CHAPITRE 1 : MÉTHODES DE SIMPLIFICATION

Tables de Karnaugh

Mme KAZI TANI ADILA

Structure Machine 2

Introduction

- Dés que nous avons une fonction logique représentée soit par une **expression écrite**, soit par un **schéma logique** ou bien par une **table de vérité**, il est peut être possible de la réduire en une expression plus simple.
- La **simplification** consiste à écrire une fonction à l'aide d'un nombre minimum des termes et des opérateurs logiques afin de **minimiser le coût** de réalisation des circuits logiques.

Introduction

- Il existe plusieurs techniques des simplification , nous allons nous intéresser à deux méthodes élémentaires :
  - Une méthode **algébrique**, basé sur l’application des règles de l’algèbre de Boole tels que les propriétés , lois de Morgan et formes canoniques (vu dans le chapitre précédant), cette procédure est cependant relativement lourde et ne permet jamais de savoir si l'on aboutit à une expression minimale de la fonction ou pas.

Introduction

- Une méthode graphique, basée sur l'utilisation des tables de **Karnaugh**, qui allège et simplifie le travail , et permet donc d'arriver de manière méthodique à l'expression logique minimale d'une fonction. En général, on utilise cette approche pour 6 variables ou moins.

Les tables de Karnaugh

- La **table de Karnaugh** est une façon compacte de représenter une table de vérité.
- Le nombre de cases d'une **table de Karnaugh** est égal au nombre de lignes d'une table de vérité.
- Pour n variables le nombre de cases d'une table de Karnaugh est 2^n

Les tables de Karnaugh

- On note :
  - Chaque case de la table de Karnaugh correspond à une ligne de la table de vérité.
  - Un ‘1’ placé dans une case de la table de Karnaugh correspond à un minterme de la fonction.
  - Un ‘0’ placé dans une case de la table de Karnaugh correspond à un maxterme de la fonction.
  - Deux mintermes ou maxtermes représentés par deux cases <u>adjacentes</u> ne diffèrent que par un seul bit. Le codage est effectué en **BINAIRE REFLECHI**.

Les tables de Karnaugh

- **Définition** : Deux mots binaires sont dits **<u>adjacents</u>** s'ils ne différent que par la complémentarité d'une et seulement une variable. Si deux mots adjacents sont sommés, ils peuvent être fusionnés et la variable qui diffère est éliminée.

Exemple : Les mots $a.b.\bar{c}$ et $a.b.c$ sont adjacents, alors :

$$a.b.\bar{c} + a.b.c = a.b.(c + \bar{c}) = a.b$$

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à deux variables :** est un tableau à 2^2 c.à.d. 4 cases

b \ a	0	1
0	$\overline{a}.\overline{b}$ 0	$a.\overline{b}$ 2
1	$\overline{a}.b$ 1	$a.b$ 3

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à deux variables :**

Exemple :

#	A	B	F
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

F(A, B)

B \ A	0	1
0	1_{0}	1_{2}
1	0_{1}	1_{3}

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à trois variables :** est un tableau à 2^3 c.à.d. 8 cases.
- Il y a deux possibilités : forme **horizontale** ou **verticale**. Les deux formes sont équivalentes.

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à trois variables :** Voici la forme **horizontale**

c \ ab	00	01	11	10
0	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$ 0	$\bar{a}.b.\bar{c}$ 2	$a.b.\bar{c}$ 6	$a.\bar{b}.\bar{c}$ 4
1	$\bar{a}.\bar{b}.c$ 1	$\bar{a}.b.c$ 3	$a.b.c$ 7	$a.\bar{b}.c$ 5

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à trois variables :** Voici la forme **verticale**

bc \ a	**0**	**1**
00	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ 0	$a\bar{b}\bar{c}$ 4
01	$\bar{a}\bar{b}c$ 1	$a\bar{b}c$ 5
11	$\bar{a}bc$ 3	abc 7
10	$\bar{a}b\bar{c}$ 2	$ab\bar{c}$ 6

100 est adjacent à 110

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

Tables de karnaugh à trois variables :

Exemple :

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Horizontale

$F(A, B, C)$

C \ AB	00	01	11	10
0	0 0	1 2	1 6	0 4
1	1 1	1 3	0 7	0 5

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

Tables de karnaugh à trois variables :

Exemple

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

verticale

F(A, B, C)

BC \ A	0	1
00	0_{0}	0_{4}
01	1_{1}	0_{5}
11	1_{3}	0_{7}
10	1_{2}	1_{6}

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à quatre variables :** est un tableau à 2^4 c.à.d. 16 cases

cd \ ab	00	01	11	10
00	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$ 0	$\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}$ 4	$a.b.\bar{c}.\bar{d}$ 12	$a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}$ 8
01	$\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d$ 1	$\bar{a}.b.\bar{c}.d$ 5	$a.b.\bar{c}.d$ 13	$a.\bar{b}.\bar{c}.d$ 9
11	$\bar{a}.\bar{b}.c.d$ 3	$\bar{a}.b.c.d$ 7	$a.b.c.d$ 15	$a.\bar{b}.c.d$ 11
10	$\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}$ 2	$\bar{a}.b.c.\bar{d}$ 6	$a.b.c.\bar{d}$ 14	$a.\bar{b}.c.\bar{d}$ 10

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à quatre variables :**

Chaque case est physiquement adjacentes aux cases juxtaposés sur ses quatres cotés, de plus chaque case de la rangée du haut est adjacente à la case correspondante de la rangée du bas et chaque case de la colonne la plus à gauche est adjacente à la case correspondante de la colonne la plus droite.

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à quatre variables :**

Exemple :

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

Tables de karnaugh à quatre variables :

Exemple :

F(A, B, C, D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 0	0 4	1 12	0 8
01	1 1	0 5	0 13	0 9
11	1 3	0 7	1 15	0 11
10	1 2	1 6	1 14	1 10

A	*B*	*C*	*D*	*F*
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à cinq variables :** est un tableau à 2^5 c.à.d. 32 cases

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Tables de karnaugh à cinq variables :**

Exemple :

XYZ •			1		2		3	
TU •	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	1	0	0	1	1	0	0
01	1	1	0	0	1	1	0	0
11	0	0	1	1	0	0	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- Pour représenter une fonction logique sous forme SDP (Sommes De Produits) standards par la table de Karnaugh, on suit les étapes suivantes :
  - Déterminer la valeur binaire de chaque terme produit de la fonction.
  - Pour chaque minterme de la fonction, on met un 1 dans la case lui correspondant dans la table.

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Exemple :**

$$F(A,B,C)=\overline{A}.B.C+A.\overline{B}.C+A.B.\overline{C}+A.B.C \text{ (1ere FC)}$$

$$0\ 1\ 1 \quad 1\ 0\ 1 \quad 1\ 1\ 0 \quad 1\ 1\ 1$$

Donc :

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Représentation des fonctions par des tables de Karnaugh

- **Exemple :**

$$F(A,B,C) = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C) \text{ (2eme FC)}$$

$$(0 \quad 0 \quad 0)(0 \quad 0 \quad 1)(0 \quad 1 \quad 0)(1 \quad 0 \quad 0)$$

Donc

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- La méthode de simplification par les **tables de Karnaugh** ne marche que si l'équation ne comporte pas de parenthèses ni de barre sur plusieurs variables. Si vous avez des parenthèses, développez d'abord pour ne plus en avoir, et si vous avez une barre sur plusieurs éléments, utilisez le théorème de De Morgan.

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- Après avoir dresser la table de Karnaugh d'une fonction sous forme canonique disjonctive, pour obtenir la forme minimale, on suit les étapes suivantes :
- **Première étape :** Formation des Groupes de 1.
- **Deuxième étape :** Détermination des termes de produit minimisés.
- **Troisième étape :** Détermination de la forme disjonctive minimisée.

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Première étape : Formation des groupes de 1**

On groupe les 1 contenus dans des cases adjacentes d'une table de Karnaugh :

- Un groupe peut contenir 2^k (c.à.d. des puissance de 2) cases, soit 1, 2, 4, 8, 16,…cases.
- Commencez par encercler les 1, dits isolés, qui ne font parties que d'un seul groupe
- Chaque case d'un groupe doit être adjacente à au moins une autre case du même groupe.
- Toujours inclure le plus grand nombre possible de 1 dans un groupe. Il est possible d'utiliser plusieurs fois le même 1.

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- Il faut vous imaginer le tableau comme une sphère, c'est à dire que un "1" étant placé tout en haut à droite pourra se regrouper avec un "1" placé tout en haut à gauche ou bien avec un "1" placé tout en bas à droite ;
- Il est interdit de faire des groupements en diagonale, donc il n'y a que des groupements carrés et rectangles ;
- Pour que l'équation soit simplifiée au maximum, il faut que **tous les "1" soient englobés dans le plus grand groupement possible**, vous pouvez "utiliser" plusieurs fois le même un s'il permet de faire un plus grand groupement avec d'autres 1.

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 1 :** groupez les 1 des tables de karnaugh suivantes :

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 2 :** groupez les 1 des tables de karnaugh suivantes :

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	1	1

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 3 :** groupez les 1 des tables de karnaugh suivantes :

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 4 :** groupez les 1 des tables de karnaugh suivantes :

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 5 :** groupez les 1 des tables de karnaugh suivantes :

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 6 :** groupez les 1 des tables de karnaugh suivantes :

ab / cd	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Deuxième étape : Détermination des termes produit minimisés**
- Chaque groupe de « 1 » de 2^k cases adjacentes donne un terme produit de n-k variables où les k variables qui changent de complémentarité sont éliminées et les variables qui ne changent pas sont retenues.

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Deuxième étape : Détermination des termes produit minimisés**
- En regroupant les cases adjacentes par 2, on supprime une variable des termes correspondants.
- Pour supprimer deux variables, il faut disposer de 4 cases adjacentes.
- Pour en supprimer 3 il faut 8 cases adjacentes, etc...

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 1 :** Déterminez le terme de chaque groupe

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ $\quad$ bc $\quad$ ab

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 2 :** Déterminez le terme de chaque groupe

$\bar{b}$

c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	1	1

$\bar{a}\bar{c}$ ac

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 3 :** Déterminez le terme de chaque groupe

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$\bar{b}\bar{d}$

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 4 :** Déterminez le terme de chaque groupe

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

$\bar{c}d$

$\bar{a}\bar{c}$

$ac\bar{d}$

$\bar{b}$

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 5 :** Déterminez le terme de chaque groupe

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$\bar{b}$

Simplification des fonctions sous forme canonique disjonctive

- **Exemple 6 :** Déterminez le terme de chaque groupe

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

d