

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ساختمان‌های داده

جلسه ۷

مجتبی خلیلی  
دانشکده برق و کامپیوتر  
دانشگاه صنعتی اصفهان

## چند رابطه

- $a > 0, b > 0, c > 0,$

$$\begin{aligned}a &= b^{\log_b a}, \\ \log_c(ab) &= \log_c a + \log_c b, \\ \log_b a^n &= n \log_b a, \\ \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}, \\ \log_b(1/a) &= -\log_b a, \\ \log_b a &= \frac{1}{\log_a b}, \\ a^{\log_b c} &= c^{\log_b a},\end{aligned}$$

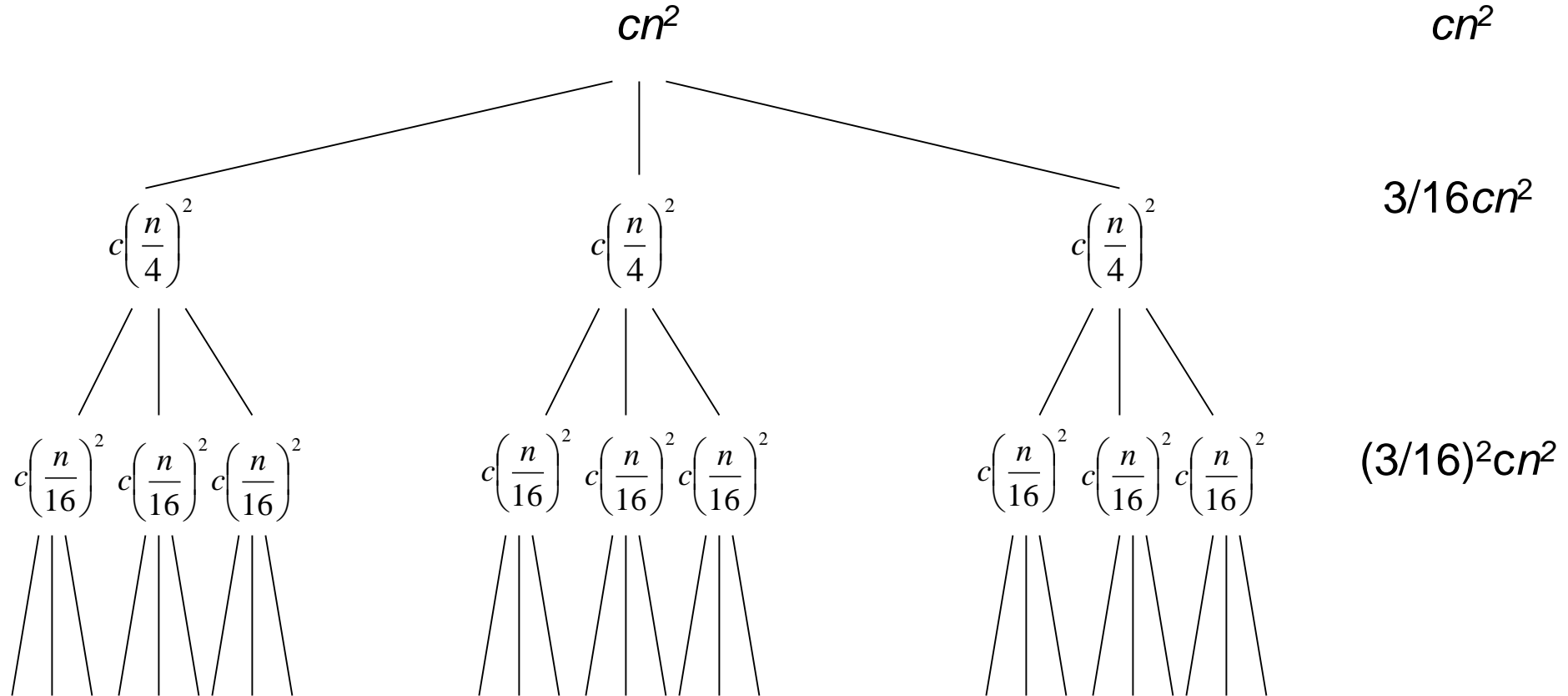
# حل رابطه بازگشتی

○ رابطه‌های بازگشتی را می‌توان به روش‌های زیر حل کرد:

- حدس و استقراء (substitution method)
- بسط دادن (Expanding)
- درخت بازگشت (recursion-tree)
- قضیه اصلی (Master Theorem)

# مثال

$$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$$



$$T(n) = O(n^2)$$

# حدس - استقرا

○ گاهی کافی است یک حدس را بدست آوریم و بررسی کنیم. ممکن است ساده‌سازی زیادی انجام داده باشیم و بخواهیم مطمئن شویم چیزی را از دست نداده‌ایم.

# حل رابطه بازگشتی

○ حدس و استقرا: در این روش ابتدا سعی می‌کنیم جواب را حدس بزنیم و سپس با استقرا آن را اثبات کنیم. برای حدس جواب ممکن است از قضیه اصلی یا درخت بازگشت استفاده کنیم.

# حل رابطه بازگشتی (مثال ۱)

○ حل رابطه بازگشتی زیر:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{if } n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 & \text{otherwise (n power of 4)} \end{cases}$$

○ حدس؟

$$T(n) = O(n^2)$$

# حل رابطه بازگشتی (مثال ۱)

○ بنابراین داریم:

$$T(n) = O(n^2) \longrightarrow T(n) \leq cn^2 \quad c > 0, \quad n \geq n_0$$



# حل رابطه بازگشتی (مثال ۱)

○ پایه استقرا:

$$T(n) \leq cn^2$$

$$\longrightarrow T(1) = b \leq c$$

# حل رابطه بازگشتی (مثال ۱)

○ فرض استقرا (برای  $k < n$ ):

$$T(k) \leq ck^2$$

# حل رابطه بازگشتی (مثال ۱)

○ حکم استقرا  $(k=n)$ :

$$T(n) \leq cn^2$$

# حل رابطه بازگشتی (مثال ۱)

○ اثبات حکم استقرا:

$$\begin{aligned}T(n) &= 3T(n/4) + n^2 \\&\leq 3c(n/4)^2 + n^2 \\&= cn^2 3/16 + n^2 \\&= cn^2 - cn^2 * \frac{13}{16} + n^2 \\&\leq cn^2\end{aligned}$$

$$c \geq \frac{16}{13}$$

