مروری بر سیستم بر اعداد مختلط

Complex numbers

یک عدد مختلط مانند z یا $\acute{s}$ را می‌توان به عنوان زوج مرتب

$$z=(x,y) \quad \text{یا} \quad \acute{s}=(x,y)$$

تعریف کرد. به x و y به ترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی z $(\acute{s})$ گوییم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$x=\mathrm{Re}(z) \quad , \quad y=\mathrm{Im}(z)$$

- برابری: z_1 ، z_2 را مساوی گوییم هرگاه: $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$

برابری: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$

- موهومی محض: اعداد مختلط $(0,y)$ را موهومی محض نامند.

- حقیقی محض: هر زوج مرتب $(x,0)$ را با عدد حقیقی x یکی می‌گیریم.

با توجه به اینکه عدد حقیقی x را $(x,0)$ در نظر گرفتیم، عدد موهومی محض $(0,1)$ را با j نمایش می‌دهیم. در ادامه با توجه به ضرب، جمع اعداد و برابری نمایش z استفاده می‌کنیم.

ضرب و جمع: $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$

$$(*)\begin{cases} z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \\ z_1 z_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1) \\ az=(ax,\ ay) \end{cases}$$

با توجه به روابط فوق داریم

$$(0,1)(y,0)=(0,y)$$

i یا j : $jy=(0,y)$

اکنون با توجه به روابط $(*)$ می‌توان $z=(x,y)$ را به صورت زیر نوشت:

$$z=(x,y)=x+jy$$

Subject Date

همچنین با توجه به روابط (*) داریم

با توجه به $z = x + jy$ ، $j^2 = -1$ ، روابط * بدست می‌آیند.

$$j^2 = -1$$

همچنین به ازای $(x, 0)$ را محور حقیقی در نظر گرفتیم، لذا اعداد حقیقی R زیرمجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ نتیجه می‌گیریم، می‌باشد:

خواص:

- جابجایی یا تعویض پذیری

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- شرکت پذیری

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$
$$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

- توزیع پذیری

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

• معکوس جمعی z را با $-z$ نشان می‌دهیم که همان $(-x, -y)$ است.

• معکوس ضربی z ، $z \neq 0$ (یعنی $x \neq 0$ ، $y \neq 0$) را با z^{-1} نشان می‌دهیم به طوری که $z z^{-1} = 1$. داریم

$$z = (x, y) \quad , \quad z^{-1} = (u, v)$$

هدف یافتن u, v برحسب x, y است.

$$(x + jy)(u + jv) = 1$$

[illegible] $\rightarrow \; xu + jxv + jyu + j^2 yv = 1$

$$\rightarrow \; xu - yv + (xv + yu) j = 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

به همین ترتیب می‌توان تقسیم دو عدد مختلط را تعریف کرد.

$$\begin{cases} \dfrac{z_1}{z_2} \triangleq z_1 z_2^{-1} = (x_1+jy_1)\overbrace{(u_2+jv_2)}^{z_2^{-1}} \\ z_2 \neq 0 \end{cases}$$

۳

$$u_2 = \frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} \qquad v_2 = \frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2} \longrightarrow$$ ادامه

مثال:

$$(3+j)(-2-2j) = -6-6j-2j-2j^2$$

$$= -6+2-8j = -4-8j \triangleq (-4,-8)$$

$$\frac{1}{2-3j} \times \frac{1}{1+j} = \frac{1}{(2-3j)(1+j)} = \frac{1}{2+2j-3j-3j^2}$$

$$= \frac{1}{2+3-j} = \frac{1}{5-j}$$

نکته: برای اینکه اعداد مختلط بالا را به فرم $x+jy$ درآوریم، در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{5-j} = \frac{1}{5-j} \times \frac{5+j}{5+j} = \frac{5+j}{25-j^2} = \frac{5+j}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}j$$

سوال: اگر $z_1 z_2 = 0$ باشد در این صورت چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

ج: $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$. (اثبات به عهده دانشجو)

(اثبات: فرض کنیم مثلاً $z_1 \neq 0$ یعنی $x_1 \neq 0$ یا $y_1 \neq 0$ (یا هر دو غیر صفر اند). داریم

$$(x_1+jy_1)(x_2+jy_2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1x_2 - y_1y_2 = 0 \\ y_1x_2 + x_1y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$ این دستگاه را نسبت به مجهولات x_2 و y_2 حل می‌کنیم.

$$x_1 \neq 0 \rightarrow x_2\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1}\right) = 0 \text{ و } y_1 \neq 0 \rightarrow -y_2\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}\right) = 0 \Rightarrow x_2 = y_2 = 0 \rightarrow z_2 = 0$$

با توجه به تغییر دو حالت x_1 و y_1 فقط $x_2 = y_2 = 0$ نتیجه می‌شود) ■

نتیجه: اگر $x_1=0$ باشد، چون y_1 نمی‌تواند صفر باشد، لذا

$$\begin{cases} -y_1 y_2 = 0 \\ y_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2=y_2=0$$

اگر $y_1=0$ باشد، به x_1+0j می‌رسیم که به اولین بالا می‌رسیم.

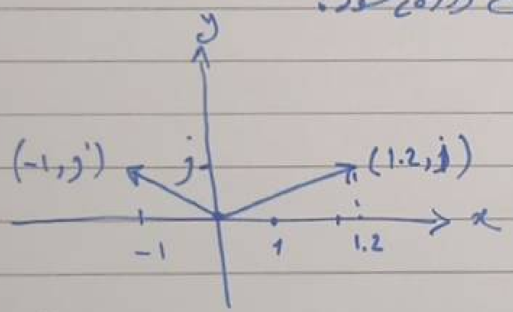
□ صفحه دکارتی:

از آنجا که هر مختلط $z=x+jy$ را به صورت زوج مرتب (x,y) می‌توان نمایش داد، لذا می‌توانیم آن را با نقطه‌ای در صفحه دکارتی با محور x و محور y مربوط سازیم. پس هر عدد مختلط دقیقاً با یک نقطه از صفحه دکارتی متناظر است و بالعکس.

بنابراین صفحه xy را برای نمایش $z=x+jy$ به کار می‌بریم و آن را صفحه مختلط یا صفحه z می‌نامیم.

x: محور حقیقی
y: محور موهومی } نامگذاری

⊘ هر عدد مختلط توسط یک بردار در صفحه xy نیز قابل نمایش است:



⊘ اندازه عدد مختلط: اندازه z را با $|z|$ نشان می‌دهیم که فاصله نقطه (x,y) تا مبدأ است. لذا داریم

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

⊘ توجه $z_1<z_2$ در حالت کلی بی‌معنی است اما $|z_1|<|z_2|$ اینجا معنا دارد.

⊘ فاصله دو عدد مختلط z_1 و z_2 در واقع فاصله دو نقطه متناظر z_1 و z_2 است. لذا داریم

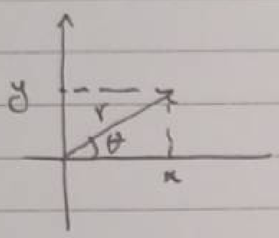
$$\text{فاصله } z_1, z_2 \triangleq |z_1-z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

○ مزدوج مختلط: مزدوج مختلط z را با z^* نشان می‌دهیم و طبق تعریف می‌شود

$$z^* = x - jy$$

مختصات قطبی

مختصات قطبی (x,y) را با r و θ نشان می‌دهیم. داریم



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow z = r\cos\theta + j\,r\sin\theta$$

بنابراین $r = |z|$ و همچنین $r \geq 0$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ یا $-\pi \leq \theta < \pi$

اغلب نشان می‌دهند که عبارت $\cos\theta + j\sin\theta$ $(r=1)$ را با $e^{j\theta}$ نشان می‌دهیم یعنی

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$ موسوم به رابطه اویلر

انگیزه تعریف رابطه فوق:

فرض کنید تابع $f(z)$ روی z حقیقی به تابع نمایی معمولی $f(x) = e^x$ تبدیل شود. یعنی

$$(*) \quad f(x + j0) = e^x$$

چون $\frac{de^x}{dx} = e^x$ ، این شرایط را هم اضافه می‌کنیم

$$(**) \quad f'(z) = f(z) \;,\quad f \text{ تام.}$$

(تابع تام یعنی در تمام نقاط صفحه z تحلیلی باشد)

تابع $f(z) = e^x(\cos y + j\sin y)$ دو شرط $(*)$، $(**)$ را برآورده می‌کند. تنها تابع $f(z)$ فوق است که دو شرط فوق را برآورده کند. همچنین فرض کنیم y برحسب رادیان باشد.

تابع $f(z)=e^{x}(\cos y+j\sin y)$ را با e^{z} نشان می‌دهیم. بر تابع‌های مختلط e^{z} طبق تعریف می‌شود:

$$z=x+jy \qquad e^{z}=e^{x}(\cos y+j\sin y)$$

● اگر $y=0$ باشد، e^{z} به e^{x} تقلیل می‌یابد.

● اگر $x=0$ باشد و برای سهولت در نوشتن به جای y از θ استفاده کنیم، e^{z} می‌شود:

$$z=j\theta \qquad e^{z}=e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \longrightarrow$$ همان رابطه اویلر

مثال

$$e^{j2\pi}=\cos 2\pi+j\sin 2\pi=1$$

$$e^{j\pi}=\cos\pi+j\sin\pi=-1$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=j$$

$$e^{2+j\frac{\pi}{3}}=e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{e^{2}}{2}+j\frac{e^{2}\sqrt{3}}{2}$$

$$z=x+jy=z=re^{j\theta} \longrightarrow z^{n}=r^{n}e^{jn\theta}$$

همچنین داریم:

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}, \qquad \sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$