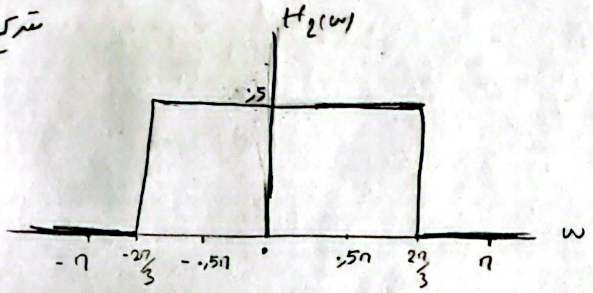
تمرین 6 — باسمه تعالی — سمیه عبادی

9933243



①

②

$X(w)$ پهنای باند $\rightarrow 200\pi \times 2 = 400\pi$

$H(w)$ فرکانس قطع $\rightarrow \phi\pi \rightarrow \phi = 500$ ، فرکانس قطع فیلتر $\rightarrow \delta\pi \rightarrow \delta = 500 \Rightarrow H(w) = \begin{cases} A & |w| \leq 500\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$x(t)$ ؛ $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$

$X_s(w) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(w - kw_s)$ ، $w_s = \frac{2\pi}{T_s}$ $\Rightarrow$ برای جلوگیری از تداخل فاصله بین پیک‌ها باید حداقل دو برابر پهنای باند $X(w)$ باشد.

$w_s \geq 2 \times 200\pi \rightarrow \frac{2\pi}{T_s} \geq 400\pi \rightarrow T_s \leq \frac{2\pi}{400\pi} = \frac{1}{200} \longrightarrow$ $\boxed{T_s = \frac{1}{200} \quad T_s \text{ حداکثر مقدار}}$

$Y(w) = X_s(w) H(w) \longrightarrow x(t) = y(t) \longrightarrow X(w) = Y(w) \quad [-200\pi, 200\pi]$

$H(w) = A$, $|w| \leq 500\pi \Rightarrow$ کل پهنای باند $X(w)$ پوشش داده می‌شود.

$[-200\pi, +200\pi] \rightarrow Y(w) = A(X(w) \times \frac{1}{T_s})$, $Y(w) = X(w)$, $\frac{A}{T_s} = 1 \longrightarrow \boxed{A = T_s} \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{200}}$

③

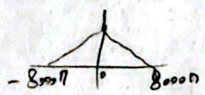
$x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t} = 4000 \times \frac{\sin(4000\pi t)}{4000\pi t} = 4000\,\text{sinc}(4000t)$

$\rightarrow x(t) = 4000^2 \cdot \text{sinc}^2(4000t)$

$F \rightarrow \text{sinc}(4000t) \leftrightarrow \frac{1}{4000} \cdot \text{rect}(w/8000\pi) \rightarrow \text{rect}(w/8000\pi) = \begin{cases} 1 & |w| \leq 4000\pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$4000 \times \text{sinc}(4000t) \xleftrightarrow{F} \text{rect}(w/8000\pi)$

$X(w) = \text{rect}(w/8000\pi) * \text{rect}(w/8000\pi) \longrightarrow$ $X(w)$ یک تابع مثلثی از -8000π تا $+8000\pi$ غیرصفر است و در $w=0$ به اوج خود می‌رسد.



بالاترین فرکانس w_M که پهنای باند است برابر 8000π است. زیرا $X(w)$ در $|w| \leq 8000\pi$ غیرصفر است.

نرخ نایکوئیست برابر $= 2w_M = 2 \times 8000\pi = 16000\pi$

4

$$x(t) = \frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}$$

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$\sin(t)\sin(t/2) = \frac{1}{2}\left[\cos(t - t/2) - \cos(t + t/2)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(t/2) - \cos(3t/2)\right]$$

$$x(t) = \frac{\cos(t/2) - \cos(3t/2)}{2\pi t^2}$$

$$F\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

$\cos(t/2) \longrightarrow \omega_0 = 1/2$

$\cos(3t/2) \longrightarrow \omega_0 = 3/2$

فرکانس موثر $\sin(t) = 1$, $\sin(t/2) = 1/2$

$\downarrow$

$1 + 1/2 = 3/2$

$1 - 1/2 = 1/2$

$\longleftarrow$ بازه فرکانس موثر $[1/2, 3/2]$ $\longleftarrow$ بالاترین فرکانس موثر $= 3/2$

$2\omega_M = 2 \times 3/2 = \boxed{3}$

5

$X_1(\omega)$ پهنای باند $= 2\omega_1$

$X_2(\omega)$ پهنای باند $= 2\omega_2$

$w(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \longrightarrow W(\omega) = X_1(\omega) * X_2(\omega) \longrightarrow$ پهنای باند $= 2\omega_1 + 2\omega_2 = 2(\omega_1 + \omega_2)$

پس بالاترین فرکانس $W(\omega)$ (ω_M) برابر است با: $\omega_M = \omega_1 + \omega_2$

فرکانس نمونه برداری $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \longrightarrow \omega_s \geq 2\omega_M = 2(\omega_1 + \omega_2) \longrightarrow \frac{2\pi}{T_s} \geq 2(\omega_1 + \omega_2) \longrightarrow$

$T_s \leq \frac{2\pi}{2(\omega_1 + \omega_2)} \longrightarrow T_s \leq \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2} \longrightarrow$ حداکثر دوره تناوب نمونه برداری $\boxed{T_s = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}}$

6

$f_L = 100\,kHz = 100 \times 10^3\,Hz$, $\omega_L = 2\pi f_L = 2\pi \times 100 \times 10^3 = 200\pi \times 10^3$

$f_H = 200\,kHz = 200 \times 10^3\,Hz$, $\omega_H = 2\pi f_H = 2\pi \times 200 \times 10^3 = 400\pi \times 10^3$

پهنای باند $\rightarrow f_H - f_L = 200 - 100 = 100\,kHz \longrightarrow \omega = 2\pi \times 100 \times 10^3 = 200\pi \times 10^3$

نرخ نایکوئیست $f_s \geq 2f_H = 2 \times 200 = \boxed{400\,kHz}$

7) الف)

$$m_1(t) = \sum_{L=-\infty}^{+\infty} (-1)^L m(LT_s)\, \delta(t - LT_s)$$

$$w_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi \cdot 2B = 4\pi B$$

تبدیل فوریه $m_1(t)$: $a_L = (-1)^L m(LT_s) \longrightarrow m_1(t) = \sum_{L=-\infty}^{+\infty} a_L\, \delta(t - LT_s)$

$$M_1(w) = \sum_{L=-\infty}^{+\infty} a_L e^{-T_s L j w}$$

$$m_s(t) = \sum_{L=-\infty}^{+\infty} m(LT_s)\, \delta(t - LT_s) \longrightarrow M_s(w) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M(w - k w_s) \;,\; w_s = \frac{2\pi}{T_s} = 4\pi B$$

$$m_1(t) = \left(\sum_{L=-\infty}^{+\infty} m(LT_s)\, \delta(t - LT_s) \right) \cdot e^{j\pi t / T_s}$$

$$F\left\{ e^{j\pi t / T_s} f(t) \right\} = F(w - \pi / T_s) \longrightarrow \pi / T_s = \pi \cdot 2B = 2\pi B$$

$$M_1(w) = M_s(w - 2\pi B) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M(w - 2\pi B - k w_s) \;,\; T_s = \frac{1}{2B} \;,\; w_s = 4\pi B \implies M_1(w) = 2B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M(w - 2\pi B - k \cdot 4\pi B)$$

ب)

برای این منظور باید $M(w)$ در $|w| \leq 2\pi B$ قابل جداسازی باشد.

طیف اصلی در $[-2\pi B, 2\pi B]$ قرار دارد اما کپی های جابجا شده باعث تداخل می‌شوند.

به دلیل جابجایی فرکانسی ناشی از $(-1)^L$ ، $M_1(w)$ به گونه‌ای تغییر کرده که بازسازی مستقیم $m(t)$ با یک فیلتر پایین‌گذر ممکن نیست.

برای بازسازی باید ابتدا جابجایی فرکانسی را معکوس کنیم و سپس فیلتر کنیم.