فصل ۱۰ کتاب Nelson

جبر بول

- جبر بول: یک ساختار جبری است که با یک مجموعه A و دو عمل باینری '+' و '.' تعریف می‌شود.

- مجموعه A نسبت به عملگر □ بسته است اگر $\forall a,b \in A$ if $c = a \square b \Rightarrow c \in A$

مثلاً مجموعه اعداد طبیعی نسبت به جمع بسته است ولی نسبت به تفریق بسته نیست.

اصول حاکم بر جبر بول

۱) شرکت پذیری (associativity)

$\forall a,b,c \in A$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a.(b.c)=(a.b).c$$

۲- جابجایی (Commutativity)

$\forall a,b \in A$

$$a+b=b+a$$
$$a.b=b.a$$

۳- وجود عنصر خنثی:

$\forall a \in A$

$$a+0=a$$
$$a.1=a$$

۴- پخشی (Distributivity)

$\forall a,b,c \in A$

$$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$$
$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

۵- وجود عنصر متمم

$\forall a \in A \quad \exists \bar{a} \in A$:

$$a+\bar{a}=1$$
$$a.\bar{a}=0$$

نکته – بعضی خواصی که برای جبر بول بیان شد مشابه خواص جبر معمولی است و بعضی متفاوت است.

اصل دوگانی : (duality)

اگر یک گزاره در جبر بولی درست باشد، دوگان آن نیز درست است

دوگان یک عبارت با تبدیل '+' به '.' و '.' به '+' و صفر به یک و یک به صفر به دست می آید

مثال :

$$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$$

$$\Big\Downarrow \text{ Duality}$$

$$a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$$

نکته - بجای اثبات یک قضیه می توان دوگان آن را اثبات کرد.

$$\text{if} \quad x=0,\ y=0 \Rightarrow x+y=0$$

$$\Big\Downarrow \text{ Dual}$$

$$\text{if} \quad x=1,\ y=1 \Rightarrow x.y=1$$

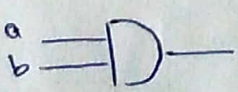
- بیان عملگرهای '+' و '.' با استفاده از جدول درستی (Truth table)

'+' → OR

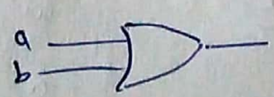
'.' → AND

a	b	a.b	a+b	$\bar{a}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

در واقع $f_1(a,b)=a+b$ یک تابع منطقی دو متغیره است. $f_2(a,b)=a.b$ نیز یک تابع دو متغیره است



$f_1(a,b)=a.b$



$f_2(a,b)=a+b$

قضایای اساسی در جبر بولین:

۱)

الف) $a+a=a$

ب) $a \cdot a=a$

اثبات الف) $a+a \overset{\text{عنصر خنثی}}{=} (a+a)(1) \overset{\text{عنصر متمم}}{=} (a+a)(a+\bar{a}) \overset{\text{پخشی}}{=} a+(a \cdot \bar{a}) \overset{\text{عنصر متمم}}{=} a+0 \overset{\text{عنصر خنثی}}{=} a$

اثبات ب) $a \cdot a = (a \cdot a)+(0) = (a \cdot a)+(a \cdot \bar{a}) = a \cdot (a+\bar{a}) = a \cdot 1 = a$

۲)

الف) $a+1=1$ اثبات به عهده دانشجو

ب) $a \cdot 0=0$ (مشابه اثبات بالا)

---

۳)

$\bar{\bar{a}}=a$

---

۴) قضیه جذب (absorption)

الف) $a+ab=a$

ب) $a \cdot (a+b)=b$

اثبات الف) $a+ab = a \cdot 1+ab = a(1+b) = a \cdot 1 = a$

اثبات ب) $\longrightarrow$ به عهده دانشجو

مثال: با توجه به قضیه جذب، درستی عبارت های زیر بدیهی است.

$x+y+(x+y)z = x+y$

$A\bar{B}C+C=C$

---

۵) شبه جذب

الف) $a+\bar{a}b=a+b$

ب) $a \cdot (\bar{a}+b)=a \cdot b$

اثبات الف) $a+\bar{a}b \overset{}{\underset{\text{پخشی}}{=}} (a+\bar{a}) \cdot (a+b) = 1 \cdot (a+b) = a+b$ اثبات ب) به عهده دانشجو

با توجه به تفسیر قبل، درستی عبارت های زیر بدیهی است.

$$(\overline{x+y})(x+y+c) = (\overline{x+y}).c$$

$$\bar{x}(x+y+c) = \bar{x}.(y+c)$$

$$b + ca\bar{b} = b + ac$$

تفسیر:

$$ab + a\bar{b} = a$$

$$(a+b).(a+\bar{b}) = a$$

اثبات به عهده دانشجو

مثال: درستی عبارت زیر را نشان دهید.

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d)(\bar{a}+\bar{b}+c+\bar{d})(\bar{a}+\bar{b}+c+d) = \bar{a}+\bar{b}$$

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+(\underbrace{d.\bar{d}}_{0}) \qquad \bar{a}+\bar{b}+c+(\underbrace{\bar{d}.d}_{0})$$

طرف چپ: $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+c) = (\bar{a}+\bar{b})+(\bar{c}.c) = \bar{a}+\bar{b}$ ✓

مثال: درستی عبارت زیر را نشان دهید.

$$ab+\bar{a}c+bc = ab+\bar{a}c$$

اثبات) طرف چپ: $ab+\bar{a}c+bc(a+\bar{a}) = ab+\bar{a}c+abc+\bar{a}bc$

$$= ab(1+c)+\bar{a}c(1+b) = ab+\bar{a}c \quad ✓$$

تفسیر:

$$ab + a\bar{b}c = ab+ac$$

اثبات: $ab+a\bar{b}c = a(b+\bar{b}c) = a(b+c) = ab+ac$

قضیه دمورگان :

الف) $\overline{a+b} = \bar{a} . \bar{b}$

ب) $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$

اثبات ۱) از جدول درستی کمک می‌گیریم و همه حالت‌های ممکن a,b را بررسی می‌کنیم.

(اثبات الف)

a	b	$\overline{a+b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} . \bar{b}$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0

اثبات ۲) برای اثبات قضیه دمورگان از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\text{if} \quad a+b=1 \ , \ a.b=0 \Rightarrow a=\bar{b}$$

$\underbrace{a+b}_{a_{new}}$, $\underbrace{\bar{a} . \bar{b}}_{b_{new}}$ $\xRightarrow{\text{استفاده از قضیه بالا}}$ کافی است نشان دهیم $(a+b)+(\bar{a} . \bar{b})=1$

, $(a+b) . (\bar{a} . \bar{b})=0$

$$(a+b)+(\bar{a} . \bar{b}) = (\underbrace{a+b+\bar{a}}_{1}) . (\underbrace{a+b+\bar{b}}_{1}) = 1 \ \checkmark$$

$$(a+b) . (\bar{a} . \bar{b}) = \bar{a}\bar{b}b + \bar{a}\bar{b}a = 0 \ \checkmark$$

$\Rightarrow a+b = \overline{\bar{a} . \bar{b}}$

یا $\overline{a+b} = \bar{a} . \bar{b}$

تعمیم قضیه دمورگان :

$$\overline{(a+b+c+ \cdots z)} = \bar{a} . \bar{b} . \bar{c} . \ldots . \bar{z}$$

$$\overline{(ab \ldots z)} = \bar{a} + \bar{b} + \cdots + \bar{z}$$

مثال :

$$\overline{a+bc} = \bar{a} . \overline{bc} = \bar{a} . (\bar{b} + \bar{c})$$

مثال: ساده کنید

$$\overline{a(b+z(x+\bar a))} = \bar a + \left[\bar b \cdot (\bar z + (\bar x \cdot a))\right]$$

$$= \bar a + \bar b \bar z + \bar b \bar x a = \bar a + \bar b \bar x + \bar b \bar z$$

$$= \bar a + \bar b(\bar x + \bar z)$$

مثال: درستی رابطه زیر را بررسی نمایید.

$$ABC + \bar A D + \bar B D + CD = ABC + \bar A D + \bar B D$$

- درستی به عهده دانشجو
- اثبات سریع

if $CD=0 \Rightarrow$ تساوی برقرار است

if $CD=1 \Rightarrow C=1, D=1 \Rightarrow$ طرف راست $= AB + \bar A + \bar B = \bar A + B + \bar B = 1$

طرف چپ $= 1+1 = 1$

- اپراتورهای OR و AND را می‌توان به دید یک تابع دو متغیره نیز بررسی نمود

$$f(a,b) = a.b$$

- در جبر معمولی، بی‌نهایت تابع دو متغیره وجود دارد ولی در جبر بول که تنها از بیت‌های صفر و یک تشکیل شده، تعداد توابع محدود است.

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{15}	f_{14}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
			NOR					XOR	NAND	and	XNOR						OR

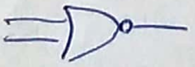
$f_0(a,b)=0$

نکته: در حالت کلی تعداد توابع باینری n متغیره برابر 2^{2^n} است.

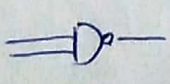
$f_1 = \bar a . \bar b$

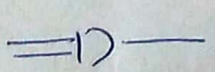
به عنوان مثال:

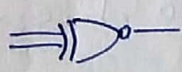
$$f_7 = \underbrace{\bar a \bar b + \bar a b}_{\bar a(b+\bar b)} + a\bar b = \overline{a.b}$$


NOR $= f_1$


XOR $= f_6$ ← اگر تعداد یک‌های ورودی فرد باشند خروجی ۱ می‌شود

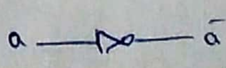

NAND $= f_7$


AND $= f_8$


XNOR $= f_9(a,b)$ → اگر تعداد یک‌های ورودی زوج باشند خروجی ۱ می‌شود


OR $= f_{14}(a,b)$


$f_{12}(a,b) = a$

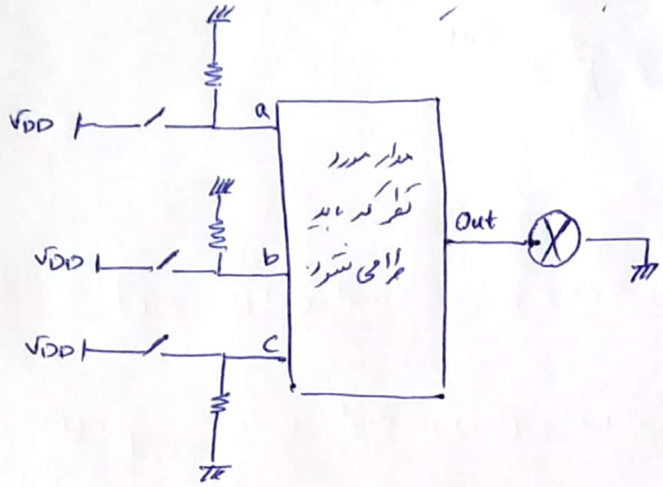

$f_3(a,b) = \bar a$

یک مثال طراحی ساده: یک مدار رأی‌گیری برای سه نفر طراحی نمایید.

- برای هر شخص یک کلید در نظر می‌گیریم. چنانچه آن شخص مثبت باشد، کلید را می‌فشارد و در غیر این صورت کلید باز می‌ماند

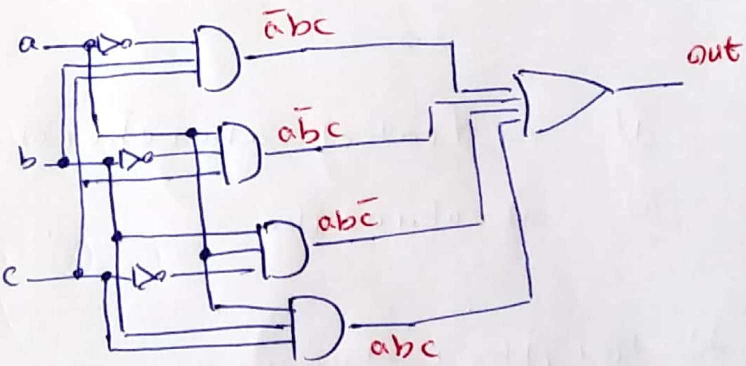
- خروجی رأی‌گیری توسط یک LED نمایش داده می‌شود

- اگر LED روشن شد یعنی رأی اکثریت مثبت بوده در غیر این صورت چراغ خاموش باقی می‌ماند



a	b	c	out خروجی
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$out = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc \quad (1)$$



ساده‌سازی رابطه (1):

$$out = \bar{a}bc + a\bar{b}c + \underbrace{ab\bar{c} + abc}_{ab(\bar{c}+c) = ab}$$

$$= \bar{a}bc + \underbrace{a\bar{b}c + ab}_{a(b+\bar{b}c) = a(b+c)}$$

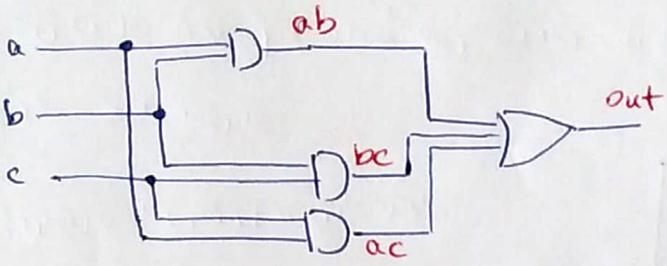
قضیه حذف

$$= \underbrace{\bar{a}bc + ab}_{b(a+\bar{a}c) = b(a+c)} + ac$$

قضیه حذف

$$= ab + bc + ac$$

$\Rightarrow out = ab + ac + bc$ ②



پیاده سازی اول : چهار گیت and سه ورودی ، یک گیت OR چهار ورودی ، سه گیت NOT

پیاده سازی دوم : سه گیت and دو ورودی ، یک گیت OR سه ورودی

ساده سازی ← هزینه کمتر ، توان کمتر ، سرعت بیشتر

① : $out = f(a,b,c) = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc \rightarrow$ Canonical sum of product

② : $out = ab + ac + bc \longrightarrow$ sum of product (sop)

تابعی که به فرم Canonical sop بود بهینه نیست ولی به دست آوردن آن ساده است. در مقابل تابعی که در رابطه ۲ بیان شد بهینه است ولی نیاز به ساده سازی داشت.

بار دیگر بازگردیم به سوال رأی گیری :

a	b	c	out	$\overline{out}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$\overline{out} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$$

$$\xrightarrow[\text{دمورگان}]{} out = (a+b+c).(a+b+\bar{c}).(a+\bar{b}+c).(\bar{a}+b+c)$$

نمایش به صورت canonical product of sum

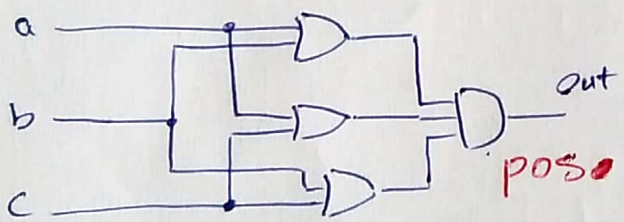
ساده سازی :

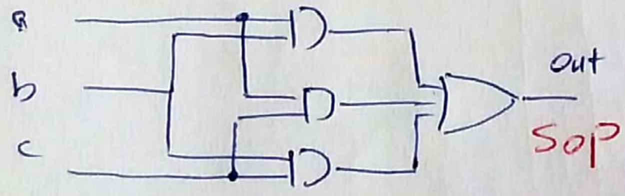
$$out = (a+b).(a+\bar{b}+c).(\bar{a}+b+c)$$

$$= a+(\underbrace{b.(\bar{b}+c)}_{\substack{b.c \\ \text{شبه جذب}}}).(\bar{a}+b+c) = (a+(b.c)).(\bar{a}+b+c)$$

$$= (a+b)\underbrace{(a+c)(\bar{a}+b+c)}_{c+(a.(\bar{a}+b))} = (a+b)(c+(a.b)) = (a+b)(c+a)(c+b)$$

نمایش به صورت pos (product of sum)





بنابراین نمایش های که تا الان دیده ام عبارتند از : ۱) جدول درستی ۲) شماتیک ۳) sop ۴) pos