Solution Exercice 1.

Sur $E =]-1, 1[$ *est définie la loi* $*$ *par :*

$$\forall x, y \in E,\ x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

1. *Montrons que cette loi* $*$ *est interne dans* E.
   (a) *Tout d'abord, pour tout* $x, y \in E$, $x * y$ *est bien définie car* $1 + xy = 0 \Longrightarrow xy = -1$, *or*

$$\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ alors } xy = 0 \neq -1 \\ \text{Si } xy \neq 0 \text{ alors } x = -\dfrac{1}{y} \notin E \text{ car } -1 < y < 1 \text{ contradiction} \end{cases}$$

   Donc $xy \neq 1$.

   (b) *Montrons maintenant que* $*$ *est bien une loi interne dans* E. *Soit* $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} x * y - 1 &= \frac{x+y}{1+xy} - 1 \\ &= \frac{x+y-1-xy}{1+xy} \\ &= \frac{(1-x)(y-1)}{1+xy} < 0 \\ &\text{car } x < 1 \Longrightarrow 1 - x > 0, \\ &\quad y < 1 \Longrightarrow y - 1 < 0, \\ &\text{et } -1 < xy < 1 \Longrightarrow 1 + xy > 0. \\ &\text{Donc } x * y < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * y - (-1) &= \frac{x+y}{1+xy} + 1 \\ &= \frac{x+y+1+xy}{1+xy} \\ &= \frac{(1+x)(y+1)}{1+xy} > 0 \\ &\text{car } x > -1 \Longrightarrow 1 + x > 0, \\ &\quad y > -1 \Longrightarrow y + 1 > 0, \\ &\text{et } -1 < xy < 1 \Longrightarrow 1 + xy > 0. \\ &\text{Donc } x * y > -1. \end{aligned}$$

   D'où $-1 < x * y < 1$, *c'est à dire : La loi* $*$ *est interne dans* E.

2. *Mopntrons que* $*$ *est commutative. Soit* $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} x * y &= \frac{x+y}{1+xy} \\ &= \frac{y+x}{1+yx} \\ &= y * x \end{aligned}$$

   Donc la loi $*$ *est commutative.*

3. *Montrons que* $*$ *est associative. Soit* $x, y, z \in E$.

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \frac{x+y}{1+xy} * z \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} \\ &= \frac{x+y+(1+xy)z}{1+xy+(x+y)z} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * \frac{y+z}{1+yz} \\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz+x(y+z)} \\ &= \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz} \end{aligned}$$

   Donc $(x * y) * z = x * (y * z)$, *c'ets à dire que* $*$ *est associative.*

4. *Cherchons s'il y a un élément neutre pour la loi $*$ dans E. Si $e \in E$ est l'éméent neutre de $*$ il doit alors vérifier que pour tout $x \in E$ $x * e = x$. Soit donc $x \in E$.*

$$\begin{aligned} x * e = x &\Longleftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \\ &\Longrightarrow \frac{x+e}{1+xe} - x = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{x+e-x-x^2e}{1+xe} = 0 \\ &\Longrightarrow e - x^2e = 0 \\ &\Longrightarrow e(1-x^2) = 0 \\ &\Longrightarrow e = 0 \text{ car } x \neq 1, -1 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$, $x * 0 = \dfrac{x+0}{1+x0} = x$, d'où l'ensemble E admet un élément neutre pour la loi $*$ qui est 0.

5. *Cherchons si les éléments de E admetteent des symétriques par la loi $*$. Soit $x \in E$. Si $x^{-1} \in E$ est le symétrique de x, il doit alors vérifier $x * x^{-1} = 0$.*

$$\begin{aligned} x * x^{-1} = 0 &\Longleftrightarrow \frac{x+x^{-1}}{1+xx^{-1}} = 0 \\ &\Longrightarrow x + x^{-1} = 0 \\ &\Longrightarrow x^{-1} = -x \text{ et } -x \in E \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$, $x * (-x) = \dfrac{x-x}{1-x^2} = 0$, d'où tout élément $x \in E$ admet un symétrique qui est $-x$.

6. *Puisque la loi $*$ est commutaitve, associative, admet un élément neutre et tout élément de E admet un symétrique, alors $(E, *)$ ets un groupe commutatif.*

Solution Exercice 2.

Dans $G = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est définie la loi $*$ par :

$$\forall x, y \in G, \; x * y = x + y + xy.$$

1. *Montrons que $(G, *)$ est un groupe abélien.*
   (a) *Montrons d'abord que $*$ est une loi interne dans G. Soit $x, y \in G$. Il facile de voir que $x * y = x + y + xy \in \mathbb{R}$, reste à montrer que $x * y \neq -1$.*

   $$\begin{aligned} x * y = -1 &\Longrightarrow x + y + xy = -1 \\ &\Longrightarrow x + y + xy + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow (1+x)(1+y) = 0 \\ &\Longrightarrow x = -1 \text{ ou } y = -1 \text{ impossible car } x, y \in G = \mathbb{R}\backslash\{-1\} \end{aligned}$$

   d'où $x * y \neq -1$. Donc $x * y \in G$, c'est à dire que $*$ est une loi interne dans G.

   (b) *Montrons que $*$ est commutative. Soit $x, y \in G$.*

   $$x * y = x + y + xy = y + x + yx = y * x$$

   Donc $*$ est commutative.

   (c) *Montrons que $*$ est associative. Soit $x, y, z \in G$.*

   $$\begin{aligned} (x*y)*z &= (x+y+xy)*z \\ &= (x+y+xy) + z + (x+y+xy)z \\ &= x+y+z+xy+xz+yz+xyz \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x*(y*z) &= x*(y+z+yz) \\ &= x + (y+z+yz) + x(y+z+yz) \\ &= x+y+z+xy+yz+xz+xyz \end{aligned}$$

   D'où $(x*y)*z = x*(y*z)$. Donc $*$ est associative dans G.

(d) *Montrons que G admet, pour $*$, un élément neutre.* $0 \in G$, *soit donc* $x \in G$, *on a alors*

$$x * 0 = x + 0 + x0 = x$$

Donc 0 *est bien l'élément neutre dans* G *pour* $*$.

(e) *Montrons enfin que chaque élément de* G *admet un symétrique. Soit* $x \in G$, *si* x *admet un symétrique alors* $x * x^{-1} = 0$.

$$\begin{aligned} x * x^{-1} = 0 &\Longrightarrow x + x^{-1} + xx^{-1} = 0 \\ &\Longrightarrow x^{-1} = \frac{-x}{1+x} \text{ car } x \neq -1 \\ &\text{On a bien que } \frac{-x}{1+x} \in G \text{ car } \frac{-x}{1+x} \neq -1 \text{ puisque } \forall x \in G\ x \neq 1 + x \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in G$, $x * \frac{-x}{1+x} = x + \frac{-x}{1+x} + x\frac{-x}{1+x} = 0$ *donc* x *est symétrisable et son symétrique est* $\frac{-x}{1+x}$.

Donc $(G, *)$ *est bien un groupe abélien.*

2. *Résolvons dans* $(G, *)$ *l'équation* $a * x = b$. *Pour* $a, b \in G$, *soit* $x \in G$.

$$\begin{aligned} a * x = b &\Longrightarrow a^{-1} * a * x = a^{-1} * b \\ &\Longrightarrow x = \frac{-a}{1+a} + b + \frac{-a}{1+a}b \\ &\Longrightarrow x = \frac{b-a}{1+a} \end{aligned}$$

$b - a = -(1+a) \Longrightarrow b = -1$ *ce qui est impossible. Donc* $b - a \neq -(1+a)$ *d'où* $x = \frac{b-a}{1+a} \in G$ *est la solution de l'équation.*

Solution Exercice 3.

$(H, *)$ *étant un groupe, montrons que l'ensemble* $C = \{c \in H, \forall x \in H,\ c*x = x*c\}$ *est un sous-groupe de* H.

Montrons que C *n'est pas vide. Soit* $e \in H$ *l'élément neutre de* H *pour la loi* $*$. *Cet élément* e *existe bien car* $(H, *)$ *est un groupe. On a alors pour tout* $x \in H$, $e * x = x * e = x$, *d'où* $e \in C$, *c'est à dire* $C \neq \varnothing$.

Montrons que pour $a, b \in C$, $a * b^{-1} \in C$. *Soit* $a, b \in C$ *et* $x \in H$. *On a alors :*

$$\begin{aligned} a * b^{-1} * x &= b^{-1} * a * x \text{ d'après la définition de } C \text{ puisque } a \in C \text{ et } b^{-1} \in H \\ &= b^{-1} * x * a \text{ car } a \in C \text{ et } x \in H \\ &= (x^{-1} * b)^{-1} * a \text{ d'après la définition de l'inverse : } (s * t)^{-1} = t^{-1} * s^{-1} \text{ et } (x^{-1})^{-1} = x \\ &= (b * x^{-1})^{-1} * a \text{ car } b \in C \text{ et } x^{-1} \in H \\ &= (x^{-1})^{-1} * b^{-1} * a \\ &= x * b^{-1} * a \\ &= x * a * b^{-1} \end{aligned}$$

D'où $a * b^{-1} \in C$. *Donc* C *est un sous-groupe de* H.

Remarque : La loi $*$ *étant asociative, puisque* $(H, *)$ *est un groupes, on peut négliger les parenthèses dans les calculs précédents. On a alors :* $(a * b^{-1}) * x = a * (b^{-1} * x) = a * b^{-1} * x$.

Solution Exercice 4.

Pour $k \geq 2$, *on a l'application suivante :*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}, +) &\longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ n &\mapsto f(n) = kn \end{aligned}$$

1. *Montrons que f est un morphisme de groupes.* $(\mathbb{Z},+)$ *est bien un groupe. Soit* $m,n\in\mathbb{Z}$. *On a alors :*
$$f(m+n)=k(m+n)=km+kn=f(n)+f(m)$$
d'où f est un morhpisme de groupes.
2. *Calculons* $f^{-1}(\{e^{'}\})$ *(l'image réciproque de l'ensemble* $\{e^{'}\}$*).*
L'élément neutre de l'ensemble d'arrivée $(\mathbb{Z},+)$ *est* $e^{'}=0$, *donc :*
$$f^{-1}(\{e^{'}\})=f^{-1}(\{0\})=\{n\in\mathbb{Z},f(n)\in\{0\}\}$$
$$\begin{aligned}f(n)\in\{0\}&\Longrightarrow f(n)=0\\&\Longrightarrow kn=0\\&\Longrightarrow n=0 \text{ car } k\geq 2\end{aligned}$$
Donc
$$f^{-1}(\{e^{'}\})=f^{-1}(\{0\})=\{0\}$$

Cet ensemble $f^{-1}(\{0\})$ *est appelé* ***Noyau de*** f *et est noté* $\ker f$.

Solution Exercice 5.
Dans $\mathbb{R}^2$, *sont définies les lois de composition internes :*
$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d)&=(a+c,b+d)\\(a,b)\times(c,d)&=(ac,ad+bc)\end{aligned}$$
Montrons que $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ *est un anneau commutatif.*
1. *Commençons par montrer que* $(\mathbb{R}^2,+)$ *est un groupe commutatif.*
   (a) *La commuttivité de la l.c.i. + : Soit* $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$.
   $$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)$$
   d'où la loi + est commutative.
   (b) *L'associativité de la loi + : Soit* $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$. *On a alors :*
   $$\begin{aligned}((a,b)+(c,d))+(e,f)&=(a+c,b+d)+(e,f)\\&=(a+c+e,b+d+f)\\&=(a,b)+(c+e,d+f)\\&=(a,b)+((c+d)+(e+f))\end{aligned}$$
   donc la loi + est associative.
   (c) *L'élément neutre de* $(\mathbb{R}^2,+)$. *Soit* $(a,b),(e,e^{'})\in\mathbb{R}^2$ *tel que :* $(a,b)+(e,e^{'})=(a,b)$. *On a alors :*
   $$\begin{aligned}(a,b)+(e,e^{'})=(a,b)&\Longrightarrow(a+e,b+e^{'})=(a,b)\\&\Longrightarrow a+e=a \text{ et } b+e^{'}=b\\&\Longrightarrow e=0 \text{ et } e^{'}=0\\&\Longrightarrow(e,e^{'})=(0,0)\end{aligned}$$
   Donc : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$, *d'où l'ensemble* $\mathbb{R}^2$ *possède bien un éléméent neutre pour la loi + qui est* $(0,0)$.

(d) *L'élément symétrique : Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$*, cherchons s'il existe dans* $\mathbb{R}^2$ *un élément* (a',b') *tel que* $(a,b)+(a',b')=(0,0)$.

$$\begin{aligned}(a,b)+(a',b')=(0,0) &\Longrightarrow (a+a',b+b')=(0,0)\\ &\Longrightarrow a+a'=0 \text{ et } b+b'=0\\ &\Longrightarrow a'=-a \text{ et } b'=-b\\ &\Longrightarrow (a',b')=(-a,-b)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Donc $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a,b)+(-a,-b)=(a-a,b-b)=(0,0)$ *ce qui veut dire que tout élément* (a,b) *de* $\mathbb{R}^2$ *est symétrisable et son symétrique est* $(-a,-b)$.

Conclusion, $(\mathbb{R}^2,+)$ *est un groupe commutatif.*

2. *Montrons maintenant que la l.c.i* $\times$ *est associative : Soit* $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$. *On a alors :*

$$\begin{aligned}((a,b)\times(c,d))\times(e,f) &= (ac,ad+bc)\times(e,f)\\ &= (ace,acf+(ad+bc)e)\\ &= (ace,acf+ade+bce)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a,b)\times((c,d)\times(e,f)) &= (a,b)\times(ce,cf+de)\\ &= (ace,a(cf+de)+bce)\\ &= (ace,acf+ade+bce)\end{aligned}$$

Donc $((a,b)\times(c,d))\times(e,f)=(a,b)\times((c,d)\times(e,f))$, *c'est à dire que la loi* $\times$ *est associative.*

3. *La distributivité de la loi* $\times$ *par rapport à la loi* $+$ *: Soit* $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$. *On a alors :*

$$\begin{aligned}(a,b)\times((c,d)+(e,f)) &= (a,b)\times(c+e,d+f)\\ &= (a(c+e),a(d+f)+b(c+e))\\ &= (ac+ae,ad+af+bc+be)\\ &= (ac,ad+bc)+(ae,af+be)\\ &= (a,c)\times(b,d)+(a,b)\times(e,f)\end{aligned}$$

Donc la loi $\times$ *est distributive par rapport à la loi* $+$.

4. *La commutativité de la lo* $\times$ *: Soit*$(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$. *On a alors :*

$$(a,b)\times(c,d)=(ac,ad+bc)=(ca,cb+da)=(c,d)\times(a,b)$$

Donc la loi $\times$ *est commutative.*

5. *L'élément neutre de* $\mathbb{R}^2$ *pour la loi* $\times$ *: Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. *Cherchons s'il existe un élément* (c,c') *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que :* $(a,b)\times(c,c')=(a,b)$ *(nous n'avons pas à vérifier l'autre sens :* $(c,c')\times(a,b)=(a,b)$ *car la loi* $\times$ *est commutative).*

$$\begin{aligned}(a,b)\times(c,c')=(a,b) &\Longrightarrow (ac,ac'+bc)=(a,b)\\ &\Longrightarrow ac=a \text{ et } ac'+bc=b\\ &\Longrightarrow c=1 \text{ et } c'=0\\ &\Longrightarrow (c,c')=(1,0)\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a,b)\times(1,0)=(a1,a0+b1)=(a,b)$$

Donc l'ensemble $\mathbb{R}^2$ *possède bien un élément neutre pour la loi* $\times$ *qui est* $(1,0)$.

Donc $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ *est un anneau commutatif.*

Solution Exercice 6.

Sur $\mathbb{R}$ *deux lois* $\oplus$ *et* $\otimes$ *sont définies par :*

$$\begin{aligned}x\oplus y &= x+y-1\\ x\otimes y &= x+y-xy\end{aligned}$$

Montrons que $(\mathbb{R},\oplus,\otimes)$ *est un corps commutatif.*

1. *Commençons par montrer que* $(\mathbb{R}, \oplus)$ *est un groupe commutatif.*
   (a) *Commençons par montrer la commutativité de la loi* $\oplus$ *pour réduire les calculs par la suite. Soit* $x, y \in \mathbb{R}$*, alors* $x \oplus y = x + y - 1 = y + x - 1 = y \oplus x$*, donc* $\oplus$ *est commutative.*
   (b) *L'assocaitivité de* $\oplus$ *: Soit* $x, y, z \in \mathbb{R}$

   $$(x \oplus y) \oplus z = (x+y-1) \oplus z = (x+y-1)+z-1 = x+(y+z-1)-1 = x \oplus (y+z-1) = x \oplus (y \oplus z)$$

   Donc la loi $\oplus$ *est associative.*
   (c) *L'élément neutre de* $\mathbb{R}$ *pour la loi* $\oplus$*. Si* $e \in \mathbb{R}$ *est l'élément neutre pour* $\oplus$*, il doit alors vérifier que pour tout* $x \in \mathbb{R},\ x \oplus e = x$*. Soit donc* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \oplus e = x$*.*

   $$\begin{aligned} x \oplus e = x &\Longleftrightarrow x + e - 1 = x \\ &\Longrightarrow e = 1 \end{aligned}$$

   d'où pour tout $x \in \mathbb{R},\ x \oplus 1 = x + 1 - 1 = x$ *donc l'élément* $1 \in \mathbb{R}$ *est l'lément neutre dans* $\mathbb{R}$ *pour la loi* $\oplus$*.*
   (d) *L'élément symétrique : Si* $x \in \mathbb{R}$*, possède un symétrique* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ *pour la loi* $\oplus$*, il doit alors vérifier :* $x \oplus x^{-1} = 1$*. Soit donc* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \oplus x^{-1} = 1$*.*

   $$\begin{aligned} x \oplus x^{-1} = 1 &\Longrightarrow x + x^{-1} - 1 = 1 \\ &\Longrightarrow x^{-1} = -x + 2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \oplus (-x+2) = x - x + 2 - 1 = 1$*, c'est à dire que tout élément* $x \in \mathbb{R}$ *admet un symétrique dans* $\mathbb{R}$ *qui est donné par* $-x + 2$*.*

   Donc $(\mathbb{R}, \oplus)$ *est un groupe commutatif.*
2. *Montrons maintenant que* $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ *est un anneau commutatif.*
   (a) *La commutatitivté de la loi* $\otimes$*. Soit* $x, y \in \mathbb{R}$*. On a alors :*

   $$x \otimes y = x + y - xy = y + x - yx = y \otimes x$$

   donc la loi $\otimes$ *est commutative.*
   (b) *L'associativité de la loi* $\otimes$*. Soit* $x, y, z \in \mathbb{R}$*.*

   $$\begin{aligned} (x \otimes y) \otimes z &= (x + y - xy) \otimes z \\ &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz \\ &= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ &= x \otimes (y \otimes z) \end{aligned}$$

   Donc $\otimes$ *est associative.*
   (c) *L'élément neutre de* $\mathbb{R}$ *pour la loi* $\otimes$*. Si* $c \in \mathbb{R}$ *est un élément neutre pour la loi* $\otimes$*, il doit alors vérifier :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \otimes e = x$*. Soit donc* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \otimes e = x$*.*

   $$\begin{aligned} x \otimes c = x &\Longrightarrow x + c - xc = x \\ &\Longrightarrow c(1 - x) = 0 \\ &\Longrightarrow c = 0 \text{ pour que l'égalité de la ligne précédente soit vérifiée pour } x \text{ quelconque} \end{aligned}$$

   Donc pour tout $x \in \mathbb{R},\ x \otimes 0 = x + 0 - x0 = x$*, c'est à dire que* $0 \in \mathbb{R}$ *est l'élément neutre de* $\mathbb{R}$ *pour la loi* $\otimes$*.*

(d) *La distributivité de $\otimes$ par rapport à $\oplus$. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= x \otimes (y+z-1) \\ &= x + (y+z-1) - x(y+z-1) \\ &= 2x + y + z - 1 - xy - xz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) &= (x+y-xy) \oplus (x+z-xz) \\ &= x+y-xy+x+z-xz-1 \\ &= 2x+y-1-xy-xz \end{aligned}$$

d'où $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$, c'est à dire que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.

Donc $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif.

3. *Montrons enfin que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corp commutatif.*

   (a) *On a déjà vu que la loi $\otimes$ est commutative dans $\mathbb{R}$.*

   (b) *Cherchons si tout élément $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ admet un symétrique $x^{-1} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ tel que $x \otimes x^{-1} = 0$.*

$$\begin{aligned} x \otimes x^{-1} = 0 &\Longleftrightarrow x + x^{-1} - xx^{-1} = 0 \\ &\Longrightarrow x^{-1}(1-x) = -x \\ &\Longrightarrow x^{-1} = -\frac{x}{1-x} \ \textit{car } x \neq 1 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a

$$x \otimes \frac{-x}{1-x} = x - \frac{x}{1-x} + x\frac{x}{1-x} = \frac{x(1-x) - x + x^2}{1-x} = 0$$

D'où tout élément $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ possède bien un élément symétrique donné par $x^{-1} = \dfrac{-x}{1-x} \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ car $-x \neq 1-x$ pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Donc $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps commutatif.