بسم الله الرحمن الرحيم

اقتصاد و مدیریت صنعتی

بخش دوم

اقتصاد مهندسی

انواع نرخ بهره‌ها و نقش آن در باز پرداخت وام

مدرس: زهره قاسمی

نرخ‌های بهره اسمی و موثر
(Nominal and Effective Interest Rates)

- در کلیه محاسبات صورت گرفته تا کنون، فرض منطبق بودن نرخ بهره با دوره‌های یاد شده رعایت گردید، اما در بسیاری از مواقع با مسائلی مواجه می‌گردیم که نرخ بهره ارائه شده با **دوره‌های تعلق گرفتن سود** یا **دوره‌های پرداخت سود** متفاوتند. در این صورت بحث **نرخ‌های بهره اسمی و موثر** مطرح می‌گردد.

- **دوره مرکب شدن:** در جلسه قبل، نرخ بهره یا حداقل نرخ جذب به صورت نرخ سالیانه معرفی شدند و یا به بیان دیگر، دوره مرکب شدن به صورت سالیانه مورد بررسی قرار می‌گرفت. وقتی دوره‌ی مرکب شدن کمتر و یا بیشتر از یکسال باشد، بحث نرخ‌های اسمی و موثر پیش می‌آید.

نرخ‌های بهره اسمی و موثر

- نرخ بهره مرکب به دو صورت نرخ بهره اسمی و نرخ بهره موثر نشان داده می‌شود.
- نرخ بهره اسمی عبارت است از نرخ مرکب سالیانه بدون در نظر گرفتن تعداد مرکب شدن در طول سال یا دوره می باشد.
- نرخ بهره موثر عبارت است از نرخ بهره مرکب با در نظر گرفتن تعداد مرکب شدن در طول سال یا دوره می‌باشد.

نرخ‌های بهره اسمی و موثر

- نرخ‌های بهره اسمی و موثر، در صورتیکه مرکب شدن به صورت سالیانه (یک بار در سال) باشد، یکسان خواهند بود.

- هر مبلغی می‌تواند در طول یکسال به صورت شش ماه (۲ بار در سال)، ماهیانه (۱۲ بار در سال)، هفتگی (۵۲ بار در سال)، روزانه (۳٦۵ بار در سال) و یا بطور پیوسته مرکب شود.

- نرخ بهره اسمی، در واقع همان نرخ بهره سالانه است، بدون تبدیل.

- نرخ بهره موثر، نرخ بهره سالانه است که بنابر نوع تبدیل در طی سال، مقدارش تغییر می‌کند.

نرخ‌های بهره اسمی و موثر

- فردی را در نظر بگیرد که ۱۰۰ واحد پولی را در پروژه‌ای با نرخ بهره ۸٪ سرمایه‌گذاری می‌کند. با تبدیل سالانه بعد از یک سال فرد مبلغ ۱۰۸ واحد پولی خواهد داشت.

$$F = P(1+r) = 100(1+0.08) = 108$$

- در حالی که اگر همین نرخ ۸٪ با تبدیل ۶ ماهه به وی پرداخت شود، مقدار نهایی پول وی برابر است با:

$$F_1 = P\left(1+\frac{r}{2}\right) = 100(1+0.04) = 104$$

$$F = F_1\left(1+\frac{r}{2}\right) = 104(1+0.04) = 108.6$$

نرخ بهره موثر سالیانه

- اگر نرخ بهره سالیانه (نرخ بهره اسمی) r و تعداد m دوره تبدیل در یک سال وجود داشته باشد، نرخ بهره برای هر دوره برابر است با:

$$i = \frac{r}{m}$$

$$F = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

- بنابراین:

$$i_e = \frac{F - P}{P} = \frac{P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - P}{P}$$

- در نتیجه نرخ بهره موثر سالیانه برابر است با:

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

مثال

- اگر نرخ بهره ۱ درصد در ماه باشد. معمولاً بیان می شود که نرخ سالیانه ۱۲ درصد است.
- فرض کنید یک وام ۱۰۰۰۰۰۰ واحد پولی گرفته شده که در پایان سال باید پس داده شود.

$$F = 1000000(1 + 0.12)^1 = 1120000$$

- فرض کنید وام فوق باید طی ۱۲ قسط ماهیانه پس داده شود.

$$F = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = 1000000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12} = 1000000(1 + 0.01)^{12} = 1126825$$

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12} - 1 = 1.126825 - 1 = 0.126825$$

$$F = 1000000(1 + 0.126825)^1 = 1126825$$

محاسبه نرخ بهره موثر با اکسل

USING THE EXCEL EFFECT FINANCIAL FUNCTION

Parameters: (nominal rate, npery)

Solving for effective annual interest rate, given nominal annual rate and npery.

nominal rate=	12%
npery=	12

EFFECT= =EFFECT(D8,D9)

EFFECT(nominal_rate, npery)

Excel

To display	Excel Function
Present value (P)	=PV(Rate, Nper, Pmt, Fv)
Future value (F)	=FV (Rate, Nper, Pmt, Pv)
Annual amount (A)	=PMT (Rate, Nper, Pv, Fv)
Number of periods (n)	=NPER (Rate, Pmt, Pv, Fv)
Compound interest rate (i)	=RATE (Nper, Pmt, Pv, Fv)

Where: Rate=i, Nper=N, Pmt=A, Pv=P, Fv=F

مثال

- اگر بانکی هر شش ماه به پس اندازها ۳/۵ درصد بهره دهد، نرخ بهره اسمی و موثر سالیانه چقدر است؟

$$i = \frac{r}{m} \longrightarrow r = m \times i = 2 \times 3.5 = 7\%$$

هر شش ماه یعنی در یک سال دو بار بهره پرداخت می شود.

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.07}{2}\right)^2 - 1 = 0.0712$$

- نرخ بهره یک بانک ۱/۵ درصد در هفته می‌باشد. نرخ اسمی و موثر ماهیانه را محاسبه کنید.

نرخ اسمی ماهیانه:

$$r = m \times i = 0.015 \times 4 = 0.06$$

نرخ موثر ماهیانه:

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = 0.0614$$

مثال

- شخصی علاقه‌مند است مبلغی را به عنوان سپرده ثابت در بانک پس‌انداز کند. نرخ بانک ۸٪ در سال و بهره بصورت روزانه پرداخت می‌شود. نرخ موثر سالیانه و نرخ موثر شش ماهه را تعیین کنید.

حل:

نرخ موثر سالیانه:

$$i_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365} - 1 = 0.08325$$

نرخ موثر شش ماهه:

$$i_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0.04}{182.5}\right)^{182.5} - 1 = 0.0481$$

توجه) نرخ اسمی شش ماهه در رابطه فوق عبارت است از: $r = \frac{0.08}{2} = 0.04$

مثال

- مثال: فرض کنید که نرخ بهره ۲۰ درصد در سال باشد که شش ماهه مرکب شود. نرخ های بهرهٔ اسمی و مؤثر را به ازای دورهٔ سالانه و دورهٔ شش ماهه بیابید.

در	نرخ اسمی	نرخ مؤثر
سال	٪ ۲۰	٪ ۲۱
دورهٔ شش ماهه	٪ ۱۰	٪ ۱۰

$$\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{2}-1$$

$$\left(1+\frac{0.10}{1}\right)^{1}-1$$

نرخ بهره موثر در دوره پرداخت

- در مثال قبل تعداد دوره های تبدیل (مرکب شدن) با تعداد دوره پرداخت یکسان بود.

- در مسائلی تعداد مرکب شدن در دوره با تعداد دوره پرداخت یکسان نمی باشد.

i : نرخ بهره موثر در هر دوره جریان نقدی

r : نرخ بهره اسمی

m : تعداد دوره تبدیل (مرکب شدن)

k : تعداد جریان مالی در سال

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/k} - 1$$

مثال

- سود سالانه پرداختی‌های یک بانک ۷٪ است. اگر دوره مرکب شدن فصلی باشد و پرداخت‌های یک سرمایه‌گذار دو ماه یک بار باشد، آنگاه نرخ موثر دوره پرداخت چه مقدار است؟

$$r = 0.07, \qquad m = 4, \qquad k = 6$$

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/k} - 1 = \left(1 + \frac{0.07}{4}\right)^{\frac{4}{6}} - 1 = 0.0116$$

مثال

- شرکتی جهت توسعه خطوط تولید خود به ۱۰۰۰۰۰ واحد پولی نیاز دارد. یک بانک آماده است وام مربوطه را به مدت ۵ سال با نرخ ۱۸ درصد در سال و با چهار گزینه پرداخت اقساط به صورت سالیانه، شش ماهه، سه ماهه و ماهیانه در اختیار این شرکت قرار دهد. مدیر شرکت کدام گزینه را انتخاب کند؟

- گزینه اول) مبلغ اقساط سالیانه عبارت است از:

$A = 100000 \times f\left(\frac{A}{P}, 18\%, 5\right) = 31980 \longrightarrow 1 \times 31980 = 31980$

- گزینه دوم) مبلغ اقساط شش ماهه عبارت است از:

$A = 100000 \times f\left(\frac{A}{P}, 9\%, 10\right) = 15580 \longrightarrow 2 \times 15580 = 31160$

- گزینه سوم) مبلغ اقساط سه ماهه عبارت است از:

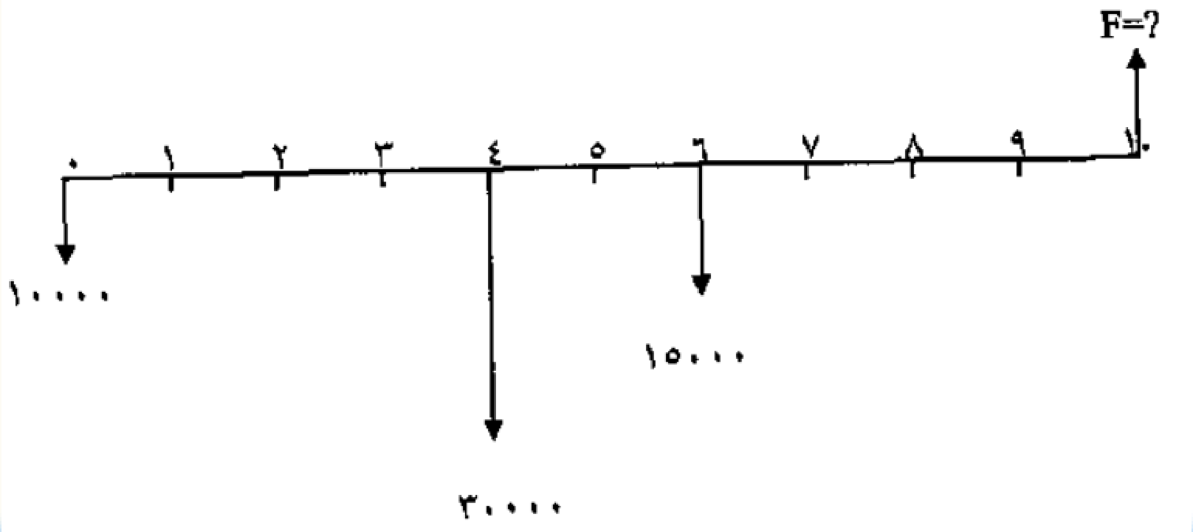
$A = 100000 \times f\left(\frac{A}{P}, 4.5\%, 20\right) = 7690 \longrightarrow 4 \times 7690 = 30760$

- گزینه چهارم) مبلغ اقساط ماهیانه عبارت است از:

$A = 100000 \times f\left(\frac{A}{P}, 1.5\%, 60\right) = 2540 \longrightarrow 12 \times 2540 = 30480$

مثال

- شخصی قصد دارد ۱۰۰۰۰ واحد پولی را اکنون، ۳۰۰۰۰ واحد پولی را چهار سال دیگر در چنین روزی و ۱۵۰۰۰ واحد پولی را شش سال دیگر در چنین روزی با نرخ بهره‌ی سالیانه ٦٪ برای فرزندش در بانکی پس‌انداز نماید. در صورتی که بهره، هر شش ماه یکبار به پس‌انداز تعلق گیرد، اصل و فرع (ارزش آینده) این پس‌اندازها پس از ۱۰ سال چقدر است؟



ادامه مثال قبل

- حل:

$i_e = ?$

$r = 6\%$ $\Rightarrow$ $i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{2} - 1 = 6.09\%$

$m = 2$

$$\boldsymbol{F = 10000 \times f\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 10\right) + 30000 \times f\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 6\right) + 15000 \times f\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 4\right)}$$

$\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 10\right) = ?$ $\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 6\right) = ?$ $\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 4\right) = ?$

ادامه مثال قبل

$$\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 10\right) = 1.80611 \qquad \left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 6\right) = 1.42576 \qquad \left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 4\right) = 1.26677$$

Enter an interest rate in the yellow cell to calculate factors
Press <ctrl>F to format small values and large values in scientific notation

6.09% — **Time Value of Money Factors — Discrete Compounding** — **6.0900%**

	Single Sums		Uniform Series				Gradient Series	
n	To Find F Given P (F|P,i%,n)	To Find P Given F (P|F,i%,n)	To Find F Given A (F|A,i%,n)	To Find A Given F (A|F,i%,n)	To Find P Given A (P|A,i%,n)	To Find A Given P (A|P,i%,n)	To Find P Given G (P|G,i%,n)	To Find A Given G (A|G,i%,n)
1	1.06090	0.94260	1.00000	1.00000	0.94260	1.06090	0.00000	0.00000
2	1.12551	0.88849	2.06090	0.48522	1.83108	0.54612	0.88849	0.48522
3	1.19405	0.83748	3.18641	0.31383	2.66857	0.37473	2.56346	0.96061
4	1.26677	0.78941	4.38046	0.22829	3.45798	0.28919	4.93168	1.42618
5	1.34392	0.74409	5.64723	0.17708	4.20207	0.23798	7.90806	1.88194
6	1.42576	0.70138	6.99115	0.14304	4.90345	0.20394	11.41496	2.32794
7	1.51259	0.66112	8.41691	0.11881	5.56457	0.17971	15.38167	2.76422
8	1.60471	0.62317	9.92950	0.10071	6.18773	0.16161	19.74383	3.19080
9	1.70243	0.58739	11.53420	0.08670	6.77513	0.14760	24.44299	3.60775
10	1.80611	0.55368	13.23664	0.07555	7.32881	0.13645	29.42607	4.01513

$$\boldsymbol{F = 82532.2}$$

درونیابی خطی (مثال قبل)

$$\left(\frac{F}{P}, {\color{red}6.09\%}, 10\right) = ?$$

TABLE A-10

6.00% COMPOUND INTEREST FACTORS

N	SINGLE PAYMENTS: COMPOUND AMOUNT F/P	SINGLE PAYMENTS: PRESENT WORTH P/F	UNIFORM SERIES PAYMENTS: SINKING FUND A/F	UNIFORM SERIES PAYMENTS: COMPOUND AMOUNT F/A	UNIFORM SERIES PAYMENTS: CAPITAL RECOVERY A/P	UNIFORM SERIES PAYMENTS: PRESENT WORTH P/A	N
1	1.0600	0.9434	1.00001	1.000	1.06001	0.9434	1
2	1.1236	0.8900	0.48544	2.060	0.54544	1.8334	2
3	1.1910	0.8396	0.31411	3.184	0.37411	2.6730	3
4	1.2625	0.7921	0.22859	4.375	0.28859	3.4651	4
5	1.3382	0.7473	0.17740	5.637	0.23740	4.2123	5
6	1.4185	0.7050	0.14336	6.975	0.20336	4.9173	6
7	1.5036	0.6651	0.11914	8.394	0.17914	5.5823	7
8	1.5938	0.6274	0.10104	9.897	0.16104	6.2098	8
9	[illegible]	0.5919	0.08702	11.491	0.14702	6.8017	9
10	1.7908	0.5584	0.07587	13.181	0.13587	7.3600	10
11	1.8983	0.5268	0.06679	14.971	0.12679	7.8868	11
12	2.0122	0.4970	0.05928	16.870	0.11928	8.3838	12
13	2.1329	0.4688	0.05296	18.882	0.11296	8.8526	13
14	2.2609	0.4423	0.04759	21.015	0.10759	9.2949	14

7.00% COMPOUND INTEREST FACTORS

N	SINGLE PAYMENTS: COMPOUND AMOUNT F/P	SINGLE PAYMENTS: PRESENT WORTH P/F	UNIFORM SERIES PAYMENTS: SINKING FUND A/F	UNIFORM SERIES PAYMENTS: COMPOUND AMOUNT F/A	UNIFORM SERIES PAYMENTS: CAPITAL RECOVERY A/P	UNIFORM SERIES PAYMENTS: PRESENT WORTH P/A	N
1	1.0700	0.9346	1.00000	1.000	1.07000	0.9346	1
2	1.1449	0.8734	0.48310	2.070	0.55310	1.8080	2
3	1.2250	0.8163	0.31105	3.215	0.38105	2.6243	3
4	1.3108	0.7629	0.22523	4.440	0.29523	3.3872	4
5	1.4025	0.7130	0.17389	5.751	0.24389	4.1002	5
6	1.5007	0.6663	0.13980	7.153	0.20980	4.7665	6
7	1.6058	0.6228	0.11555	8.654	0.18555	5.3893	7
8	1.7182	0.5820	0.09747	10.260	0.16747	5.9713	8
9	1.8385	0.5439	0.08349	11.978	0.15349	6.5152	9
10	1.9671	0.5084	0.07238	13.816	0.14238	7.0236	10
11	[illegible]	0.4751	0.06336	15.784	0.13336	7.4987	11
12	2.2522	0.4440	0.05590	17.888	0.12590	7.9427	12
13	2.4098	0.4150	0.04965	20.141	0.11965	8.3576	13
14	2.5785	0.3878	0.04435	22.550	0.11435	8.7454	14
15	2.7590	0.3624	0.03979	25.129	0.10979	9.1079	15

درونیابی خطی (مثال قبل)

$$\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 10\right) = ?$$

6%	1.7908
6.09%	?
7%	1.9671

$$\frac{7-6}{1.9671-1.7908} = \frac{6.09-6}{X_{6.09}-1.7908} \longrightarrow \frac{1}{0.1763} = \frac{0.09}{X_{6.09}-1.7908}$$

$$X_{6.09} - 1.7908 = (0.1763) * 0.09 \longrightarrow X_{6.09} = 1.806667$$

$$\left(\frac{F}{P}, 6.09\%, 10\right) = 1.806667$$

مثال

- فردی مبلغ ۱۰۰۰۰ دلار با نرخ بهره سالیانه ۸٪ که بصورت سه ماهه مرکب می شود از بانکی وام گرفته است. وام با ۳۶ قسط ماهانه مساوی باز پرداخت می شود. مقدار پرداخت های ماهیانه چه مبلغی است؟

$$A = 10000 \times f\left(\frac{A}{P}, i\%, 36\right) \qquad r = 0.08, \quad m = 4, \quad k = 12$$

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/k} - 1 = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1 = 0.006623 \text{ or } 0.6623\%$$

$$A = 10000\left(\frac{A}{P}, 0.6623\%, 36\right) = 10000 \times 0.031312 = \$313.12$$

Monthly payments =PMT(0.6623%,36,-10000)

PMT(rate, nper, pv, [fv], [type])

(اکسل

مثال

Nominal Rate	Annually $m=1$	Semi-annually $m=2$	Quarterly $m=4$	Monthly $m=12$	Daily $m=365$
4%	4%	4.04%	4.06%	4.07%	4.08%
5%	5%	5.06%	5.09%	5.12%	5.13%
6%	6%	6.09%	6.14%	6.17%	6.18%
7%	7%	7.12%	7.19%	7.23%	7.25%
8%	8%	8.16%	8.24%	8.30%	8.33%
9%	9%	9.20%	9.31%	9.38%	9.42%
10%	10%	10.25%	10.38%	10.47%	10.52%
11%	11%	11.30%	11.46%	11.57%	11.62%
12%	12%	12.36%	12.55%	12.68%	12.74%

Note: when $m = 1$, $i_e = r$

بهره پیوسته مرکب (تبدیل پیوسته)

- هر چه تعداد مرکب شدن در سال بیشتر باشد، نرخ موثر سالیانه افزایش بیشتری خواهد داشت.
- تعداد مرکب شدن در دوره حتی می‌تواند بر حسب ساعات و یا لحظات باشد که مرکب کردن پیوسته را بوجود می‌آورد.
- در مرکب شدن پیوسته، سال به تعداد بی نهایت دوره تقسیم می‌شود.

$$i_e = \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1\right) = e^r - 1$$

$$f\left(\frac{F}{P}, i\%, n\right) = (1+i)^n \longrightarrow \left({}^{F}/_{P}, i\%, n\right)^{\infty} = (1+i_e)^n = (1+e^r-1)^n = e^{rn}$$

فرم استاندارد فاکتور	فاکتور	پارامتر معلوم	پارامتر مجهول
$(P/F,r,n)^{\infty}$	$e^{-r.n}$	F	P
$(F/P,r,n)^{\infty}$	$e^{r.n}$	P	F
$(F/A,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}-۱}{e^{r}-۱}$	A	F
$(A/F,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r}-۱}{e^{r.n}-۱}$	F	A
$(P/A,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}-۱}{e^{r.n}(e^{r}-۱)}$	A	P
$(A/P,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}(e^{n}-۱)}{e^{r.n}-۱}$	P	A
$(P/G,r,n)^{\infty}$	$\frac{e^{r.n}-1-n(e^{r}-۱)}{e^{r.n}(e^{r}-۱)^{۲}}$	G	P
$(A/G,r,n)^{\infty}$	$\frac{۱}{e^{r}-۱}-\frac{n}{e^{r.n}-۱}$	G	A

مثال

- اگر ۲۰۰۰۰۰ واحد پولی با نرخ ۱۲٪ در سال بطور مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری شود، مقدار ارزش آینده بعد از ۵ سال چقدر خواهد شد؟

$$F = P\left({}^{F}/_{P}, i\%, n\right)^{\infty} = 200000\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}}, 12\%, 5\right)^{\infty} = 200000\left(e^{0.12\times 5}\right) = 364424$$

- اگر در یک موسسه مالی، نرخ بهره پیوسته مرکب ۵ درصد به سپرده‌ی شما تعلق بگیرد، برای اینکه ٦ سال دیگر، ۹۰۰۰۰ واحد پولی داشته باشید، در حال حاضر چقدر باید سرمایه‌گذاری کرد؟

$$P = 90000\left(\frac{P}{F}, 5\%, 6\right)^{\infty} = F \times (e)^{-r\times n} = 90000\left(e^{-0.05\times 6}\right) = 66674$$