$x(t) = e^{-5t} u(t-1) \longrightarrow x(t) = e^{-5(t-1)} e^{-5} u(t-1)$

$\boxed{x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(S)} \longrightarrow X(S) = e^{-st_0} X(s') = e^{-s} \times \left(e^{-5} \frac{1}{s+5}\right) = \boxed{\frac{e^{-s-5}}{s+5}}$ ① ①

$X(s') \xleftrightarrow{L} x(t')$

$x(t') = e^{-5t'} e^{-5} u(t') \xrightarrow{L} \boxed{e^{-5} \frac{1}{s+5}, \; ROC: Re\{s\} > -5}$

$y(t) = Ae^{-5t} u(-t-t_0) \Longrightarrow y'(t) = Ae^{5t} u(t-t_0) \longrightarrow y'(t) = Ae^{5(t-t_0)} e^{5t_0} u(t-t_0)$

تغییر متغیر $= t \to -t$

$Y(S) = e^{-st_0}$ ○ $\Longrightarrow \boxed{Y(S) = e^{-st_0} \times \left(\frac{Ae^{5t_0}}{s-5}\right)}$ ② $\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \boxed{Y(S) = \frac{-Ae^{st_0}}{s+5}}$ ②

○ $\xleftrightarrow{L} y''(t)$

$y''(t) = Ae^{5t} e^{5t_0} u(t)$ — $\boxed{Ae^{5t_0} \frac{1}{s-5}, \; ROC: Re\{s\} > +5}$

①,② $\to \frac{e^{-s-5}}{s+5} = \frac{-Ae^{st_0}}{s+5} \Longrightarrow e^{-s-5} = -Ae^{st_0} \longrightarrow e^{-s} e^{-5} = -Ae^{st_0} \longrightarrow \boxed{A = -e^{-5}}$

$e^{-s} = e^{st_0}$

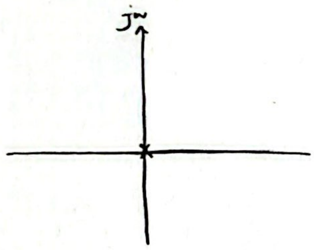
$\boxed{t_0 = -1}$

(2)

از دو طرف لاپلاس می‌گیریم $\longrightarrow Y(s)\left[s^3+(1+\alpha)s^2+(\alpha+1)s+\alpha^2\right]=X(s)$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^3+(1+\alpha)s^2+(\alpha+1)s+\alpha^2}=\frac{1}{(s-\alpha)(s^2+(1+2\alpha)s-\alpha)}$$

قطب ها $\longrightarrow s=\alpha\ ,\ s=\dfrac{-(1+2\alpha)\pm(2\alpha+1)}{2}\begin{cases}+\ \to 0\\ -\ \to -2\alpha-1\end{cases}$



برای اینکه سیستم علی با تابع تبدیل گویا پایدار باشد پس باید تمام قطب ها سمت چپ محور $j\omega$ باشند

$s=\alpha \longrightarrow \alpha<0$ $\qquad Re\{s\}<0$

$s=-2\alpha-1 \longrightarrow -2\alpha-1<0 \longrightarrow -2\alpha<1 \longrightarrow \boxed{\alpha>\frac{-1}{2}}$

$y(t)=x_1(t-2)+x_2^*(-t+3)$

(4)

$\Longrightarrow Y(s)=L\{x_1(t-2)\}+L\{x_2^*(-t+3)\}$

$e^{-2s}X_1(s)$

$x_2^*(t) \longrightarrow X_2^*(-s)$

$x_2^*(-t+3) \longrightarrow e^{+3s}X_2^*(-s)$

$\Longrightarrow Y(s)=e^{-2s}X_1(s)+e^{3s}X_2^*(-s)$

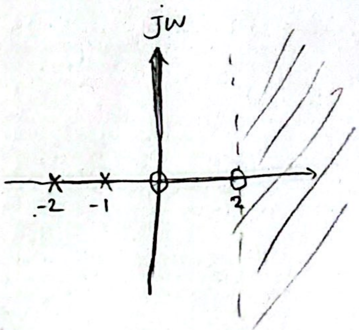
(6)

از دو طرف لاپلاس می‌گیریم : $Y(s)\left[s^2-2s\right]=X(s)\left[s^2+4s+3\right]$

$\longrightarrow H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{s^2+4s+3}{s^2-2s}=\dfrac{(s+2)(s+1)}{s(s-2)}$

* برای $H(s)$ های گویا، ROC سمت راستی $\Longleftrightarrow$ علیت

$H^{-1}(s) \longrightarrow \dfrac{1}{H(s)}=\dfrac{s(s-2)}{(s+2)(s+1)}\begin{cases}0 & \text{صفر}\\ 2 & \text{صفر}\\ -2 & \text{قطب}\\ -1 & \text{قطب}\end{cases}$



$\dfrac{-1}{s}+\dfrac{6}{s-2} \longrightarrow ROC: Re\{s\}>2$

$ROC: Re\{s\}>0$

$\Rightarrow$ ROC در علی : $\boxed{Re\{s\}>2}$

از روی شکل ROC مشخص است که سمت راستی است پس علی است.

و چون تمام قطب ها سمت چپ محور $j\omega$ قرار گرفته اند پس پایدار نیز است

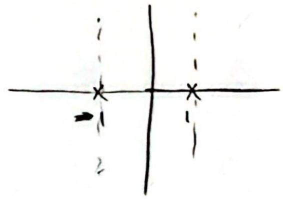
8

$x(t) = 3u(t) + 1$

$Y(s) = X(s) \cdot H(s) \Longrightarrow Y(s) = \frac{3}{s} \cdot \frac{s}{s^2-1} = \frac{3s}{s(s^2-1)} = \frac{3}{(s-1)(s+1)}$

$X(s) = L\{3u(t)\} + L\{1\} = 3 \times \frac{1}{s} + 0 = \frac{3}{s}$

$H(s) = \frac{s}{s^2-1}$



$Y(s) = \frac{3/2}{s-1} + \frac{-3/2}{s+1} \longrightarrow Y(s) = 3/2 \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right)$

$RoC: Re\{s\} > 1$, $RoC: Re\{s\} > -1$

$e^{-at} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$, $RoC: Re\{s\} > -a$

$-e^{-at} u(-t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$, $RoC: Re\{s\} < -a$

$3/2 \, \frac{1}{s-1} - 3/2 \, \frac{1}{s+1}$

$\frac{1}{s-1} \to 3/2 \, e^{t} u(t)$, $\frac{1}{s+1} \to -3/2 \, e^{-t} u(t)$

$\Rightarrow y(t) = \left(3/2 \, e^{t} - 3/2 \, e^{-t}\right) u(t)$

11 پاسخ پله سیستم ، فرض سیستم به ورودی پله واحد u(t) است.

$L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, $Re\{s\} > 0$

$s(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t}) u(t) \xrightarrow{L} S(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$

$\Rightarrow S(s) = \frac{(s+1)^2 - s(s+1) - s}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s(s+1)^2}$

$S(s) = H(s) \underbrace{X(s)}_{L\{u(t)\}} \longrightarrow H(s) = s \cdot \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}$

$y(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t}) u(t) \xrightarrow{L} Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3}$

$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \longrightarrow X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \left(\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3} \right)(s+1)^2 \longrightarrow$

$X(s) = (2s + 4 + 2/s) + (-3s - 3) + (s - 1 + \frac{4}{s+3}) \longrightarrow X(s) = 2/s + \frac{4}{s+3} \xrightarrow{L^{-1}} x(t) = (2 + 4e^{-3t}) u(t)$

$L^{-1} = 2u(t)$, $L^{-1} = 4e^{-3t} u(t)$

$$x(t) = e^{2t} \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s-2}, \quad ROC: Re\{s\} > 2$$

$$y(t) = \frac{3}{5} e^{2t} \xrightarrow{L} Y(s) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s-2}, \quad ROC: Re\{s\} > 2$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{3}{5}\frac{1}{s-2}}{\frac{1}{s-2}} = \frac{3}{5} \rightsquigarrow$$

بازای هر نقطه سیگنال ورودی برابر $\frac{3}{5}$ $\left(e^{2t}\right)$

پس یک نقطه فرضی را در نظر میگیریم ← $s=2$

$$H(s) = \frac{s^2 + as + 1}{s^2 + 3s + 5} \Big|_{s=2} \frac{2a+5}{15} = \frac{3}{5} \longrightarrow 3 \times 15 = 5(2a+5) \longrightarrow \boxed{a = 2}$$