ANALYSE II

Contrôle Continue – Semestre II

Durée: 01h30 – Coefficient: 40% – Usage des documents et de outils du calculs est interdit

Exercice 1 (05 pts). Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{4+x^2}}{x-2+\sqrt{4+x^2}}.$$

- Donner le développement limité de la fonction f au voisinage de zéro à l'ordre deux.
- Calculer la limite de f lorsque x tend vers zéro.
- Étudier la position de la courbe de la fonction f par rapport à la tangente en zéro.

Exercice 2 (05 pts). Montrer que

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \quad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}.$$

Exercice 3 (05 pts). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tel que f et f'' bornées. En pose

$$M_1 = \operatorname*{Sup}_{x\in]0,+\infty[} |f(x)|, \quad M_2 = \operatorname*{Sup}_{x\in]0,+\infty[} \left|f''(x)\right|.$$

- Soit $x, h \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant la formule de Taylor sur l'intervalle $[x, x+h]$ montrer que

$$\left|f'(x)\right| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_1.$$

- Montrer que la fonction Φ définie par

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^* : \quad \Phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_1,$$

  admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 (05 pts). Calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx, \quad \int \frac{4x^3}{1+x^4}dx, \quad \int \left(\operatorname{ch}(x)\right)^2 dx.$$

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des sciences – Tidjani Haddam
Département d'Informatiques

ANALYSE II

Contrôle Continue – Semestre II

Solution & Barème

Durée: 01h30 – Coefficient: 40% – Usage des documents et de outils du calculs est interdit

Exercice 1 (05 pts). Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2-\sqrt{4+x^2}}{x-2+\sqrt{4+x^2}}.$$

- Le développement limité de la fonction f au voisinage de zéro à l'ordre deux :
  Dans un premier temps on a

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}-1+\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}, \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

On utilise l'information que

$$\sqrt{1+z} = 1+\frac{1}{2}z+o(z),$$

et le fait que $\underbrace{\text{pour } x \in \mathscr{V}(0) \text{ on a } y = x/2 \in \mathscr{V}(0)}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1-\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}-1+\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} &= \frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y-1+\sqrt{1+y^2}} && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}y^2}{y+\frac{1}{2}y^2}+o(y^2), && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= -\frac{y}{2}\frac{1}{1+\frac{y}{2}}+o(y^2), \\
&= -\frac{y}{2}\left[1-\frac{y}{2}\right]+o(y^2), && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}} \\
&= -\frac{y}{2}+\left(\frac{y}{2}\right)^2+o(y^2), \\
f(x) &= -\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2+o(x^2). && \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}
\end{aligned}$$

- Calcul de la limite de f lorsque x tend vers zéro :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2+o(x^2) = 0. \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

- Étude la position de la courbe de la fonction f par rapport à la tangente en zéro :

$$f(x) + \frac{x}{4} = o(x) = \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(c), \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

avec c entre 0 et x, $x \in \mathscr{V}(0)$.
Le développement limité donner que $\underbrace{f^{(2)}(0) = 1/8 > 0}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}}$, donc $\underbrace{\text{dans un voisinage de 0 on a } f^{(2)}(c) > 0}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}}$. D'où

$$f(x) + \frac{x}{4} > 0$$

et donc

$$\underbrace{f(x) > -\frac{x}{4} = y \longleftarrow \boxed{\text{L'équation de la tangente}}}_{\boxed{00.50 \text{ pt}}}$$

Exercice 2 (05 pts). Montrer que

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

- Soit $x \in [-\pi/2, \pi/2]$: En utilise la formule de Taylor−Lagrange à l'ordre 5 au voisinage de zéro on obtient

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \cos^{(5)}(c) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \sin(c) \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}} \end{aligned} \tag{1}$$

avec c entre 0 et x. Le fait que

$$\begin{aligned} &\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall c \in [0, x] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]: \quad \sin(c) \geq 0, \quad \frac{x^5}{5!} \geq 0, \\ &\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \quad \forall c \in [x, 0] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]: \quad \sin(c) \leq 0, \quad \frac{x^5}{5!} \leq 0, \end{aligned}$$

donne

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall c \in [0, x](\text{ ou } [x, 0]) \subset \left[-, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \quad \frac{x^5}{5!} \sin(c) \geq 0, \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

et ceci avec la relation (1) conduit à

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \quad \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}} \tag{2}$$

- Soit $x \in [-\pi/2, \pi/2]$: En utilise la formule de Taylor−Lagrange à l'ordre 7 au voisinage de zéro on obtient

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \cos^{(7)}(c) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \sin(c) \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}} \end{aligned} \tag{3}$$

avec c entre 0 et x. Le fait que

$$\begin{aligned} &\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall c \in [0, x] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]: \quad \sin(c) \geq 0, \quad \frac{x^7}{7!} \geq 0, \\ &\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \quad \forall c \in [x, 0] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]: \quad \sin(c) \leq 0, \quad \frac{x^7}{7!} \leq 0, \end{aligned}$$

donne

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall c \in [0, x](\text{ ou } [x, 0]) \subset \left[-, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \quad \frac{x^7}{7!} \sin(c) \geq 0, \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

et ceci avec la relation (3) conduit à

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \quad \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}} \tag{4}$$

Le deux inégalités (2)-(4) donnent (1). $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

Exercice 3 (à considérer comme Facultatif). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tel que f et f'' bornées. En pose

$$M_1 = \underset{x\in]0,+\infty[}{\text{Sup}} |f(x)|, \quad M_2 = \underset{x\in]0,+\infty[}{\text{Sup}} \left|f''(x)\right|. \tag{5}$$

- Soit $x, h \in \mathbb{R}_+^*$, en utilisant la formule de Taylor sur l'intervalle $[x, x+h]$ on veut montrer que :

$$\left|f'(x)\right| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_1.$$

La formule de Taylor sur l'intervalle $[x, x+h]$ à l'ordre deux donne

$$\exists c \in [x, x+h] : \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(c), \qquad \longleftarrow \boxed{00.25 \text{ pt}}$$

donc

$$\exists c \in [x, x+h] : \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{h}{2!}f''(c),$$

alors

$$\begin{aligned}\exists c \in [x, x+h] : \quad |f'(x)| &= \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{h}{2!}f''(c)\right|, \\ &\leq \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{h} + \frac{h}{2!}|f''(c)|. \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}\end{aligned}$$

Ceci avec la relation (5) donnent $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_1}{h} + \frac{h}{2!}M_2. \tag{6}$$

- On montre que la fonction Φ définie par

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^* : \quad \Phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_1,$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\Phi'(h) = \frac{1}{2}M_2 - \frac{2}{h^2}M_1, \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

ce qui donne

$$\overbrace{\left.\begin{array}{lcl} \Phi(h) = 0 & \Longleftrightarrow & h = 2\sqrt{M_1/M_2} \\ \Phi(h) > 0 & \Longleftrightarrow & h > 2\sqrt{M_1/M_2} \\ \Phi(h) < 0 & \Longleftrightarrow & 0 < h < 2\sqrt{M_1/M_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{h\in[0,+\infty[}{\text{Min}} \Phi(h) = \Phi\left(2\sqrt{M_1/M_2}\right) = 2\sqrt{M_1 M_2}.}^{\boxed{00.50 \text{ pt}}}$$

- On montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$:
La relation (6) peut être affirme que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall h \in \mathbb{R}_+^* : \quad |f'(x)| \leq \Phi(h),$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad \underbrace{\underset{h\in[0,+\infty[}{\text{Min}} |f'(x)|}_{= |f'(x)|} \leq \underbrace{\underset{h\in[0,+\infty[}{\text{Min}} \Phi(h)}_{= 2\sqrt{M_1 M_2}}, \qquad \longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$$

ceci conduit à conclure de f' est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. $\longleftarrow \boxed{00.50 \text{ pt}}$

Exercice 4 (05 pts). Calcul des intégrales

- Calcul de $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{3}{x^2+2x+2}dx \\ &= \mathrm{Ln}|x^2+2x+2| - 3\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}\end{aligned}$$

Or $x^2+2x+1 = (x+1)^2+1$, donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{1}{1+(x+1)^2}dx \\ &= \left\langle \begin{array}{l} y = x+1 \\ x = y-1 \\ dx = dy \end{array} \right\rangle \\ &= \int \frac{1}{1+y^2}dy = \mathrm{arctg}(y) = \mathrm{arctg}(x+1) + Cst. \qquad \longleftarrow \boxed{02.00 \text{ pt}}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx = \mathrm{Ln}|x^2+2x+2| - 3\mathrm{arctg}(x+1) + Cst. \qquad \longleftarrow \boxed{01.00 \text{ pt}}$$

- Calcul de $\int \frac{4x^3}{1+x^4}dx$: $\longleftarrow \boxed{02.00 \text{ pt}}$

$$\int \frac{4x^3}{1+x^4}dx = \mathrm{Ln}(1+x^4) + Cst.$$

- Calcul de $\int (\mathrm{ch}(x))^2 dx$: $\longleftarrow \boxed{02.00 \text{ pt}}$

$$\begin{aligned}\int (\mathrm{ch}(x))^2 dx &= \int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int e^{2x} + e^{-2x} + 2\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{sch}(2x) + 1\, dx \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{sh(2x)} + \frac{1}{2}x + Cst.\end{aligned}$$