ALGEBRE DE BOOL
BOOLEAN ALGEBRA

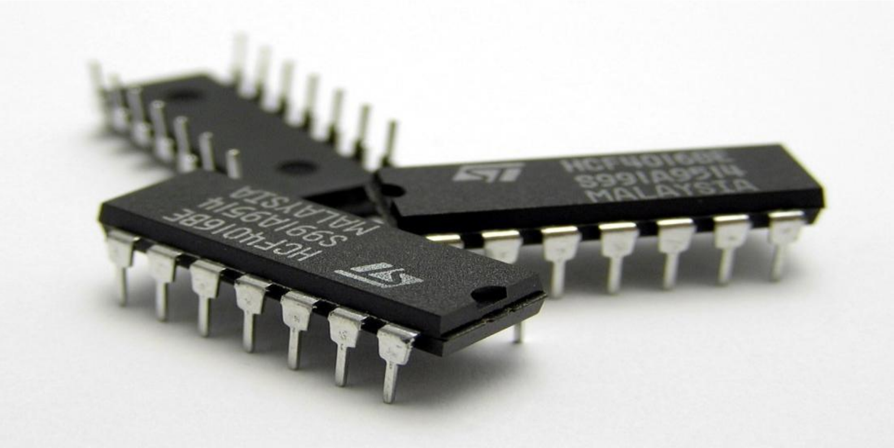
Mme AMGHAR D

ALGÈBRE DE BOOLE

1. **Introduction**
2. **Définition**
3. **Opération logique**
4. **Fonctions logiques**
5. **Formes canoniques conjonctive et disjonctive**

INTRODUCTION

Tout computer est conçu à partir de circuits intégrés (integrated circuit) qui ont tous une fonction spécialisée (ALU Arithmetic and logic unit, memory, circuit décodant les instructions etc.)



Integrated Circuit

INTRODUCTION

Integrated Circuit : ensemble de composants électroniques (transistor, diodes, resistors, …) qui permet de réaliser **des circuits logiques (Logic circuit).**

- Ces circuits sont fait à partir de circuits logiques dont le but est d'exécuter des opérations sur des variables logiques (binaires).

Circuit Logique Logic Circuit : est l'interconnexion de plusieurs circuits élémentaire (elementary circuits), appelés portes logiques (logic gates), conçu pour réaliser une fonction désirée.

INTRODUCTION

- Un circuit logique (**Logic Circuit**) peut avoir une ou plusieurs variables d'entrée (input variable) et une ou plusieurs fonctions de sortie (output function).

Types de circuits logiques:

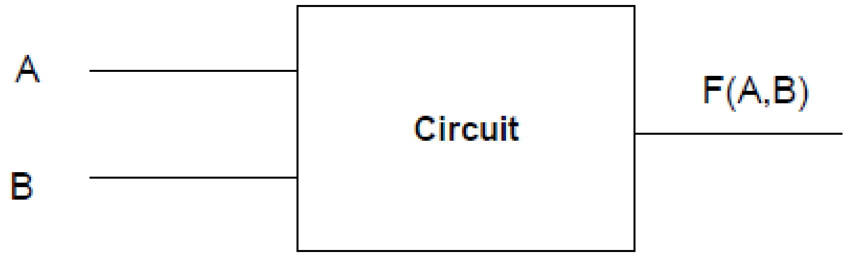
- Combinatoires (**Combinatorial Circuits)**
- Séquentiels (**Sequential Circuits)**

INTRODUCTION

- **circuit combinatoire Combinatorial Circuits :**
  - la fonction de sortie (output fonction) dépend uniquement des variables d'entrée (input variables)indépendamment du temps time .
- **circuit séquentiel Sequential Circuits :**
  - à l'instant **ti,** la fonction de sortie (output fonction) dépend à la fois des variables d'entrée (input variables) et du temps time **ti-1**.

INTRODUCTION

- Les machines numériques sont constituées d'un ensemble de circuits électroniques (electronic circuit).
- Chaque circuit fournit une fonction logique (logic function) bien déterminée (addition, comparaison ,….).



- La fonction F(A,B) peut être : **la somme** de A et B , ou le résultat de **la comparaison** de A et B ou une autre fonction
- Les fonctions d'un circuit sont élaboré grâce à ce qu'on appelle l'**Algèbre de Boole** (**Boolean algebra**) qui représente le support théorique **des circuits combinatoires** (Combinatorial Circuits).

ALGÈBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA

George Boole est un mathématicien anglais (1815-1864).

- Il a fait des travaux dont les quels les fonctions (expressions) sont constitués par des variables qui peuvent prendre les valeurs 'OUI' ou 'NON' (YES or NO).

Ces travaux ont été utilisés pour faire l'étude des systèmes qui possèdent deux états :

- Le système peut être uniquement dans deux états E1 et E2 tel que E1 est l'opposé de E2.
- Le système ne peut pas être dans l'état E1 et E2 en même temps

Ces travaux sont bien adaptés au Système binaire (binary systems)(0 , 1).

La conception et la réalisation d'un circuit digital se fait sur la base du modèle mathématique introduit par Boole.

ALGÈBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA

Exemple de systèmes à deux états

- Un interrupteur est ouvert ou non ouvert
- Une lampe est allumée ou non allumée
- Une porte est ouverte ou non ouverte
- **Remarque :**

On peut utiliser les conventions suivantes :

OUI → VRAI (true)
NON → FAUX (false)

OUI → 1 (Niveau Haut)
NON → 0 (Niveau Bas)

ALGÈBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA

Définitions :

- L'**Algèbre de BOOLE** est un ensemble de règles et théorèmes qui traite des **variables** à deux état (0 or 1, True or False) dites booléens à l'aide d'un ensemble définit des opérations logiques (logic operation) NON(NOT), ET (AND)et OU(OR).

- Le comportement d'une **porte logique** logic gates(ou plus largement d'un circuit logique) peut être représenté par **une table de vérité** **Truth table**.

ALGÈBRE DE BOOLE **BOOLEAN ALGEBRA**

Variable Logique Boolean variable **:**

Une VL ou BV, notée X, est une grandeur à 2 états :

$$X = 0 \quad \text{si } X \neq 1$$

$$X = 1 \quad \text{si } X \neq 0$$

Opérateurs logiques Boolean Operators **:**

3 opérateurs de base(3 basic operation): AND, OR, NOT

3 autre operation NAND, NOR, XOR (OU inclusif);

ALGÈBRE DE BOOLE **BOOLEAN ALGEBRA**

Fonction logique Boolean Function**:**

Une fonction logique est une association de variables logiques, reliées par des opérations, qui ne peut prendre que 2 valeurs (0 et 1).

Une FL peut, à son tour, servir comme variable vis-à-vis d'une autre FL.

Exemple: $S1 = e1 + e2;$ $S2 = e3 + e4;$

$$S = S1 \,.\, S2$$

ALGÈBRE DE BOOLE **BOOLEAN ALGEBRA**

La **table de vérité** Truth table:

est un moyen de définir la fonction d'un circuit ou d'une porte logique, qui contient les différents cas possibles et le résultat délivré par la porte ou le circuit pour chacun de ces cas.

ALGÈBRE DE BOOLE **BOOLEAN ALGEBRA**

boolean function and truth table:

C'est une fonction qui relie N variables logiques (logic variables) avec un ensemble d'opérateurs logiques de base(boolean operation).

• Dans l'Algèbre de Boole il existe trois opérateurs de base : NOT, AND, OR.

• La valeur d'une fonction logique est égale à 1 ou 0 selon les valeurs des variables logiques.

• Si une fonction logique(boolean function) possède N variables logiques(boolean variables)

⟹ 2^n combinaisons ⟶ la fonction possède 2^n valeurs.

• Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table qui s'appelle table de vérité **truth table** .

EXEMPLE D'UNE FONCTION LOGIQUE

$$F(A,B,C)=\overline{A}.\overline{B}.C+\overline{A}.B.C+A.\overline{B}.C+A.B.C$$

La fonction possède 3 variables 2^3 combinaisons

$$F(0,0,0)=\overline{0}.\overline{0}.0+\overline{0}.0.0+0.\overline{0}.0+0.0.0=0$$

$$F(0,0,1)=\overline{0}.\overline{0}.1+\overline{0}.0.1+0.\overline{0}.1+0.0.1=1$$

$$F(0,1,0)=\overline{0}.\overline{1}.0+\overline{0}.1.0+0.\overline{1}.0+0.1.0=0$$

$$F(0,1,1)=\overline{0}.\overline{1}.1+\overline{0}.1.1+0.\overline{1}.1+0.1.1=1$$

$$F(1,0,0)=\overline{1}.\overline{0}.0+\overline{1}.0.0+1.\overline{0}.0+1.0.0=0$$

$$F(1,0,1)=\overline{1}.\overline{0}.1+\overline{1}.0.1+1.\overline{0}.1+1.0.1=1$$

$$F(1,1,0)=\overline{1}.\overline{1}.0+\overline{1}.1.0+1.\overline{1}.0+1.1.0=0$$

$$F(1,1,1)=\overline{1}.\overline{1}.1+\overline{1}.1.1+1.\overline{1}.1+1.1.1=1$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		1

ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

NON (NOT) : Appelé couramment inverseur (négation), a une seule entrée et une seule sortie, c'est un opérateur qui réalise le complément d'une variable logique A, noté : NOT(A)=$\overline{A}$

Porte NON (NOT)

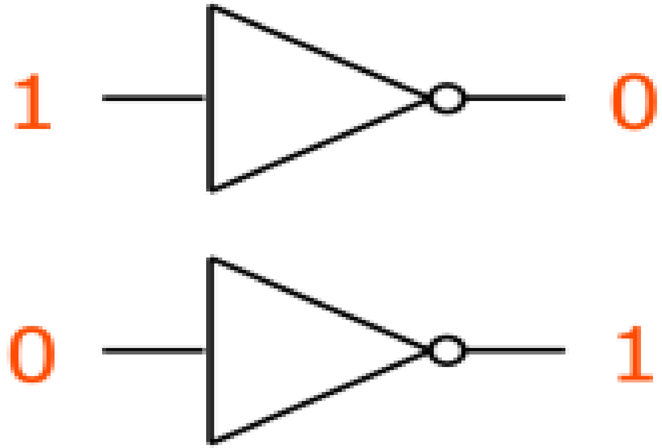
Son fonctionnement est décrit pat la table de vérité suivante :

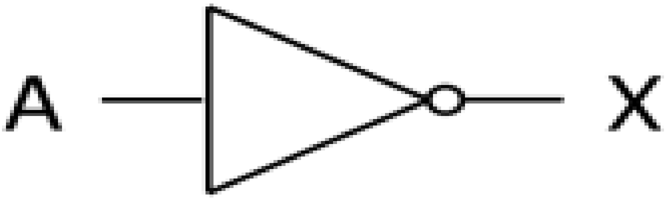
A	$\overline{A}$
0	1
1	0

NON (NOT)

ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

NON (NOT) :





$$X=\overline{A}$$

ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

ET (AND) :

C'est le produit logique de deux ou plusieurs variables logiques, le résultat de l'opération est 1, lorsque toutes les variables sont à 1 , sinon 0.

- Si A et B représentent deux variables logiques, le résultat de l'opération ET entre ces deux variables est noté : **A AND B = A . B**

priorités:

$A.A=A$

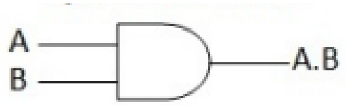
$A.\bar{A}=0$

$1.A=A$

$0.A=0$

ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

ET (AND) : Une porte logique AND à deux entrées est symbolisée de la manière suivante :



Porte ET (AND)

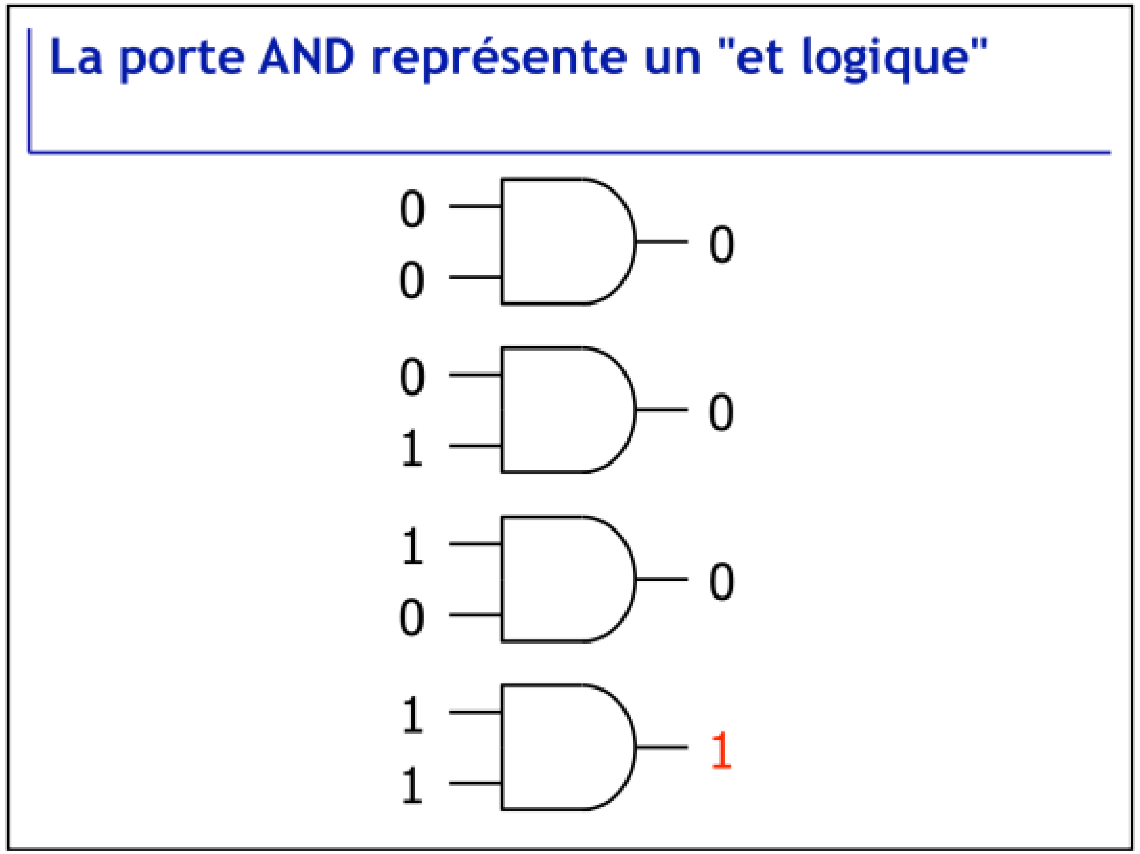
L'opération logique AND, notée '•' est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ET (AND)

ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

ET (AND) :



ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

OU (OR) : C'est la somme logique de deux ou plusieurs variables logiques, le résultat de l'opération est 1,lorsque au moins une des variables est égale à 1, et 0 si toutes les variables sont 0.

- Si A et B représentent deux variables logiques, le résultat de l'opération OU entre ces deux variables A et B est noté : **A OR B = A+B**

priorités:

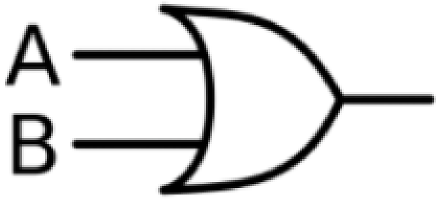
A+A=A

A+$\overline{A}$=1

1+A=1

0+A=0

ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

OU (OR) : Une porte logique OR  symbolisée de la manière suivante :

Porte OU (OR)

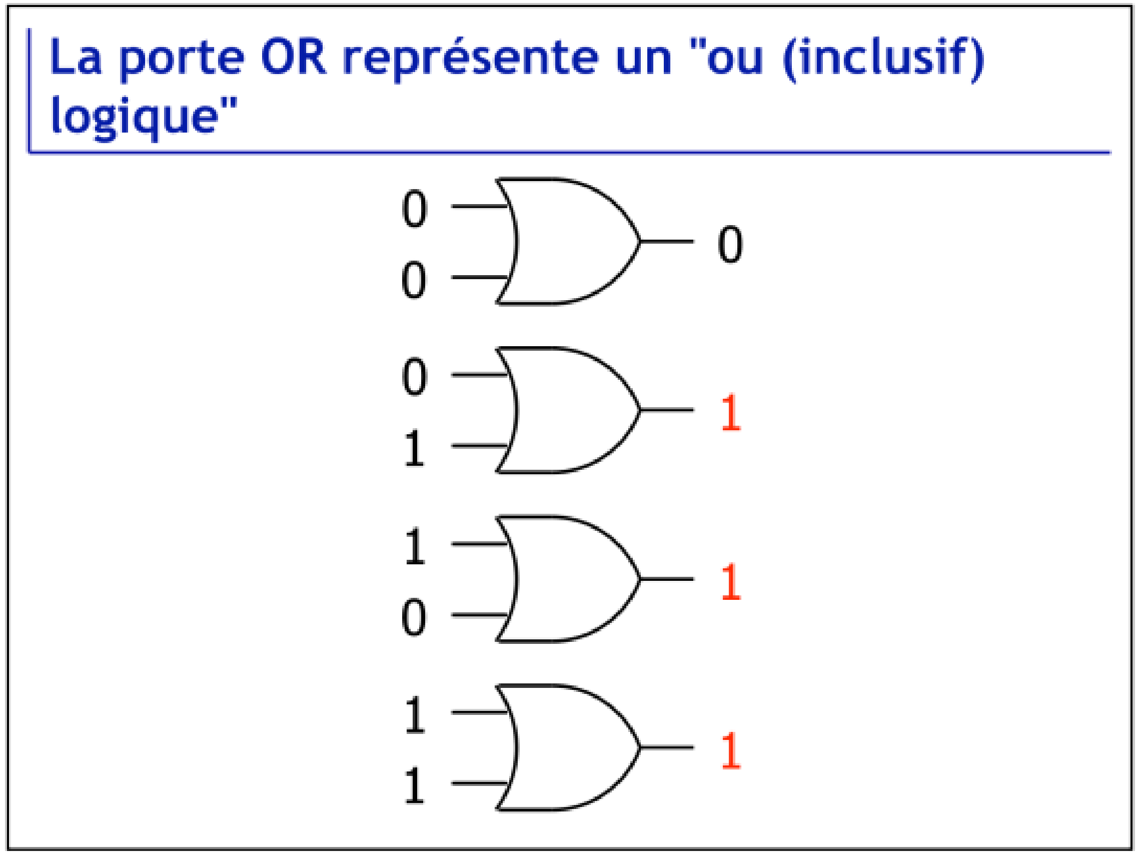
La fonction OR, notée +, est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OU (OR)

ALGEBRE DE BOOLE BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES PRINCIPALES

OU (OR) :

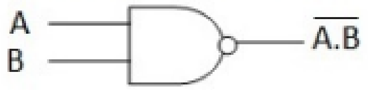


BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

NON ET (NAND) : C'est le complément (inverse) du produit logique de deux variables logiques A et B noté comme suit :

$$A \ \ NAND \ B = \overline{A.B}$$

Le symbole graphique d'une porte logique NAND est celui d'une porte AND à la sortie de laquelle on ajoute la "boule" représentant la négation et il est représenté comme suit:



Porte NON ET (NAND)

BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

NON ET (NAND) : Une opération logique NAND fonctionne selon la table de vérité suivante :

A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

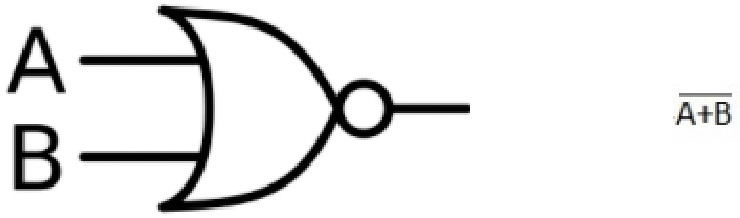
NON ET (NAND)

BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

NON OU (NOR) : C'est l'équivalent d'une opération OU suivie d'une opération NON de la somme logique de deux variables logiques A et B notée :

$$A \;\; NOR \;\; B \; = \; \overline{A + B}$$

- Le symbole graphique d'une porte logique NOR est celui d'une porte OR à la sortie de laquelle on ajoute la "boule" représentant la négation et il est représenté comme suit:



BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

NON OU (NOR) : L'opération logique NOR a la table de vérité suivante :

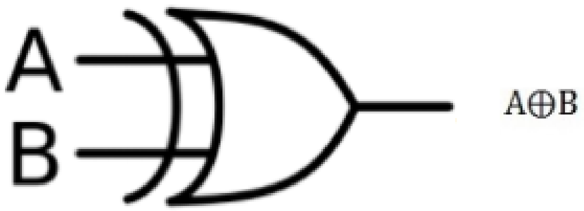
A	B	$\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NON OU (NOR)

BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

OU exclusif (XOR) : Cette opération donne comme résultat 1, si et seulement si une des deux variables est égale à 1, elle est définit par : $A \; XOR \; B = A \oplus B$

Elle a pour représentation symbolique :



BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

OU exclusif (XOR) : L'opération logique XOR a la table de vérité suivante :

A	B	A ***XOR*** B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

OU Exclusif (XOR)

BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

OU exclusif (XOR) :

- XOR est égal à 1 si et seulement si A = 1 ou B = 1 mais pas simultanément
- Une opération XOR fournit un comparateur d'inégalité : XOR ne vaut 1 que si A et B sont différents.
- Le complément du XOR correspond à un détecteur d'égalité.

$$A \oplus B = \bar{A}.B + A.\bar{B}$$

BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

OU exclusif (XOR) à plusieurs entrées :

- Pour calculer le résultat de **S=A XOR B XOR C** , il faut d'abord faire l'opération entre deux termes, puis refaire un ou exclusif entre le résultat obtenu et le troisième terme.
- Ce qui se traduit par **S=(A XOR B) XOR C** ou par **S = A XOR (B XOR C)**
- On constate que l'appellation "Ou exclusif" n'est tout à fait exacte que pour deux variables. Avec trois variables, le résultat vaut 1 si une d'entre elles ou toutes les trois valent 1.

BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

NON OU exclusif (XNOR) : Cette opération prend la valeur 1 si et seulement les deux variables binaires A et B prennent la même valeur, pour tous les autres cas prenne la valeur 0, elle est définit par : $\overline{A \oplus B}$

Elle a pour représentation symbolique :

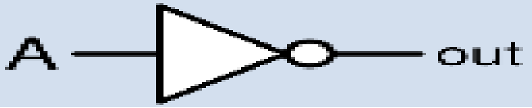
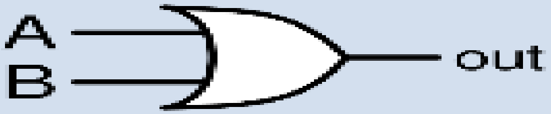
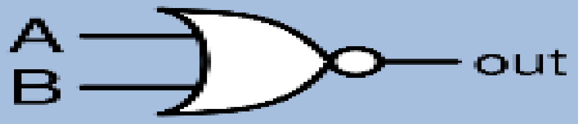
$\overline{A \oplus B}$

BOOLEAN ALGEBRA : LES OPÉRATIONS LOGIQUES SECONDAIRES

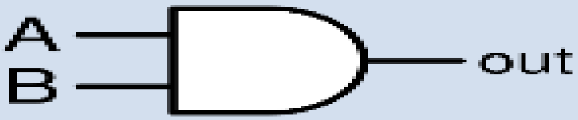
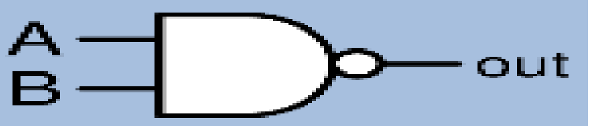
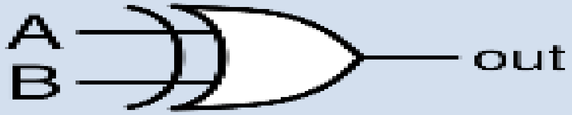
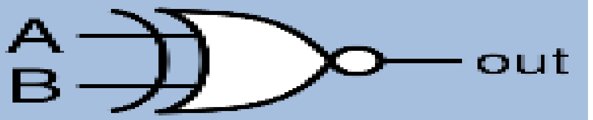
NON OU exclusif (XNOR) : L'opération logique XNOR a la table de vérité suivante :

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

BOOLEAN ALGEBRA : RÉSUMÉ DES PORTES LOGIQUES LOGIC GATES

Type	Description	Schéma universel	Formule booléenne (cf. lexique)	Table de vérité (cf. lexique)		
Porte à 1 entrée « A » et 1 sortie « S »						
NOT	Le NLS est l'inverse du niveau logique d'entrée.		$S = \overline{E}$	Etat de A		Etat de S
				0		1
				1		0
Portes à 2 entrées (« A » et « B ») et 1 sortie « S »						
OR	Si une des 2 entrées est à 1 (ou les 2), le NLS est à 1 aussi		$S = A + B$	Etat de A	Etat de B	Etat de S
				0	0	0
				0	1	1
				1	0	1
				1	1	1
NOR (NOT OR)	C'est l'opposé de la porte « OR », si aucune des entrées ne sont à 1, le NLS est à 1 aussi		$S = \overline{A + B}$	Etat de A	Etat de B	Etat de S
				0	0	1
				0	1	0
				1	0	0
				1	1	0

BOOLEAN ALGEBRA : RÉSUMÉ DES PORTES LOGIQUES LOGIC GATES

Type	Description	Schéma universel	Formule booléenne (cf. lexique)	Table de vérité (cf. lexique)		
Porte à 1 entrée « A » et 1 sortie « S »						
AND	Si les 2 entrées sont à 1 alors le NLS est à 1		$S = A.B$	Etat de A	Etat de B	Etat de S
				0	0	0
				0	1	0
				1	0	0
				1	1	1
NAND (NOT AND)	C'est l'opposé de la porte « AND », si les 2 entrées ne sont pas à 1, le NLS est à 1		$S = \overline{A.B}$	Etat de A	Etat de B	Etat de S
				0	0	1
				0	1	1
				1	0	1
				1	1	0
XOR	Si seulement une seule des entrées est à 1, le NLS est à 1 aussi		$S = A \oplus B$	Etat de A	Etat de B	Etat de S
				0	0	0
				0	1	1
				1	0	1
				1	1	0
XNOR	Si les 2 entrés ont le même état, le NLS est à 1		$\overline{S = A \oplus B}$	Etat de A	Etat de B	Etat de S
				0	0	1
				0	1	0
				1	0	0
				1	1	1

BOOLEAN ALGEBRA : FONCTION LOGIQUE (BOOLEAN FUNCTION)

Boolean function: est une combinaison de variables logiques reliées par des opérateurs logiques (AND, OR et NOT).

- **Représentation Boolean fonction** : pour définir une fonction logique , nous avons plusieurs représentations (on verra d'autres dans la suite du cours) .

BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

Représentation d'une fonction logique :

- Représentation algébrique Algebraic form : équation equation.
- Représentation arithmétique : table de vérité truth table.
- Représentation temporelle : chronogramme timing diagram.
- Représentation graphique : logigramme Logic diagram.

BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

- **Représentation algébrique** Algebraic form : On peut représenter une fonction logique(boolean function) en utilisant les opérations logiques(boolean operation) cités ci-dessus sous forme d'une équation.

Exemple : soit a, b, c trois variables booléens, voici quelques exemples de fonctions logiques :

$$F1 = ab + \bar{a}b \quad , \quad F2 = (a + b) + (\bar{a}b + b\bar{c})$$

BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

- **Représentation arithmétique (table de vérité) truth table :**

Truth table : un tableau représentant les valeurs que prend une expression booléenne pour chaque combinaison possible de ses entrées

Exemple 1 :

$F1 = ab + \bar{a}b$, 2 variables

=> 4 valeurs possibles

a	b	ab	$\bar{a}b$	F1
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

- **Représentation arithmétique (truth table) :**

Exemple 2 :

$F2 = (a+b)(\overline{a}b+b\overline{c})$ 3 variables => 8 valeurs

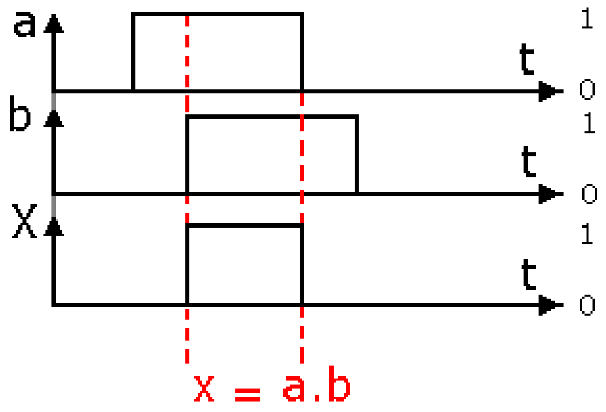
a	b	c	$\overline{a}b$	$b\overline{c}$	$\overline{a}b+b\overline{c}$	a+b	F1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0

BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

Représentation Temporelle (chronogramme) timing diagram **:**

Le chronogramme est une représentation graphique qui permet de visualiser, en fonction du temps, toutes les combinaisons d'états logiques possibles des entrées avec l'état correspondant de la sortie.

Exemple : X = f(a,b) = a.b



BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

- **Représentation graphique (logigramme ou circuit logique)** Logic diagram

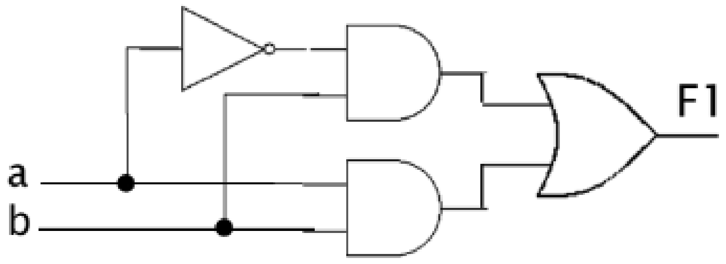
On peut représenter une fonction logique à l'aide des portes logiques(boolean gates) dont la lecture se fait de gauche à droite.

On obtient ainsi le schéma logique d'une fonction en remplaçant chaque opérateur par le symbole correspondant.

BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

- **Représentation graphique (logigramme ou circuit logique)**

Exemple 1 :



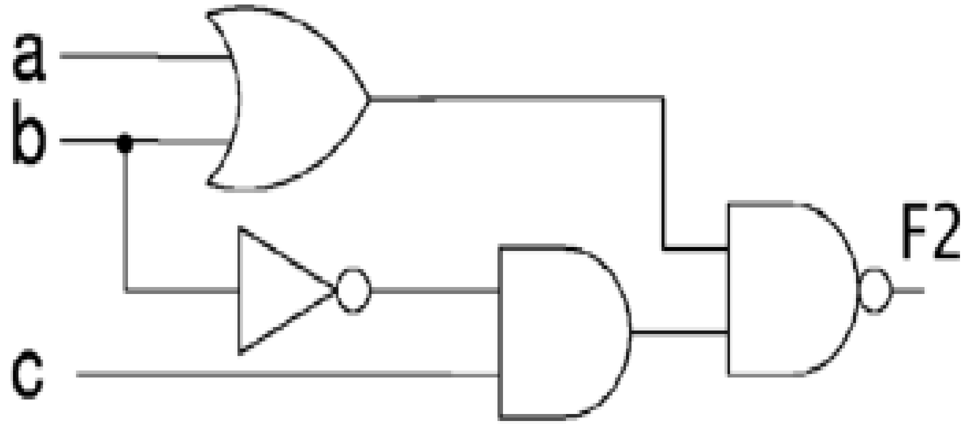
$$F1 = ab + \bar{a}b$$

BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

Représentation graphique (logigramme ou circuit logique)

Exemple 2 :

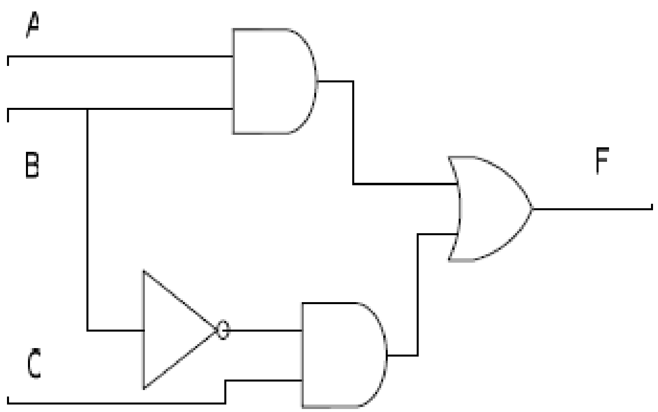
$$F2 = \overline{(a+b)(\overline{b}.c)}$$



BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

Exemple3

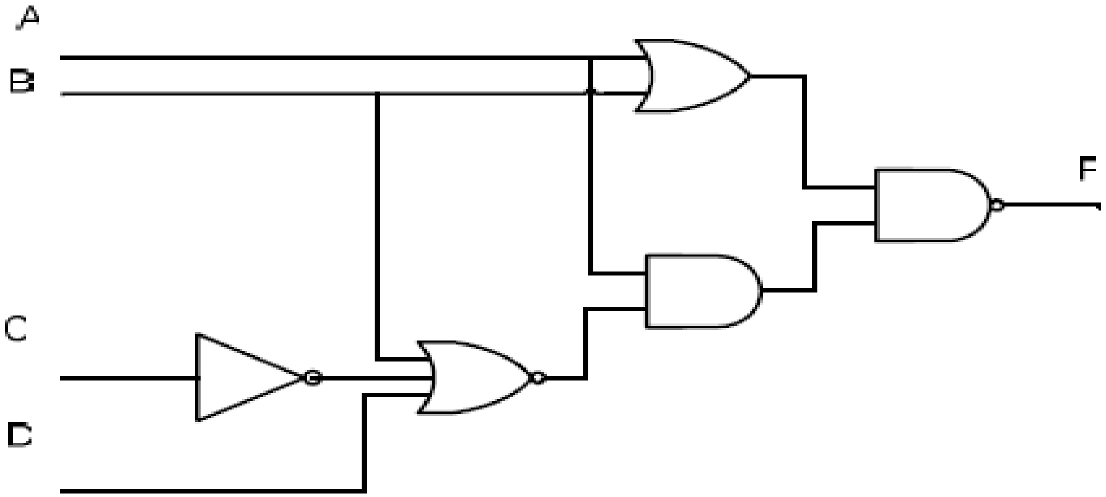
$$F(A,B,C) = A.B + \overline{B}.C$$



BOOLEAN ALGEBRA : REPRÉSENTATION D’UNE FONCTION LOGIQUE BOOLEAN FUNCTION

Exemple 4

$$F(A,B,C,D) = \overline{(A+B)\,.\,\overline{(B+\overline{C}+D)}\,.\,A}$$



BOOLEAN ALGEBRA : RELATION ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

Toutes les représentations sont équivalentes, c'est-à-dire, on peut toujours passer d'une représentation à une autre.

- **Exemple 1 :**

Soit la fonction $f(a,b) = a.b + \bar{a}.\bar{b}$

Pour représenter cette fonction par une table de vérité, procédons comme suit : la somme logique de deux termes logiques est égale à 1 si au moins un des deux termes est égal à 1,

donc soit $a.b = 1$ ou $\bar{a}.\bar{b} = 1$;

BOOLEAN ALGEBRA : RELATION ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

Exemple 1 :

or le produit logique de deux variables est égale à 1 si les deux variables sont égales à 1 ;

d’où f(a,b)= 1 si a=1 et b=1 ou $\bar{a} = 1 \; et \; \bar{b} = 1$

a	b	$f(a, b)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

BOOLEAN ALGEBRA : RELATION ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

Exemple 2 :

Soit à trouver l'expression logique de la fonction f définie par la table de vérité suivante

a	b	$f(a, b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

BOOLEAN ALGEBRA : RELATION ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

Exemple 2 :

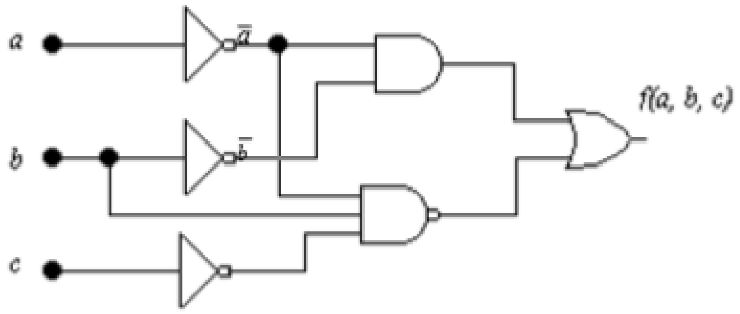
Pour représenter une fonction sous forme algébrique à partir de sa table de vérité, on suit les étapes suivantes :

1. On ne considère dans la table de vérité que les combinaisons de variables pour lesquelles la fonction vaut 1.
2. Dans la combinaison on remplace les 1 par les variables et les zéros par leurs compléments. Ainsi, chaque combinaison va correspondre au produit logique de ses variables ou de leurs compléments.
3. La fonction sera la somme logique de tous les produits logiques déjà trouvés en 2

Donc, $f(a,b) = \bar{a}.b + a.\bar{b} + a.b$

BOOLEAN ALGEBRA : RELATION ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

Exemple 3 : Considérons le circuit comprenant trois entrées a, b et c et une seule sortie x. Pour trouver l'expression booléenne d'un circuit donné, écrivez l'expression de chaque porte en commençant par les entrées placées à l'extrême gauche et en continuant vers la sortie.



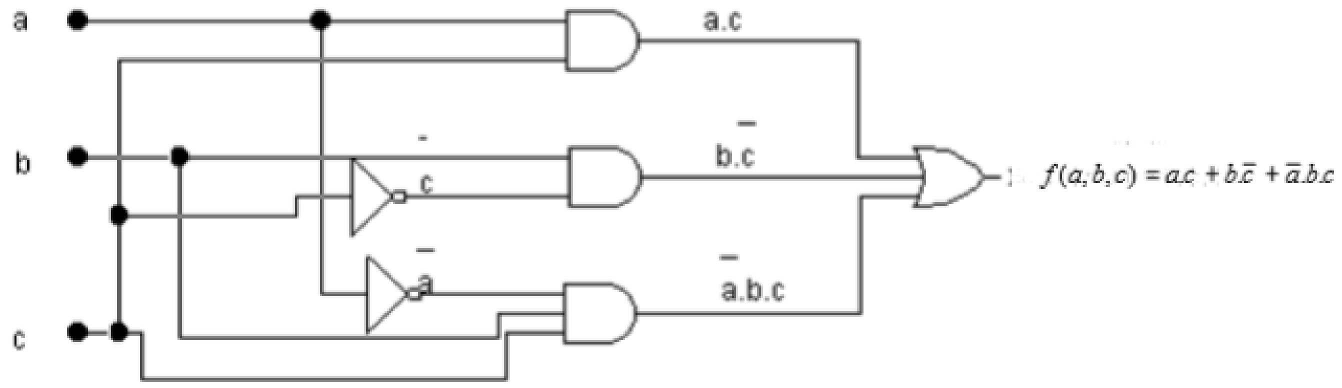
$$f(a,b,c) = \bar{a}.\bar{b} + \overline{\bar{a}.b.\bar{c}}$$

BOOLEAN ALGEBRA : RELATION ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS

Exemple 4 : Dessinons le logigramme du circuit dont

la sortie est : $X = a.c + b.\bar{c} + \bar{a}.b.c$

. Si l'opération d'un circuit est définie par une expression booléenne, il est possible de tracer directement son diagramme logique



BOOLEAN ALGEBRA : PROPRIÉTÉS

Comme notre objectif est la réalisation des schémas alors il est évident que plus simples seront ces schémas, plus simple en sera leur réalisation, cette simplicité se traduisant, bien entendu, par un meilleur prix de revient.

L'obtention d'une expression minimale peut se faire

- Soit par une méthode purement algébrique.
- Soit par une méthode graphique.

BOOLEAN ALGEBRA : PROPRIÉTÉS

Involution	$\bar{\bar{a}} = a$
Idempotence	$a + a = a \qquad a.a = a$
Complémentarité	$a.\bar{a} = 0 \qquad a + \bar{a} = 1$
Éléments neutres	$a = a.1 = 1.a = a \qquad a + 0 = 0 + a = a$
Absorbants	$a + 1 = 1 \qquad a.0 = 0$
Associativité	$(a.b).c = a.(b.c)$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
Distributivité	$a.(b + a) = a.b + a.c$ $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
Règles de de Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$ $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

BOOLEAN ALGEBRA : PROPRIÉTÉS

Absorption

$$a + a.b = a$$

$$a.(a + b) = a$$

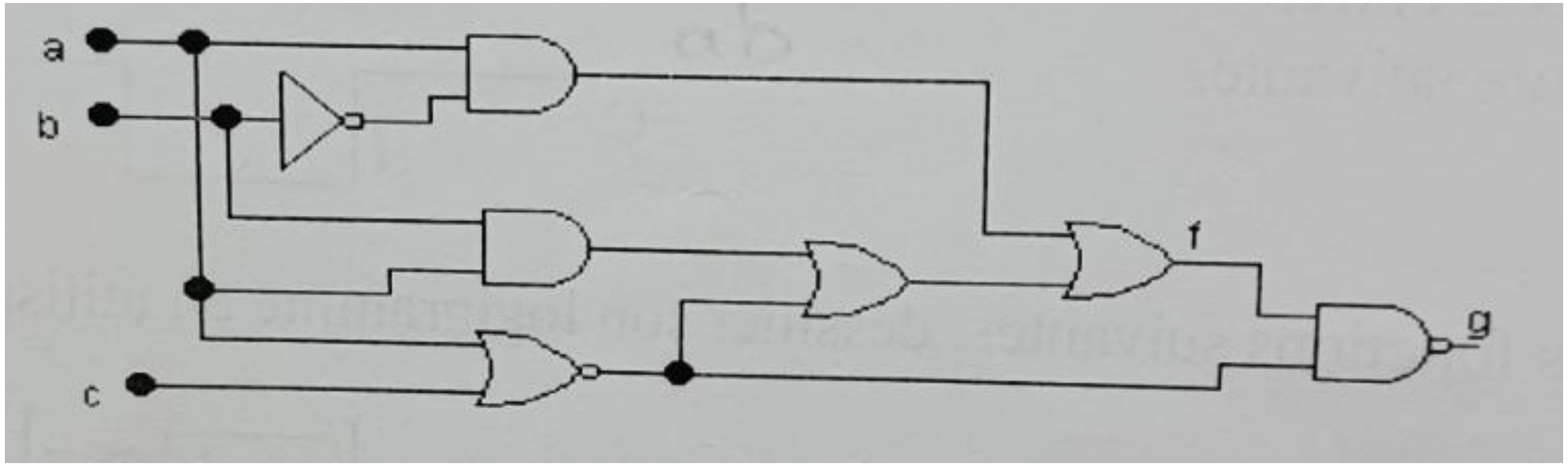
$$a + \bar{a}.b = a + b$$

$$a.(\bar{a} + b) = a.b$$

$$a.b + b.c + c.\bar{a} = a.b + c.\bar{a}$$

$$(a + b).(b + c).(c + \bar{a}) = (a + b).(c + \bar{a})$$

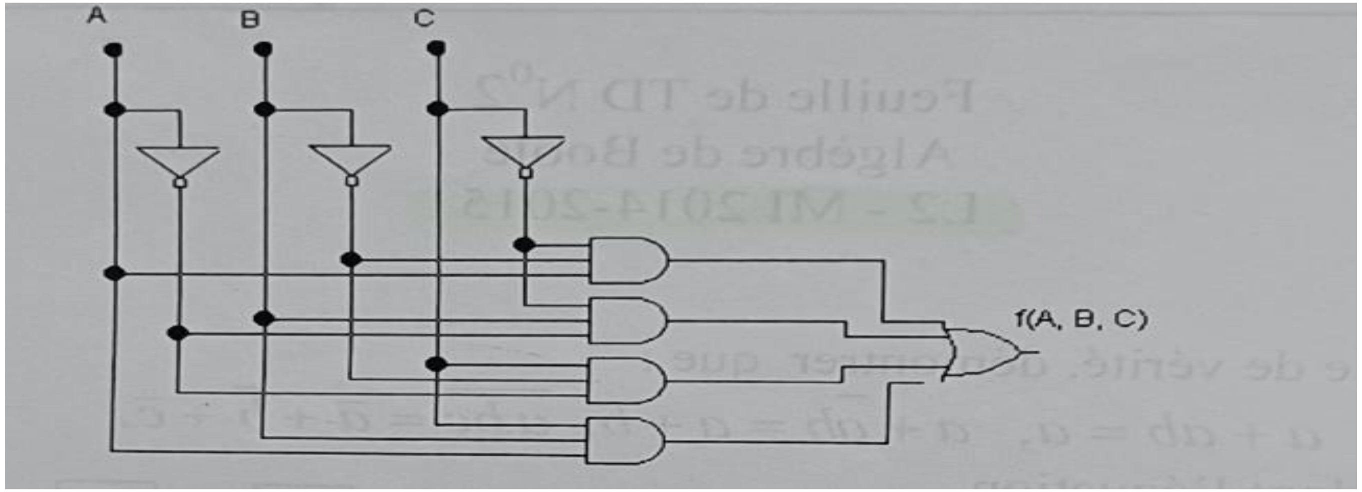
BOOLEAN ALGEBRA : EXERCICE 1



Donner les équations de f et g.

Simplifiez puis dessiner le logigramme des fonctions f et g en utilisant que les portes logiques **NAND** à deux entrées.

BOOLEAN ALGEBRA : EXERCICE 2



- Donner l’expression algébrique de ce circuit logique.
- Ecrire l’expression en utilisant que les opérateurs XOR.
- Tracer le logigramme de la nouvelle expression

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

- **Définition 1 :**

Un « **minterme** » de n variables est un **produit** de ces **n variables** ou de leurs complémentaires.

Exemple : Si on considère 4 variables a, b, c et d,

m = a.b.c.d est un **minterme**,

m = est $a.b.\bar{c}.\bar{d}$ un autre **minterme**,

m = a.b.d n'est pas un minterme.

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

- **Définition 2 :**

Un « **maxterme** » de n variables est **une somme** de ces **n variables** ou de leurs complémentaires.

- **Exemple** : Si on considère 4 variables a, b, c et d,
  - M = a + b + c + d est un **maxterme,**
  - M = est $a + \bar{b} + c + d$ un autre **maxterme,**
  - M = a + b + d n'est pas un maxterme.

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Exemple : Les mintermes et maxtermes de la table de vérité :

A	B	C	F		
0	0	0	0	$\longrightarrow$	$A+B+C$: max terme
0	0	1	0	$\longrightarrow$	$A+B+\overline{C}$: max terme
0	1	0	0	$\longrightarrow$	$A+\overline{B}+C$: max terme
0	1	1	1	$\longrightarrow$	$\overline{A}.B.C$: min terme
1	0	0	0	$\longrightarrow$	$\overline{A}+B+C$: max terme
1	0	1	1	$\longrightarrow$	$A.\overline{B}.C$: min terme
1	1	0	1	$\longrightarrow$	$A.B.\overline{C}$: min terme
1	1	1	1	$\longrightarrow$	$A.B.C$: min terme

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme Disjonctive Disjunctive canonical form (DCF) **:**

Elle correspond à **une somme de produits logiques** :

F = SP(ei) , où **ei** représente une variable ou son complément.

Exemple :

$$\boxed{F(x,y,z) = x.y + x.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z}$$

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme Disjonctive Disjunctive canonical form (DCF)

- Si chacun des produits contient toutes les variables d'entrée sous une forme directe ou complémentée

Alors la forme est appelée « **première forme canonique** » ou « **forme canonique disjonctive** » ou forme **somme de produit standard** (SdP) .

- Chacun des produits est alors appelé **minterme.** Exemple de forme canonique disjonctive

$$\boxed{F(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z}$$

forme canonique disjonctive

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme Disjonctive Disjunctive canonical form (DCF)

Elle fait référence à **un produit de sommes logiques** :

F = PS(ei).

où **ei** représente une variable ou son complément.

Exemple :

$$\boxed{F(x,y,z) = (x+y).(x+\bar{z}).(\bar{x}+y+z)}$$

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme Conjonctive Conjunctive canonical form (CCF) :

- Si chacune des sommes contient toutes les variables d'entrée sous une forme directe ou complémentée
- Alors la forme est appelée « **deuxième forme canonique** » ou « **forme canonique conjonctive** » ou forme **produit de somme standard** (PdS).
- Chacune des sommes est alors appelée **maxterme.**
- Exemple de forme canonique conjonctive :

$$\boxed{F(x,y,z) = (x+y+z).(x+\bar{y}+\bar{z}).(\bar{x}+y+z)}$$

forme canonique conjonctive

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

- **Remarque :**

La forme d’une fonction ou les termes ne contiennent pas toutes les variables est appelé forme **normale**

Pour convertir une fonction normale en une forme **canonique** il faut :

1. Multiplier un **minterme** avec une expression qui vaut un.
2. Additionnez un **maxterme** par une expression qui vaut zéro.
3. Faire la distribution.

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

- **Forme canonique disjonctive** Disjunctive canonical form (DCF)

- Une fonction logique est représentée par l'ensemble des configurations pour lesquelles la fonction est égale à « 1 ».
- Considérons maintenant une configuration des entrées pour laquelle une fonction booléenne vaut « 1 » : il existe **un minterme** unique prenant la valeur « 1 » dans cette configuration.
- Il suffit donc d'effectuer la somme logique (ou réunion) **des mintermes** associés aux configurations pour lesquelles la fonction vaut « 1 » pour établir l'expression **canonique disjonctive** de la fonction.

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme canonique disjonctive Disjunctive canonical form (DCF)

A	B	C	F(A,B,C)	état	Minterme
0	0	0	1	0	$\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$
0	0	1	1	1	$\overline{A}.\overline{B}.C$
0	1	0	0	2	$\overline{A}.B.\overline{C}$
0	1	1	1	3	$\overline{A}.B.C$
1	0	0	0	4	$A.\overline{B}.\overline{C}$
1	0	1	1	5	$A.\overline{B}.C$
1	1	0	0	6	$A.B.\overline{C}$
1	1	1	0	7	$A.B.C$

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme canonique disjonctive Disjunctive canonical form (DCF)

Soit une fonction F de trois variables définie par sa table de vérité :

- On remarque que F(A,B,C) = 1 pour les états 0, 1, 3, 5.
- On écrit la fonction ainsi spécifiée sous une forme dite numérique : F = R(0, 1, 3, 5), Réunion des états 0, 1, 3, 5.
- La première forme canonique de la fonction F s'en déduit directement :

$$F(A;B;C) = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme canonique conjonctive Conjunctive canonical form (CCF)

- Considérons maintenant une configuration des entrées pour laquelle la fonction vaut « 0 ».
- Il existe un **maxterme** unique prenant la valeur « 0 » en cette configuration. Ce maxterme prend donc la valeur « 1 » dans toutes les autres configurations des entrées.
- Il suffit donc d'effectuer le produit logique (ou intersection) des maxtermes associés aux configurations pour lesquelles la fonction vaut « 0 » pour établir l'expression canonique conjonctive de la fonction.

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme canonique conjonctive Conjunctive canonical form (CCF)

Reprenons l'exemple de la fonction F:

A	B	C	F(A,B,C)	état	Maxterme
0	0	0	1	0	$A+B+C$
0	0	1	1	1	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	0	2	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	1	3	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1	0	0	0	4	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	1	5	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	0	6	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	0	7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Forme canonique conjonctive Conjunctive canonical form (CCF)

- On remarque que F(A,B,C) = 0 pour les états 2, 4, 6, 7.
- On écrit la fonction ainsi spécifiée sous une forme dite numérique : F = I(2, 4, 6, 7) Intersection des états 2, 4, 6, 7.
- La deuxième forme canonique de la fonction F s'en déduit directement :

$$F(A;B;C) = (A+\overline{B}+C).(\overline{A}+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Pour créer des circuits logiques a partir du texte, il faut créer manuellement **la table de vérité** de la description du texte ensuite tirer les **minterme**s (ou **maxtermes**) avec les fonctions logiques de base.

Exemple :

On a trois juges qui contrôlent le départ d'une course. La course a lieu si au moins deux des trois juges sont prêts.

- Créer le circuit logique qui représente le départ d'une course.
- **Solution** : Les trois juges forment les trois entrées : A, B et C. Le départ de la course représente la sortie F.

On peut ensuite créer manuellement la table de vérité de cette fonction

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Exemple :

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

BOOLEAN ALGEBRA : FORMES CANONIQUES CONJONCTIVE ET DISJONCTIVE

Exemple :

On peut ensuite exprimer cette fonction comme une somme de mintermes :

F = S(3,5,6,7). Puis on va simplifier la fonction.

$$
\begin{aligned}
F = S(3;5;6;7) &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\
&= \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC + ABC + AB\bar{C} + ABC \\
&= BC(A+\bar{A}) + AC(B+\bar{B}) + AB(C+\bar{C}) \\
&= AB + BC + AC
\end{aligned}
$$

BOOLEAN ALGEBRA : PASSAGE D'UNE FORME CANONIQUE À UNE AUTRE

En utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole, on peut passer d'une forme canonique à une autre.

Exemple 1 :

Soit la fonction $f(a, b, c) = a + b.\bar{c}$

1. Ecrire f sous la première forme canonique

2. Ecrire f sous la deuxième forme canonique

BOOLEAN ALGEBRA : PASSAGE D'UNE FORME CANONIQUE À UNE AUTRE

Exemple 1 : f sous la première forme canonique

$$f(a,b,c) = a + b.\bar{c}$$

$$f(a,b,c) = a.1.1 + 1.b.\bar{c}$$

$$f(a,b,c) = a.(b+\bar{b})(c+\bar{c}) + (a+\bar{a}).b.\bar{c}$$

$$f(a,b,c) = a.b.c + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c}$$

$$f(a,b,c) = a.b.c + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c}$$

$$f(a,b,c) = m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_2$$

$$= \sum m(2,4,5,6,7)$$

BOOLEAN ALGEBRA : PASSAGE D'UNE FORME CANONIQUE À UNE AUTRE

Exemple 1 : f sous la deuxième forme canonique

$$f(a,b,c) = (a+b).(a+\bar{c})$$

$$f(a,b,c) = (a+b+0).(a+\bar{c}+0)$$

$$f(a,b,c) = (a+b+c.\bar{c}).(a+\bar{c}+b.\bar{b})$$

$$f(a,b,c) = (a+b+c).(a+b+\bar{c}).(a+\bar{c}+b).(a+\bar{c}+\bar{b})$$

$$f(a,b,c) = (a+b+c).(a+b+\bar{c}).(a+\bar{c}+\bar{b})$$

$$f(a,b,c) = M_0.M_1.M_3 = \prod M(0,1,3)$$

BOOLEAN ALGEBRA : PASSAGE D'UNE FORME CANONIQUE À UNE AUTRE

Conclusion :

Pour passer de la première forme canonique à la deuxième forme canonique, il suffit de remplacer tous les **mintermes** de la fonction par les **maxtermes** ayant des indices différents.

De même ; pour passer de la deuxième forme canonique à la première forme canonique, il suffit d'utiliser une procédure similaire.

BOOLEAN ALGEBRA : PASSAGE D'UNE FORME CANONIQUE À UNE AUTRE

Exemple 2 : Convertissez la forme canonique disjonctive suivante en forme

$$f(a,b,c) = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.b.c + a.\bar{b}.c + a.b.c = \sum m(0,2,3,5,7)$$

D'ou

$$f(a,b,c) = (a + b + \bar{c}).(\bar{a} + b + c).(\bar{a} + \bar{b} + c) = \prod M(1,4,6)$$

CONCLUSION :

- Dans ce chapitre nous avons les principaux points suivant:
- Fonction logique
- Portes logiques
- Circuit logiques
- Table de vérité
- Chronogramme
- Algèbre de Boole (propriétés)
- Simplification de fonction.
- Formes canoniques disjonctive et conjonctive.