Université Abou BakrBelkaïd-Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatiques

Fiche de TD N°4
Fonctions dérivables.
$1^{ère}$ LMD $2024 - 2025$

Partie II

Exercice 1

1. Calculer la dérivée de la fonction $(e^{-x}\cos(3x))$ dans $\mathbb{R}$.
   En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-x}\cos(3x)-1}{x}$
2. Etudier la dérivabilité des fonctions définit de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, par

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}\cos(3x), & \text{si } x<0 \\ 1-x, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} e^{-x}\cos(3x), & \text{si } x<0 \\ -1-x, & \text{si } x\geq 0 \end{cases},$$

Exercice 2 Pour chaque $\alpha\in\{0,1,2\}$, étudier la continuité en 0, la dérivabilité en 0, de classe C^1 en 0, de la fonction suivante

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x\neq 0 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Exercice 3

1. En appliquant le théorème des acroissements finis, montrer que, pour tout $x>0$

$$1)\qquad \frac{1}{1+x} < \ln(1+x)-\ln x < \frac{1}{x}$$

$$2)\qquad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad \text{(Supp)}$$

2. Enoncé le théorème de Rolle, puis vérifier les hypothèses du théorème pour les fonctions

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+2} \text{ pour } -1\leq x\leq 1$$

$$g(x)=\frac{1}{(x-2)^2} \text{ pour } 0\leq x\leq 3.$$

$$h(x)=\sin(2x) \text{ pour } 0\leq x\leq \pi \qquad \text{(Supp)}$$

Exercice 4 (supp)
Donner une condition sur a et b pour que les fonctions suivantes soient continues sur $\mathbb{R}$. Puis étudier la dérivabilité.

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{si } x<-2. \\ x^3+2x+a, & \text{si } -2\leq x<1. \\ e^x-b, & \text{si } x\geq 1. \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{si } x<0 \\ a & \text{si } x=0 \\ b\,\frac{\sin(5x)}{x}, & \text{si } x>0 \end{cases}, \quad a,b\in\mathbb{R}$$