Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Fiche de TD N°4
Fonctions d'une varriable réelle.
$1^{ère}$ LMD $2024 - 2025$

Partie I

Exercice 1

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{x+3}{2E(x)-1}, \qquad g(x) = \frac{x - \sqrt{|x^2-1|}}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{1-\ln x}.$$

2. En utilisant la définition d'une fonction monotone, Vérifier si les fonctions suivantes sont strictement monotones sur leurs domaines de définitions $f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}$

3. Etudier

   (a) La parité des fonctions

$$f(x) = x^5 - \sin x,\ g(x) = \cos(2x) + \cos x,\ h(x) = e^x + \cos x$$

   (b) La périodicité de $\{\cos(2x) + \sin x\}$ puis de $\{\cos x + \cos(\sqrt{2}x)\}$.

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos x}, \qquad \lim_{x \to 0} (x \times [\frac{1}{x}]), \qquad \lim_{x \to +\infty} (\frac{x \ln x + 5}{x^2 + 4}).$$

2. Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une fonction, que

$$\lim_{x \to 2} (3x + 1 = 7), \qquad \lim_{x \to 0} x \cos(\frac{2}{x^2}) = 0.$$

Exercice 3

1. Déterminer la constante a pour que les fonctions suivantes soient continues au point indiqué

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos x}, & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & , \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \times [\frac{1}{x}], & \text{si } x \neq 0 \\ a & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Les fonctions suivantes sont-elle prolongeable par continuété au point x_0 indiqué? Si oui ecrire leur prolongée.

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{1-x^2},\ (x_0 = 0), \qquad g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},\ (x_0 = 1)$$

3. A l'aide d'une version du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation "$x + e^x = 1$", admet une solution et préciser l'intervalle.

Exercice 4

1. Calculer, à l'aide de la définition, les dérivées des fonctions $1/x$, $\sqrt{x}$, x^3.
2. Préciser les ensembles de définition des fonctions suivantes, puis calculer les dérivées

$$5^{\ln x} + 3^x, \qquad e^{-x}\cos(2x), \qquad \ln(\ln x)$$

3. Calculer les dérivées n-iemmes des fonctions

$$e^{ax}, \qquad \frac{1}{1-x}, \qquad (1+2x)^n.$$

Exercice 5 (supp) Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2]$, par $f(x) = 5 + \sqrt{2-x}$ et g la fonction définie sur $[5, +\infty[$, par $g(x) = -x^2 + 10x - 23$.

1. Montrer que pour tout $x \in [5, +\infty[$, $(f \circ g)(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 2]$, $(g \circ f)(x) = x$.
3. Est-ce que, dans cet exemple, $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 6 (supp)

1. Etudier La périodicité de " $\cos(x + [x])$ " puis de "$(\sin x) \times \cos(\sqrt{3}x)$ ".
2. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x}, \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right).$$

3. Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^9 + x + 2$.
A l'aide d'une version du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction admet au moins une racine réelle. Cette racine est elle unique? justifier

4. Calculer la dérivée n-iemme des fonctions suivantes

$$f(x) = e^{2x}\sin x, \qquad g(x) = x^2 \sin x.$$