

Εργαστήριο 6

1. Φίλτρο κινούμενου μέσου όρου.

Θεωρήστε το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$$

Η έξοδος $y[n]$ του συστήματος είναι ο μέσος όρος των N προηγούμενων τιμών της εισόδου $x[n]$. Το παραπάνω σύστημα ονομάζεται φίλτρο κινούμενου μέσου όρου μήκους N . Τα φίλτρα μέσου όρου χρησιμοποιούνται για την αφαίρεση θορύβου επειδή η εξομάλυνση που προκαλεί ο υπολογισμός του μέσου όρου τείνει να αντισταθμίσει την τυχαιότητα των τιμών του θορύβου.

Θεωρούμε το σήμα $s[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$, το οποίο αλλοιώνεται από τυχαίο θόρυβο $e[n]$ και προκύπτει το σήμα

$$x[n] = s[n] + e[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{2}\right) + e[n].$$

από το οποίο θέλουμε να αφαιρέσουμε το θόρυβο περνώντας το από το παραπάνω σύστημα (φίλτρο).

Να σχεδιαστεί σε ένα γράφημα (εντολή `subplot`) το καθαρό σήμα $s[n]$, το σήμα του θορύβου $e[n]$ και το διαβρωμένο από θόρυβο σήμα $x[n]$ στο διάστημα $n \in [0,100]$. Το $e[n]$ είναι θόρυβος κανονικής κατανομής μέσης τιμής μηδέν και τυπικής απόκλισης 1 (εντολή `randn`). Επίσης να σχεδιαστεί η έξοδος του φίλτρου για $N=3$.

Παρατηρήστε ότι το σήμα στην έξοδο είναι εξομαλυσμένο σε σχέση με το σήμα εισόδου λόγω εξασθένισης των υψηλών συχνοτήτων και διατήρησης των χαμηλών.

2. Φίλτρο διαφορών πρώτης τάξης.

- a) Θεωρήστε το σήμα $x[n] = [5,6,7,6,5,4,4,10,10,10,8,8,7,6,0]$. Παρατηρήστε ότι το σήμα μεταβάλλεται σχετικά ομαλά εκτός από τη μέση περίπου όπου μεταβάλλεται απότομα. Θα

περάσουμε το παραπάνω σήμα από ένα σύστημα (φίλτρο) που τονίζει τις απότομες διαφορές. Το φίλτρο αυτό περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Το παραπάνω σύστημα, σε κάθε θέση n , υπολογίζει τη διαφορά μεταξύ των τιμών του σήματος εισόδου στις θέσεις n και $n-1$. Πρόκειται για ένα φίλτρο διαφορών πρώτης τάξης που προσεγγίζει την πρώτη παράγωγο του διακριτού σήματος.

Να σχεδιαστεί το αρχικό σήμα $x[n]$ καθώς και η έξοδος του φίλτρου υλοποιώντας το βρόχο `for` και ξεκινώντας από το $y[2]$ (να τεθεί στο άκρο $y[1]=0$).

Παρατηρήστε ότι το σήμα στην έξοδο έχει πιο απότομες μεταβολές σε σχέση με το σήμα εισόδου (λόγω εξασθένισης των χαμηλών συχνοτήτων και διατήρησης των υψηλών). Το σήμα στην έξοδο τονίζει την ύπαρξη απότομων μεταβολών του σήματος εισόδου.

- b) Το φίλτρο διαφορών πρώτης τάξης είναι υπερπαρατό με απόκριση συχνοτήτων:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \cos(\omega) + j \sin(\omega) = 2 |\sin(\omega/2)| e^{-j\Theta(\omega)}$$

με

$$\Theta(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\omega)}{1 - \cos(\omega)} \right)$$

Να σχεδιαστούν το μέτρο $|H(e^{j\omega})|$ και η φάση $\angle H(e^{j\omega})$ της απόκρισης συχνοτήτων στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και στο διάστημα $[-3\pi, 3\pi]$ για να τονιστεί ότι είναι περιοδικές συναρτήσεις του ω .

- c) Θα αξιοποιήσουμε τώρα τις γνώσεις αυτές για να δούμε πως δουλεύει ένας απλός ανιχνευτής ακμών μίας εικόνας. Θα εφαρμόσουμε τώρα το φίλτρο αυτό στις γραμμές και τις στήλες μίας εικόνας για να δούμε πως μπορούμε να τονίσουμε τα εικονοστοιχεία με απότομες μεταβολές στη φωτεινότητα σε σχέση με τα γειτονικά τους. Μία εικόνα είναι μία δισδιάστατη συνάρτηση που αναπαρίσταται από έναν πίνακα $R \times C$. Από τον απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα κλίσης μιας δισδιάστατης συνάρτησης έχει δύο συνιστώσες:

- μία συνιστώσα κατά την οριζόντια κατεύθυνση που υποδεικνύει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η φωτεινότητα κατά μήκος των γραμμών.

- μία συνιστώσα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση που υποδεικνύει πως μεταβάλλεται η φωτεινότητα κατά μήκος των στηλών της εικόνας.

Ο παρακάτω κώδικας διαβάζει την εικόνα 'peppers.tiff', τη μετατρέπει από έγχρωμη σε εικόνα επιπέδων του γκρι και καταχωρεί τις φωτεινότητες των εικονοστοιχείων της στον πίνακα X και δείχνει τις δύο εικόνες. Επίσης, καταχωρεί τις διαστάσεις της εικόνας σε δύο μεταβλητές R (γραμμές) και C (στήλες):

```
X = imread('peppers.tiff');
figure; imshow(X);
X = double(rgb2gray(X));
figure; imshow(X, []);
[R C] = size(X);
```

Φιλτράρετε κάθε **γραμμή** του πίνακα X με το φίλτρο διαφορών πρώτης τάξης και καταχωρήστε το αποτέλεσμα σε έναν πίνακα Y . Το αποτέλεσμα θα είναι μία εικόνα με φιλτραρισμένες τις γραμμές. Για να μην ξεπερνάει τα όρια του πεδίου ορισμού του σήματος ο δείκτης στο βρόχο επανάληψης να τεθεί το πρώτο εικονοστοιχείο κάθε **γραμμής** στον πίνακα του αποτελέσματος ίσο με μηδέν ($Y(i, 1) = 0$).

Φιλτράρετε κάθε **στήλη** του πίνακα X με το φίλτρο διαφορών πρώτης τάξης και καταχωρήστε το αποτέλεσμα σε έναν πίνακα Z . Το αποτέλεσμα θα είναι μία εικόνα με φιλτραρισμένες τις στήλες. Για να μην ξεπερνάει τα όρια του πεδίου ορισμού του σήματος ο δείκτης στο βρόχο επανάληψης να τεθεί το πρώτο εικονοστοιχείο κάθε **στήλης** στον πίνακα του αποτελέσματος ίσο με μηδέν ($Z(1, i) = 0$).

Διατρέξτε τους νέους πίνακες και για κάθε εικονοστοιχείο υπολογίστε το μέτρο του διανύσματος της κλίσης αποθηκεύοντάς το σε έναν πίνακα $G(i, j) = \sqrt{Y(i, j)^2 + Z(i, j)^2}$. Σε ένα γράφημα (εντολή `subplot`) δείξτε την εικόνα επιπέδων του γκρι και την τελική εικόνα ακμών G .