Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des sciences – Tidjani Haddam
Département d'Informatiques

L1. Tc. Ing. Inform., année universitaire 2022 – 2023

ANALYSE I

Examen De Remplacement Du Contrôle Continue Du Premier Semestre

Durée: 01h30 – Coefficient: 40% – Usage des documents et de outils du calculs est interdit

Exercice 1 (05 pts). Déterminer (dans le cas ou ils existent) la borne supérieure, la borne inférieure, l'élément maximale et l'élément minimale de l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : \quad -2 \leq x + \frac{1}{2x} \leq +2 \right\}.$$

Exercice 2 (05 pts). Soit le sous ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \frac{(\mathrm{E}(x))^4}{(\mathrm{E}(x))^2 + 2} \geq 1, \quad \mathrm{E}(x) < 4 \right\}.$$

- En utilisant la caractérisation de la borne inférieure et de la borne supérieure, déterminer $\mathrm{Sup}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Inf}(\mathcal{A})$.
- Déterminer, s'il existe, l'élément maximale et l'élément minimale de l'ensemble $\mathcal{A}$.

Exercice 3 (05 pts). Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad u_0 = \sqrt{3}.$$

- Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq \sqrt{2}/2$.
- Étudier la monotonie de la fonction f et montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
- Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et calculer ca limite.

Exercice 4 (05 pts). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$. On note par

$$A = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

- Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad At^2 + 2Bt + C \geq 0.$$
- Déduire que
$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)}.$$
- Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 \right)^2 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$