

वियोज्य/DETACHABLE

गणित (प्रश्नपत्र I)
MATHEMATICS (Paper I)

समय : तीन घण्टे

Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250

Maximum Marks : 250

प्रश्नपत्र के लिए निर्देश

उत्तर लिखना शुरू करने से पहले कृपया निम्न निर्देशों में से प्रत्येक को ध्यानपूर्वक पढ़ लीजिए।

आठ प्रश्नों को दो खंडों में बांटा गया है और हिन्दी तथा अंग्रेजी में छापा गया है।

उम्मीदवार को कुल पांच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न 1 एवं 5 अनिवार्य हैं, बाकी में से तीन का उत्तर प्रत्येक खंड से न्यूनतम एक प्रश्न लेते हुए करना है।

प्रश्न/अंश के अंक उस के सामने दिये गए हैं।

उत्तर उसी माध्यम में दिये जाने हैं जो सर्टिफिकेट में अनुमत है। उसका उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (QCA) बुकलेट में निर्धारित स्थान पर मुखपृष्ठ पर करना जरूरी है। अनुमत माध्यम से भिन्न माध्यम में दिये उत्तरों पर कोई अंक नहीं दिया जायेगा।

जरूरत होने पर, उचित आंकड़े मान लें, उस का उल्लेख स्पष्टतः अवश्य करें।

यदि अन्यथा सूचित नहीं हो, सिंबल एवं नोटेशन आम तौर पर प्रयुक्त सामान्य अर्थ वहन करते हैं।

सभी प्रश्नों को क्रमान्वय में गिना जायेगा। प्रश्न आंशिक रूप में किया गया, तो भी गिना जायेगा यदि उसे नहीं काट दिया गया हो। कोई खाली पन्ना या अंश यदि उत्तर पुस्तिका में छोड़ा गया है, उसे स्पष्टतः अवश्य काट दें।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are EIGHT questions divided into two SECTIONS and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question No. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खंड 'क'

1. सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

1.(a) प्रारंभिक पंक्ति संक्रिया का इस्तेमाल करते हुए, आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

का प्रतिलोम मालूम कीजिए। अतएव रैखिक समीकरणों के तंत्र को हल कीजिए

$$x + 3y + z = 10$$

$$2x - y + 7z = 21$$

$$3x + 2y - z = 4$$

10

1.(b) लीजिए एक वर्ग आव्यूह A और उसका संलग्न A^* । दर्शाइए कि आव्यूहों AA^* और A^*A के आइगन मान वास्तविक हैं। आगे दर्शाइए कि $\text{ट्रेस}(AA^*) = \text{ट्रेस}(A^*A)$ ।

10

1.(c) मूल्यांकन कीजिए $\int_0^1 \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$ ।

10

1.(d) एक ऐसे समतल का समीकरण मालूम कीजिए जो बिंदुओं $(0, 1, 1)$ और $(2, 0, -1)$ में से गुजरता हो और जो बिंदुओं $(-1, 1, -2)$, $(3, -2, 4)$ को जोड़ने वाली रेखा के समांतर हो। इसके साथ ही रेखा और समतल के बीच की दूरी भी मालूम कीजिए।

10

1.(e) एक गोलक S के व्यास के आमने-सामने के सिरों पर बिंदु $(0, 1, 0)$, $(3, -5, 2)$ हैं। गोलक के समीकरण को मालूम कीजिए, जिसका गोलक S का समतल $5x - 2y + 4z + 7 = 0$ के साथ प्रतिच्छेद एक बृहत् वृत्त के रूप में है।

10

2.(a)(i) लीजिए कि P_n अधिकांश n पर कोटि के सभी वास्तविक बहुपदों की सदिश समष्टि को द्योतित करता है और कि $T: P_2 \rightarrow P_3$ निम्नलिखित द्वारा दत्त एक रैखिक रूपांतरण है :

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t) dt, \quad p(x) \in P_2$$

P_2 और P_3 के क्रमशः $\{1, x, x^2\}$ और $\{1, x, 1+x^2, 1+x^3\}$ आधारों के विषय में T का आव्यूह मालूम कीजिए। इस के साथ T की शून्य समष्टि भी मालूम कीजिए।

10

2.(a)(ii) लीजिए कि V एक n -विमीय सदिश समष्टि है और $T: V \rightarrow V$ एक व्युत्क्रमणीय रैखिक संकारक है। यदि $\beta = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ आधार हो V का, तो दर्शाइए कि $\beta' = \{TX_1, TX_2, \dots, TX_n\}$ भी V का आधार होगा।

8

2.(b)(i) लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix}$ जहाँ $\omega (\neq 1)$ एक का घनमूल है। यदि $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ द्योतित करते

हैं A^2 के आइगन मानों का, तो दर्शाइए कि $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \leq 9$ ।

8

2.(b)(ii) निम्नलिखित आव्यूह की कोटि को मालूम कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 \\ 8 & 12 & 17 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

8

2.(c)(i) लीजिए कि A एक हार्मिटी आव्यूह है, जिसके सभी सुस्पष्ट आइगन मान $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ हैं। यदि X_1, X_2, \dots, X_n संगत आइगन सदिश हों तो, दर्शाइए कि $n \times n$ आव्यूह C , जिसका k वां स्तंभ सदिश X_k का हो, व्युत्क्रमणीय होता है।

8

2.(c)(ii) दर्शाइए कि C^3 में सदिश $X_1 = (1, 1+i, i)$, $X_2 = (i, -i, 1-i)$ और $X_3 = (0, 1-2i, 2-i)$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर रैखिकतः स्वतंत्र हैं, लेकिन सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र पर रैखिकतः परतंत्र हैं।

8

3.(a) लाग्रान्ज की गुणक पद्धति व्यवहार कर रेखा $y = 10 - 2x$ और दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ के बीच लघुतम दूरी मालूम कीजिए।

20

3.(b) $f_{xy}(0, 0)$ और $f_{yx}(0, 0)$ फलन के लिए परिकलन कीजिए

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f_{xy} तथा f_{yx} की $(0, 0)$ पर निरंतरता पर विचार कीजिए।

15

3.(c) $\iint_D xy \, dA$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ D , रेखा $y = x - 1$ और पैराबोला $y^2 = 2x + 6$ के द्वारा परिबद्ध प्रदेश है।

15

4.(a) दर्शाइए कि गोलक $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$ पर किसी भी बिंदु से गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ तक तीन आपस में लंब स्पर्शखाएं खींची जा सकती हैं।

15

4.(b) एक शंकु का अपने गाइडिंग वक्र के रूप में वृत्त $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0, z = 0$ है और वह एक स्थिर बिंदु $(0, 0, c)$ के बीच से गुजरता है। यदि समतल $y = 0$ के द्वारा शंकु का परिच्छेद एक आयताकार हाइपरबोला हो, तो साबित कीजिए कि शीर्ष निम्नलिखित स्थिर वृत्त पर होगा :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by = 0$$

$$2ax + 2by + cz = 0.$$

15

4.(c) एक परिवर्ती जेनेरेटर तंत्र के दो जेनेरेटरों से मिलता है, और उसका मिलन P और P' में अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2c^2 = 1$ के प्रधान दीर्घवृत्तीय परिच्छेद के अल्प अक्ष के सिरों B और B' में से होता है। सिद्ध कीजिए कि $BP \cdot B'P' = a^2 + c^2$.

20

खंड 'ख'

5. सभी प्रश्नों का उत्तर दीजिए :

5.(a) y एक फलन है x का, इस प्रकार कि अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ निम्नलिखित के बराबर है

$\cos(x+y) + \sin(x+y)$ । x और y के बीच संबंध मालूम कीजिए, जो किसी अवकलज/अवकल से मुक्त हो। 10

5.(b) $r^n = a \sin n\theta$ के द्वारा व्यंजित वक्र-कुल की लंबकोणीय संछेदी का समीकरण प्राप्त कीजिए। (r, θ) समतल ध्रुवीय निर्देशांक हैं। 10

5.(c) एक पिंड ऋजु रेखा OPQ में सरल आवर्त गति (S.H.M.) कर रहा है। उसका बिंदु P और Q पर शून्य वेग है, जिनके O से दूरियां क्रमशः x और y हैं और उसका P और Q के बीच मध्य-बिंदु पर वेग v है। एक पूर्ण दोलन का समय मालूम कीजिए। 10

5.(d) एक आनत समतल का आधार लंबाई में 4 मीटर और ऊँचाई में 3 मीटर है। समतल के समांतर कार्य करता हुआ 8 kg का एक बल 20 kg के भार को नीचे की ओर सरकने को मुश्किल से रोकता है। समतल और भार के बीच घर्षण गुणांक मालूम कीजिए। 10

5.(e) दर्शाइए कि वक्र

$$\vec{x}(t) = t\hat{i} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{j} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k} \text{ एक समतल में स्थित है।} \quad 10$$

6.(a) अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$(5x^3 + 12x^2 + 6y^2)dx + 6xydy = 0. \quad 10$$

6.(b) प्राचल विचरण विधि द्वारा अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax \text{ को हल कीजिए।} \quad 10$$

6.(c) समीकरण

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = \ln x \sin(\ln x) \text{ का सामान्य हल मालूम कीजिए।} \quad 15$$

6.(d) आरंभिक शर्तों

$$t = 0 \text{ पर } x = 0 \text{ और } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ के अधीन अवकल समीकरण}$$

$$(D^2 + n^2)x = a \sin(nt + \alpha), \quad D^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2} \text{ को लैप्लेस रूपांतर विधि का इस्तेमाल करते हुए हल कीजिए, जिसमें } a, n \text{ और } \alpha \text{ नियतांक हैं।} \quad 15$$

7.(a) 2.5 kg द्रव्यमान का एक कण 0.9 m लंबी ऐसी रस्सी के सिरे पर लटका हुआ है, जिसका दूसरा सिरा एक स्थिर बिंदु के साथ जुड़ा हुआ है। कण को वेग 8 m/सै. के साथ क्षैतिजतः प्रक्षेपित किया जाता है। जब रस्सी (i) क्षैतिज, (ii) ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर हो, तब कण के वेग और रस्सी में तनाव को मालूम कीजिए। 20

7.(b) एक एकसमान सीढ़ी क्षितिज के साथ 45° के कोण पर रखी है। उसका ऊपरी सिरा खुरदरी ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका है और निचला सिरा भूमि पर टिका है। यदि μ और μ' क्रमशः सीढ़ी और भूमि के बीच और सीढ़ी और दीवार के बीच सीमक घर्षण के गुणांक हों, तो सीढ़ी के निचले सिरे को दीवार की तरफ खिसकाने के लिए आवश्यक न्यूनतम क्षैतिज बल मालूम कीजिए। 15

7.(c) छह बराबर की छड़ें AB, BC, CD, DE, EF और FA , जिनमें से प्रत्येक का भार W है, अपने सिरों से मुक्त रूप से ऐसे जुड़ी हुई हैं कि एक षड्भुज बन गया है। छड़ AB क्षैतिज स्थिति में जुड़ी हुई है और AB और DE के मध्य बिंदु एक रस्सी से जुड़े हैं। रस्सी में तनाव मालूम कीजिए। 15

8.(a) $\nabla^2(r^n)$ का परिकलन कीजिए और r और n के रूप में उसका व्यंजक मालूम कीजिए। r मूल से किसी बिंदु (x, y, z) की दूरी है, n एक नियतांक है और ∇^2 लैप्लेस संकारक है। 10

8.(b) आकाश में एक वक्र निम्नलिखित सदिश समीकरण के द्वारा परिभाषित है $\vec{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} - t^3\hat{k}$ बिंदुओं $t = +1$ और $t = -1$ पर इस वक्र पर स्पर्शिकाओं के बीच कोण का निर्धारण कीजिए। 10

8.(c) गाउस के अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए, पृष्ठ-समाकल $\iint (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{-\frac{1}{2}} dS$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ S दीर्घवृत्तज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का पृष्ठ है। a, b और c सभी धनात्मक नियतांक हैं। 15

8.(d) रेखा समाकल $\int_C (-y^3dx + x^3dy - z^3dz)$ का मूल्यांकन करने के लिए स्टोक का प्रमेय व्यवहार कीजिए, जहाँ C है सिलिंडर $x^2 + y^2 = 1$ और समतल $x + y + z = 1$ का प्रतिच्छेदन। 15

SECTION 'A'

1. Answer all the questions :

1.(a) Find the inverse of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

by using elementary row operations. Hence solve the system of linear equations

$$x + 3y + z = 10$$

$$2x - y + 7z = 21$$

$$3x + 2y - z = 4$$

10

1.(b) Let A be a square matrix and A^* be its adjoint, show that the eigenvalues of matrices AA^* and A^*A are real. Further show that $\text{trace}(AA^*) = \text{trace}(A^*A)$. 10

1.(c) Evaluate $\int_0^1 \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx$. 10

- 1.(d) Find the equation of the plane which passes through the points (0, 1, 1) and (2, 0, -1), and is parallel to the line joining the points (-1, 1, -2), (3, -2, 4). Find also the distance between the line and the plane. 10

- 1.(e) A sphere S has points (0, 1, 0), (3, -5, 2) at opposite ends of a diameter. Find the equation of the sphere having the intersection of the sphere S with the plane $5x - 2y + 4z + 7 = 0$ as a great circle. 10

- 2.(a)(i) Let P_n denote the vector space of all real polynomials of degree at most n and $T: P_2 \rightarrow P_3$ be a linear transformation given by

$$T(p(x)) = \int_0^x p(t) dt, \quad p(x) \in P_2.$$

Find the matrix of T with respect to the bases $\{1, x, x^2\}$ and $\{1, x, 1+x^2, 1+x^3\}$ of P_2 and P_3 respectively. Also, find the null space of T . 10

- 2.(a)(ii) Let V be an n -dimensional vector space and $T: V \rightarrow V$ be an invertible linear operator. If $\beta = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ is a basis of V , show that $\beta' = \{TX_1, TX_2, \dots, TX_n\}$ is also a basis of V . 8

- 2.(b)(i) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{bmatrix}$ where $\omega (\neq 1)$ is a cube root of unity. If $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ denote

the eigenvalues of A^2 , show that $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \leq 9$. 8

- 2.(b)(ii) Find the rank of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 12 & 17 \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 \\ 8 & 12 & 17 & 23 & 30 \end{bmatrix}$$

8

- 2.(c)(i) Let A be a Hermitian matrix having all distinct eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. If X_1, X_2, \dots, X_n are corresponding eigenvectors then show that the $n \times n$ matrix C whose k^{th} column consists of the vector X_k is non singular. 8

- 2.(c)(ii) Show that the vectors $X_1 = (1, 1+i, i)$, $X_2 = (i, -i, 1-i)$ and $X_3 = (0, 1-2i, 2-i)$ in C^3 are linearly independent over the field of real numbers but are linearly dependent over the field of complex numbers. 8

- 3.(a) Using Lagrange's multiplier method, find the shortest distance between the line

$$y = 10 - 2x \text{ and the ellipse } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

20

- 3.(b) Compute $f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$ for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Also, discuss the continuity of f_{xy} and f_{yx} at $(0, 0)$. 15

- 3.(c) Evaluate $\iint_D xy \, dA$, where D is the region bounded by the line $y = x - 1$ and the parabola $y^2 = 2x + 6$. 15

- 4.(a) Show that three mutually perpendicular tangent lines can be drawn to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ from any point on the sphere $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$. 15

- 4.(b) A cone has for its guiding curve the circle $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$, $z = 0$ and passes through a fixed point $(0, 0, c)$. If the section of the cone by the plane $y = 0$ is a rectangular hyperbola, prove that the vertex lies on the fixed circle

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by &= 0 \\ 2ax + 2by + cz &= 0. \end{aligned} \quad 15$$

- 4.(c) A variable generator meets two generators of the system through the extremities B and B' of the minor axis of the principal elliptic section of the hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = c^2 \quad \text{in } P \text{ and } P'. \text{ Prove that } BP \cdot B'P' = a^2 + c^2. \quad 20$$

SECTION 'B'

5. Answer all the questions :

- 5.(a) y is a function of x , such that the differential coefficient $\frac{dy}{dx}$ is equal to $\cos(x+y) + \sin(x+y)$. Find out a relation between x and y , which is free from any derivative/differential. 10

- 5.(b) Obtain the equation of the orthogonal trajectory of the family of curves represented by $r^n = a \sin n\theta$, (r, θ) being the plane polar coordinates. 10

- 5.(c) A body is performing S.H.M. in a straight line OPQ . Its velocity is zero at points P and Q whose distances from O are x and y respectively and its velocity is v at the mid-point between P and Q . Find the time of one complete oscillation. 10

- 5.(d) The base of an inclined plane is 4 metres in length and the height is 3 metres. A force of 8 kg acting parallel to the plane will just prevent a weight of 20 kg from sliding down. Find the coefficient of friction between the plane and the weight. 10

- 5.(e) Show that the curve

$$\vec{x}(t) = t\hat{i} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{j} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k} \text{ lies in a plane.} \quad 10$$

- 6.(a) Solve the differential equation
 $(5x^3 + 12x^2 + 6y^2)dx + 6xydy = 0.$ 10
- 6.(b) Using the method of variation of parameters, solve the differential equation
 $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax.$ 10
- 6.(c) Find the general solution of the equation
 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = \ln x \sin(\ln x).$ 15
- 6.(d) By using Laplace transform method, solve the differential equation
 $(D^2 + n^2)x = a \sin(nt + \alpha), D^2 \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ subject to the initial conditions
 $x = 0$ and $\frac{dx}{dt} = 0$, at $t = 0$, in which a, n and α are constants. 15
- 7.(a) A particle of mass 2.5 kg hangs at the end of a string, 0.9 m long, the other end of which is attached to a fixed point. The particle is projected horizontally with a velocity 8 m/sec. Find the velocity of the particle and tension in the string when the string is (i) horizontal (ii) vertically upward. 20
- 7.(b) A uniform ladder rests at an angle of 45° with the horizontal with its upper extremity against a rough vertical wall and its lower extremity on the ground. If μ and μ' are the coefficients of limiting friction between the ladder and the ground and wall respectively, then find the minimum horizontal force required to move the lower end of the ladder towards the wall. 15
- 7.(c) Six equal rods AB, BC, CD, DE, EF and FA are each of weight W and are freely jointed at their extremities so as to form a hexagon; the rod AB is fixed in a horizontal position and the middle points of AB and DE are joined by a string. Find the tension in the string. 15
- 8.(a) Calculate $\nabla^2(r^n)$ and find its expression in terms of r and n , r being the distance of any point (x, y, z) from the origin, n being a constant and ∇^2 being the Laplace operator. 10
- 8.(b) A curve in space is defined by the vector equation $\vec{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} - t^3\hat{k}$. Determine the angle between the tangents to this curve at the points $t = +1$ and $t = -1$. 10
- 8.(c) By using Divergence Theorem of Gauss, evaluate the surface integral
 $\iint (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{-\frac{1}{2}} dS$, where S is the surface of the ellipsoid
 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, a, b and c being all positive constants. 15
- 8.(d) Use Stokes' theorem to evaluate the line integral $\int_C (-y^3dx + x^3dy - z^3dz)$, where C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $x + y + z = 1$. 15

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र II / Paper II

निर्धारित समय : तीन घंटे

Time allowed : **Three Hours**

अधिकतम अंक : 250

Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों का उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेज़ी दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । उत्तर-पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions:

There are **EIGHT** questions divided in two **SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.

Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.

Questions no. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खण्ड A
SECTION A

- Q1.** (a) आव्यूह योग तथा आव्यूह गुणन की सामान्य द्विआधारी संक्रियाओं के अन्तर्गत दर्शाइए कि आव्यूहों का समुच्चय $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ एक क्षेत्र है। योगात्मक तथा गुणनात्मक तत्समक क्या हैं और $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम क्या है ?
- $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ द्वारा परिभाषित मानचित्र $f : \mathbb{C} \rightarrow S$, पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि f एकैक समाकारी है। (यहाँ \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा \mathbb{C} सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है।)

- (b) अपरिमित समूह का एक उदाहरण दीजिए जिसमें प्रत्येक अवयव परिमित कोटि रखता है।

- (c) मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 4 & \text{यदि } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + 2 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$

क्या f , $[-1, 2]$ अन्तराल में रीमान समाकलनीय है ? क्यों ? क्या ऐसे फलन g का अस्तित्व है कि $g'(x) = f(x)$ हो ? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

- (d) सिद्ध कीजिए कि यदि $b e^{a+1} < 1$, जहाँ a तथा b धनात्मक और वास्तविक हैं, तो फलन $z^n e^{-a} - b e^z$ के एकांक वृत्त में n शून्य होते हैं।

- (e) अधिकतमीकरण कीजिए $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

बशर्ते कि $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

तथा $2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10, x_i \geq 0$.

- (a) Show that the set of matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ is a field

under the usual binary operations of matrix addition and matrix multiplication. What are the additive and multiplicative identities and

what is the inverse of $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$? Consider the map $f: \mathbb{C} \rightarrow S$ defined

by $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Show that f is an isomorphism. (Here \mathbb{R} is the

set of real numbers and \mathbb{C} is the set of complex numbers.)

10

- (b) Give an example of an infinite group in which every element has finite order.

10

- (c) Let $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 4 & \text{if } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + 2 & \text{if } x < 0 \end{cases}$

Is f Riemann integrable in the interval $[-1, 2]$? Why? Does there exist a function g such that $g'(x) = f(x)$? Justify your answer.

10

- (d) Prove that if $b e^{a+1} < 1$ where a and b are positive and real, then the function $z^n e^{-a} - b e^z$ has n zeroes in the unit circle.

10

- (e) Maximize $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$
subject to $x_1 + x_2 + x_3 = 7$
and $2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10, x_i \geq 0$.

10

Q2. (a) S_{10} में निम्नलिखित क्रमचयों की कोटियाँ क्या हैं ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 3 & 10 & 5 & 4 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ तथा } (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) (6 \ 7).$$

- (b) S_{10} में एक अवयव की उच्चिष्ठ संभव कोटि क्या है ? क्यों ? इस प्रकार के अवयव का एक उदाहरण दीजिए । S_{10} में उस कोटि के कितने अवयव होंगे ?

- (c) दर्शाइए कि शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$, एकसमान अभिसारी है परन्तु निरपेक्षतः नहीं, x के सभी वास्तविक मानों के लिए ।

- (d) दर्शाइए कि \mathbb{R} का प्रत्येक विवृत उपसमुच्चय असंयुक्त विवृत अन्तरालों का गणनीय सम्मिलन है ।
- (a) What are the orders of the following permutations in S_{10} ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 3 & 10 & 5 & 4 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$
 and $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7)$. 10
- (b) What is the maximal possible order of an element in S_{10} ? Why ? Give an example of such an element. How many elements will there be in S_{10} of that order ? 13
- (c) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$, is uniformly convergent but not absolutely for all real values of x . 13
- (d) Show that every open subset of \mathbb{R} is a countable union of disjoint open intervals. 14

Q3. (a) मान लीजिए $J = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ गाउसीय पूर्णाकों का वलय (\mathbb{C} का उपवलय) है । J निम्नलिखित में से कौन-सा है : यूक्लिडीय डोमेन (प्रान्त), मुख्य गुणजावली डोमेन (प्रान्त), अद्वितीय गुणखंडन डोमेन (प्रान्त) ? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए ।

(b) मान लीजिए $R^C = [0, 1]$ पर सभी वास्तविक मानांकित संतत फलनों का वलय, जो निम्न संक्रियाओं के अंतर्गत हैं

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

$$\text{मान लीजिए } M = \left\{ f \in R^C \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

क्या M, R की एक उच्चिष्ठ गुणजावली है ? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए ।

(c) मान लीजिए $f(x, y) = y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3 + 1$ है । किन बिन्दुओं पर $f(x, y)$ का अधिकतम अथवा न्यूनतम होगा ?

(d) मान लीजिए $[x]$ वास्तविक संख्या x का पूर्णांक भाग द्योतित करता है, अर्थात् यदि $n \leq x < n + 1$ जहाँ n पूर्णांक है, तो $[x] = n$ । क्या फलन $f(x) = [x]^2 + 3$, $[-1, 2]$ में रीमान समाकलनीय है ? यदि नहीं, तो समझाइए क्यों । यदि यह समाकलनीय है,

$$\text{तो परिकलित कीजिए } \int_{-1}^2 ([x]^2 + 3) dx.$$

- (a) Let $J = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ be the ring of Gaussian integers (subring of \mathbb{C}). Which of the following is J : Euclidean domain, principal ideal domain, unique factorization domain ? Justify your answer. 15

- (b) Let $R^{\mathbb{C}} =$ ring of all real valued continuous functions on $[0, 1]$, under the operations

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

$$\text{Let } M = \left\{ f \in R^{\mathbb{C}} \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

Is M a maximal ideal of R ? Justify your answer. 15

- (c) Let $f(x, y) = y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3 + 1$. At what points will $f(x, y)$ have a maximum or minimum ? 10

- (d) Let $[x]$ denote the integer part of the real number x , i.e., if $n \leq x < n + 1$ where n is an integer, then $[x] = n$. Is the function $f(x) = [x]^2 + 3$ Riemann integrable in $[-1, 2]$? If not, explain why. If it is integrable,

$$\text{compute } \int_{-1}^2 ([x]^2 + 3) dx.$$

10

Q4. (a) न्यूनतम समय नियतन समस्या को हल कीजिए :

		मशीन			
		M_1	M_2	M_3	M_4
कार्य	J_1	3	12	5	14
	J_2	7	9	8	12
	J_3	5	11	10	12
	J_4	6	14	4	11

- (b) कौशी अवशेष प्रमेय का इस्तेमाल करते हुए, समाकल

$$I = \int_0^{\pi} \sin^4 \theta \, d\theta$$

का मान निकालिए ।

- (c) न्यूनतमीकरण कीजिए $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$
बशर्ते व्यवरोध

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$$

$$x_i \geq 0$$

- (a) Solve the minimum time assignment problem :

15

		Machines			
		M ₁	M ₂	M ₃	M ₄
Jobs	J ₁	3	12	5	14
	J ₂	7	9	8	12
	J ₃	5	11	10	12
	J ₄	6	14	4	11

- (b) Using Cauchy's residue theorem, evaluate the integral

$$I = \int_0^{\pi} \sin^4 \theta \, d\theta$$

15

- (c) Minimize $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$
subject to the constraints

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$$

$$x_i \geq 0$$

20

खण्ड B
SECTION B

- Q5. (a) $z = y f(x) + x g(y)$ से स्वेच्छ फलनों f तथा g के विलोपन द्वारा एक आंशिक अवकल समीकरण बनाइए।

- (b) समीकरण $y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ को इसके विहित रूप (कैनोनिकल फॉर्म) में समानीत कीजिए जब $x \neq y$.

- (c) एक परीक्षा में, निश्चित सीमाओं के बीच जिन छात्रों ने अंक प्राप्त किए उनकी संख्या निम्नलिखित सारणी में दी गई है :

अंक	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
छात्रों की संख्या	31	42	51	35	31

न्यूटन अग्र अंतर्वेशन सूत्र का इस्तेमाल करते हुए, उन छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनके अंक 45 तथा 50 के बीच स्थित हैं।

- (d) सिद्ध कीजिए कि भ्रमिल रेखाओं का धारा रेखाओं से समकोण पर होने का आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबंध निम्नलिखित है :

$$u, v, w = \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

जहाँ μ तथा ϕ , फलन हैं x, y, z, t के।

- (e) चार ठोस गोलों A, B, C तथा D, प्रत्येक का द्रव्यमान m तथा त्रिज्या a , को एक भुजा b वाले वर्ग के चारों कोनों पर इस प्रकार रखा गया है कि उनके केन्द्र ठीक कोनों पर हों। वर्ग के विकर्ण के गिर्द निकाय का जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए।

- (a) Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary functions f and g from $z = y f(x) + x g(y)$. 10

- (b) Reduce the equation

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

to its canonical form when $x \neq y$. 10

- (c) In an examination, the number of students who obtained marks between certain limits were given in the following table :

Marks	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
No. of Students	31	42	51	35	31

Using Newton forward interpolation formula, find the number of students whose marks lie between 45 and 50. 10

- (d) Prove that the necessary and sufficient condition that the vortex lines may be at right angles to the stream lines are

$$u, v, w = \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

where μ and ϕ are functions of x, y, z, t . 10

- (e) Four solid spheres A, B, C and D, each of mass m and radius a , are placed with their centres on the four corners of a square of side b . Calculate the moment of inertia of the system about a diagonal of the square. 10

Q6. (a) हल कीजिए

$$(D^2 + DD' - 6D'^2) z = x^2 \sin(x + y)$$

जहाँ D तथा D' द्योतित करते हैं $\frac{\partial}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial}{\partial y}$.

- (b) ऐसा पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो निकाय

$$z(x + y) = C(3z + 1), \text{ (C एक स्थिरांक है)}$$

के पृष्ठों को लाम्बिकतः प्रतिच्छेद करता है तथा जो वृत्त $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ से गुजरता है।

- (c) एक दृढ़तापूर्वक तानित डोरी जिसके अंत्य बिन्दु $x = 0$ तथा $x = l$ हैं, प्रारंभ में साम्य अवस्था में विराम पर है। यदि प्रत्येक बिन्दु को वेग $\lambda \cdot x(l - x)$ द्वारा कम्पन के लिए सेट किया जाता है, तो किसी भी समय t पर एक सिरे से किसी भी दूरी x पर डोरी का विस्थापन ज्ञात कीजिए।

- (a) Solve

$$(D^2 + DD' - 6D'^2) z = x^2 \sin(x + y)$$

where D and D' denote $\frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{\partial}{\partial y}$. 15

- (b) Find the surface which intersects the surfaces of the system

$$z(x + y) = C(3z + 1), (C \text{ being a constant})$$

orthogonally and which passes through the circle $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. 15

- (c) A tightly stretched string with fixed end points $x = 0$ and $x = l$ is initially at rest in equilibrium position. If it is set vibrating by giving each point a velocity $\lambda \cdot x(l - x)$, find the displacement of the string at any distance x from one end at any time t . 20

- Q7.** (a) प्रारंभिक पुनरावृत्त x_0 से प्रारंभ करते हुए $f(x) = 0$ को हल करने के लिए न्यूटन - रैफसन विधि के लिए एक ऐल्गोरिथ्म विकसित कीजिए, n अनुमत पुनरावृत्तियों की संख्या है, eps निर्धारित सापेक्ष त्रुटि तथा डेल्टा $f'(x)$ के लिए निर्धारित निम्न परिबन्ध है।

- (b) प्रारंभिक मान समस्या

$$y' = x(y + x) - 2$$

$$y(0) = 2$$

से पाँच दशमलव स्थानों तक सही, $y(0.6)$ का सन्निकट मान परिकलित करने के लिए पद आमाप (स्टेप साइज़) $h = 0.15$ सहित ऑयलर विधि का प्रयोग कीजिए।

- (c) विराम अवस्था से प्रारंभ होकर एक रेलगाड़ी का वेग निम्न सारणी में दिया गया है। समय मिनट में है तथा वेग km/घण्टे में है।

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	16	28.8	40	46.4	51.2	32.0	17.6	8	3.2	0

संयुक्त सिम्पसन के $\frac{1}{3}$ नियम का इस्तेमाल करते हुए 30 मिनट में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई कुल दूरी का सन्निकट आकलन कीजिए।

- (a) Develop an algorithm for Newton - Raphson method to solve $f(x) = 0$ starting with initial iterate x_0 , n be the number of iterations allowed, eps be the prescribed relative error and delta be the prescribed lower bound for $f'(x)$. 20

- (b) Use Euler's method with step size $h = 0.15$ to compute the approximate value of $y(0.6)$, correct up to five decimal places from the initial value problem

$$y' = x(y + x) - 2$$

$$y(0) = 2$$

15

- (c) The velocity of a train which starts from rest is given in the following table. The time is in minutes and velocity is in km/hour.

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	16	28.8	40	46.4	51.2	32.0	17.6	8	3.2	0

Estimate approximately the total distance run in 30 minutes by using composite Simpson's $\frac{1}{3}$ rule.

- Q8. (a) प्रत्येक l लम्बाई की दो समान छड़ें AB तथा BC, B पर मसृणीकृत संधित तथा A से निलंबित हैं और A से गुजरते ऊर्ध्वाधर समतल में दोलन कर रही हैं। दर्शाइए कि प्रसामान्य दोलन काल $\frac{2\pi}{n}$ हैं जहाँ $n^2 = \left(3 \pm \frac{6}{\sqrt{7}}\right) \frac{g}{l}$.

- (b) यदि तरल, x-अक्ष की धनात्मक दिशा पर अवकाश क्षेत्र को भरता है, जो कि एक दृढ़ परिसीमा है तथा यदि वहाँ बिन्दु $(0, a)$ पर एक स्रोत m है और $(0, b)$ पर समान सिंक है तथा यदि ऋणात्मक दिशा पर लगाया गया दाब अनन्त पर लगे दाब के बराबर है, तो दर्शाइए कि परिसीमा पर परिणामी दाब $\frac{\pi \rho m^2 (a - b)^2}{2ab(a + b)}$ है, जहाँ ρ तरल का घनत्व है।
- (c) यदि समान सामर्थ्य K के n सरलरेखीय भ्रमिल, अनन्त द्रव में a त्रिज्या के एक वृत्ताकार बेलन के जनरेटरों (जनित्रों) के रूप में सममित व्यवस्थित किए जाते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि भ्रमिल बेलन के चारों ओर एकसमान रूप से समय $\frac{8\pi^2 a^3}{(n - 1)K}$ में गति करेंगे। द्रव के किसी भी बिन्दु पर वेग ज्ञात कीजिए।

- (a) Two equal rods AB and BC, each of length l , smoothly jointed at B, are suspended from A and oscillate in a vertical plane through A. Show that the periods of normal oscillations are $\frac{2\pi}{n}$ where $n^2 = \left(3 \pm \frac{6}{\sqrt{7}}\right) \frac{g}{l}$. 15
- (b) If fluid fills the region of space on the positive side of the x-axis, which is a rigid boundary and if there be a source m at the point $(0, a)$ and an equal sink at $(0, b)$ and if the pressure on the negative side be the same as the pressure at infinity, show that the resultant pressure on the boundary is $\frac{\pi \rho m^2 (a - b)^2}{\{2ab(a + b)\}}$ where ρ is the density of the fluid. 15
- (c) If n rectilinear vortices of the same strength K are symmetrically arranged as generators of a circular cylinder of radius a in an infinite liquid, prove that the vortices will move round the cylinder uniformly in time $\frac{8\pi^2 a^3}{(n - 1) K}$. Find the velocity at any point of the liquid. 20