Université Abou Bekr BELKAID-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'Informatique

Algèbre 1
Corrigé Série de TD N° 4
Structures algébriques

Année Universitaire 2024/2025
L1 Informatique
Semestre 1

Solution Exercice 1.

1. (a) $P=(3X^2+5X-1)(-3X^3+2)=-9X^5-15X^4+3X^3+6X^2+10X-2$. *Donc* $\deg P=5$ *et* $a_5=-9$.

   (b) $(iX^4-5)+((iX)^2+2X)iX^2=-2iX^3-5$. *Donc* $\deg Q=3$ *et* $a_3=-2i$.

2. $C=X^2+2X-1$ *et* $D=X-3$. *Donc* $\deg(C\circ D)=\deg C\cdot\deg D=2\cdot 1=2$.

$$C\circ D=(X-3)^2+2(X-3)-1=X^2-4X+3$$
$$D\circ C=(X^2+2X-1)-3=X^2+2X-4$$

Non, on n'a pas l'égalité : $C\circ D\neq D\circ C$.

Solution Exercice 2.

1. $Q=X+1$ *divise* $P=X^2+2X+1$ *car* $P=X^2+2X+1=(X+1)^2=(X+1)(X+1)=Q(X+1)$
2. $P=X-i$ *divise* $Q=X^2+1$ *car* $Q=X^2+1=(X-i)(X+i)=P(X+i)$
3. $P=X^2+1$ *divise* $Q=2X^2+2$ *car* $Q=2X^2+2=2(X^2+1)=2P$ *et* $Q=2X^2+2$ *divise* $P=X^2+1$ *car* $P=X^2+1=\frac{1}{2}(2X^2+2)=\frac{1}{2}Q$
   La relationde divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$ *n'est pas antisymétrique car on a vu dans l'exemple précédent que pour* $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $Q|P$ *et* $P|Q$ *et* $Q=2P\neq P$.

Solution Exercice 3.

1.

$$\begin{array}{r|l}
2X^3-X^2-2X+1 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2}
-2X^3-2X^2-2X\quad & 2X-3 \\ \cline{1-1}
-3X^2-4X+1 & \\
3X^2+3X+3 & \\ \cline{1-1}
-X+4 &
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r|l}
X^4\qquad\quad -X^2-2X+2 & X^2+2X+2 \\ \cline{2-2}
-X^4-2X^3-2X^2\qquad\quad & X^2-2X+1 \\ \cline{1-1}
-2X^3-3X^2-2X\quad & \\
2X^3+4X^2+4X\quad & \\ \cline{1-1}
X^2+2X+2 & \\
-X^2-2X-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r|l}
X^4\qquad -3X^2\qquad\quad +2 & X^2+2X+2 \\ \cline{2-2}
-X^4-2X^3-2X^2\qquad\quad & X^2-2X-1 \\ \cline{1-1}
-2X^3-5X^2\qquad\quad & \\
2X^3+4X^2+4X\quad & \\ \cline{1-1}
-X^2+4X+2 & \\
X^2+2X+2 & \\ \cline{1-1}
6X+4 &
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r|l}
X^5-4X^4+6X^3-6X^2+5X-2 & X^3+2X^2+X+1 \\ \cline{2-2}
-X^5-2X^4-X^3-X^2\qquad\qquad & X^2-6X+17 \\ \cline{1-1}
-6X^4+5X^3-7X^2+5X\quad & \\
6X^4+12X^3+6X^2+6X\quad & \\ \cline{1-1}
17X^3-X^2+11X-2 & \\
-17X^3-34X^2-17X-17 & \\ \cline{1-1}
-35X^2-6X-19 &
\end{array}$$

5.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
(1+1i)\,X^3 & +iX^2 & -2X & +1 & X-1 \\ \cline{5-5}
-(1+1i)\,X^3 & +(1+1i)\,X^2 & & & (1+1i)\,X^2+(1+2i)\,X+(-1+2i) \\ \cline{1-2}
 & (1+2i)\,X^2 & -2X & & \\
 & -(1+2i)\,X^2 & +(1+2i)\,X & & \\ \cline{2-3}
 & & (-1+2i)\,X & +1 & \\
 & & -(-1+2i)\,X & +(-1+2i) & \\ \cline{3-4}
 & & & 2i &
\end{array}
$$

6.

$$
\begin{array}{rrr|l}
X^4+iX^2 & & -i & iX^3-1 \\ \cline{4-4}
-X^4 & +i^{-1}X & & i^{-1}X \\ \cline{1-2}
 & iX^2+i^{-1}X & -i &
\end{array}
$$

Oui, dans le deuxième exemple : $B=X^2+2X+2$ *divise* $A=X^4-X^2-2X+2$ *car le reste de la division euclidienne est* 0*, ce qui a donné :*

$$\underbrace{X^4-X^2-2X+2}_{A}=\underbrace{(X^2+2X+2)}_{B}(X^2-2X+1)$$

Solution Exercice 4.

1.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & -2X^4 & +6X^3 & -11X^2 & +7X & -1 & X^3-X^2-X+1 \\ \cline{7-7}
-X^5 & +X^4 & +X^3 & -X^2 & & & X^2-X+6 \\ \cline{1-4}
 & -X^4 & +7X^3 & -12X^2 & +7X & & \\
 & X^4 & -X^3 & -X^2 & +X & & \\ \cline{2-5}
 & & 6X^3 & -13X^2 & +8X & -1 & \\
 & & -6X^3 & +6X^2 & +6X & -6 & \\ \cline{3-6}
 & & & -7X^2 & +14X & -7 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -X^2 & -X & +1 & -7X^2+14X-7 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +2X^2 & -X & & -\frac{1}{7}X-\frac{1}{7} \\ \cline{1-3}
 & X^2 & -2X & +1 & \\
 & -X^2 & +2X & -1 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

d'où

$$\operatorname{pgcd}(X^5-2X^4+6X^3-11X^2+7X-1,X^3-X^2-X+1)=\frac{-1}{7}(-7X^2+14X-7)=X^2-2X+1$$

2.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +3X^3 & -3X^2 & +6X & -10 & X^2+3X-5 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -3X^3 & +5X^2 & & & X^2+2 \\ \cline{1-3}
 & & 2X^2 & +6X & -10 & \\
 & & -2X^2 & -6X & +10 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

d'où

$$\operatorname{pgcd}(X^4+3X^3-3X^2+6X-10,X^2+3X-5)=X^2+3X-5$$

donc P *est divisible par* Q*.*

3. *L'exemple 3*

$$
\begin{array}{r|l}
-X^2 - 3iX + 2 & X - i \\ \cline{2-2}
\underline{X^2 - iX } & -X - 4i \\
-4iX + 2 & \\
\underline{4iX + 4} & \\
6 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
X - i & 6 \\ \cline{2-2}
\underline{-X } & \frac{1}{6}X - \frac{1}{6}i \\
-i & \\
\underline{i} & \\
0 &
\end{array}
$$

d'où

$$\text{pgcd}(-X^2 - 3iX + 2, X - i) = \frac{6}{6} = 1$$

Ces deux polynômes sont donc premiers entre eux.

4. *L'exemple 4*

$$
\begin{array}{rrrr|l}
iX^3 & +2X^2 & -iX & & X + 1 \\ \cline{5-5}
-iX^3 & -iX^2 & & & iX^2 \quad +(2-i)X \quad -2 \\ \cline{1-2}
 & (2-i)X^2 & -iX & & \\
 & -(2-i)X^2 & -(2-i)X & & \\ \cline{2-3}
 & & -2X & & \\
 & & 2X & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
X & +1 & 2 \\ \cline{3-3}
-X & & \frac{1}{2}X \quad +\frac{1}{2} \\ \cline{1-2}
 & 1 & \\
 & -1 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

d'où

$$\text{pgcd}(iX^3 + 2X^2 - iX, X + 1) = \frac{2}{2} = 1$$

Ces deux polynômes sont donc premiers entre eux.

Solution Exercice 5.

1. *Factoriser $P = X^3 - X^2 - 14X + 24$ dans $\mathbb{R}[X]$.*
   (a) *En faisant des tests avec des valeurs "simples" :$-2, -1, 0, 1, 2, i, -i$, on remarque que $P(2) = 2^3 - 2^2 - 14 \cdot 2 + 24 = 0$, donc 2 est une racine de P.*
   (b) *On calcule $P^{'}(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 14 = -6 \neq 0$, donc 2 est une racine simple de P. On déduit alors que P est divisible par $(X - 2)$.*
   (c) *On fait la division euclidienne de P par $(X - 2)$:*

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -X^2 & -14X & +24 & X - 2 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +2X^2 & & & X^2 + X - 12 \\ \cline{1-2}
 & X^2 & -14X & & \\
 & -X^2 & +2X & & \\ \cline{2-3}
 & & -12X & +24 & \\
 & & 12X & -24 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

   (d) *Cherchons les racines du quotient $X^2 + X - 12$. Le discriminant étant $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$, le quotient possède deux racines réelles qui sont : $X_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$ et $X_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$, d'où $X^2 + X - 12 = (X - 3)(X + 4)$.*

   Donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = (X - 2)(x - 3)(x + 4)$$

.

2. *Factoriser $Q = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$*

(a) *On remarque que* $Q(-1) = 0$.

(b) *On a aussi* $Q^{'}(-1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 = 1 \neq 0$ *donc* -1 *est une racine simple pour* Q *d'où* Q *est divisible par* $(X + 1)$.

(c) *effectuons la division euclidienne de* Q *par* $(x + 1)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} X^3 & +2X^2 & +2X & +1 & X+1 \\ \cline{5-5} -X^3 & -X^2 & & & X^2+X+1 \\ \cline{1-2} & X^2 & +2X & & \\ & -X^2 & -X & & \\ \cline{2-3} & & X & +1 & \\ & & -X & -1 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

(d) *Cherchons les racines du quotient* X^2+X+1. *Le discriminant étant* $\Delta = 1-4\cdot1\cdot1 = -3$, *le quotient ne possède pas de racines réelles, il est donc irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$.

Donc la factorisation de Q *dans* $\mathbb{R}[X]$ *est :*

$$Q = (X + 1)(X^2 + x + 1)$$

.

3. *Factoriser* $R = 3X^4 - 4X^3 + 1$ *dans* $\mathbb{C}[X]$.

(a) *On remarque que* $R(1) = 0$.

(b) *Calculons* $R^{'}(1) = 12 \cdot 1 - 12 \cdot 1 = 0$ *et* $R^{''}(1) = 36 \cdot 1 - 24 \cdot 1 = 12 \neq 0$. *Donc* 1 *est une racine double pour* R, *d'où* R *est divisible par* $(X - 1)^2$.

(c) *effectuons la division euclidienne de* R *par* $(X - 1)^2$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3X^4 & -4X^3 & & & +1 & X^2-2X+1 \\ \cline{6-6} -3X^4 & +6X^3 & -3X^2 & & & 3X^2+2X+1 \\ \cline{1-3} & 2X^3 & -3X^2 & & & \\ & -2X^3 & +4X^2 & -2X & & \\ \cline{2-4} & & X^2 & -2X & +1 & \\ & & -X^2 & +2X & -1 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

(d) *Cherchons les racines du quotient* $3X^2+2X+1$. *Le discriminant étant* $\Delta = 4-4\cdot3\cdot1 = -8$, *le quotient possède deux racines complexes conjuguées qui sont :* $X_1 = \frac{2-i2\sqrt{2}}{6} = \frac{1-i\sqrt{2}}{3}$ *et* $X_2 = \frac{2+i2\sqrt{2}}{6} = \frac{1+i\sqrt{2}}{3}$, *d'où* $3X^2 + 2X + 1 = (X - \frac{1-i\sqrt{2}}{3})(X - \frac{1+i\sqrt{2}}{3})$.

Donc la factorisation de R *dans* $\mathbb{C}[X]$ *est :*

$$R = (X - 1)^2(X - \frac{1 - i\sqrt{2}}{3})(X - \frac{1 + i\sqrt{2}}{3})$$

.

4. *Factoriser* $S = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.

$$S = (X - 1)^3(X - 2)^2$$

5. *Factoriser* $T = X^6 + 3X^5 - 2X^4 - 16X^3 - 21X^2 - 11X - 2$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.

$$T = (X + 1)^3(X + 2)(X - 1 + \sqrt{2})(X - 1 - \sqrt{2})$$