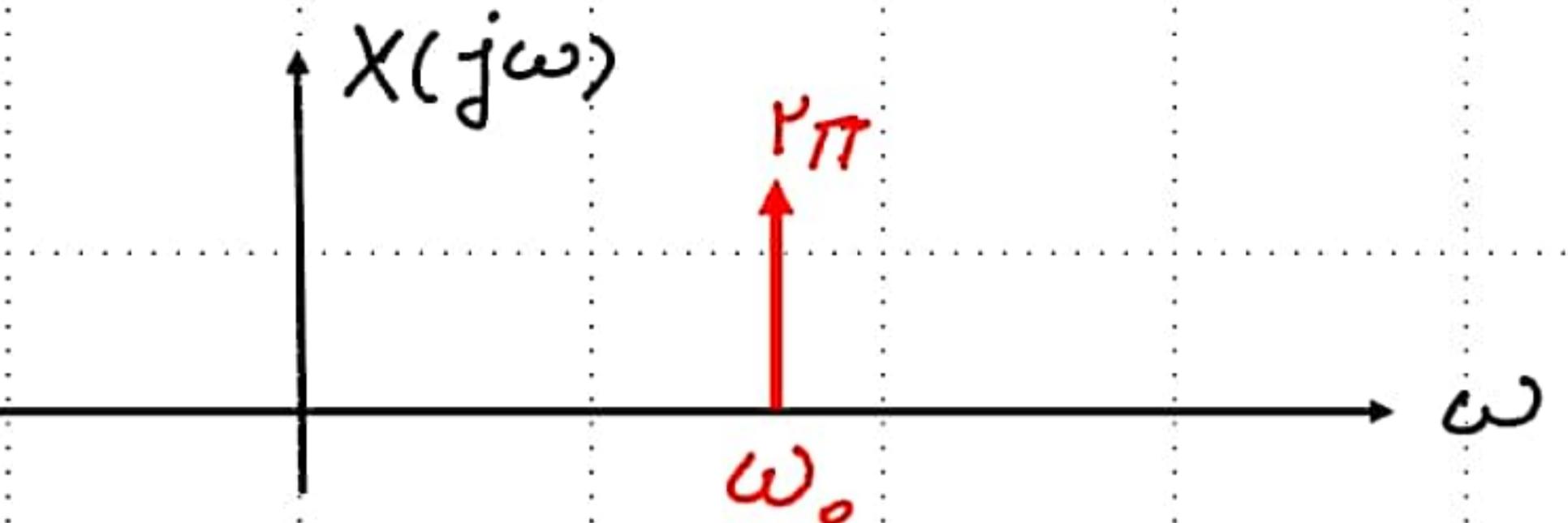
$$x(t) = x(t + T), \quad T = 2\pi/\omega_0$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

Let us consider a signal $x(t)$ with Fourier transform $X(j\omega)$ that is a single impulse of area 2π at $\omega = \omega_0$; that is,

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$



To determine the signal $x(t)$ for which this is the Fourier transform, we can apply the inverse transform relation, to obtain

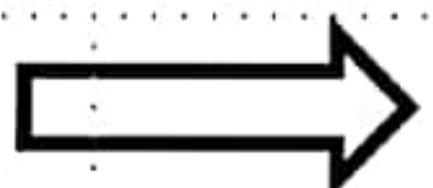
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t} d\omega \quad \longrightarrow \\ &= e^{j\omega_0 t}. \end{aligned}$$

More generally, if $X(j\omega)$ is of the form of a linear combination of impulses equally spaced in frequency, that is,

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0),$$

then the application of inverse transform relation, yields

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$



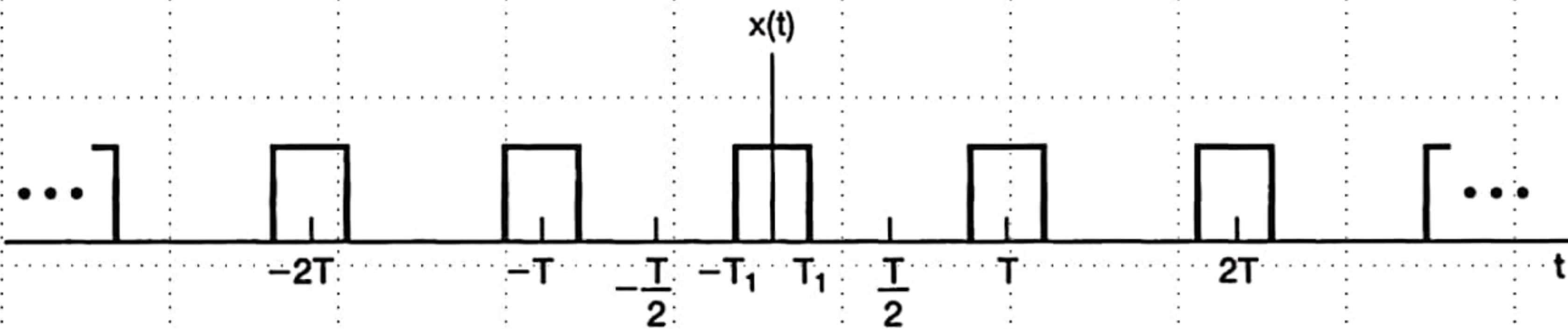
$$F\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Thus, the Fourier transform of a periodic signal with Fourier series coefficients $\{a_k\}$
can be interpreted as a train of impulses occurring at the harmonically related frequencies
and for which the area of the impulse at the k th harmonic frequency $k\omega_0$ is 2π times the k th
Fourier series coefficient a_k .

نتیجه: تبدیل فوریه یک سینال متناوب با فرکانس اصلی ω_0 و ضرایب هارمونیک فوریه
قطاری از ضربه‌ها به فواصل مساوی ω_0 و ارتفاع (ساخت)
اسـکـر در فرکانس $k\omega_0$ ، فرآرـحـی لـیـزـدـ.

مثال) پالس سریعی مستاوب و متعارن

Consider again the periodic square wave



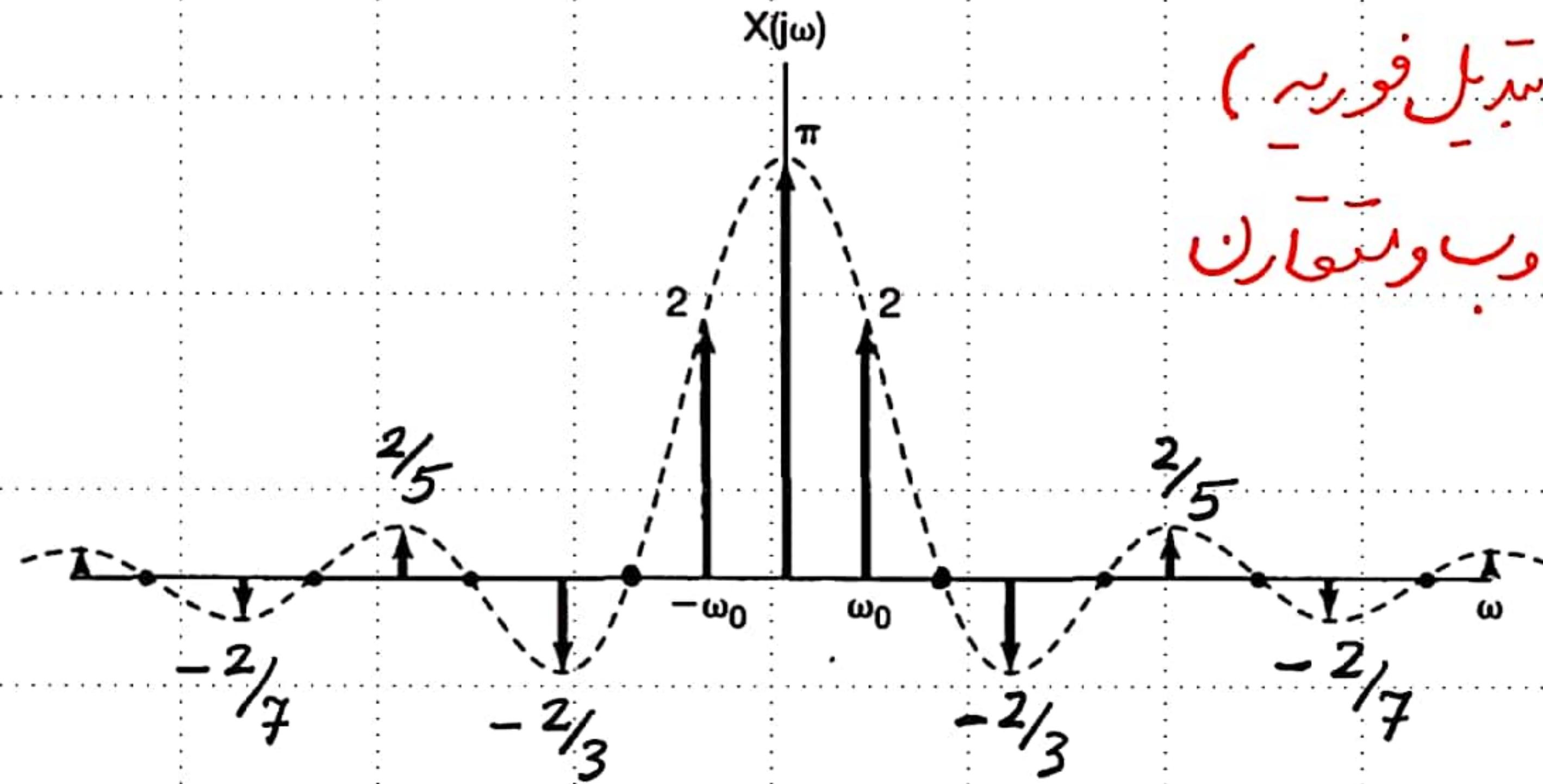
$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{\pi k}, \quad \rightarrow \quad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0),$$

فرض : $T_1 = \frac{T}{\nu} = \frac{\pi}{2\omega_0} \Rightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{\nu}$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{\nu}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

طیف فرکانسی (تبدیل فوریه)

پالس مربعی مسترد و متعارك

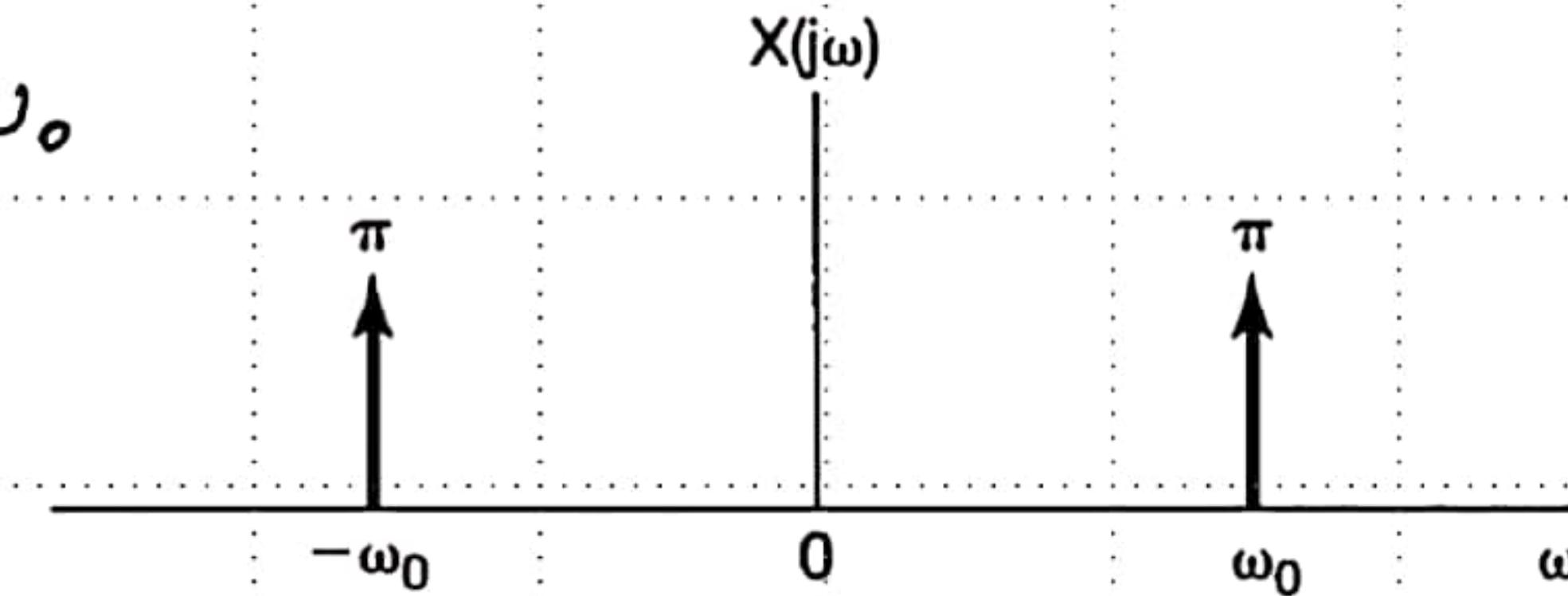


مثال) توابع سینوسی

$$x(t) = \cos \omega_0 t, \quad \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0) \quad \checkmark$$

$$|X(j\omega)| = \begin{cases} \pi, & \omega = \pm\omega_0 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



$$\cancel{X(j\omega) = 0, \forall \omega}$$

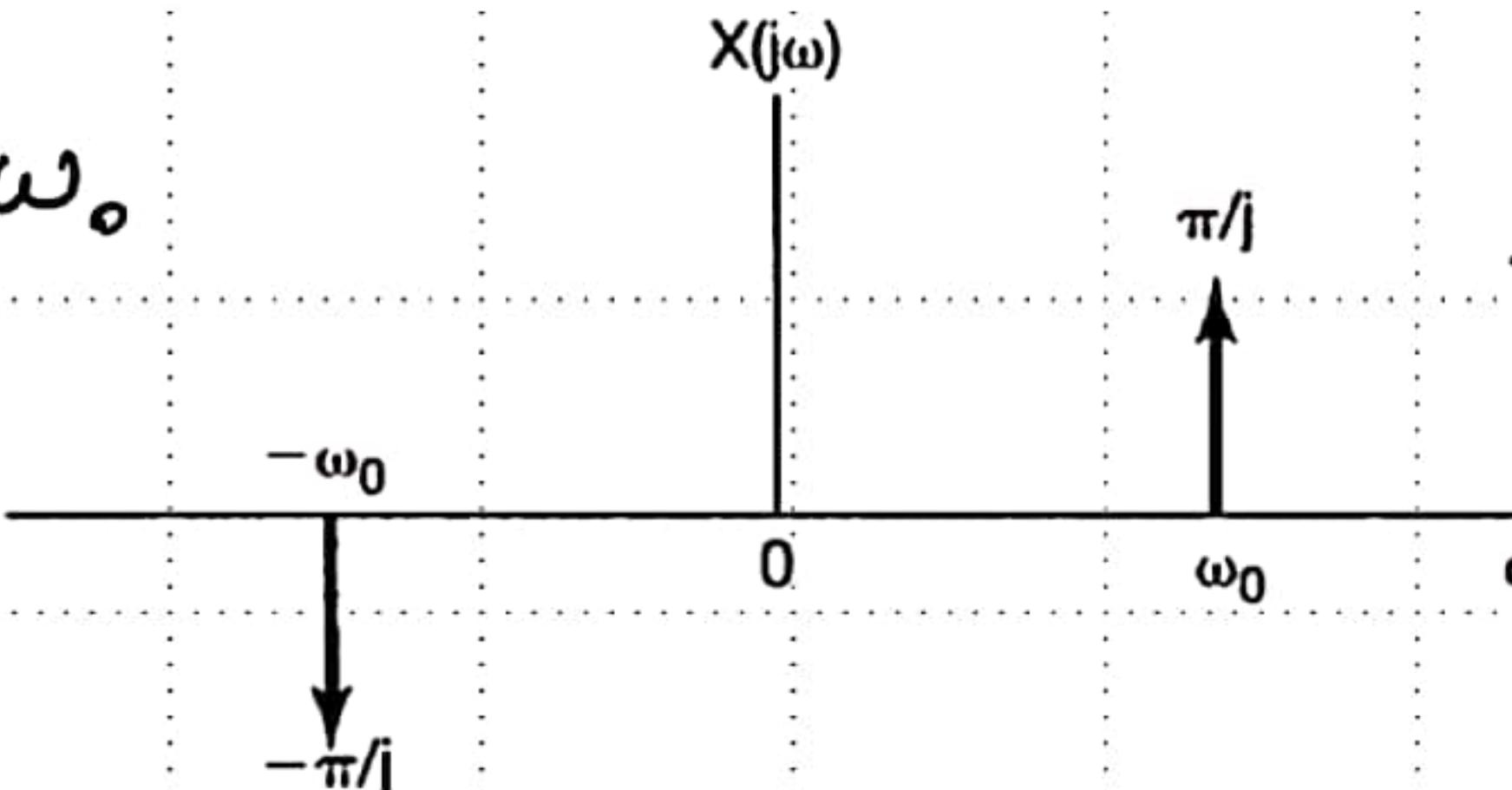
$$\underline{x(t) = \sin \omega_0 t.}$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{j\pi} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{\pi}{j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\omega + \omega_0)$$

✓

$$|X(j\omega)| = \begin{cases} \pi, & \omega = \pm\omega_0 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



$$\cancel{X(j\omega) = \begin{cases} -90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ +90^\circ, & \omega = -\omega_0 \\ 0, & \text{others} \end{cases}}$$



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیووتر

بسم الله الرحمن الرحيم

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه هفدهم - بخش‌های 4.3 و 4.4 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega).$$

یادآوری: روابط زوج تبدیلات فوریه

$$X(j\omega) = F\{x(t)\}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

تبدیل فوریه، طبق فرکانسی یک سیگنال زمان پویایه

رابطه تحلیل (آنالیز)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = F^{-1}\{X(j\omega)\}$$

تبدیل فوریه معلوم، از روی ویژگی‌های فرکانسی

یک سیگنال زمان پویایه را بازبازی می‌کند. رابطه ترکیب (سنتر)

خواص تبدیل فوریه زمان پیوسته

۱. خطی بودن

If $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$ and $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)$, then

$$\Rightarrow F\left\{ \sum_{k=1}^N a_k x_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^N a_k F\{x_k(t)\}$$

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX(j\omega) + bY(j\omega).$$

Time Shifting

If $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, then

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(j\omega).$$

۲. انتقال زمانی

این اثبات به کار رابطه تبدیل فوریه معلوم شد.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad \rightarrow \quad x(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega.$$

↓

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \right) e^{j\omega t} d\omega.$$

$\rightarrow \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega).$

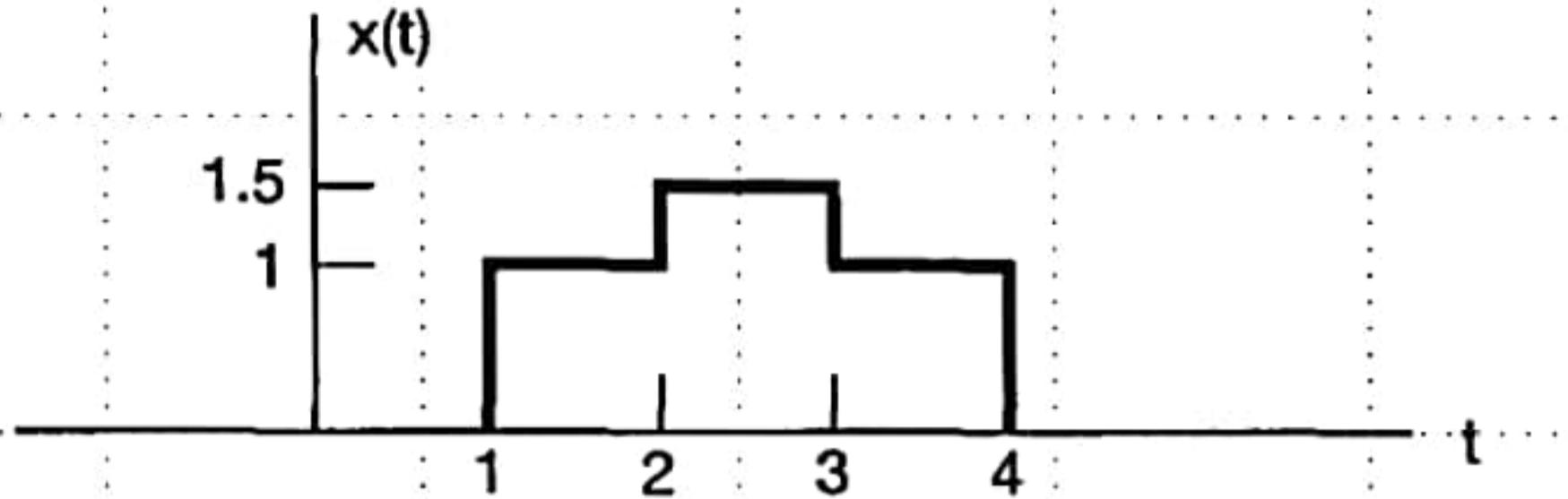
One consequence of the time-shift property is that a signal which is shifted in time does not have the *magnitude* of its Fourier transform altered. That is, if we express $X(j\omega)$ in polar form as

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)},$$

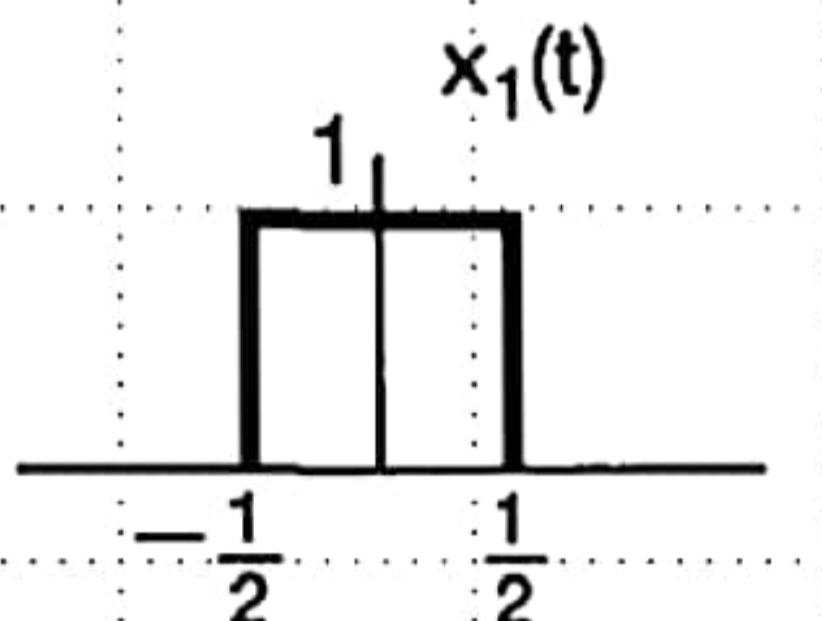
اسحال زمانی سرکی در انداره طیف فرکانسی
سینال ندارد و فقط فاز را تغییر می دهد.

then $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]}.$

مثال سیگنال پلکانی $x(t)$ در شکل رویه رود

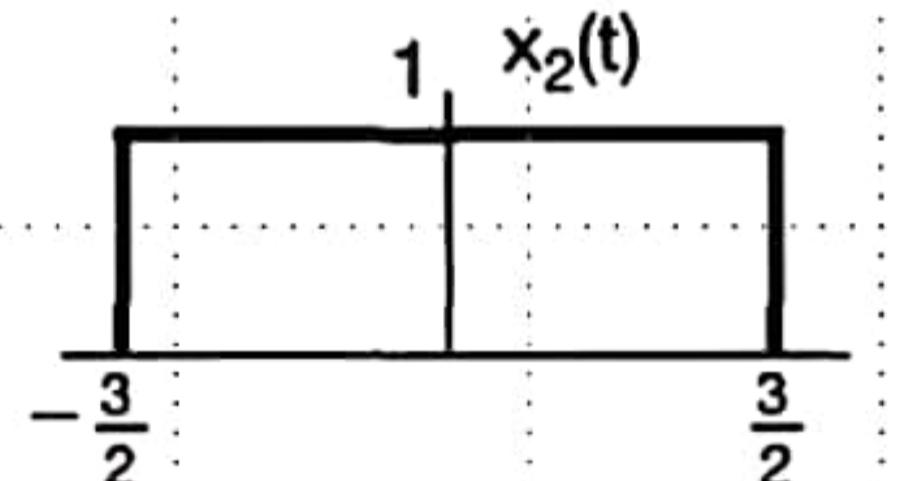


رایمی بوان مرکبی از انتقال مافه‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در نظر گرفت.



$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t - 2.5) + x_2(t - 2.5),$$

$$X_1(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} \quad \text{and} \quad X_2(j\omega) = \frac{2 \sin(3\omega/2)}{\omega}.$$



using the linearity and time-shift properties of the Fourier transform yields

$$X(j\omega) = e^{-j5\omega/2} \left\{ \frac{\sin(\omega/2) + 2 \sin(3\omega/2)}{\omega} \right\}.$$

Conjugation and Conjugate Symmetry

۳. مزدوج گیری و تقارن مزدوج

The conjugation property states that if $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, then

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\omega).$$

برهان:

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt.$$

Replacing ω by $-\omega$, we see that

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt. \quad \checkmark$$

The conjugation property allows us to show that if $x(t)$ is real, then $X(j\omega)$ has

conjugate symmetry; that is,

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad [x(t) \text{ real}].$$

تقارن همیشے

تابع فهم معارن هر میکروپرای بدل فوریه سینالهای حقیقی

$$x^*(t) = x_-(t) \Rightarrow X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

$$|X^*(j\omega)| = |X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$$

تابع اندازه زوج است.

$$\cancel{X^*(j\omega)} = -\cancel{X(j\omega)} = \cancel{X(-j\omega)}$$

فاز فرد .

$$\text{Re}\{X^*(j\omega)\} = \text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\}$$

بنج حقیقی زوج .

$$\text{Im}\{X^*(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(j\omega)\} = \text{Im}\{X(-j\omega)\}$$

بنج موقوعی فرد .

اگر $x(t)$ حقيقی وزوج باشد : $X(j\omega) = X^*(j\omega)$

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{j\omega \tilde{t}} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\
 &= X(j\omega)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow X(j\omega) \text{ حقيقی وزوج است.}$$

نکته: اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، $X(j\omega)$ معرفی و فرداست.

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} -x(-t) e^{j\omega \tilde{\tau}} dt \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\
 &= -X(j\omega)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega) = -X(j\omega) \Rightarrow$ $X(j\omega)$ معرفی و فرداست.

رساله $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ حقيقی و ببرهورت ترکیب $x(t)$ است.

$$F\{x(t)\} = F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\}$$

$$X(j\omega) = \operatorname{Re}\{X(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\}$$

جزء حقيقی $x_e(t) \Rightarrow F\{x_e(t)\} = \operatorname{Re}\{X(j\omega)\}$ است.

جزء فردی $x_o(t) \Rightarrow F\{x_o(t)\} = j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\}$ است.

یک سینال حقیقی و زوج است. $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0$ مُساله.

$$x(t) = e^{-\alpha|t|} = e^{at} u(-t) + e^{-at} u(t) = \Re \operatorname{Even}\{e^{-at} u(t)\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F\{e^{-\alpha|t|}\} &= \Re F\{\operatorname{Even}\{e^{-at} u(t)\}\} \\ &= \Re \operatorname{Re}\{F\{e^{-at} u(t)\}\} = \Re \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\} \\ &= \frac{\Re a}{\Re a + \omega} \quad \checkmark \end{aligned}$$

همان سیدای که قبل
بدهورت مستقیم هم بـ
درست آمد بود.

۴. مشتق گیری و انتگرال گیری

If $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$ then

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega).$$

ابات:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

If $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$ then

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega).$$

ابات این ورگی در آینده و به کم سایر خواص بدل فوریه ایحالم خواهد شد.

مثال

Let us determine the Fourier transform $X(j\omega)$ of the unit step $x(t) = u(t)$

$$\text{برایم: } \text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

رسائل: معرفی نابع علمی

$$u(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \text{Sgn}(t) \Rightarrow F\{u(t)\} = \frac{1}{\pi} F\{1\} + \frac{1}{\pi} F\{\text{Sgn}(t)\}$$

$$F\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \xrightarrow{\text{زیرا}} F^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t} d\omega = 1$$

$$z(t) = \text{Sgn}(t) \Rightarrow z'(t) = 2\delta(t) \Rightarrow F\{z'(t)\} = j\omega F\{z(t)\} = 2$$

$$\Rightarrow F\{\text{Sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\Rightarrow F\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

روکس (وم): استفاده از خاصیت انتگرال گیری

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Rightarrow F\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

که در آن:

$$X(\omega) = F\{\delta(t)\} = 1$$

$$\Rightarrow F\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

اُرسوی دلار با وجود بُر خاصیت سُتوگیری (اریم:

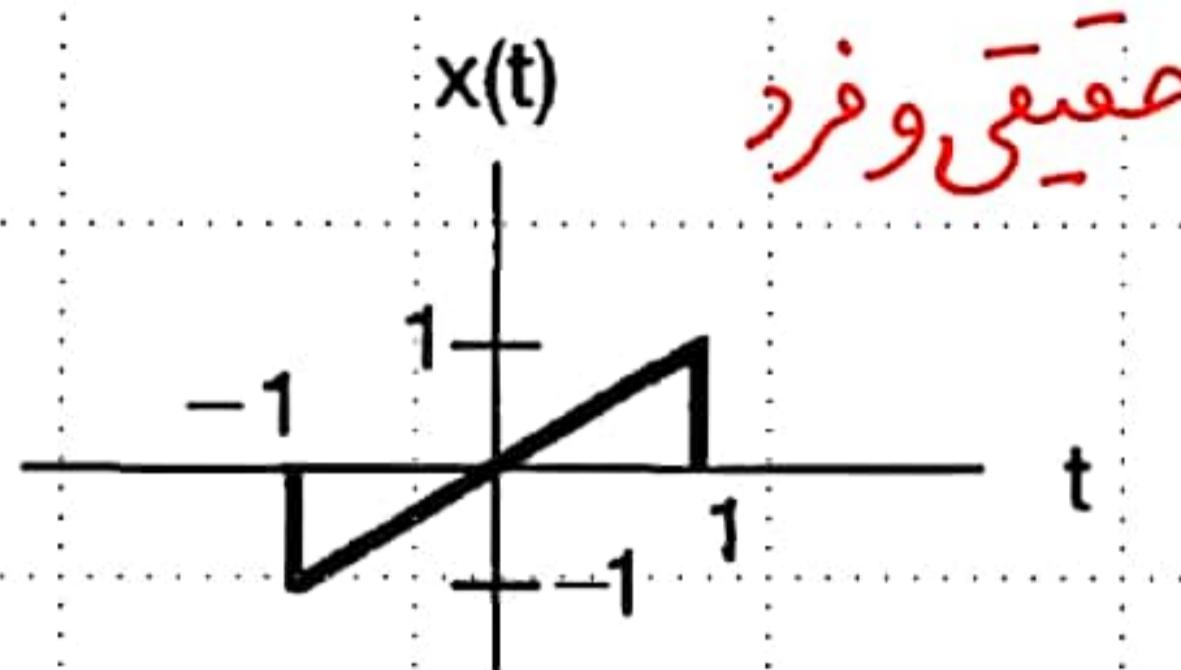
$$F\{\delta(t)\} = F\left\{\frac{d}{dt} u(t)\right\} = j\omega F\{u(t)\} = j\omega \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right)$$

$$= 1 + j\pi \omega \delta(\omega) = 1$$

0 ↗

مثال ٦

Suppose that we wish to calculate the Fourier transform $X(j\omega)$ for the signal $x(t)$



$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

→ $G(j\omega) = \left(\frac{2 \sin \omega}{\omega} \right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega}.$

Note that $G(0) = 0$. Using the integration property, we obtain

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega).$$

$$X(j\omega) = \frac{2 \sin \omega}{j\omega^2} - \frac{2 \cos \omega}{j\omega}.$$

With $G(0) = 0$ this becomes

موجي وفرز

Time and Frequency Scaling

٥. تغيير مقاييس زمانى و فركانسى

If $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$, then

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right),$$

where a is a nonzero real number.

ابدات :

This property follows directly from the definition of the Fourier transform—specifically,

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt.$$

Using the substitution $\tau = at$, we obtain

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

اگر $0 < a < 1$ (جمع سدگی یا انباط زمانی) $\Rightarrow \frac{1}{a} > 1$

اگر $a > 1$ (جمع سدگی یا انباط فرکانسی) $\Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < 1$

Also, letting $a = -1$, we see that

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega).$$

That is, reversing a signal in time also reverses its Fourier transform.

The inverse relationship between the time and frequency domains is of great importance in

a variety of signal and systems contexts, including filtering and filter design, and we will encounter

its consequences on numerous occasions in the remainder of the book.

۶. دوگانی

Duality

به جای نکار انتگار $X(\omega)$ انتگار $X(j\omega)$ استفاده می‌کنیم.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

با وجود هر سه هسته تفاوت های در رابطه فوق حی تو ان نشانه گرفت:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

$$\rightarrow 2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt \rightarrow F\{x(t)\} = 2\pi x(-\omega)$$

$$t \longleftrightarrow \omega$$

مثال

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega},$$

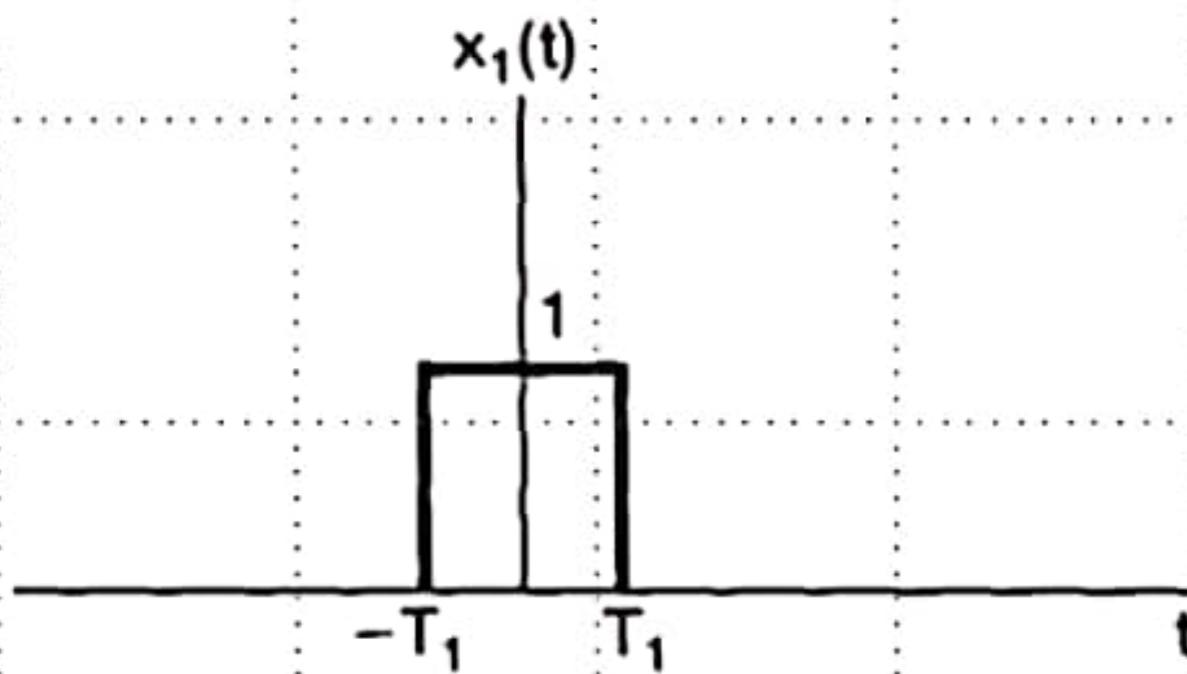
$\omega \rightarrow t$, $T_1 \rightarrow w$

$$x(t) = \frac{\pi \sin \omega t}{t} \Rightarrow F\{x(t)\} = \pi \times \begin{cases} 1, & |\omega| < w \\ 0, & |\omega| > w \end{cases}$$

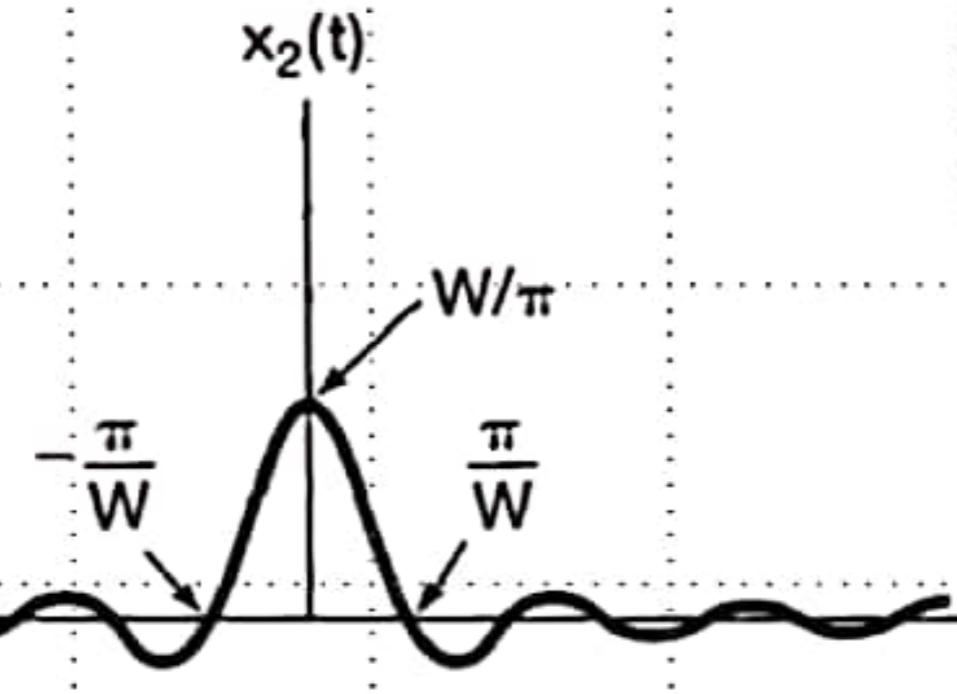
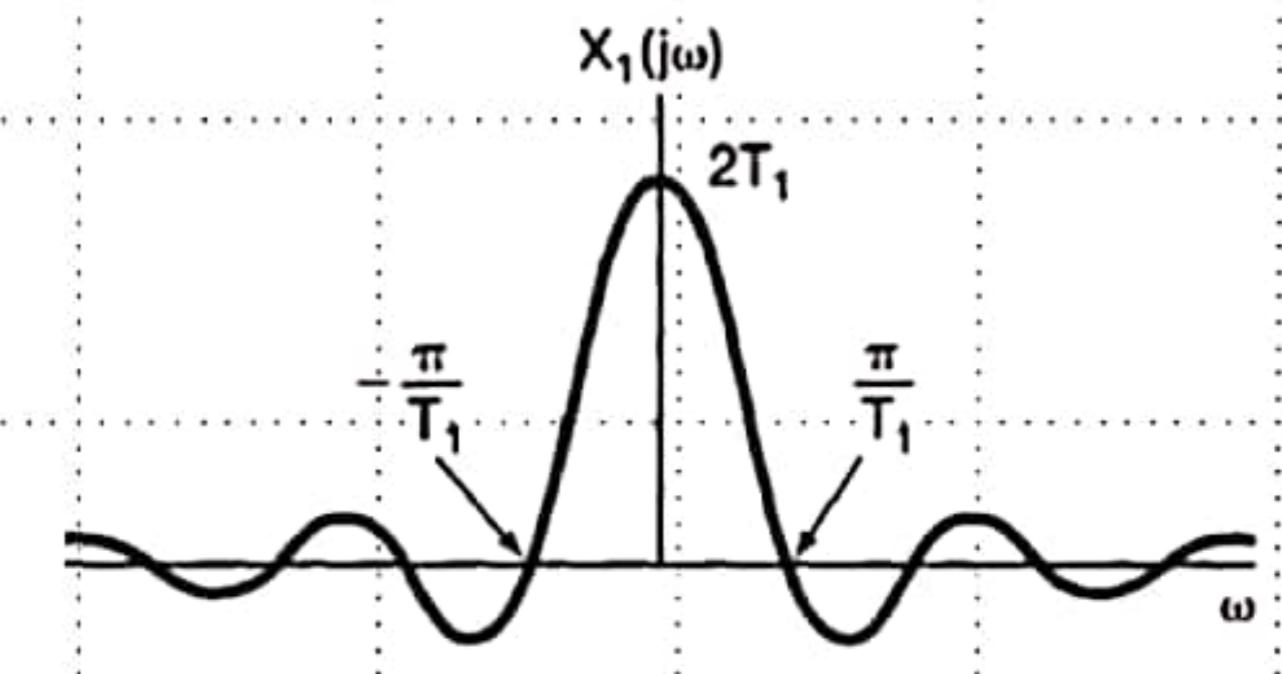
$$\Rightarrow F\left\{ \frac{\sin \omega t}{\pi t} \right\} = \begin{cases} 1, & |\omega| < w \\ 0, & |\omega| > w \end{cases}$$

همان نتیجہ قبلی:

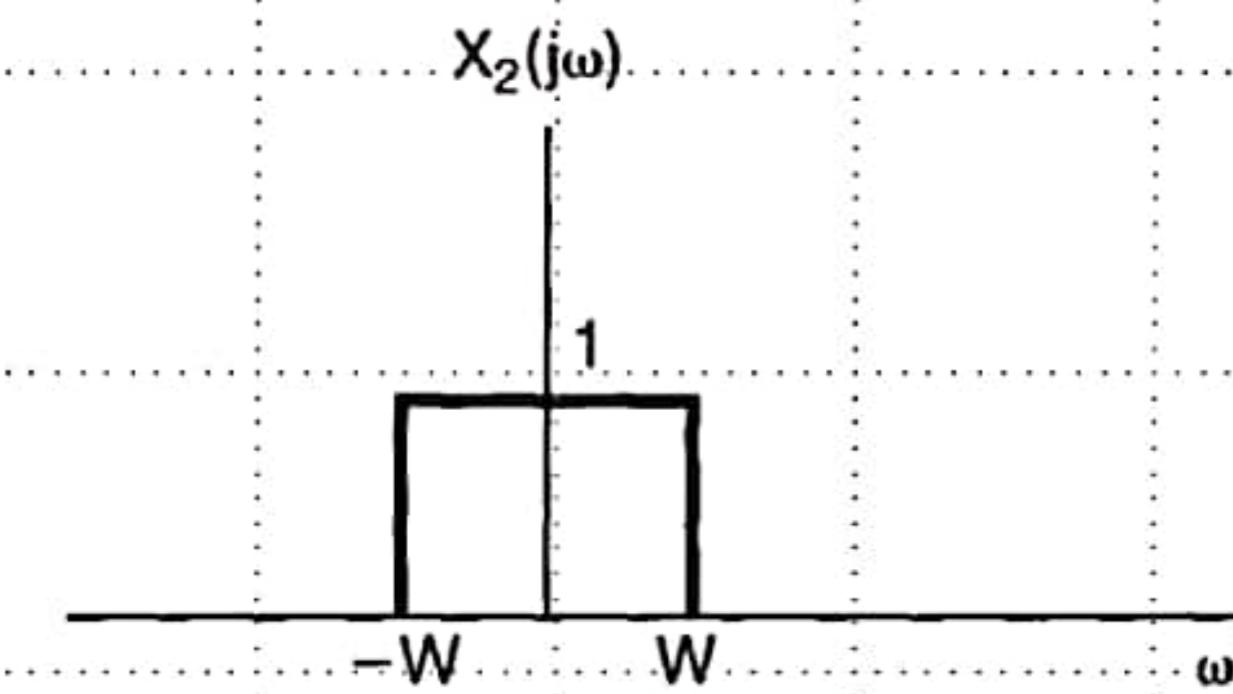
$$x_2(t) = \frac{\sin \omega t}{\pi t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < w \\ 0, & |\omega| > w \end{cases}$$



\mathcal{F}



\mathcal{F}



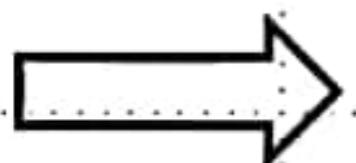
Let us consider using duality to find the Fourier transform $G(j\omega)$ of the signal

(حل)

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

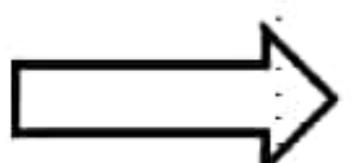
سیگنال حقيقی و زوج

Specifically, suppose we consider a signal $x(t)$ whose Fourier transform is $X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.



$$x(t) = e^{-|t|}$$

$$g(t) = X(t) \Rightarrow F\{g(t)\} = G(j\omega) = 2\pi x(-\omega)$$



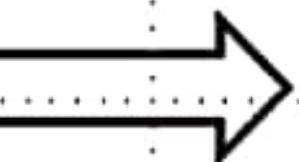
$$\mathcal{F}\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

طیف فرکانسی حقيقی و زوج

نکته: وجود برعکس از خواص تبدیل فوریه در حوزه فرکانس، که دوگان خواص قابلی در حوزه زمان داشتند. طبیعیست.

۷. مشتق‌گیری در حوزه فرکانس

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt.$$



$$-jtx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}.$$

۸. انتگرال‌گیری در حوزه فرکانس

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\omega} x(\eta)d\eta.$$

۹. انتقال در حوزه فرکانس

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega - \omega_0))$$

۱. رابطه پارسوال

If $x(t)$ and $X(j\omega)$ are a Fourier transform pair, then

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

محاسبہ انرژی کل یہ سینال بر کم رابطہ پارسوال و تعریف طبق معمولی انرژی

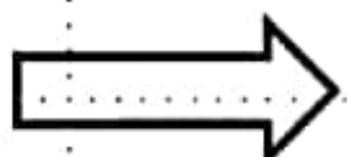
Parseval's relation says that this total energy may be determined either by computing the energy per unit time ($|x(t)|^2$) and integrating over all time or by computing the energy per unit frequency ($|X(j\omega)|^2/2\pi$) and integrating over all frequencies. For this reason, $|X(j\omega)|^2$ is often referred to as the *energy-density spectrum* of the signal $x(t)$.

ابات :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt.\end{aligned}$$

Reversing the order of integration gives

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt}_{X(j\omega)} \right] d\omega.$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$



For each of the Fourier transforms shown in this figure, we wish to evaluate the

(حل)

following time-domain expressions:

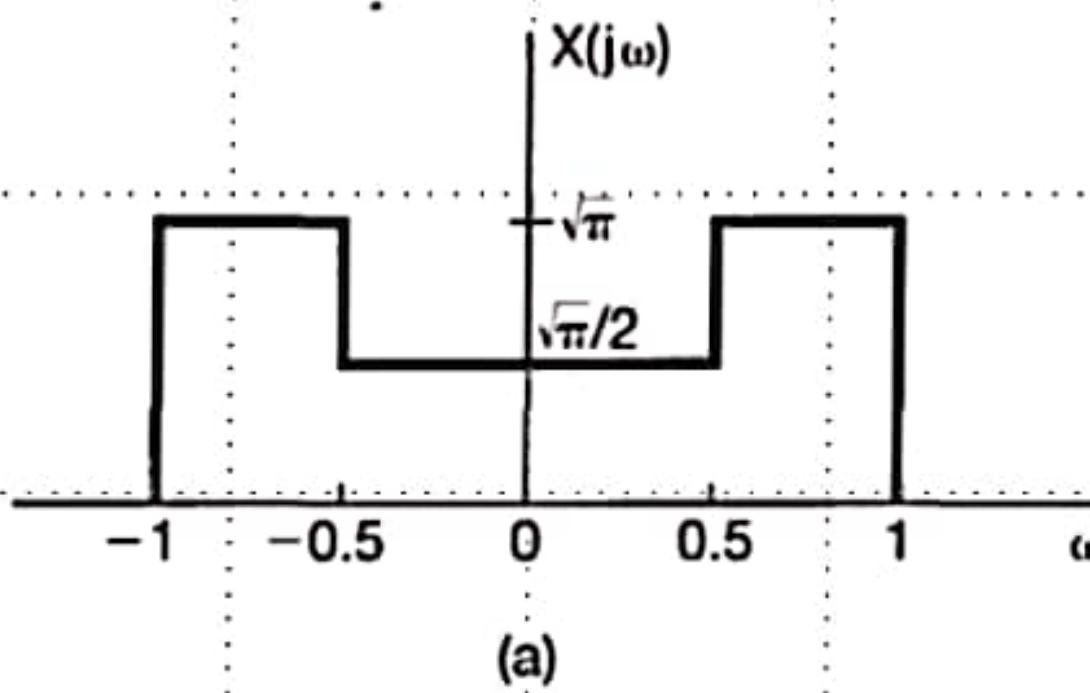
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$D = \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$$

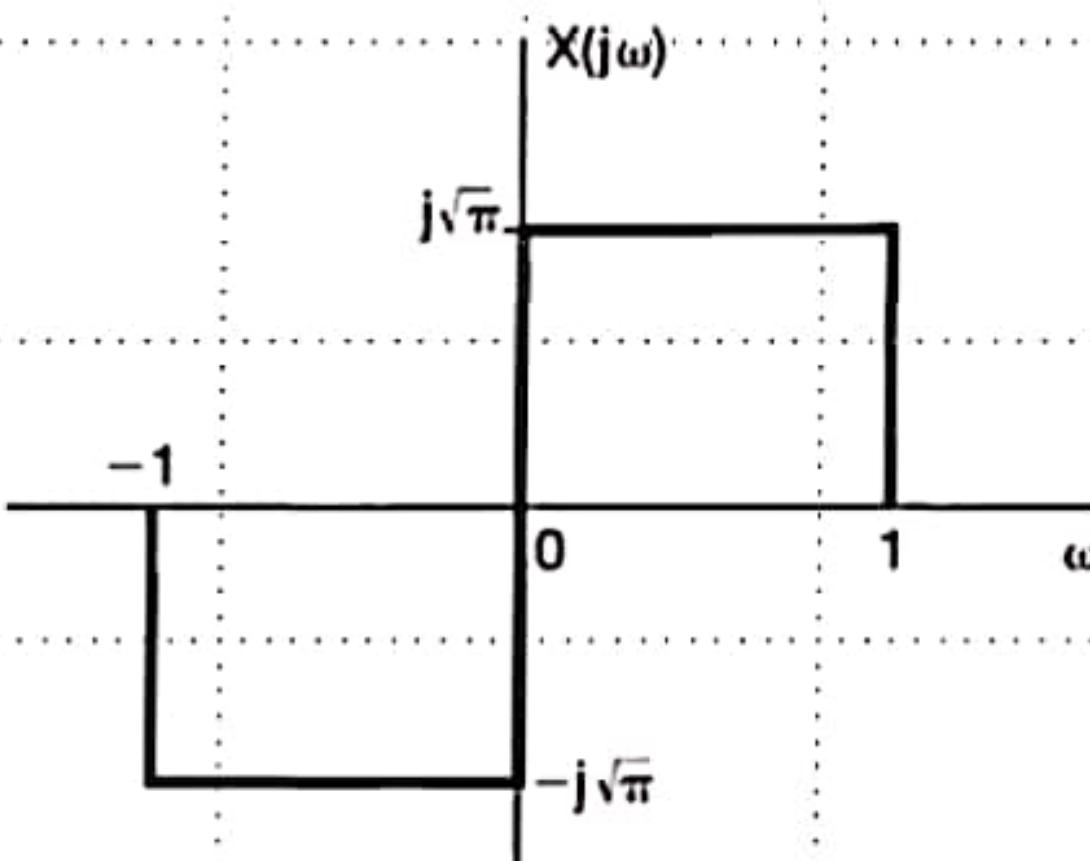
To evaluate E in the frequency domain,
we may use Parseval's relation. That is,

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

which evaluates to $\frac{5}{8}$ for Figure (a), and to 1 for Figure (b).



(a)



(b)

To evaluate D in the frequency domain, we first use the differentiation property to

observe that

$$g(t) = \frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(j\omega) = G(j\omega).$$

Noting that $D = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) d\omega$ we conclude: $D = \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) d\omega$

which evaluates to zero for Figure (a), and to $\frac{-1}{(2\sqrt{\pi})}$ for Figure (b). ✓

در ادامه به بررسی دو خاصیت ویره و بیارهم بدل فوریه که کاربردهای فراوانی دارد می‌پردازیم:

خاصیت کنولوشن (کاربرد در سیستم‌های LTI به ویره فیلترها)

خاصیت ضرب (ویلیان) (کاربرد در سیستم‌های LTI به ویره هموند بردارها)

THE CONVOLUTION PROPERTY

۱۱. خاصیت کانولوشن (در حوزه زمان)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad Y(j\omega) = X(j\omega).H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Interchanging the order of integration and noting that $x(\tau)$ does not depend on t , we have

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau.$$

By the time-shift property, the bracketed term is $e^{-j\omega\tau}H(j\omega)$.

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)d\tau = H(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

تجزی

27

The integral is $X(j\omega)$, and hence, $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$.

That is,

$$y(t) = h(t) * x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |X(j\omega)| \\ \angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega) \end{cases}$$

رابطہ اندازہ دا

فازها

را بارے فرط لئی سسٹم میں LTI

The frequency response of LTI systems

لوجیکلرڈ فیلٹرها برائیں رفتار تابع $H(j\omega)$ بدھوئی انجام جی سوو.

For example, in frequency-selective filtering we may want to have $H(j\omega) \approx 1$ over one

range of frequencies, so that the frequency components in this band experience little

or no attenuation or change due to the system, while over another range of frequencies

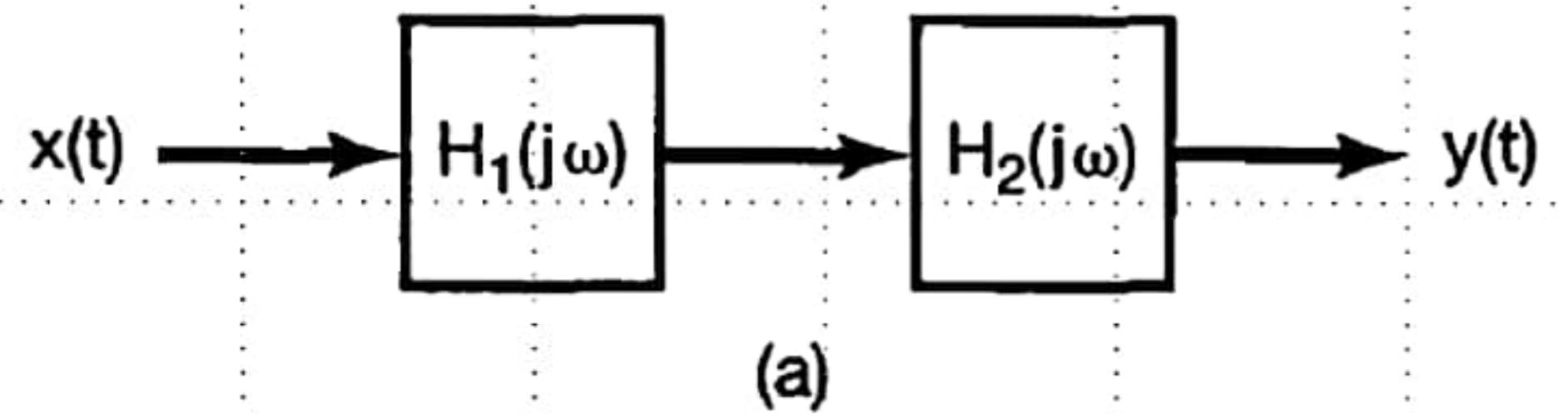
we may want to have $H(j\omega) \approx 0$, so that components in this range are eliminated or

significantly attenuated.

$$H(j\omega) \approx \begin{cases} 1 & , \text{ در باند عبور} \\ 0 & , \text{ در باند قطع} \end{cases}$$

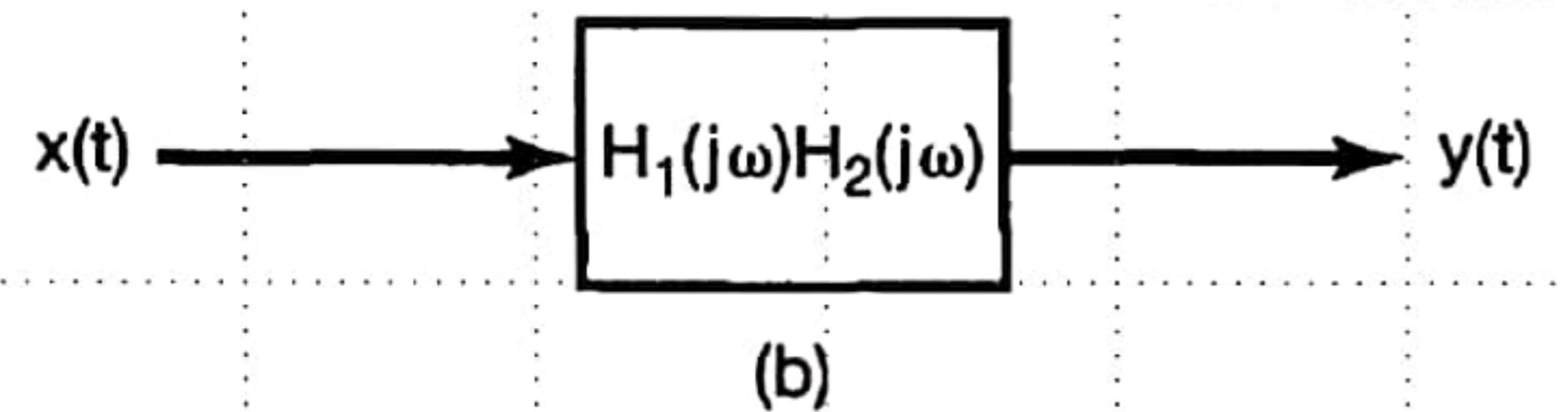
پاسخ فرکانسی اصل سیستم های

LTI



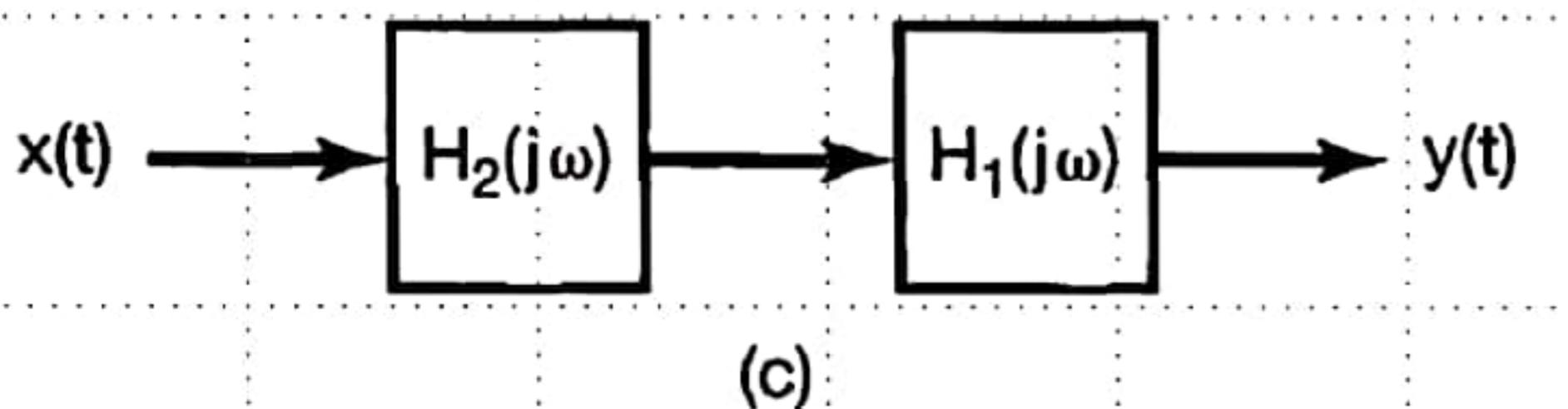
$$y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

$$Y(j\omega) = [X(j\omega) \cdot H_1(j\omega)] \cdot H_2(j\omega)$$



$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot [H_1(j\omega) H_2(j\omega)]$$



$$y(t) = [x(t) * h_2(t)] * h_1(t)$$

$$Y(j\omega) = [X(j\omega) \cdot H_2(j\omega)] \cdot H_1(j\omega)$$

ملته: باسخ فرکانسی ($H(j\omega)$) برای حلقه سیستم‌های LTI وجود دارد.

حلقه‌ای تبدیل فوریهٔ باسخ ضربهٔ ($h(t)$) است. در سیستم‌های LTI باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$
 یعنی
شرط مطلقاً انتگرال پذیر لورن ($h(t)$) است.

لکن از شرایط سه گانهٔ درست کلید است، برقراری باید.

در سیستم‌های عملی یا فیزیکی معمولاً دو شرط دیگر برقرار است. در نتیجه سیستم‌های LTI باشد، معمولاً باسخ فرکانسی دارند.

To illustrate the convolution property and its applications further, let us consider several examples.

$$h(t) = \delta(t - t_0). \rightarrow H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}.$$

$$\rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}X(j\omega).$$

$$y(t) = x(t - t_0), \quad |Y(j\omega)| = |X(j\omega)|, \quad \angle Y(j\omega) = -\omega t_0 + \angle X(j\omega)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \rightarrow Y(j\omega) = j\omega X(j\omega).$$

$$\rightarrow H(j\omega) = j\omega.$$

$$h(t) = \delta'(t), \quad |H(j\omega)| = \omega, \quad \angle H(j\omega) = 90^\circ$$

مثال ١) سیم تأخیر (هندرهزطانی)

مثال ٢) سیم مشوّل

مثال (۳) سیستم انتگرال کر

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * u(t)$$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega) \cdot F\{u(t)\} = X(j\omega) \cdot \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega) \end{aligned}$$

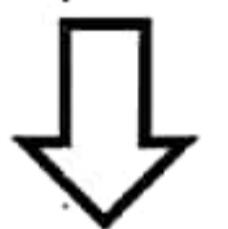
(خاصیت انتگرال کری در اینجا اثبات شد)

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

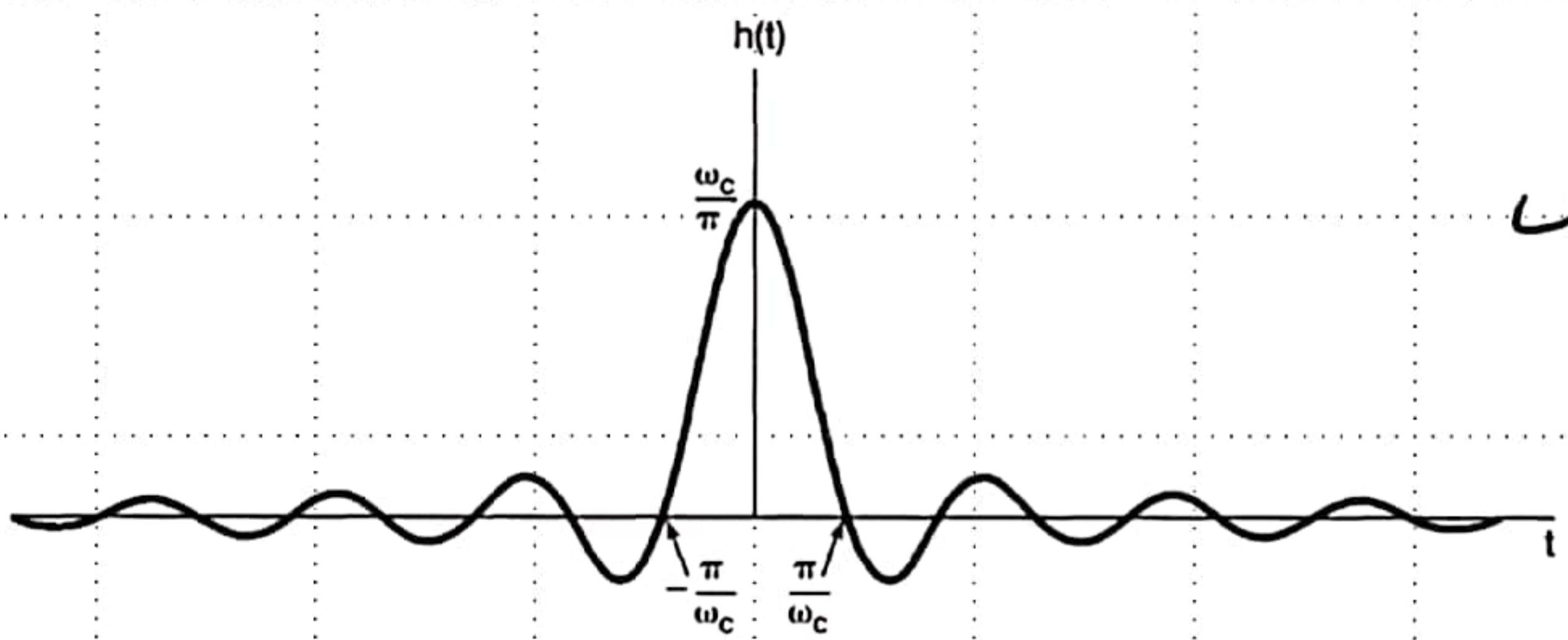
مثال ۲۴) فیلتر پاسیفیک ایدهآل

ideal lowpass filter

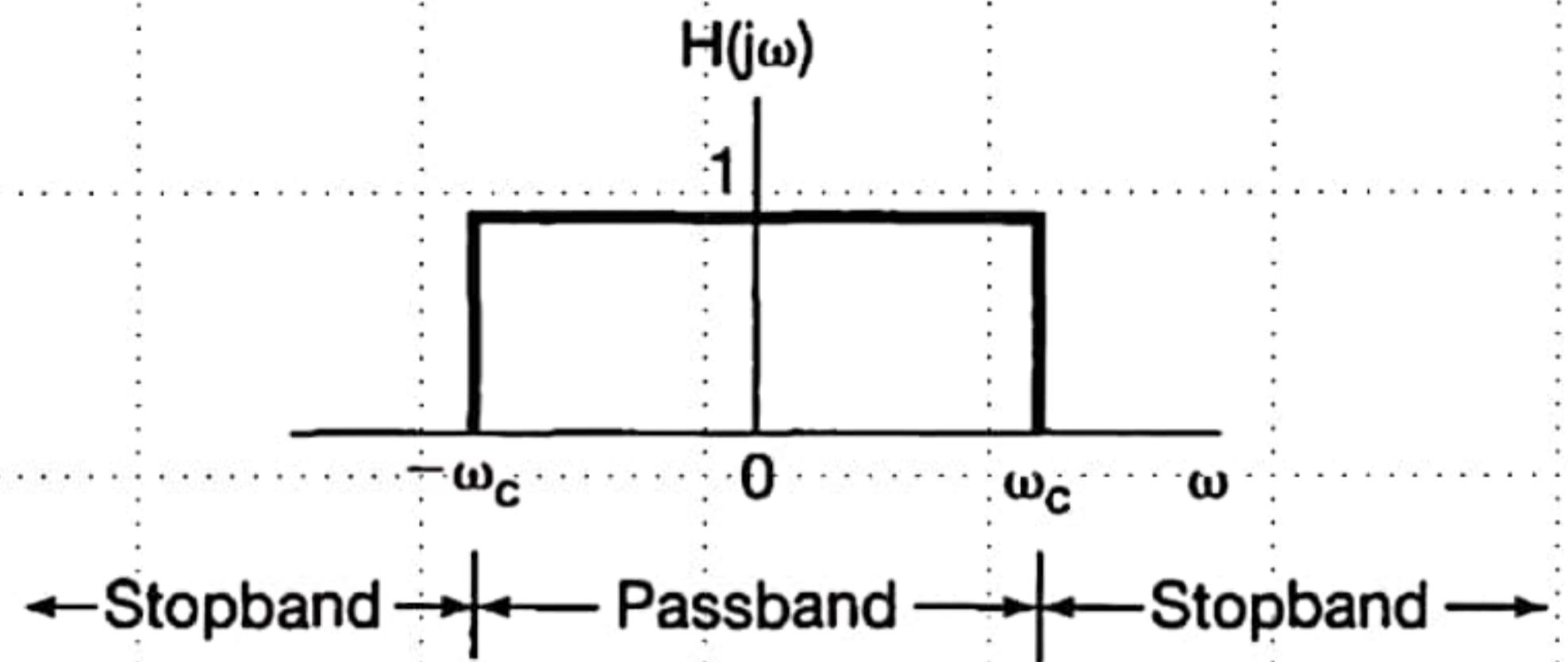
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t},$$



Impulse response of an ideal lowpass filter.



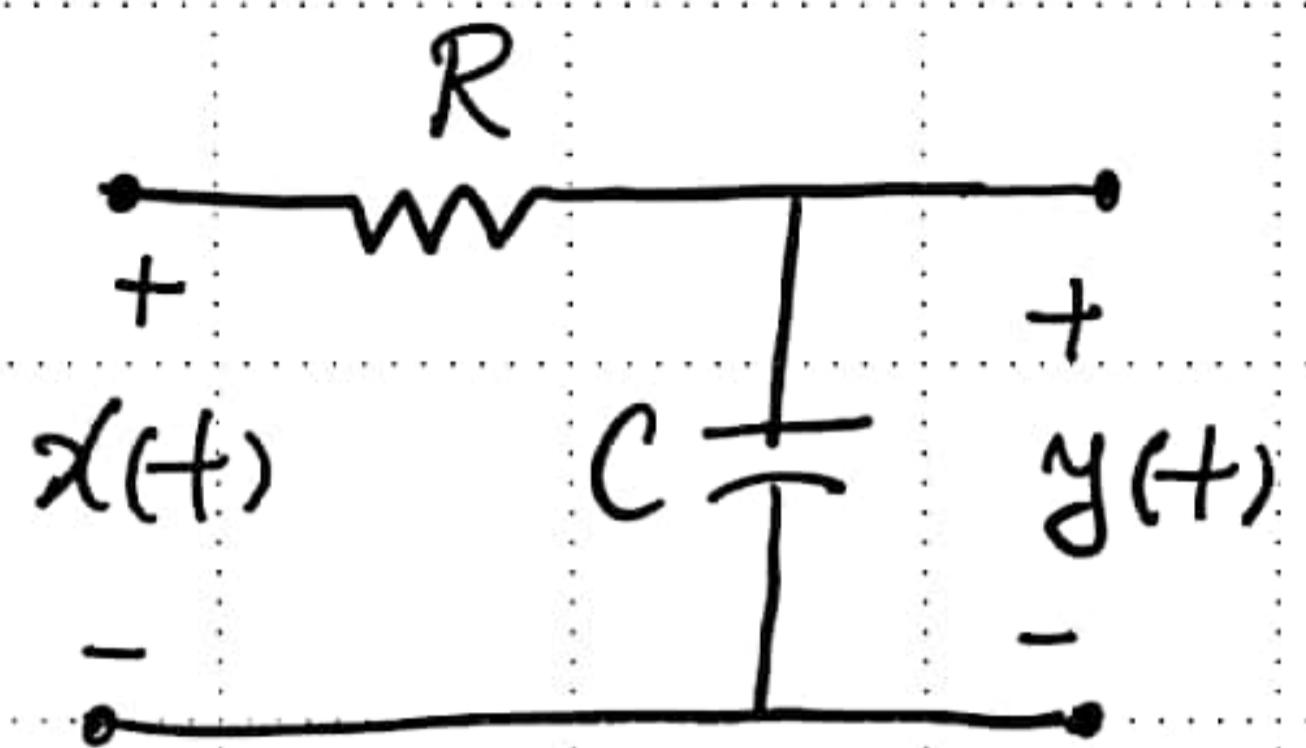
Frequency response of an ideal lowpass filter

نکته: عکس‌گرد ایدهآل فیلتر در حوزه فرکانس

سترنم عریقی بودن فیلتر است.

$$h(t) \neq 0, t < 0$$

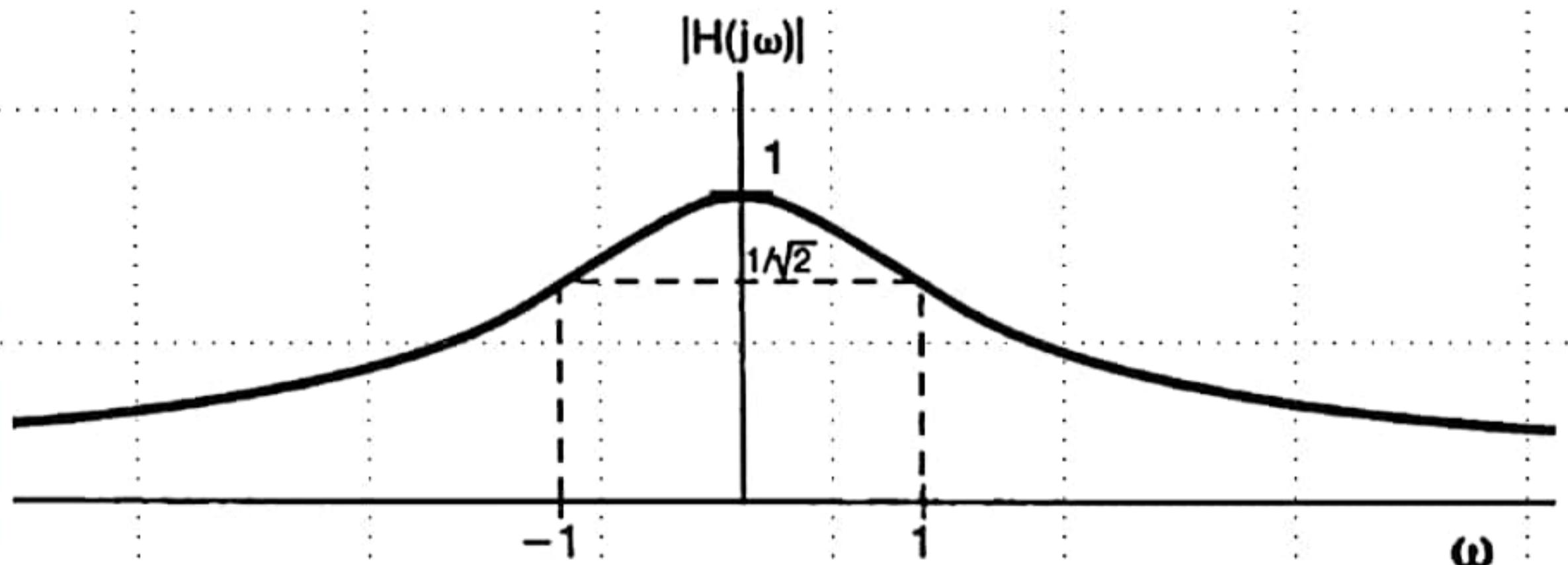
فیلر پاس لزر علی به کم مدار مرتبه اول



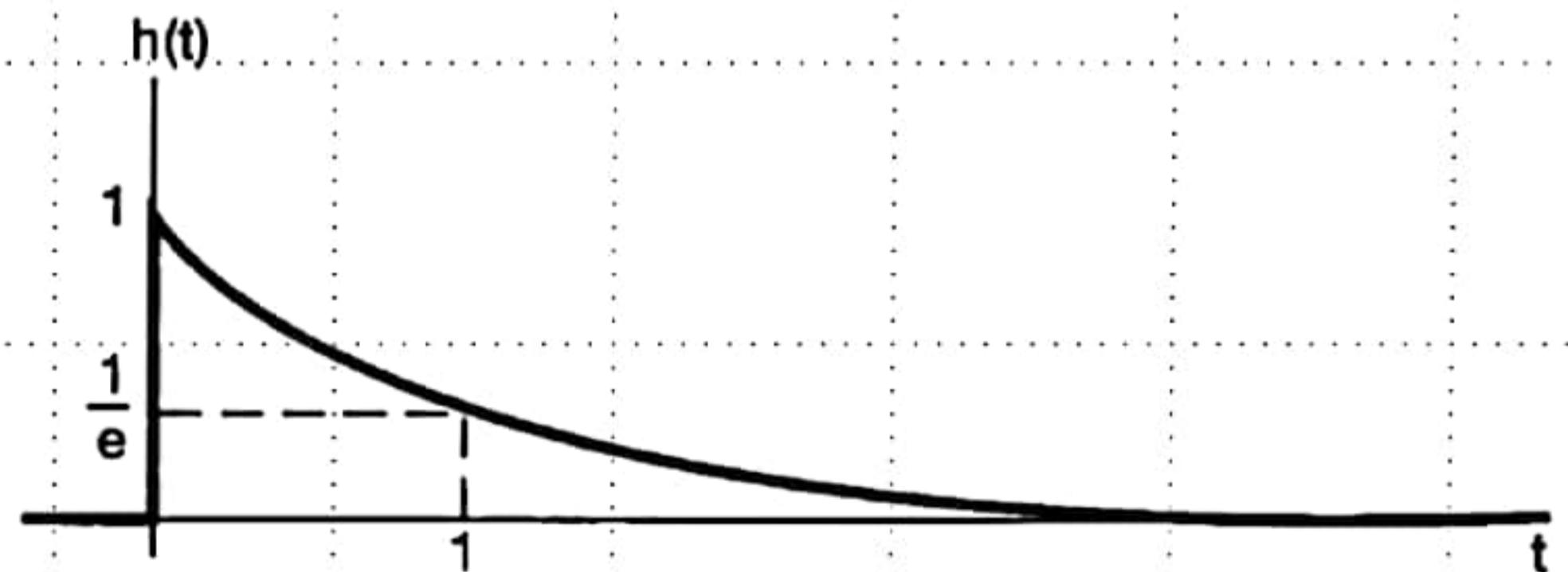
$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

بافرض $RC = 1 \text{ sec}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$



$$h(t) = e^{-t} u(t)$$



Consider the response of an LTI system with impulse response

(ω جل)

$$h(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0,$$

to the input signal

$$x(t) = e^{-bt} u(t), \quad b > 0.$$

Rather than computing $y(t) = x(t) * h(t)$ directly, let us transform the problem into the frequency domain.



$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad \text{and} \quad X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

Therefore,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)(b + j\omega)}.$$

assuming that $b \neq a$, the partial fraction expansion for $Y(j\omega)$ takes the form

$$Y(j\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{B}{b + j\omega},$$

$$A = \frac{1}{b - a} = -B,$$

and therefore,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{b - a} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right].$$



$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{b - a} [e^{-at} u(t) - e^{-bt} u(t)].$$

When $b = a$,



$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}.$$

$$\frac{1}{(a + j\omega)^2} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a + j\omega} \right],$$

$$\rightarrow y(t) = t e^{-at} u(t).$$

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega}$$

$$t e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a + j\omega} \right] = \frac{1}{(a + j\omega)^2},$$

Let us consider the problem of determining the response of an ideal lowpass filter to مُسَأَلَة (7)

an input signal $x(t)$ that has the form of a sinc function. That is,

$$x(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi t}.$$

Of course, the impulse response of the ideal lowpass filter is of a similar form, namely,

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}.$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega),$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_i \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

⇒ $Y(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases},$ where ω_0 is the smaller of the two numbers ω_i and $\omega_c.$



$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} & \text{if } \omega_c \leq \omega_i \\ \frac{\sin \omega_i t}{\pi t} & \text{if } \omega_i \leq \omega_c \end{cases}.$$

That is, depending upon which of ω_c and ω_i is smaller, the output is equal to either $x(t)$ or $h(t)$.





بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه هجدهم - بخش‌های 4.5 تا 4.7 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

THE MULTIPLICATION PROPERTY

۱۲. خاصیت ضرب یا مدولاسیون (در حوزه زمان)

The convolution property states that convolution in the *time* domain corresponds to multiplication in the *frequency* domain. Because of duality between the time and frequency domains, we would expect a dual property also to hold (i.e., that multiplication in the time domain corresponds to convolution in the frequency domain). Specifically,

$$r(t) = s(t)p(t) \longleftrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\theta)P(j(\omega - \theta))d\theta$$

Multiplication of one signal by another can be thought of as using one signal to scale

or *modulate* the amplitude of the other, and consequently, the multiplication of two

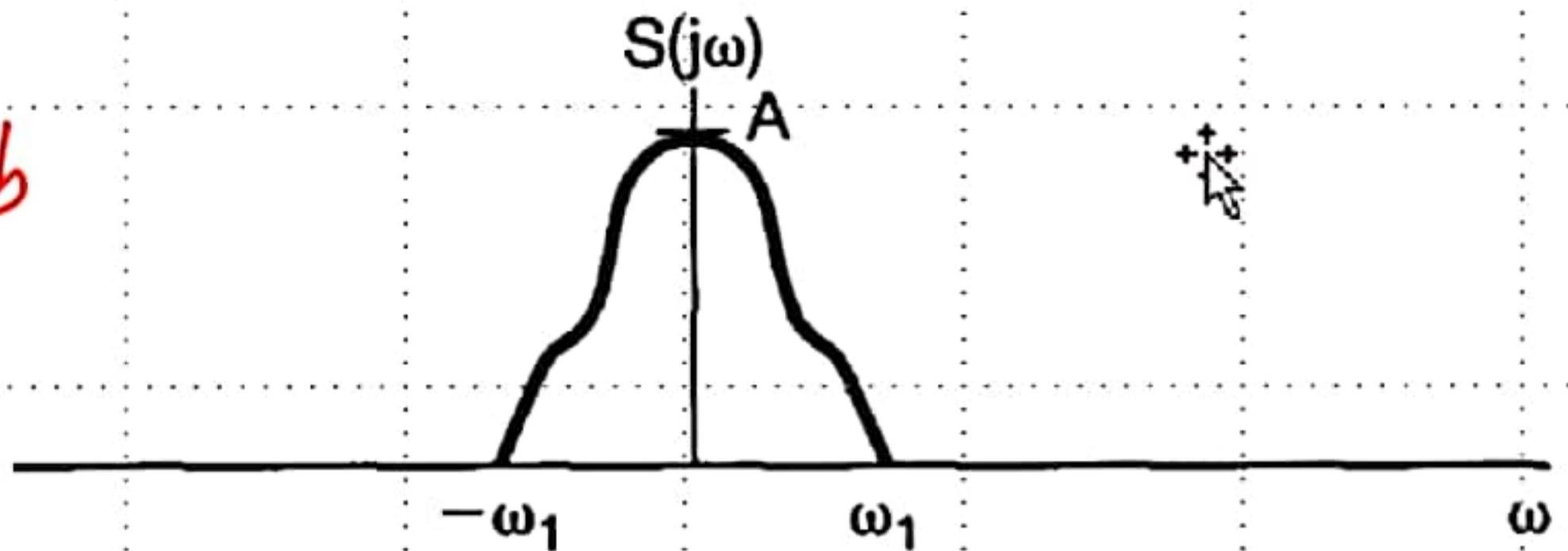
signals is often referred to as *amplitude modulation*. This property is sometimes

referred to as the *modulation property*.

مثال) تأثير مدوليون دامنة (رطيف سينال

Let $s(t)$ be a signal whose spectrum $S(j\omega)$ is

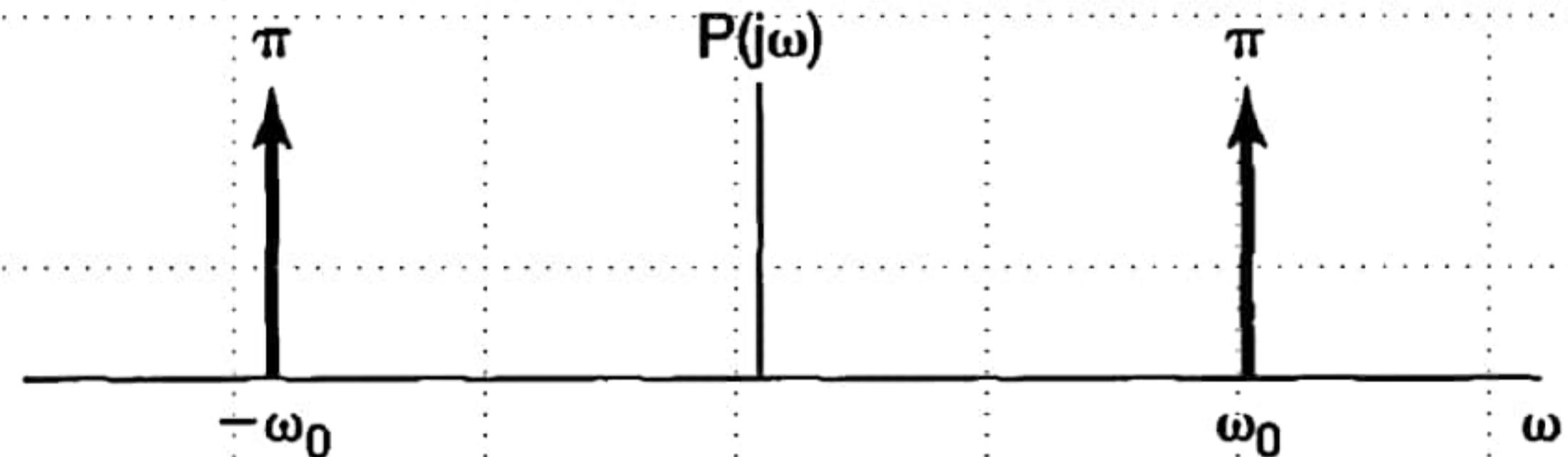
طیف سیگنال مدوله لنزه
(اصطناعی)



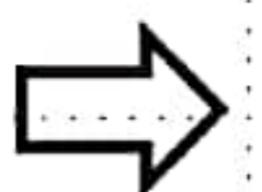
Also, consider the signal $p(t) = \cos \omega_0 t$. Then

طیف سیگنال حامل
(Carrier)

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0),$$

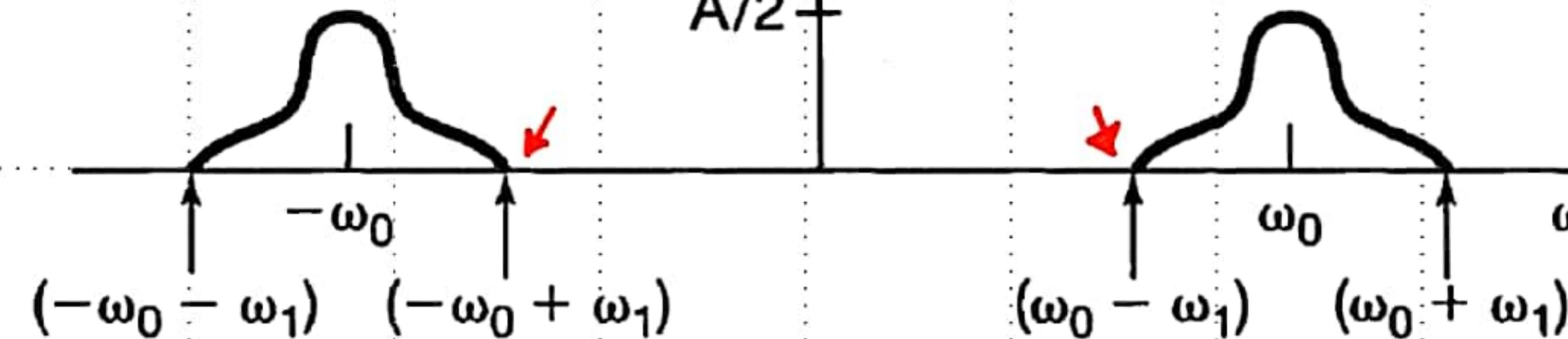


$$r(t) = s(t)p(t)$$



$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$

طیف سینال مدولسہ



اگر $\omega_0 < \omega_1$:

$$\omega_0 - \omega_1 < 0$$

$$-\omega_0 + \omega_1 > 0$$



و طرف طیف باعث
نداخته کنند.

نداخته کنند.

Here we have assumed that $\omega_0 > \omega_1$, so that the two nonzero portions of $R(j\omega)$ do not overlap.

Clearly, the spectrum of $r(t)$ consists of the sum of two shifted and scaled versions of $S(j\omega)$.

نتیہ: حتماً اطلاعات سینال اصلی $s(t)$ موجود و قابل بازیابی است.

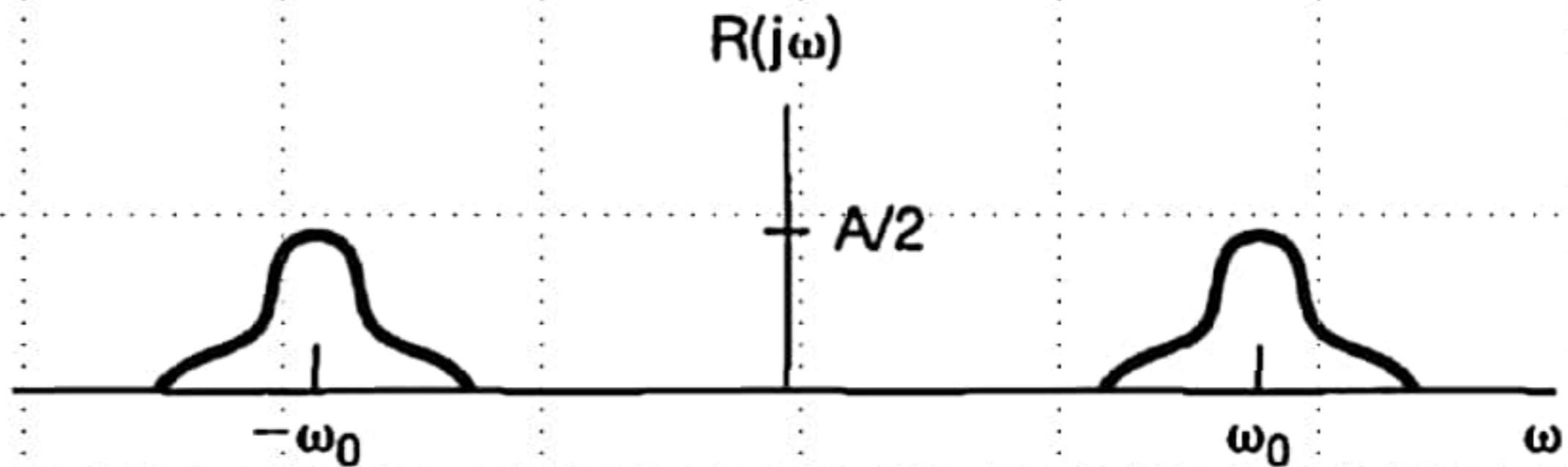
مثال) چگونگی بازیابی اطلاعات سینال اصلی از روش مدولاسیون (فرآیند (مدولاسیون)

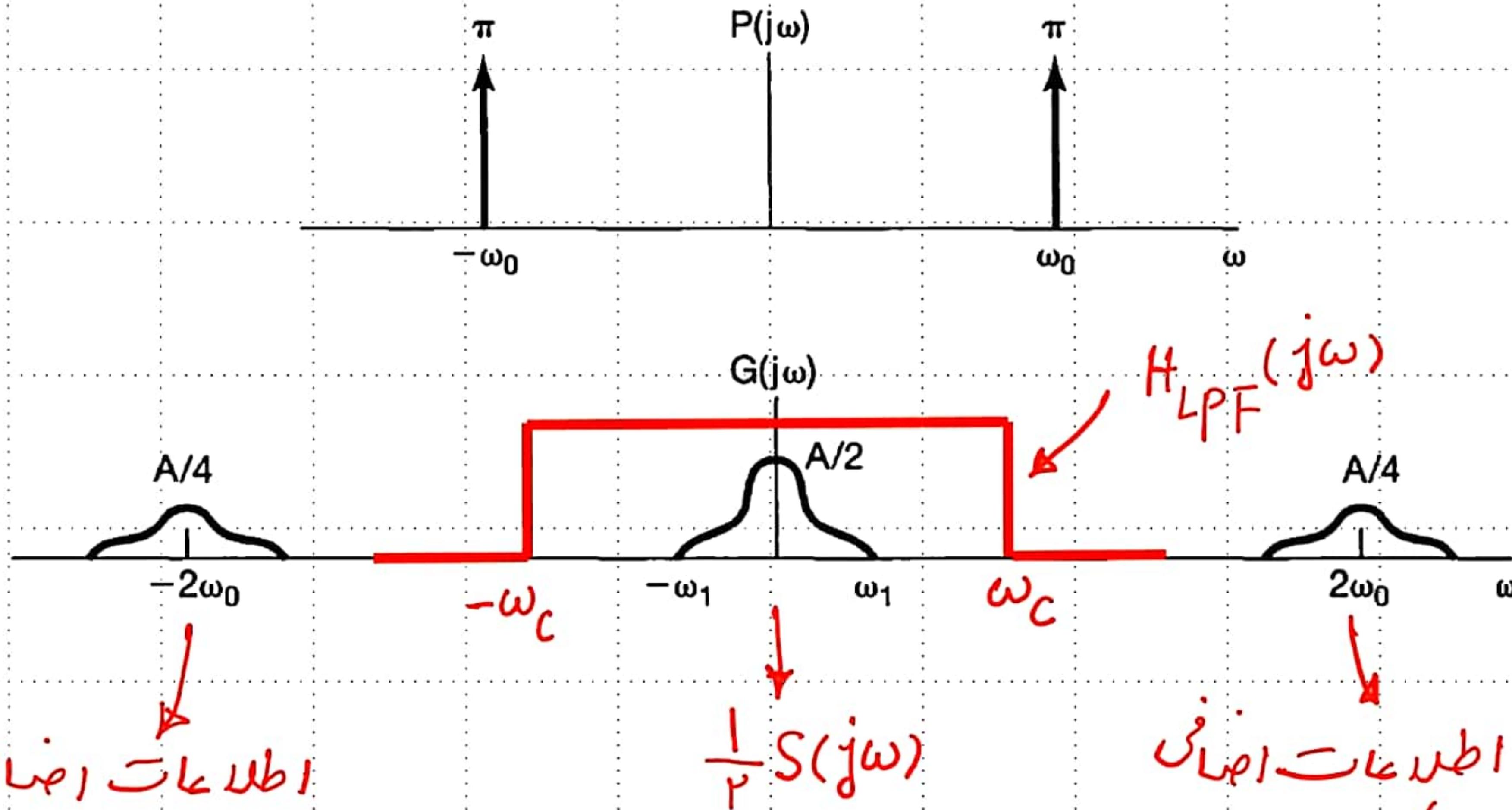
Let us now consider $r(t)$ as obtained in the previous example: $r(t) = s(t)p(t)$

and let $g(t) = r(t)p(t)$, where, again, $p(t) = \cos \omega_0 t$.

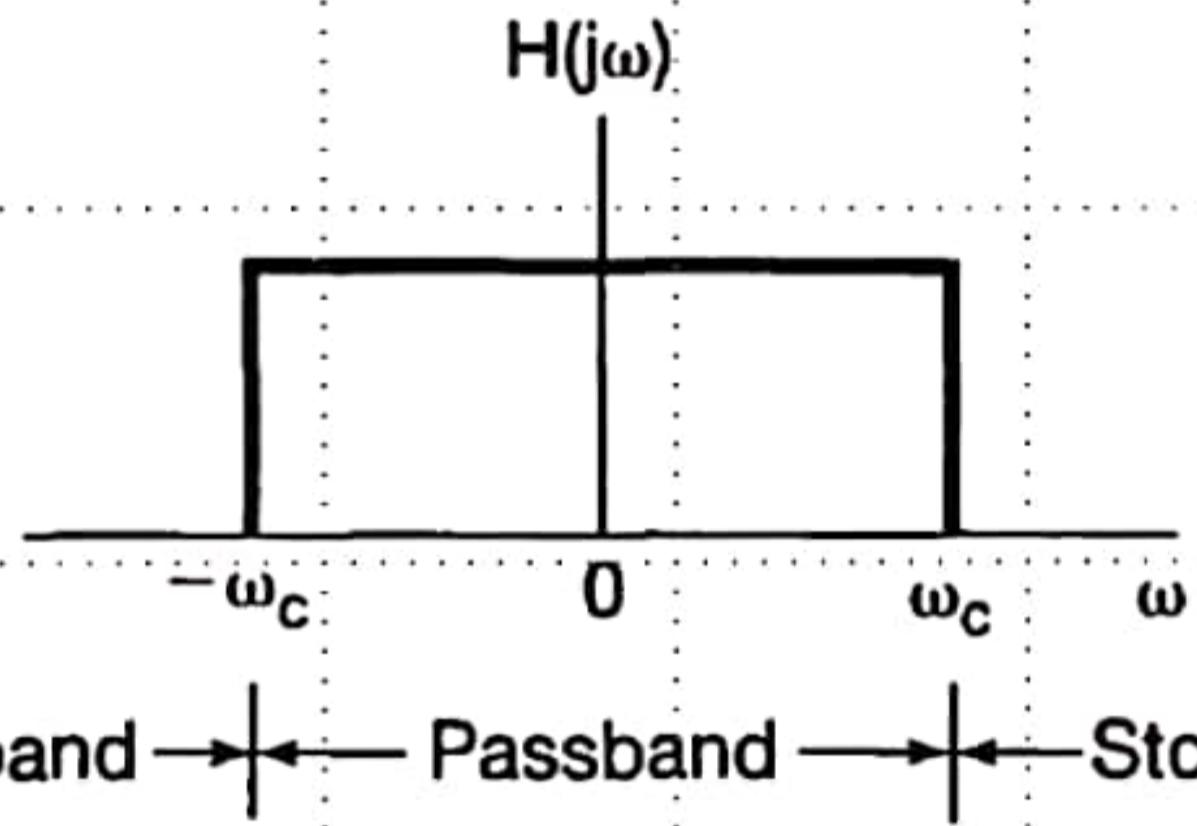
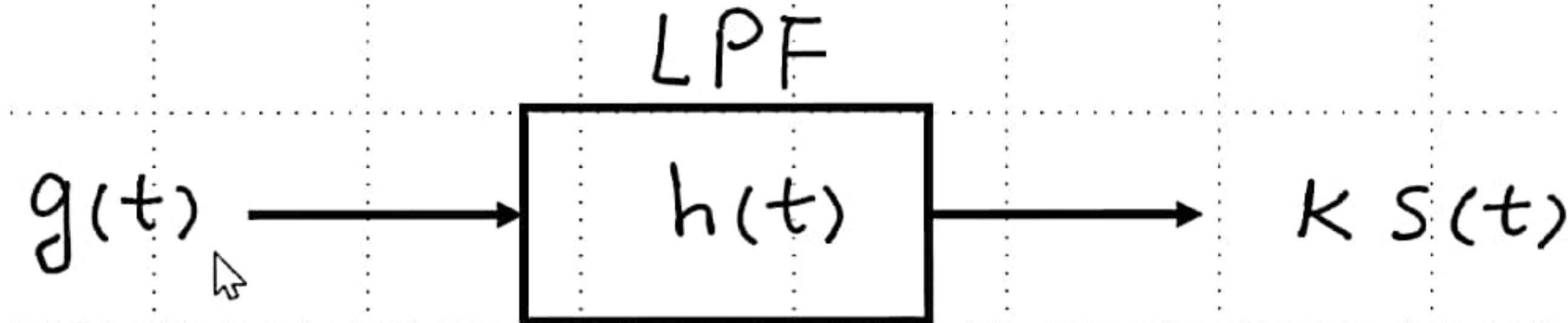
$$G(j\omega) = \frac{1}{P} R(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{P} R(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{P} R(j(\omega + \omega_0))$$

Then, $R(j\omega)$, $P(j\omega)$, and $G(j\omega)$ are as shown





با مجموع دارن $g(t)$ از یک فیلتر پاس لذر مناسب می توان $S(t)$ را بازبینی کرد.



$$\omega_1 < \omega_c < 2\omega_0$$

شرط لازم بازیابی :

$$G(j\omega) \cdot H_{LPF}(j\omega) = K S(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{\sin(t) \sin(t/2)}{\pi t^2}.$$

حاسنة تبدل فورييه سينال (مثال)

The key here is to recognize $x(t)$ as the product of two sinc functions:

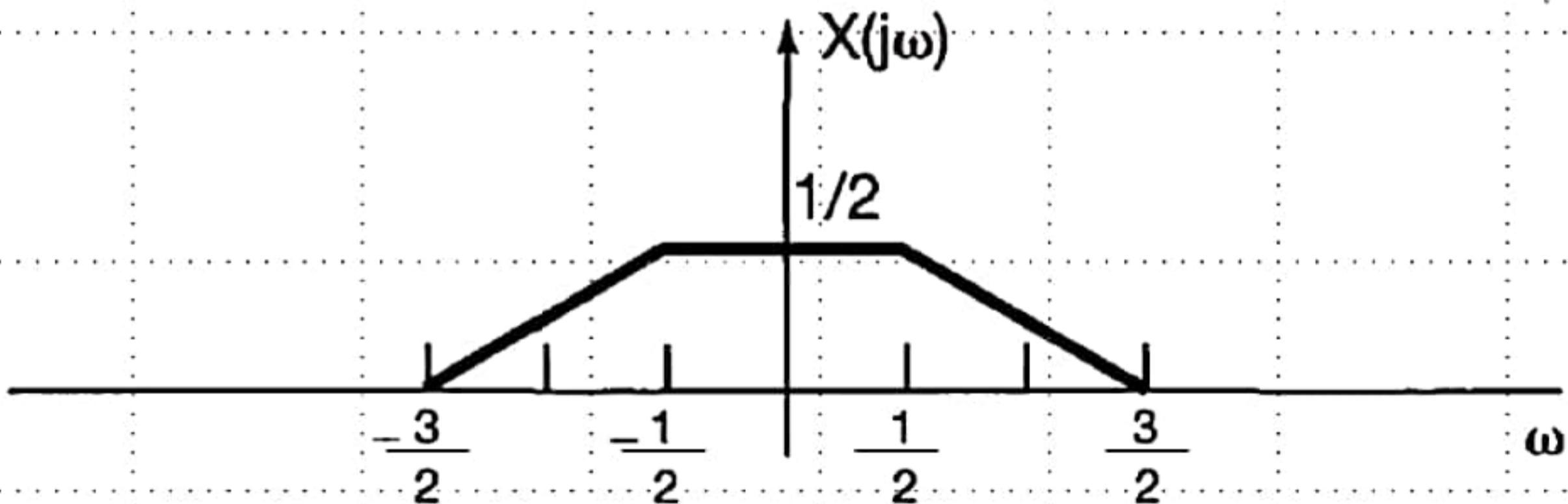
$$x(t) = \pi \left(\frac{\sin(t)}{\pi t} \right) \left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right).$$



$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(t)}{\pi t} \right\} * \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right\}.$$

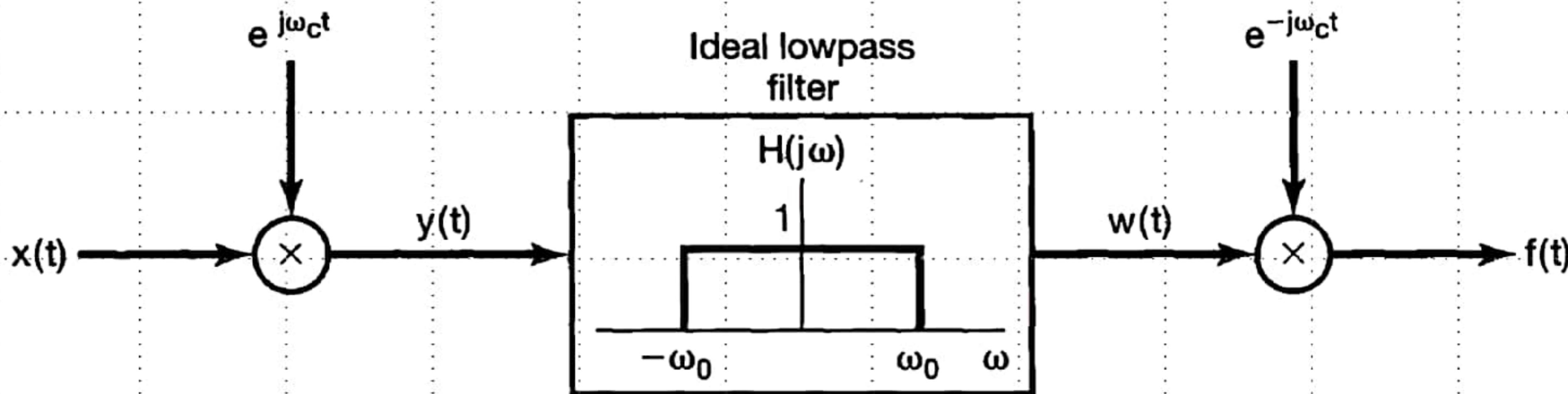
$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(t)}{\pi t} \right\} = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right\} = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{1}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



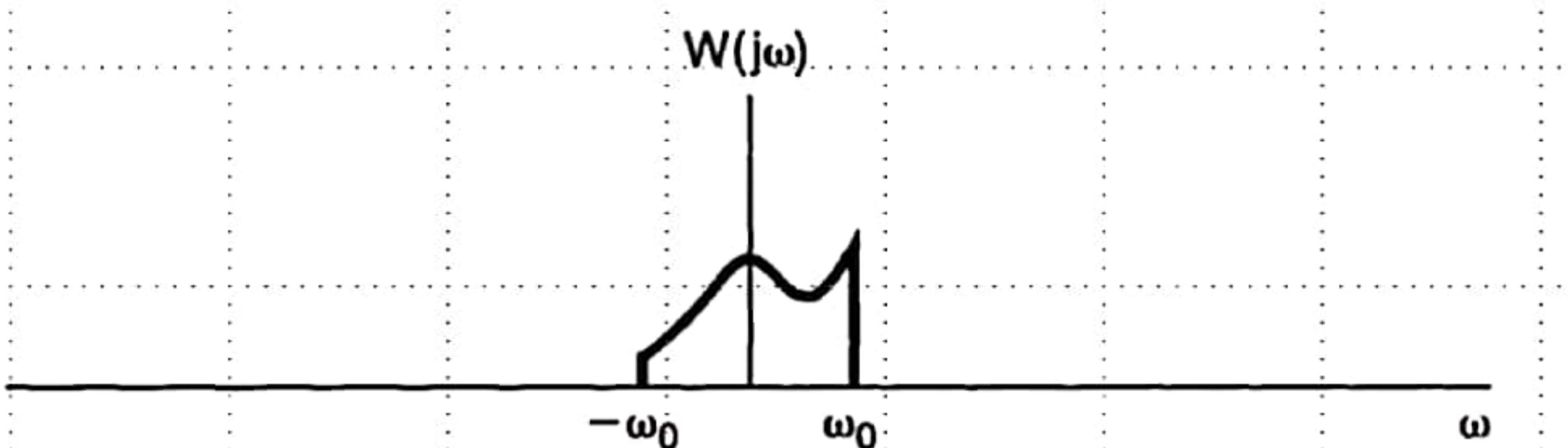
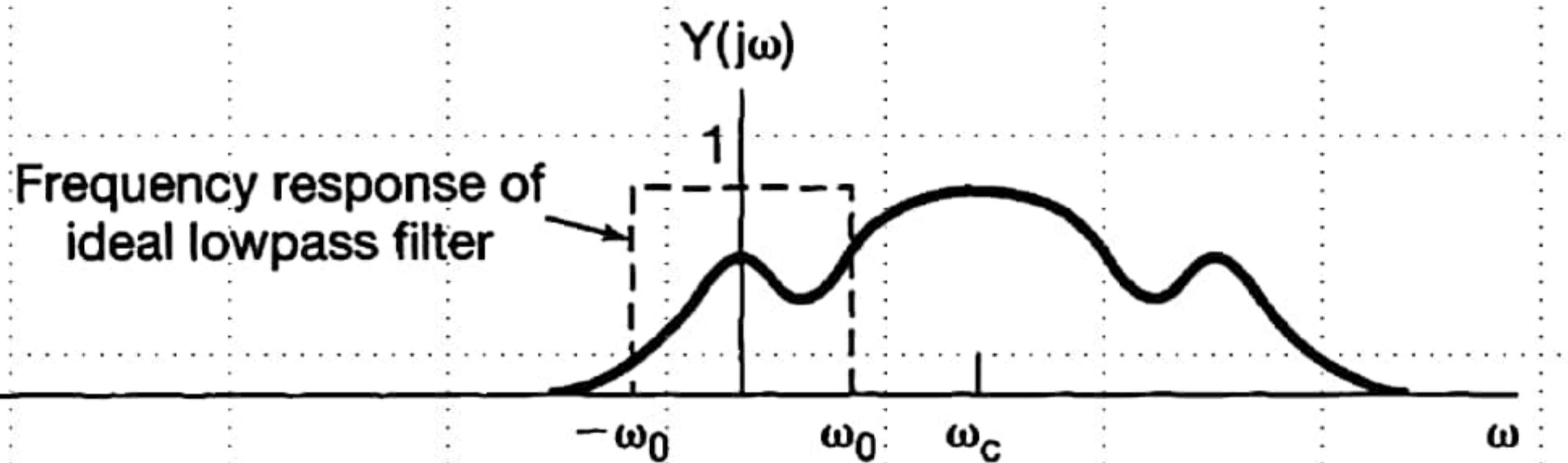
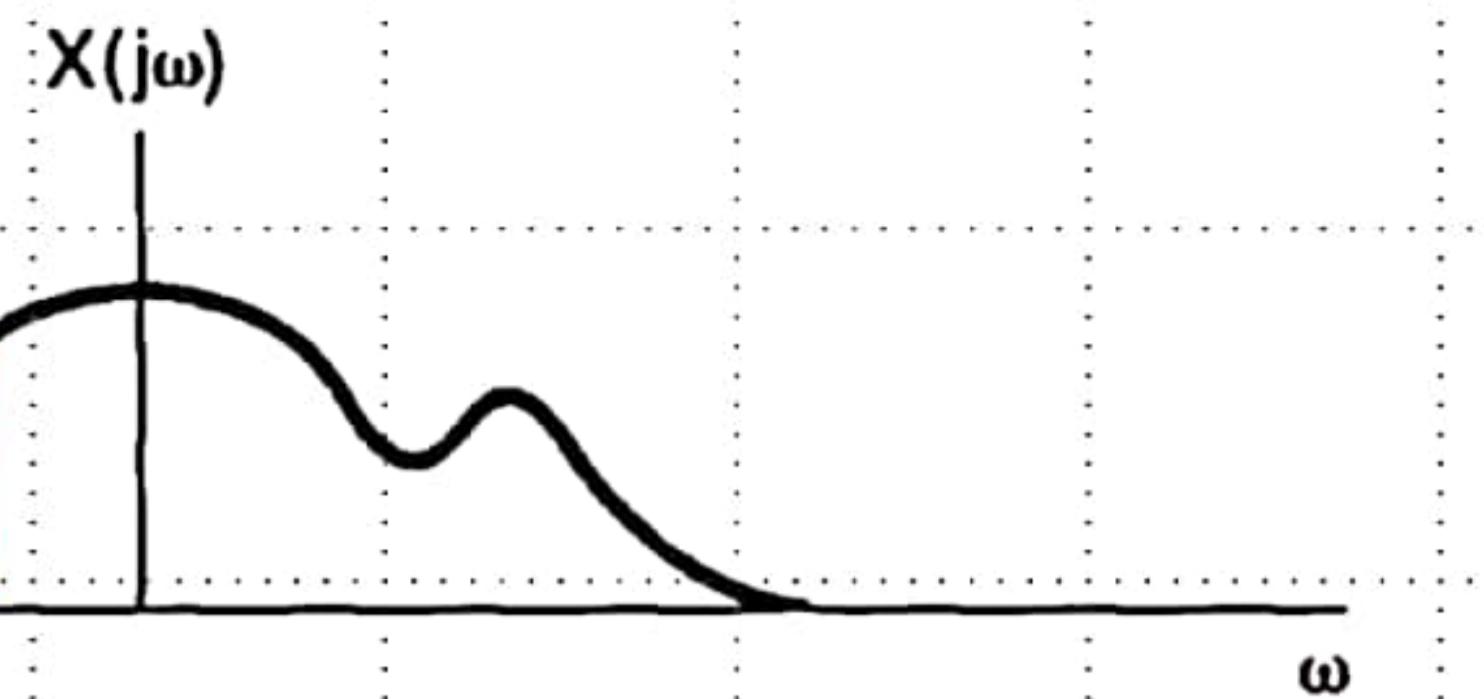
مثال) فیلتر میانگذر با فرکانس مرکزی قابل تنظیم

Another important application of the multiplication property is in the implementation of frequency-selective bandpass filters with tunable center frequencies that can be adjusted.



سیستم نزدیکی طرحی لرکم:

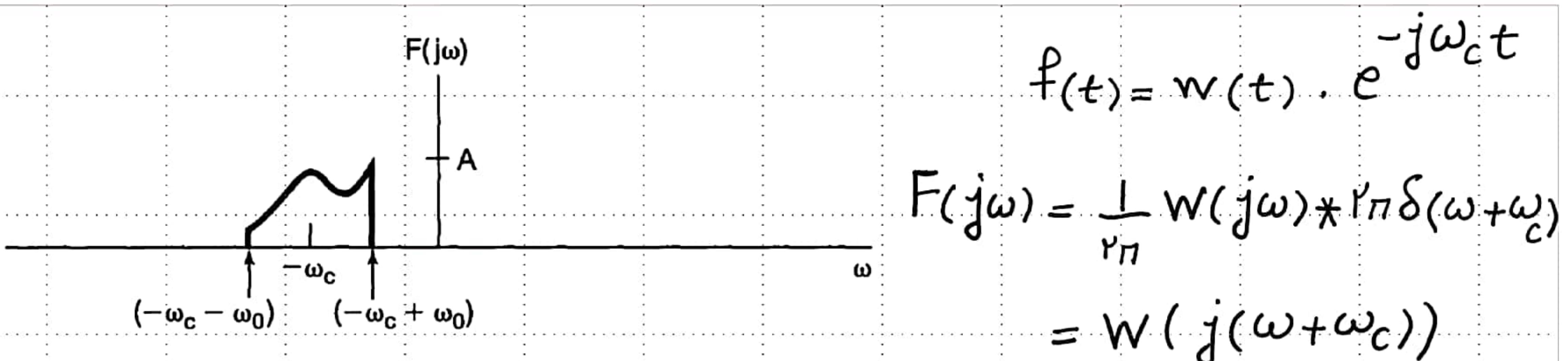
جُنْ مُحَرِّر نظر (از طبع
سیگنال ورودی)



$$y(t) = x(t) \cdot e^{j\omega_c t}$$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{1}{\pi} \delta(\omega - \omega_c) \\ &= X(j(\omega - \omega_c)) \end{aligned}$$

$$W(j\omega) = Y(j\omega) \cdot H_{LPF}(j\omega)$$



$$f(t) = w(t) \cdot e^{-j\omega_c t}$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} W(j\omega) * \pi \delta(\omega + \omega_c) \\ &= W(j(\omega + \omega_c)) \end{aligned}$$

بنابراین می‌توانیم $F(j\omega)$ را در فرکانس ω_c حول محور ω تحریف کرد که می‌توانیم این را با $w(\omega_c)$ نوشت.

the overall system is equivalent to an ideal bandpass filter with variable center frequency $-\omega_c$

and bandwidth $2\omega_0$.

جدول خواص تبدیل فوریه

TABLE 4.1 PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

| Section | Property | Aperiodic signal | Fourier transform |
|---------|----------------------------|------------------------|--|
| | | $x(t)$ $y(t)$ | $X(j\omega)$ $Y(j\omega)$ |
| 4.3.1 | Linearity | $ax(t) + by(t)$ | $aX(j\omega) + bY(j\omega)$ |
| 4.3.2 | Time Shifting | $x(t - t_0)$ | $e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ |
| 4.3.6 | Frequency Shifting | $e^{j\omega_0 t} x(t)$ | $X(j(\omega - \omega_0))$ |
| 4.3.3 | Conjugation | $x^*(t)$ | $X^*(-j\omega)$ |
| 4.3.5 | Time Reversal | $x(-t)$ | $X(-j\omega)$ |
| 4.3.5 | Time and Frequency Scaling | $x(at)$ | $\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$ |
| 4.4 | Convolution | $x(t) * y(t)$ | $X(j\omega)Y(j\omega)$ |
| 4.5 | Multiplication | $x(t)y(t)$ | $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)Y(j(\omega - \theta))d\theta$ |



| | | | |
|-------|---|--|--|
| 4.3.4 | Differentiation in Time | $\frac{d}{dt} x(t)$ | $j\omega X(j\omega)$ |
| 4.3.4 | Integration | $\int_{-\infty}^t x(t)dt$ | $\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$ |
| 4.3.6 | Differentiation in Frequency | $tx(t)$ | $j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$ |
| 4.3.3 | Conjugate Symmetry for Real Signals | $x(t)$ real | $\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$ |
| 4.3.3 | Symmetry for Real and Even Signals | $x(t)$ real and even | $X(j\omega)$ real and even |
| 4.3.3 | Symmetry for Real and Odd Signals | $x(t)$ real and odd | $X(j\omega)$ purely imaginary and odd |
| 4.3.3 | Even-Odd Decomposition for Real Signals | $x_e(t) = \Re\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \Im\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] | $\Re\{X(j\omega)\}$ $j\Im\{X(j\omega)\}$ |

4.3.7

Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

جدول زوج تبدیل فوریه سیگنال‌های مهم

TABLE 4.2 BASIC FOURIER TRANSFORM PAIRS

| Signal | Fourier transform | Fourier series coefficients (if periodic) |
|---|---|--|
| $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ | $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$ | a_k |
| $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi \delta(\omega - \omega_0)$ | $a_1 = 1$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$ |
| $\cos \omega_0 t$ | $\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ | $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$ |
| $\sin \omega_0 t$ | $\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$ | $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$ |

$$x(t) = 1$$

$$2\pi \delta(\omega)$$

$$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$$

(this is the Fourier series representation for
any choice of $T > 0$)

Periodic square wave

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \leq \frac{T}{2} \end{cases} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

and

$$x(t + T) = x(t)$$

$$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \text{ for all } k$$

$$x(t) \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$\frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$$

—

$$\frac{\sin Wt}{\pi t}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

—

$$\delta(t)$$

$$1$$

$$u(t)$$

$$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$\delta(t - t_0)$$

$$e^{-j\omega t_0}$$

$$e^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$$

$$\frac{1}{a + j\omega}$$

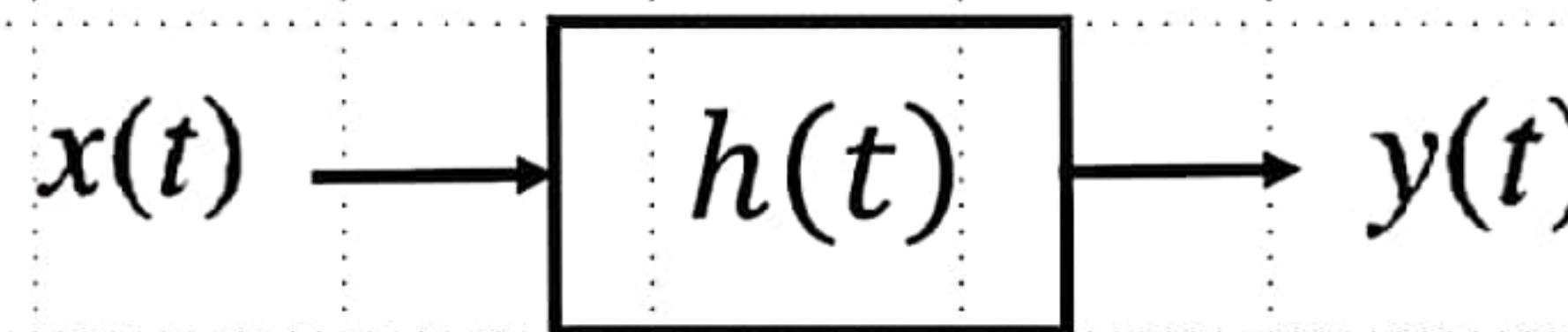
$$te^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$$

$$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \\ \operatorname{Re}\{a\} > 0$$

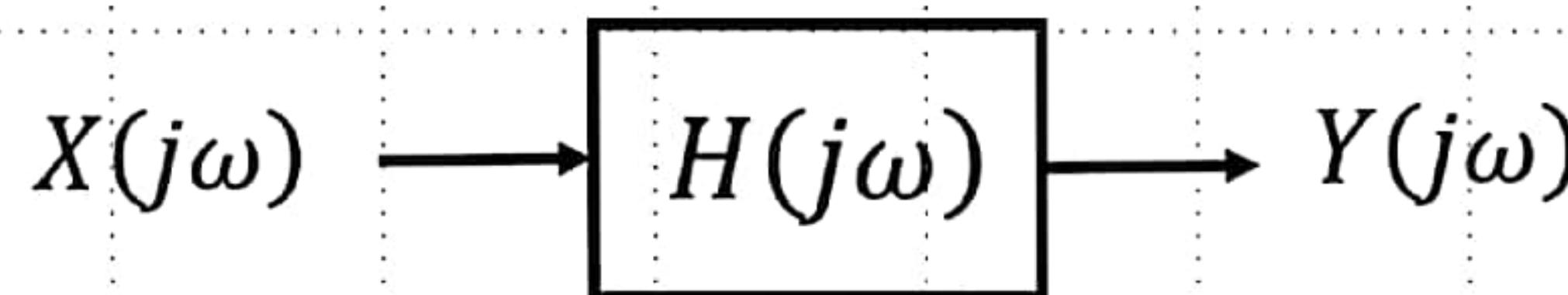
$$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

پاسخ فرکانسی سیستم‌های LTI توصیف شده توسط معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت (LCCDE)



$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

*Nth-order
differential equation*

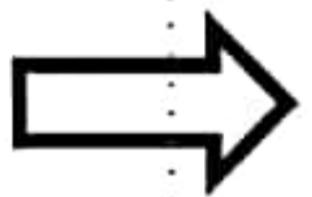


$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega),$$

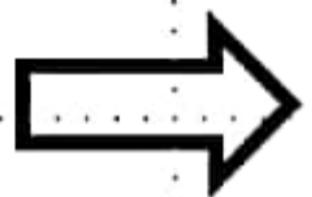
or equivalently,

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)},$$

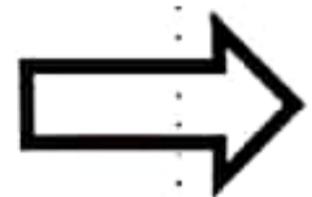
$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}.$$



$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{F} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\},$$



$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega),$$



$$Y(j\omega) \left[\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] = X(j\omega) \left[\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \right],$$



$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}.$$

rational function

Consider a stable LTI system characterized by the differential equation

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \quad \text{with } a > 0.$$

the frequency response is

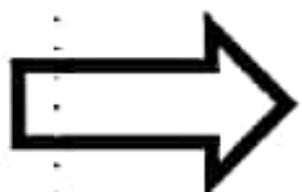
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}.$$

The impulse response of the system is then recognized as $h(t) = e^{-at}u(t)$.

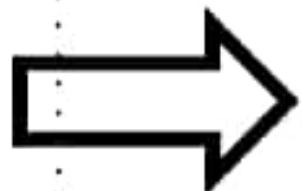
Consider a stable LTI system characterized by the differential equation

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}.$$



$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}.$$



$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t).$$

پاسخ این سیستم به ورودی ρ تابع $x(t) = e^{-t}u(t)$

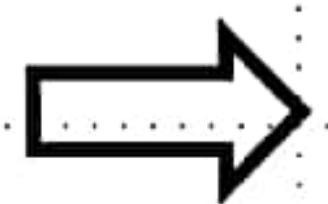
we have

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{j\omega + 1} \right] = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)}.$$

$$Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3},$$

تعیین ماندهای بر روی مسأله در رجیست
تبدیل لپلاس

$$A_{11} = \frac{1}{4}, \quad A_{12} = \frac{1}{2}, \quad A_{21} = -\frac{1}{4},$$



$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 3}.$$



$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t).$$