

CHAPITRE 2 : LES SYSTÈMES DE NUMÉRATION (NUMBER SYSTEM)

Introduction

2

- ❑ Les informations traitées par les ordinateurs sont de différentes natures :
 - ▣ Nombres, textes,
 - ▣ Images, sons, vidéos,
 - ▣ Programmes, ...
- ❑ Dans un ordinateur, elles sont toujours représentées sous forme binaire (BIT : Binary digIT) : une suite de 0 et de 1 .

Introduction

3

- **Codage de l'information** : permet d'établir une correspondance qui permet de passer d'une représentation (dite externe) d'une information à une autre représentation (dite interne : sous forme binaire) de la même information, suivant un ensemble de règles précises.
- **Exemple** : Le nombre 12 :
 - ▣ 12 est la représentation externe du nombre douze.
 - ▣ 1100 est la représentation interne de 12 dans la machine.

Définition

4

- Un système de numération (number system) est un ensemble de **symboles** (les chiffres) qui sont assemblés en suivant des **règles** d'écriture précises permettant d'écrire, de lire et d'énoncer les nombres.
- Il existe plusieurs systèmes de numération additive tels que la numération **décimale (base 10)** qu'on utilise dans la vie de tous les jours. Depuis l'avènement des circuits électroniques et de l'informatique, les systèmes **binaire (base 2)**, **octal (base 8)** et **hexadécimal (base 16)**, qui sont également des systèmes de position, sont devenus indispensables.

Définition

5

- Une **base**, dans un système de numération positionnel, est le nombre de symboles (de chiffres) qui sont utilisés pour représenter les nombres.
- En base 10 (la numération décimale), on utilise donc 10 chiffres, soit de 0 à 9, tandis qu'en base 2 (la numération binaire), on n'utilise que 2 chiffres, c'est-à-dire le zéro 0 et le un 1.

Définition

6

□ Un système de numérotation positionnel pondéré à **base** b est défini sur un **alphabet** de b chiffres :

$$A = \{c_0, c_1, \dots, c_{b-1}\} \text{ avec } 0 \leq c_i < b$$

Soit $N = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0_{(b)}$: représentation en base b sur n chiffres

a_i : est un chiffre de l'alphabet de poids i (position i).

a_0 : chiffre de poids 0 appelé le chiffre de poids faible.

a_{n-1} : chiffre de poids $n-1$ appelé le chiffre de poids fort.

Système décimal (Decimal system)

7

- Le **système décimal**, également appelé la **base 10**, est la méthode de numérotation la plus courante utilisée en mathématiques et dans la vie quotidienne. Il utilise dix chiffres différents : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 pour représenter tous les nombres.
- IL est important de comprendre que chaque position dans un nombre a une valeur différente en fonction de sa position. Par exemple, dans le nombre 356, le chiffre 6 est à la place des unités, le chiffre 5 est à la place des dizaines et le chiffre 3 est à la place des centaines.

Système décimal (Decimal system)

8

□ Exemple de Système de numération en base 10 :

▣ Le nombre 4134 s'écrit comme suit :

The diagram illustrates the decimal expansion of the number 4134. A large orange double-headed arrow at the top spans the width of the equation, with "Poids fort" (Strong weight) on the left and "Poids faible" (Weak weight) on the right. Below the equation, four arrows point upwards from labels to the digits 4, 1, 3, and 4 respectively. The labels are "Chiffre de poids 10^3 ", "Chiffre de poids 10^2 ", "Chiffre de poids 10^1 ", and "Chiffre de poids 10^0 ".

$$4134 = 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Chiffre de poids 10^3

Chiffre de poids 10^2

Chiffre de poids 10^1

Chiffre de poids 10^0

Système binaire (Binary system)

9

- Le système binaire est le système de numération utilisant la **base 2**. On nomme couramment bit (de l'anglais binary digit, soit « chiffre binaire ») les chiffres de la numération binaire positionnelle. Un bit peut prendre deux valeurs, notées par convention 0 et 1.
- C'est un concept essentiel en Informatique. En effet, les processeurs des ordinateurs sont composés de transistors ne gérant chacun que deux états.

Système octal (Octal system)

10

- Le système de numération **octal** est le système de numération de base 8, et est **composé de 8 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.**
- Dans ce système de numérotation, un nombre peut être noté entre parenthèses avec l'indice 8 pour le différencier des autres bases de numérotation [par exemple : $(126)_8$].

Système octal (Octal system)

11

- De façon général les nombres sont introduits en décimale à partir du clavier alors que tous les calculs sont effectués en binaire. Vu que **la représentation des nombres décimaux en numérotation binaire nécessite la manipulation de plusieurs bits composés de 0 et de 1.**
- Le système de numérotation octale est une façon d'abrégé cette représentation.

Système Hexadécimal (Hexadecimal system)

12

- ❑ Le mot **hexadécimal** est composé des termes *hexa* et *decem*. *Hexa* vient du grec et signifie « six » tandis que *decem* est le mot latin pour « dix ».
- ❑ Le système hexadécimal est donc un système de valeur qui représente les nombres en base 16. Cela signifie que le système hexadécimal utilise 16 chiffres différents.
- ❑ Le système hexadécimal utilise donc des chiffres de **0** à **9** et les lettres majuscules de **A** à **F** pour représenter l'équivalent du nombre binaire ou décimal.

Système Hexadécimale (Hexadecimal system)

13

- Le système hexadécimal est utilisé pour faciliter la lisibilité de grands nombres.
- Les nombres sont divisés en groupes de quatre bits et convertis en nombres hexadécimaux, au lieu d'avoir une longue suite de « 1 » et « 0 », on aura des nombres hexadécimaux plus courts et qui peuvent, à leur tour, être divisés en petits groupes de deux ou quatre.
- En ce sens, les nombres hexadécimaux permettent une **représentation compacte** des suites de bits

Conversion entre les différents systèmes de numération

14

- La conversion entre les différents systèmes de numération appelé aussi conversion de base ou bien transcodage est l'opération qui permet de passer de la représentation d'un nombre exprimé dans une base à la représentation du même nombre mais exprimé dans une autre base.

Conversion entre les différents systèmes de numération

15

- Les conversions possibles sont les suivantes:
 - ✓ Décimal vers Binaire, Octal et Hexadécimal.
 - ✓ Binaire vers Décimal, Octal et Hexadécimal.
 - ✓ Octal vers Décimale, Binaire et Hexadécimal.
 - ✓ Hexadécimal vers Décimal, Binaire et Octal.

Conversion entre les différents systèmes de numération

16

❑ Conversion du Décimal vers une base B (binaire, octal, hexadécimal ou autre):

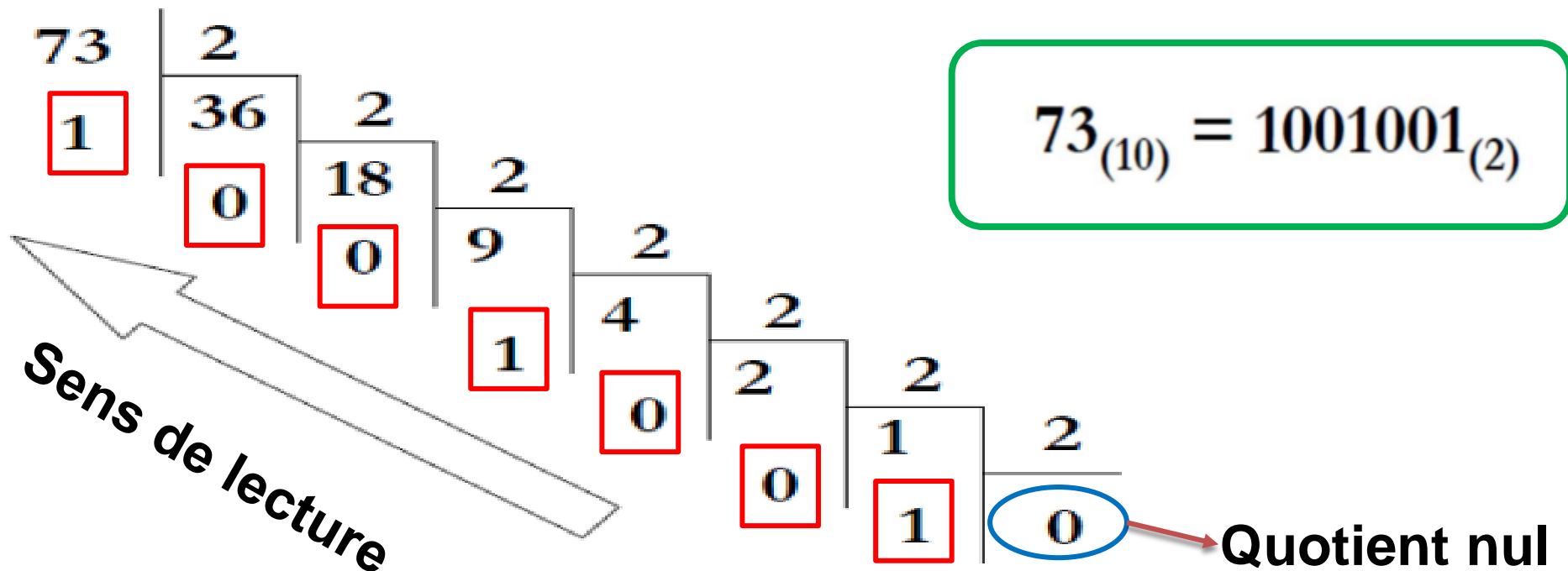
Pour convertir un nombre de la base 10 vers une base B quelconque, il faut faire des **divisions successives** du nombre à convertir par B et retenir à chaque fois le reste jusqu'à l'obtention d'un quotient nul, dans ce cas le nombre s'écrit de la gauche vers la droite en commençant par le dernier reste allant jusqu'au premier reste.

Conversion entre les différents systèmes de numération

17

Conversion du Décimal vers Binaire :

Exemple : Soit $N = (73)_{10}$ un nombre représenté en base décimale 10. Trouver sa représentation binaire

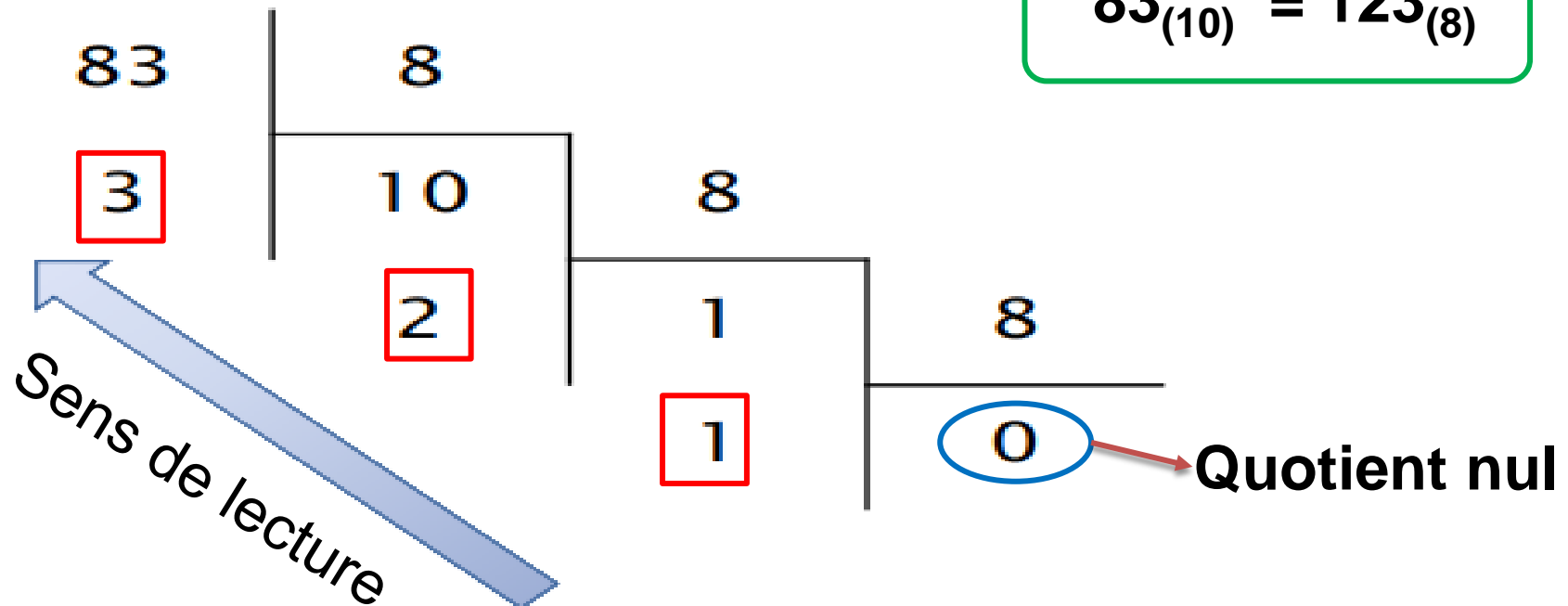


Conversion entre les différents systèmes de numération

18

Conversion du Décimal vers l'Octal :

Exemple : Soit $N = (83)_{10}$ un nombre représenté en base décimale 10. Trouver sa représentation en octale



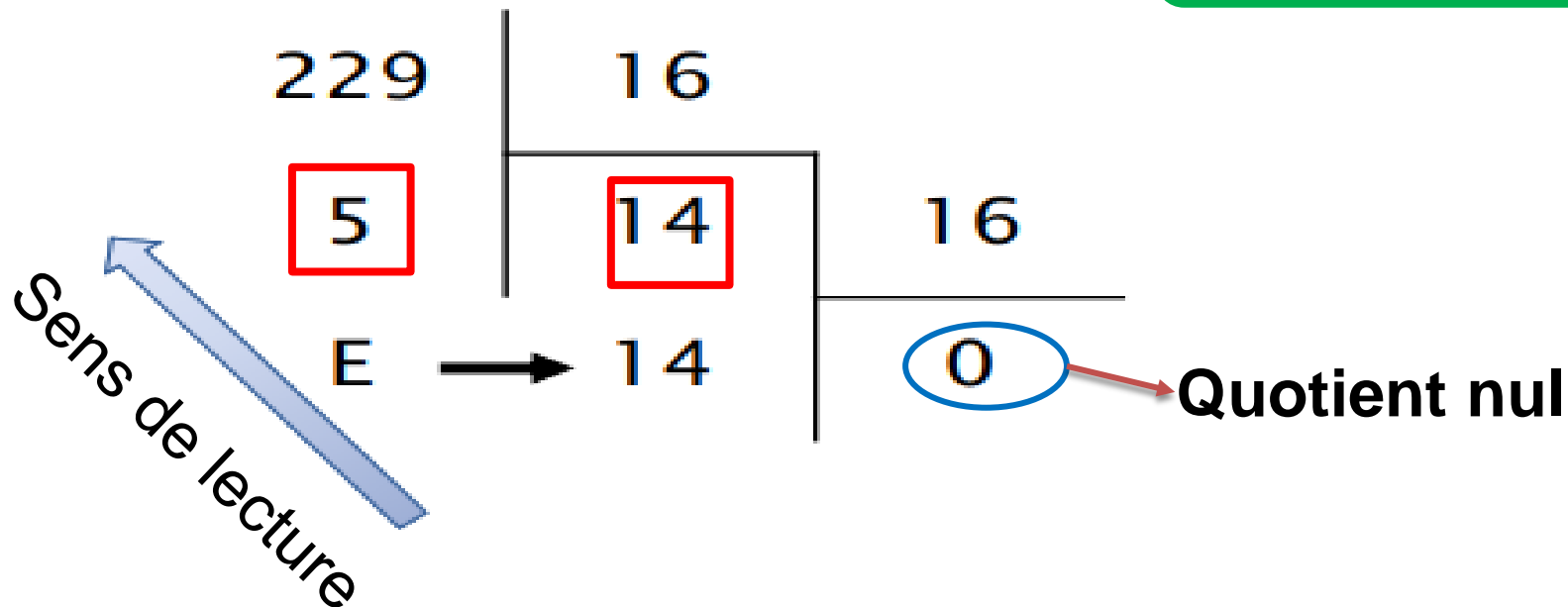
Conversion entre les différents systèmes de numération

19

Conversion du Décimal vers l'Hexadécimal :

Exemple : Soit $N = (229)_{10}$ un nombre représenté en base décimale 10. Trouver sa représentation en hexadécimal

$$229_{(10)} = E5_{(16)}$$



Conversion entre les différents systèmes de numération

20

■ Conversion d'une base B (binaire, octal, hexadécimal ou autre) vers le Décimal :

Pour convertir un nombre de la base B vers une base 10, on utilise l'écriture polynomiale.

Soit $N = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0_{(B)}$: représentation en base B sur n chiffres

- Le premier rang est le rang 0, il se trouve à droite et contient le bit appelé le **bit de poids faible**.
- Le dernier rang, qui se trouve à gauche, contient le **bit de poids fort**.

Conversion entre les différents systèmes de numération

21

- ❑ **Conversion d'une base B (binaire, octal, hexadécimal ou autre) vers le Décimal :**
- ❑ **La valeur de N en base 10 est donnée par :**

$$N = (a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_0 \cdot b^0)_{(10)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$$

(ceci s'appelle forme polynomiale)

Conversion entre les différents systèmes de numération

22

Conversion du Binaire vers le Décimal:

Exemple : trouvez la représentation décimale du nombre binaire suivant : 1001001

$$\begin{aligned}(1001001)_2 &= 1*2^0 + 0*2^1 + 0*2^2 + 1*2^3 + 0*2^4 + \\ &\quad 0*2^5 + 1*2^6 \\ &= 1 + 0 + 0 + 8 + 0 + 0 + 64\end{aligned}$$

$$(1001001)_2 = (73)_{10}$$

Conversion entre les différents systèmes de numération

23

Conversion de l'Octal vers le Décimal:

Exemple : trouvez la représentation décimale du nombre octal suivant :

$$(123)_8 = 3*8^0 + 2*8^1 + 1*8^2$$
$$= 3 + 16 + 64$$

$$(123)_8 = (83)_{10}$$

Conversion entre les différents systèmes de numération

24

Conversion de l'hexadécimal vers le Décimal:

Exemple : trouvez la représentation décimale du nombre hexadécimal suivant :

$$\begin{aligned}(E5)_{16} &= 5 * 16^0 + E * 16^1 \\ &= 5 + 14 * 16^1 \\ &= 5 + 224\end{aligned}$$

$$(E5)_{16} = (229)_{10}$$

Conversion entre les différents systèmes de numération

25

❑ Conversion du Binaire vers octal ou hexadécimal :

Pour convertir un nombre binaire vers le système octal ou bien hexadécimal il y a deux méthodes.

1. Première solution : convertir le nombre en base binaire vers la base décimale puis convertir ce nombre (en base 10) vers la base souhaitée (8 ou 16).

Conversion entre les différents systèmes de numération

26

□ Conversion du Binaire vers octal ou hexadécimal

Exemple :

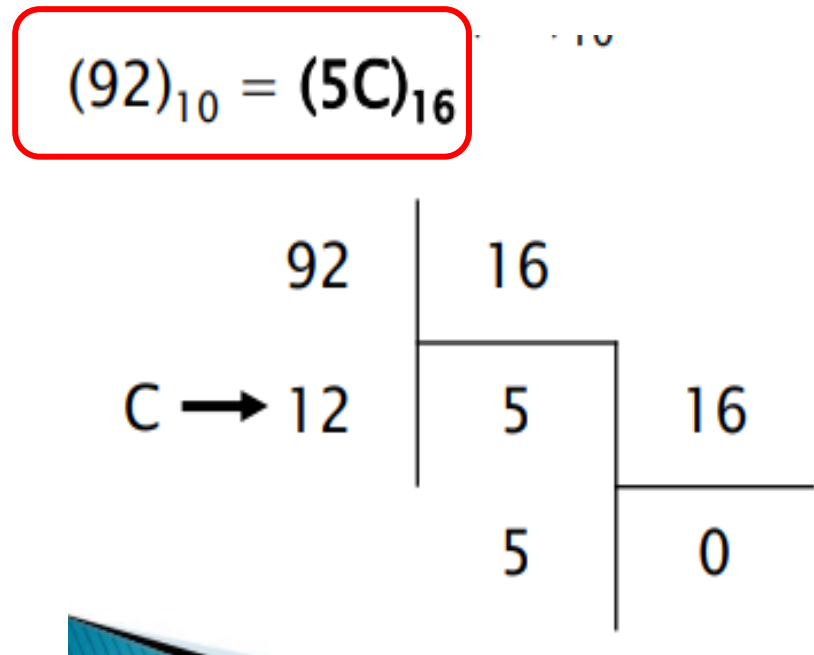
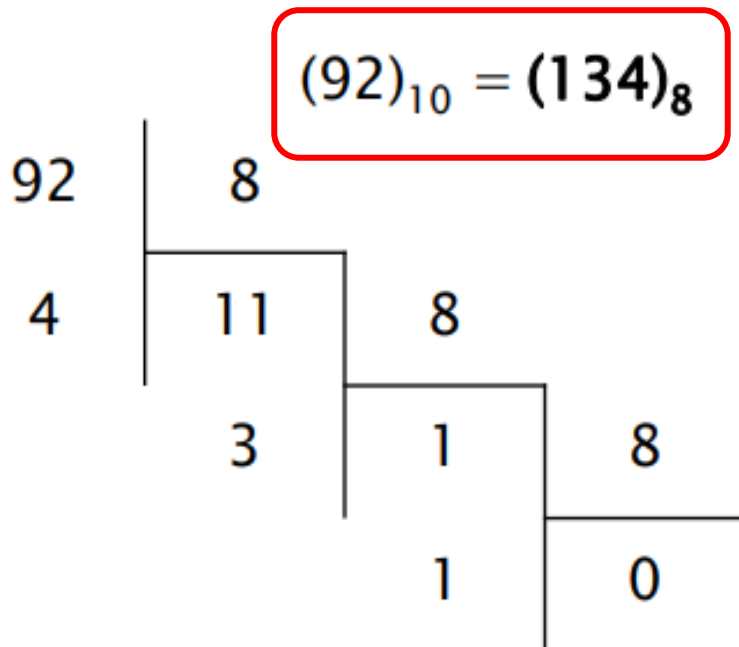
$$\begin{aligned}(1011100)_2 &= 0*2^0 + 0*2^1 + 1*2^2 + 1*2^3 + 1*2^4 \\ &\quad + 0*2^5 + 1*2^6 \\ &= 0 + 0 + 4 + 8 + 16 + 0 + 64 \\ &= (92)_{10}\end{aligned}$$

Conversion entre les différents systèmes de numération

27

□ Conversion du Binaire vers octal ou hexadécimal

Exemple :



Conversion entre les différents systèmes de numération

28

□ Conversion du Binaire vers octal ou hexadécimal

2. Deuxième solution : (Utiliser les tables de correspondance)

- **Binaire vers octal** : regroupement des bits en des **groupes** de **trois bits** de droite à gauche puis remplacer chaque groupe par le symbole correspondant dans la base 8.
- **Binaire vers Hexadécimal** : regroupement des bits en des **groupes** de **quatre bits** de droite à gauche puis remplacer chaque groupe par le symbole correspondant dans la base 16.

Conversion entre les différents systèmes de numération

29

□ Conversion du Binaire vers octal ou hexadécimal

Exemple :

$$(1011100)_2 = \frac{001}{1} \frac{011}{3} \frac{100}{4} = (134)_8$$

$$(1011100)_2 = \frac{0101}{5} \frac{1100}{C} = (5C)_{16}$$

Conversion entre les différents systèmes de numération

30

□ Conversion du Binaire vers octal ou hexadécimal : Tables de correspondance

Octale vers Binaire

Octal	Binaire
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Hexadécimal vers binaire

Hexa	Binaire	Hexa	Binaire
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

Conversion entre les différents systèmes de numération

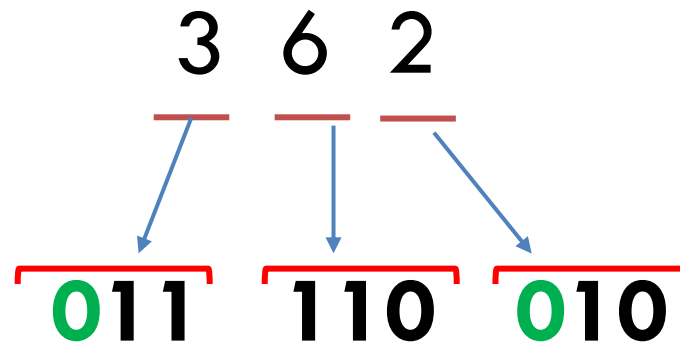
31

□ Conversion de l'Octal vers le Binaire :

Pour passer de l'octal au binaire : on remplace chaque chiffre octal par les trois bits correspondants.

Exemple :

$$362_{(8)} = ?_{(2)}$$



Conversion entre les différents systèmes de numération

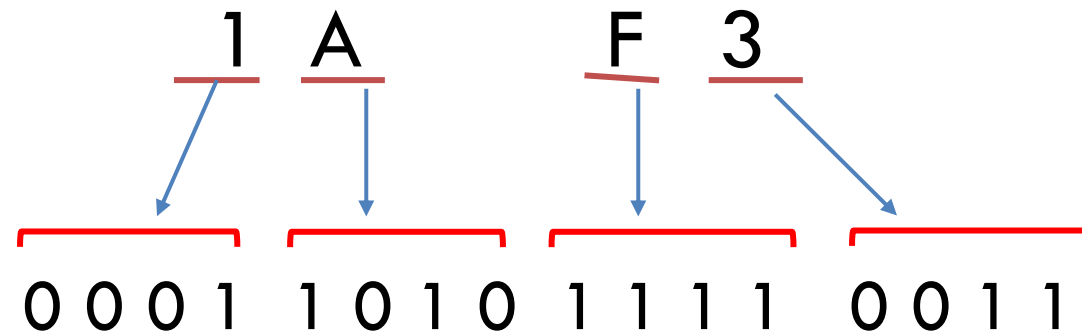
32

□ Conversion de l'hexadécimal vers le Binaire :

Pour passer de l'hexadécimal en binaire : on remplace chaque chiffre hexadécimale par les quatres bits correspondants.

Exemple :

$$1AF3_{(16)} = ?_{(2)}$$



Conversion entre les différents systèmes de numération

33

□ Conversion de l'hexadécimal vers le l'octal ou inversement :

Pour passer de l'hexadécimal vers l'octal (ou inversement) il n'y a pas de méthode directe il faut passer soit par le système décimale ou bien le binaire c.à.d. faire les conversions suivantes:

**Hexadécimale (respectivement octale) vers décimale,
Décimale vers octale(respectivement Hexadécimale).**

Ou bien

**Hexadécimale (respectivement octale) vers Binaire,
Binaire vers octale(respectivement Hexadécimale).**

Opérations binaires

34

- ❑ Les opérations sur les nombres binaires s'effectuent de la même façon que sur les nombres décimaux toute fois il ne faut pas oublier que les seuls symboles utilisés sont le "1" et le "0".
- ❑ Pour effectuer des opérations en binaire, il faut d'abord écrire les nombres avec le même nombre de bit et faire attention qu'on ne dépasse pas le nombre de bits autorisé, sinon si on dépasse le nombre de bits autorisé alors on appelle ça un **dépassement de capacité ou overflow**

Opérations binaires

35

Les opérations fondamentales sont les suivantes :

- ▣ Addition
- ▣ Soustraction
- ▣ Multiplication
- ▣ Division

Opérations binaires

36

1. Addition :

On écrit les nombres sur des lignes successives en les mettant en colonne, en partant de la droite ; ensuite on additionne les chiffres de chaque colonne en commençant par celle de droite. On suit les règles suivantes :

$$0 + 0 = 0 ,$$

$$1 + 0 = 1 ,$$

$$0 + 1 = 1 ,$$

$$1 + 1 = 0 \text{ et on retient } 1, \text{ soit } 10$$

Opérations binaires

37

1. Addition :

Exemple : additionner les nombres $(11011)_2$ et $(10101)_2$:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1} \overset{1}{1} \overset{1}{0} \overset{1}{1} \\ + 10101 \\ \hline 110000 \end{array}$$

Opérations binaires

38

2. Soustraction :

On écrit les nombres sur des lignes successives en les mettant en colonne, en partant de la droite ; ensuite on soustrait les chiffres de chaque colonne en commençant par celle de droite. On suit les règles suivantes :

$$0 - 0 = 0 ,$$

$$1 - 0 = 1 ,$$

$$1 - 1 = 0 ,$$

$0 - 1 = 1$ et on retient 1 (dans ce cas la soustraction est impossible donc on empreinte 1 puis on le retourne dans la deuxième colonne)

Opérations binaires

39

2. Soustraction :

Exemple : effectuer l'opération suivante :

$$(10011)_2 - (1110)_2 :$$

$$\begin{array}{r} 1 0 1 \\ - 1 1 0 \\ \hline 0 0 0 \end{array}$$

Opérations binaires

40

3. Multiplication :

On écrit les nombres sur des lignes successives en les mettant en colonne, en partant de la droite ; ensuite on effectue la multiplication comme en décimal. On suit les règles suivantes :

$$0 * 0 = 0 ,$$

$$1 * 0 = 0 ,$$

$$1 * 1 = 1 ,$$

Opérations binaires

41

3. Multiplication :

Exemple : effectuer l'opération suivante :

$$(1101)_2 * (101)_2 :$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ * 101 \\ \hline 1101 \\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

Opérations binaires

42

4. Division :

Nous avons vu que la multiplication était basée sur une succession d'addition inversement la division va être basée sur une succession de soustraction et s'emploi de la même façon qu'une division décimal ordinaire. On suit les règles suivantes :

$0 / 0$ indéterminé

$1 / 0$ indéterminé

$0 / 1 = 0$

$1 / 1 = 1$

Opérations binaires

43

4. Division :

Exemple : effectuer les opérations suivantes :
 $(100100)_2 / (1100)_2$, $(111100)_2 / (1101)_2$

$$\begin{array}{r|l} 100100 & 1100 \\ - 1100 & 11 \\ \hline 001100 & \\ - 1100 & \\ \hline 0000 & \end{array}$$

Diagram illustrating the binary division of $(100100)_2$ by $(1100)_2$. The dividend is 100100 and the divisor is 1100. The quotient is 11. The remainder is 0000. A blue arrow points down from the 0 in the dividend to the 0 in the remainder.

$$\begin{array}{r|l} 111100 & 1101 \\ - 1101 & 100 \\ \hline 001000 & \\ - 1101 & \\ \hline 001000 & \end{array}$$

Diagram illustrating the binary division of $(111100)_2$ by $(1101)_2$. The dividend is 111100 and the divisor is 1101. The quotient is 100. The remainder is 001000. A blue arrow points down from the 0 in the dividend to the 0 in the remainder.

Conclusion

44

Dans ce chapitre nous avons vu les notions suivantes :

- Les principaux systèmes de numération : binaire (base 2), octal (base 8) , décimal (base 10) et hexadécimal (base 16).
- Les conversions entre ces différents systèmes de numération.
- Et enfin les opérations binaires : addition, soustraction, multiplication et division.