Algèbre 1
Série de TD N° 4
Structures algébriques

Exercice 1.
On définit sur $E =]-1, 1[$ *la loi* $*$ *par :*

$$\forall x, y \in E,\ x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1. *Montrer que cette loi* $*$ *est interne dans* E.
2. *Montrer que* $*$ *est commutative.*
3. *la loi* $*$ *est-elle associative ?*
4. *La loi* $*$ *admet-elle un élément neutre ?*
5. *Les éléments de* E *admettent-ils des symétriques pour* $*$.
6. *Que peut-on dire de* $(E, *)$ *?*

Exercice 2.
Dans $G = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ *on définit la loi* $*$ *par :*

$$\forall x, y \in G,\ x * y = x + y + xy.$$

1. *Montrer que* $(G, *)$ *est un groupe abélien.*
2. *Résoudre dans* $(G, *)$ *l'équation* $a * x = b$.

Exercice 3.
Soit $(H, *)$ *un groupe et soit l'ensemble* $C = \{c \in H, \forall x \in H,\ c * x = x * c\}$.
Montrer que C *est un sous-groupe de* H.

Exercice 4.
Soit un entier $k \geq 2$ *et soit l'application :*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ n &\mapsto f(n) = kn \end{aligned}$$

1. *Montrer que* f *est un morphisme de groupes.*
2. *Déterminer* $f^{-1}(\{e'\})$, *où* e' *est l'élément neutre de* $(\mathbb{Z}, +)$. *Que peut-on dire de cet ensemble ?*

Exercice 5.
Dans $\mathbb{R}^2$, *on définit les lois de composition internes suivantes :*

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \times (c, d) &= (ac, ad + bc) \end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ *est un anneau commutatif.*

Exercice 6.
On définit sur $\mathbb{R}$ *deux lois* $\oplus$ *et* $\otimes$ *par :*

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y - 1 \\ x \otimes y &= x + y - xy \end{aligned}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ *est un corps commutatif.*