Solution Exercice 1.

1. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y + z = 0\}$, *l'ev étant* $\mathbb{R}^3$.

   Méthode 1 :

   (a) $(0, 0, 0) \in D$ *car* $0 + 3 \cdot 0 + 0 = 0$, *donc* $D \neq \varnothing$.

   (b) *Soit* $(x, y, z), (x', y', z') \in D$.
   $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$, *donc*
   $x + x' + 3(y + y') + z + z' = \underbrace{(x + 3y + z)}_{\substack{=0 \\ car\ (x,y,z)\in D}} + \underbrace{(x' + 3y' + z')}_{\substack{=0 \\ car\ (x',y',z')\in D}} = 0.$

   (c) *Soit* $(x, y, z) \in D$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ *d'où* $\alpha x + 3\alpha y + \alpha z = \alpha(x + 3y + z) = 0$ *car* $(x, y, z) \in D$.
   Donc D *est bien un sev du* $\mathbb{R}$*ev* $\mathbb{R}^3$.

   Méthode 2 :

   (a) $(0, 0, 0) \in D$ *car* $0 + 3 \cdot 0 + 0 = 0$, *donc* $D \neq \varnothing$.

   (b) *Soit* $(x, y, z), (x', y', z') \in D$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$, *donc*
   $\alpha x + \beta x' + 3(\alpha y + \beta y') + \alpha z + \beta z' = \alpha\underbrace{(x + 3y + z)}_{\substack{=0 \\ car\ (x,y,z)\in D}} + \beta\underbrace{(x' + 3y' + z')}_{\substack{=0 \\ car\ (x',y',z')\in D}} = 0.$

   D'où $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \in D$. *Donc* D *est bien un sev du* $\mathbb{R}$*ev* $\mathbb{R}^3$.

2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y + z = 1\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}^3$.
   $(0, 0, 0) \notin D$ *car* $0 + 3 \cdot 0 + 0 = 0 \neq 1$, *d'où* $(0, 0, 0) \notin D$. *Donc* E *n'est pas un sev du* $\mathbb{R}$*ev* $\mathbb{R}^3$.

3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = 0$ *et* $x + y + z = 0\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}^3$.

   Méthode 1 : ...

   Méthode 2 :

   (a) $(0, 0, 0) \in F$ *car* $0 + 2 \cdot 0 = 0$ *et* $0 + 0 + 0 = 0$, *donc* $F \neq \varnothing$.

   (b) *Soit* $(x, y, z), (x', y', z') \in D$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$, *donc*
   $\alpha x + \beta x' + 2(\alpha y + \beta y') = \alpha\ \underbrace{(x + 2y)}_{\substack{=0 \\ car\ (x,y,z)\in F}}\ + \beta\ \underbrace{(x' + 2y')}_{\substack{=0 \\ car\ (x',y',z')\in F}}\ = 0$
   et
   $(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y'), (\alpha z + \beta z') = \alpha\underbrace{(x + y + z)}_{\substack{=0 \\ car\ (x,y,z)\in F}} + \beta\underbrace{(x' + y' + z')}_{\substack{=0 \\ car\ (x',y',z')\in F}} = 0$

   D'où $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \in F$. *Donc* F *est bien un sev du* $\mathbb{R}$*ev* $\mathbb{R}^3$.

4. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y = 0\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}^2$.

   Méthode 1 : ...

   Méthode 2 :

   (a) $(0, 0) \in G$ *car* $0^2 - 0 = 0$, *donc* $G \neq \varnothing$.

   (b) *Soit* $(x, y), (x', y') \in G$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   $\alpha(x, y) + \beta(x', y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$, *donc*
   $(\alpha x + \beta x')^2 - (\alpha y + \beta y') = \alpha^2 x^2 + \beta^2 x'^2 - (\alpha y + \beta y') + 2\alpha\beta x x' \neq 0$. *Prenons alors un exemple : Soit* $(1, 1), (-1, 1) \in G$, *alors* $(1, 1) + (-1, 1) = (0, 2) \notin G$, *donc* G *n'est pas un sev du* $\mathbb{R}$*ev* $\mathbb{R}^2$.

5. $H = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(1) + 2P'(1) = 0,\ P'(2) + P''(2) = 0\}$, *le* $\mathbb{R}$*ev étant* $\mathbb{R}[X]$.

   Méthode 1 : ...

   Méthode 2 :

   (a) $P = 0 \in H$, *donc* $H \neq \varnothing$.

(b) *Soit* $P, Q \in H$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$(\alpha P+\beta Q)(1)+2(\alpha P+\beta Q)'(1) = \alpha P(1)+\beta Q(1)+\alpha P'(1)+\beta Q'(1) = \alpha(P(1)+2P'(1))+\beta(Q(1)+2Q'(1)) = 0$
et
$(\alpha P+\beta Q)'(2)+(\alpha P+\beta Q)''(2) = \alpha P'(2)+\beta Q'(2)+\alpha P''(2)+\beta Q''(2) = \alpha(P'(2)+P''(2))+\beta(Q'(2)+Q''(2)) = 0$

D'où $\alpha P+\beta Q \in H$. *Donc* H *est bien un sev du* $\mathbb{R}$*ev* $\mathbb{R}[X]$.

Solution Exercice 2.

1. *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\alpha(2,3)+\beta(-1,1) = (0,0) \Longrightarrow (2\alpha-\beta, 3\alpha+\beta) = (0,0)$$

d'où $2\alpha-\beta = 0$ *et* $3\alpha+\beta = 0$ *donc* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 0$ *ainsi la famille est libre.*

2. *Soit* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\alpha(2,6,-1)+\beta(0,-3,1)+\gamma(4,9,-1) = (0,0,0) \Longrightarrow (2\alpha+4\gamma, 6\alpha-3\beta+9\gamma, -\alpha+\beta+\gamma) = (0,0,0)$$

d'où

$$\begin{cases} 2\alpha+4\gamma = 0 \\ 6\alpha-3\beta+9\gamma = 0 \\ -\alpha+\beta-\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+2\gamma = 0 \\ 2\alpha-\beta+3\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ 2\alpha-\beta+3\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma \\ -4\gamma+\gamma+3\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

donc $0 \cdot \gamma = 0$ *d'où* γ *est quelconque et n'est pas nécessairement nul, de même sont donc* α *et* β. *Prenons par exemple* $\gamma = 1$, *alors* $\alpha = -2$ *et* $\beta = -1$, *on obtient alors :*

$$-2(2,6,-1)-(0,-3,1)+(4,9,-1) = (-4-0+4, -12+3+9, 2-1-1) = (0,0,0)$$

d'où la famille est liée.
Remarque : *On aurait pu remarquer dès le début que*

$$(4,9,-1) = 2(2,6,-1)+(0,-3,1)$$

et donc que la famille est liée.

3. *Cette famille contient une famille liée, elle est alors liée elle aussi.*

4. *Soit* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *alors :*

$$\alpha(X+1)+\beta(-2X^2-X)+\gamma(X^2+X) = 0 \Longrightarrow (-2\beta+\gamma)X^2+(\alpha-\beta+\gamma)X+\alpha = 0$$

et donc $\alpha = 0, \alpha-\beta+\gamma = 0, -2\beta+\gamma = 0$ *d'où* $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ *donc la famille est libre.*

Solution Exercice 3.

1. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et cherchons* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y) = \alpha(1,0)+\beta(0,1)+\gamma(0,2)$$

on obtient alors :

$$(x,y) = (\alpha, \beta+2\gamma)$$

d'où $\alpha = x, \beta = y-2\gamma$ *et* $\gamma \in \mathbb{R}$ *quelconque.*
À titre d'exemple, l'élément $(3,5)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *s'écrit, en choisissant* $\gamma = 2$, *sous la forme :*
$(3,5) = (3)(1,0)+(5-4)(0,1)+(2)(1,2) = (1,0)+(0,1)+2(0,2)$.

2. $Vect\ \mathcal{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) = \alpha(-1,0,2) + \beta(0,2,3)$ *pour* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned}(x,y,z) = \alpha(-1,0,2) + \beta(0,2,3) &\Longrightarrow (x,y,z) = (-\alpha, 2\beta, 2\alpha + 3\beta)\\ &\Longrightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 2\beta \\ z = 2\alpha + 3\beta \end{cases}\\ &\Longrightarrow z = -2x + \frac{3}{2}y\\ &\Longleftrightarrow 4x - 3y + 2z = 0\end{aligned}$$

donc $Vect\ \mathcal{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 4x - 3y + 2z = 0\}$, *c'est un plan dans* $\mathbb{R}^3$.

3. *Le vecteur* s *appartient à* $Vect\{u,v,w\}$ *s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs* u, v, w, *c'est à dire s'il existe* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $s = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

$$\begin{aligned}s = \alpha u + \beta v + \gamma w &\Longrightarrow s = \alpha(1,4,5,2) + \beta(1,2,3,2) + \gamma(1,1,0,-1)\\ &\Longrightarrow (1,0,-1,5) = (\alpha+\beta+\gamma, 4\alpha+2\beta+\gamma, 5\alpha+3\beta, 2\alpha+2\beta-\gamma)\\ &\Longrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha+\beta+\gamma \\ 0 = 4\alpha+2\beta+\gamma \\ -1 = 5\alpha+3\beta \\ 5 = 2\alpha+2\beta-\gamma \end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ -2\beta-3\gamma = -4 \\ -2\beta-5\gamma = -6 \\ -3\gamma = 3 \end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ -2\beta-3\gamma = -4 \\ -2\gamma = -2 \\ -3\gamma = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Les deux dernières équations du système donnent : $\gamma = 1$ *et* $\gamma = -1$ *ce qui est impossible, donc le système d'équation n'a pas de solution, d'où* $s \notin Vect\{u,v,w\}$.

4. $v_1 = (1,-1,5), v_2 = (1,1,-1), v_3 = (1,0,2), v_4 = (0,-1,3)$.

   (a) *Soit* $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 &\Longrightarrow (1,0,2) = \alpha(1,-1,5) + \beta(1,1,-1)\\ &\Longrightarrow (1,0,2) = (\alpha+\beta, -\alpha+\beta, 5\alpha-\beta)\\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ -\alpha+\beta = 0 \\ 5\alpha-\beta = 2 \end{cases}\\ &\Longrightarrow \beta = \frac{1}{2},\ \alpha = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   donc $v_3 \in Vect\{v_1, v_2\}$.

$$\begin{aligned}
v_4 = \alpha' v_1 + \beta' v_2 &\Longrightarrow (0,-1,3) = \alpha'(1,-1,5) + \beta'(1,1,-1) \\
&\Longrightarrow (0,-1,3) = (\alpha' + \beta', -\alpha' + \beta', 5\alpha' - \beta') \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \alpha' + \beta' = 0 \\ -\alpha' + \beta' = -1 \\ 5\alpha' - \beta' = 3 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \beta' = -\frac{1}{2},\ \alpha' = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc $v_4 \in Vect\{v_1, v_2\}$.

(b) *Soit* $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
v_1 = \lambda v_3 + \mu v_4 &\Longrightarrow (1,-1,5) = \lambda(1,0,2) + \mu(0,-1,3) \\
&\Longrightarrow (1,-1,5) = (\lambda, -\mu, 2\lambda + 3\mu) \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ -\mu = -1 \\ 2\lambda + 3\mu = 5 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \lambda = 1,\ \mu = 1
\end{aligned}$$

donc $v_1 \in Vect\{v_3, v_4\}$.

$$\begin{aligned}
v_2 = \lambda' v_3 + \mu' v_4 &\Longrightarrow (1,1,-1) = \lambda'(1,0,2) + \mu'(0,-1,3) \\
&\Longrightarrow (1,1,-1) = (\lambda', -\mu', 2\lambda' + 3\mu') \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \lambda' = 1 \\ -\mu' = 1 \\ 2\lambda' + 3\mu' = -1 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \lambda' = 1,\ \mu' = -1
\end{aligned}$$

donc $v_2 \in Vect\{v_3, v_4\}$.

(c) *On déduit alors que* $Vect\{v_1, v_2\} = Vect\{v_3, v_4\}$.

Solution Exercice 4.

1. (a) *Vérifions que les vecteurs* $(-2,1), (1,2)$ *sont libres. Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *et résolvons le système* $\alpha(-2,1) + \beta(1,2) = (0,0)$:

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{B}_1$ *est libre.*

(b) *Vérifions que les vecteurs* $(-2,1), (1,2)$ *forment une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$. *Soit Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Résolvons alors le système* $(x,y) = \alpha(-2,1) + \beta(1,2)$ *d'inconnues* α, β :

$$\begin{cases} x = -2\alpha + \beta \\ y = \alpha + 2\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{y - 2x}{5} \\ \beta = \dfrac{x + 2y}{5} \end{cases}$$

Donc la famille $\mathcal{B}_1$ *est bien génératrice de* $\mathbb{R}^2$.
La famille $\mathcal{B}_1$ *est bien une base de* $\mathbb{R}^2$.

2. (a) *Vérifions que la famille $\mathcal{B}_2$ est libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}\alpha \cdot 1 + \beta X + \gamma(1 - X^2) = 0 &\Longrightarrow \alpha + \gamma + \beta X - \gamma X^2 = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha + \gamma = 0,\ \beta = 0,\ -\gamma = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B}_2$ est libre.

(b) *Vérifions que $\mathcal{B}_2$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*

$$P = \alpha \cdot 1 + \beta X + \gamma(1 - X^2) \Longrightarrow P = \alpha + \gamma + \beta X + \gamma X^2$$

or $P \in \mathbb{R}_2[X] \Longrightarrow P = a + bX + cX^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donc $\alpha + \gamma = a,\ \beta = b,\ \gamma = c$, d'où $\alpha = a - c,\ \beta = b,\ \gamma = c$.
Donc la famille $\mathcal{B}_2$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
La famille $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. *Puisque $\mathcal{F} = Vect\{(3,2), (-1,1), (2,3)\}$ alors la famille $\{(3,2), (-1,1), (2,3)\}$ est génératrice de $\mathcal{F}$.*
On remarque que $(2,3) = (3,2) + (-1,1)$ c'est à dire que $(2,3)$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs, on peut alors le retirer et obtenir la famille $\{(3,2), (-1,1)\}$ qui est toujours génératrice de $\mathcal{F}$. Verifions si cette famille est libre : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\alpha(3,2) + \beta(-1,1) = (0,0) &\Longrightarrow (3\alpha - \beta, 2\alpha + \beta) = (0,0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = 0\end{aligned}$$

Donc la famille $\{(3,2), (-1,1)\}$ est libre et puisqu'elle est génératrice de $\mathcal{F}$ alors $\mathcal{B}_3 = \{(3,2), (-1,1)\}$ est une base de $\mathcal{F}$. On a que $card\mathcal{B}_3 = 2$ d'où $\mathcal{F}$ est de dimension finie qui est $\dim \mathcal{F} = 2$.
Supplément :
On peut aussi remarquer que : $(-1,1) = (2,3) - (3,2)$, et déduire que la famille $\{(2,3), (3,2)\}$ est une base de $\mathcal{F}$. On aura dans les deux cas que $\dim \mathcal{F} = 2$.

Solution Exercice 5.
C est un sev de $\mathbb{R}^3$, car : $(x,y,z) \in C \Longrightarrow (x,y,z) = (x,0,0) = x(1,0,0)$ d'où $C = Vect\{(1,0,0)\}$, c'est donc un sev de $\mathbb{R}^3$. (Question suppl.)
D est un sev de $\mathbb{R}^3$, car : $(x,y,z) \in D \Longrightarrow (x,y,z) = (0,y,0) = y(0,1,0)$ d'où $C = Vect\{(0,1,0)\}$, c'est donc un sev de $\mathbb{R}^3$.(Question suppl.)
Soit $(x,y,z) \in C \cap D$ donc :

$$\begin{cases} (x,y,z) \in C \\ (x,y,z) \in D \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ et } z = 0 \\ x = 0 \text{ et } z = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = z = 0$$

Donc $C \cap D = \{(0,0,0)\}$, d'où C et D sont en somme directe.

Solution Exercice 6.

1. *Montrons d'abord que F et G sont en somme directe. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$.*

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F \cap G &\Longrightarrow (x,y,z) \in F \text{ et } (x,y,z) \in G \\ &\Longrightarrow x - y - z = 0 \text{ et } y = 0,\ z = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \\ &\Longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow F \cap G = \{(0,0,0)\} \\ &\Longrightarrow F \text{ et } G \text{ sont en somme directe.} (F + G = F \oplus G)\end{aligned}$$

2. *Montrons que* $F+G=\mathbb{R}^3$.

   (a) $F+G$ *étant un sev de* $\mathbb{R}^3$ *donc* $F+G \subset \mathbb{R}^3$.

   (b) *Montrons a présent que* $\mathbb{R}^3 \subset F+G$. *Soit* $w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *et cherchons* $u=(x_1,y_1,z_1)\in F$ *et* $v=(x_2,y_2,z_2)\in G$ *tel que* $w=u+v$.

$$\begin{cases} u\in F \Longrightarrow u=(x_1,y_1,z_1)=(y_1+z_1,y_1,z_1)(\textit{puisque } x_1-y_1-z_1=0 \Longrightarrow x_1=y_1+z_1) \\ v\in G \Longrightarrow v=(x_2,y_2,z_2)=(x_2,0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w=u+v &\Longrightarrow (x,y,z)=(y_1+z_1,y_1,z_1)+(x_2,0,0) \\ &\Longrightarrow (x,y,z)=(y_1+z_1+x_2,y_1,z_1) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x=y_1+z_1+x_2 \\ y=y_1 \\ z=z_1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x_2=x-y-z \\ y_1=y \\ z_1=z \end{cases} \\ &\Longrightarrow (x,y,z)=(y+z,y,z)+(x-y-z,0,0) \\ &\Longrightarrow u=(y+z,y,z) \textit{ et } v=(x-y-z,0,0) \end{aligned}$$

d'où $(x,y,z)\in F+G$, *donc* $\mathbb{R}^3\subset F+G$, *ainsi* $F+G=\mathbb{R}^3$.

Conclusion $F\oplus G=\mathbb{R}^3$ *c'est à dire que* F *et* G *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$.