

Exercice 1.

- Déterminer le degré ainsi que le coefficient dominant de chacun des polynômes suivants :
 - $P = (3X^2 + 5X - 1)(-3X^3 + 2)$
 - $Q = (iX^4 - 5) + ((iX)^2 + 2X)iX^2$
- Soit $C = X^2 + 2X - 1$ et $D = X - 3$. Déterminer $\deg(C \circ D)$. Calculer $C \circ D$ et $D \circ C$. A-t-on l'égalité entre les deux résultats ?

Exercice 2.

Déterminer pour chacun des cas suivants si l'un des polynômes divise l'autre :

- $P = X^2 + 2X + 1$ et $Q = X + 1$
- $P = X - i$ et $Q = X^2 + 1$ (supp.)
- $P = X^2 + 1$ et $Q = 2X^2 + 2$. La relation de divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$ est-elle antisymétrique ?

Exercice 3.

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

- $A = 2X^3 - X^2 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$
- $A = X^4 - X^2 - 2X + 2$ et $B = X^2 + 2X + 2$
- $A = X^4 - 3X^2 + 2$ et $B = X^2 + 2X + 2$ (supp.)
- $A = X^5 - 4X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 5X - 2$ et $B = X^3 + 2X^2 + X + 1$ (supp.)
- $A = (i + 1)X^3 + iX^2 - 2X + 1$ et $B = X - 1$
- $A = X^4 + iX^2 - i$ et $B = iX^3 - 1$

Existe-t-il, parmi les exemples précédents, un polynôme B qui divise le polynôme A correspondant ?

Exercice 4.

Déterminer le PGCD des polynômes dans les cas suivants et déduire ceux qui sont premiers entre eux.

- $P = X^5 - 2X^4 + 6X^3 - 11X^2 + 7X - 1$ et $Q = X^3 - X^2 - X + 1$
- $P = X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 6X - 10$ et $Q = X^2 + 3X - 5$
- $P = -X^2 - 3iX + 2$ et $Q = X - i$
- $P = iX^3 + 2X^2 - iX$ et $Q = X + 1$ (supp.)

Exercice 5.

Factoriser les polynômes suivants dans le corps correspondant

- $P = X^3 - X^2 - 14X + 24$ dans $\mathbb{R}[X]$
- $Q = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
- $R = 3X^4 - 4X^3 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
- $S = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ dans $\mathbb{R}[X]$. (supp.)
- $T = X^6 + 3X^5 - 2X^4 - 16X^3 - 21X^2 - 11X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$. (supp.)