Algèbre 2

Série de TD N° 2

Applications Linéaires, Matrices, Systèmes Linéaires

Exercice 1. *Soit :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (x-2y, y+x+2z) \end{aligned}$$

1. *Vérifier que f est bien une application linéaire.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Im} f$.
3. *Déduire* $\dim \mathrm{Ker} f$. *L'application f est-elle injective ?*
4. *Déterminer* $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 2. *Soit :*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (x+y+z, y, z) \end{aligned}$$

1. *Vérifier que g est bien une application linéaire.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker} g$.
3. *L'application g est-elle bijective ?*
4. *Déduire* $\mathrm{Im} g$.

Exercice 3.

1. *Effectuer toutes les opérations d'addition et de multiplications possibles entre deux matrices parmi les suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ {}^tB,\ {}^tC$$

2. *Deux matrices parmi les suivantes sont nilpotente d'indice* 2 *et* 3. *Trouvez-les :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

1. *Calculer les déterminants des matrices suivantes :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix},$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. *Parmi les matrices précédentes, déduire celles qui sont inversibles et calculer leur inverses.*

Exercice 5. *Soit :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (2x-y+z, 3x-y-z, 4x+y+z) \end{aligned}$$

1. *Trouver $\mathcal{M}_B(f)$ la matrice associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer le rang de $\mathcal{M}_B(f)$. L'application f est-elle bijective ?*