Algèbre 2
Série de TD N° 1
Espace vectoriel

Exercice 1.

Vérifier si les ensembles suivant sont des sous espaces vectoriels des espaces vectoriels correspondants :

1. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y + z = 0\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}^3$.
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y + z = 1\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}^3$.
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}^3$. *(supp.)*
4. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y = 0\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}^2$.
5. $H = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) + 2P'(1) = 0,\ P'(2) + P''(2) = 0\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}[X]$. *(supp.)*

Exercice 2.

Vérifier si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées :

1. $\{(2, 3), (-1, 1)\}$
2. $\{(2, 6, -1), (0, -3, 1), (4, 9, -1)\}$
3. $\{(2, 6, -1), (0, -3, 1), (4, 9, -1), (1, 0, 0)\}$
4. $\{X + 1, -2X^2 - X + 1, X^2 + X\}$

Exercice 3.

1. *Montrer que la famille de vecteurs* $\mathcal{F} = \{(1, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Déterminer le sev engendré par la famille de vecteurs suivante :* $\mathcal{G} = \{(-1, 0, 2), (0, 2, 3)\}$
3. *Vérifier si le vecteur* $s = (1, 0, -1, 5)$ *appartient au sev engendré par les vecteurs* $u = (1, 4, 5, 2)$, $v = (1, 2, 3, 2)$, $w = (1, 1, 0, -1)$.
4. *(supp.) Soit les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *suivants :* $v_1 = (1, -1, 5), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (1, 0, 2), v_4 = (0, -1, 3)$.
   (a) *Verifier que* $v_3, v_4 \in Vect\{v_1, v_2\}$.
   (b) *Vrérifier que* $v_1, v_2 \in Vect\{v_3, v_4\}$.
   (c) *Que peut-on dire des sev* $Vect\{v_1, v_2\}$ *et* $Vect\{v_3, v_4\}$ *?*

Exercice 4.

1. *Verifier que la famille* $\mathcal{B}_1 = \{(-2, 1), (1, 2)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Verifier que la famille* $\mathcal{B}_2 = \{1, X, 1 - X^2\}$ *est une base de* $\mathbb{K}_2[X]$.*(supp.)*
3. *Soit* $\mathcal{F} = Vect\{(3, 2), (-1, 1), (2, 3)\}$. *Déterminer une base* $\mathcal{B}_3$ *de* $\mathcal{F}$ *ainsi que sa dimension.*

Exercice 5.

Soit les sev de $\mathbb{R}^3$ *:* $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0 \text{ et } z = 0\}$ *et* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0 \text{ et } z = 0\}$.
Montrer que C *et* D *sont en somme directe.*

Exercice 6.

Soit les sev de $\mathbb{R}^3$ *:* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0 \text{ et } z = 0\}$.
Montrer que F *et* G *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.