Исследование сечений тессеракта гиперплоскостью

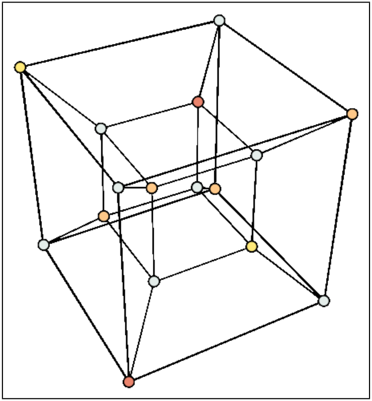
используя методы компьютерного моделирования.

Максимов Григорий, Нугманов Артур, Мустафин Ильгиз

МАОУ "Лицей-интернат №2"
Московского района города Казани

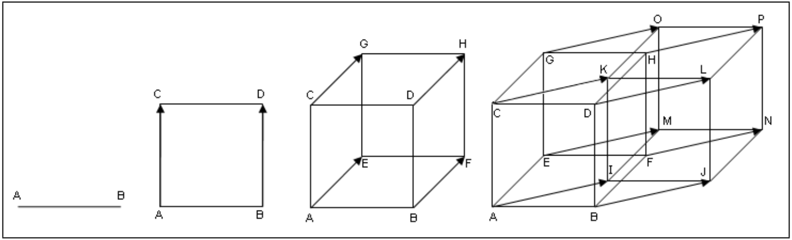
Конференция имени Лобачевского 2015

Тессеракт. Общее определение



- Рассматриваемая нами модель имеет координаты $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, такие, что $x_1 \in [-1, 1]$.
- Ограгичивается 8 гиперплоскостями
- Имеет 8 трехмерных граней, 24 двумерных, 32 ребра и 16 вершин.

Наглядный процесс формирования отображения тессеракта на трехмерную плоскость



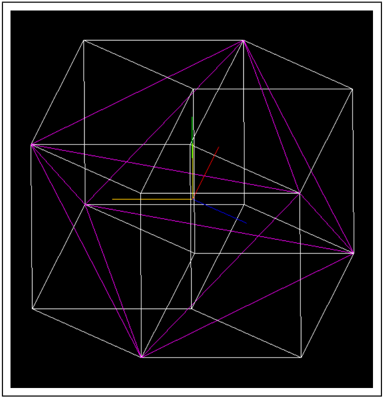
Наглядный процесс, как точка A переходит постепенно в гиперкуб, приобретая новые размерности

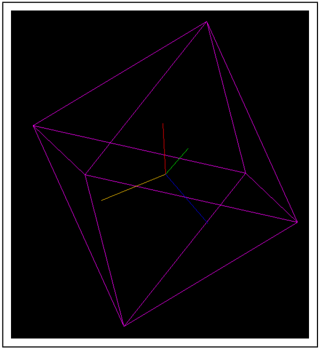
Раскрытие тезиса здесь.

Лемма о размерности сечений

Утверждение

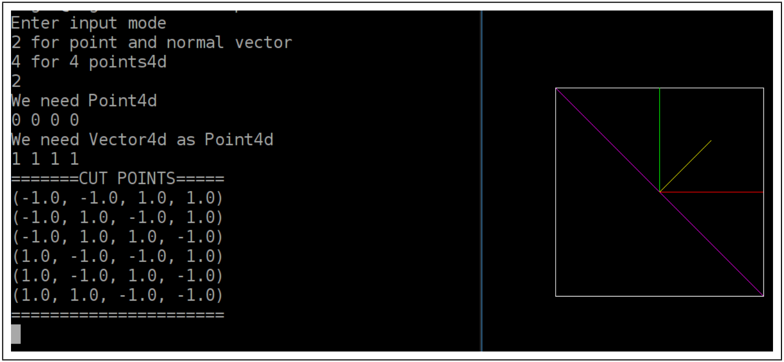
Сечение любого 4-мерного геометрического объекта 3 мерной гиперплоскостью есть геометрическое тело, имеющее размерность не более 3.





Метод построения сечений тессеракта гиперплоскостью

- Задание гиперплоскость сечения
- Нахождение точки пересечения гиперплоскости и тессеракта
- Поворот получившегося сечения до вложимости его в трехмерное пространство
- Вывод полученного сечения, анализ результатов



Задание гиперплоскости сечения

Гиперплоскость сечения. Уравнение.

$ax + by + cz + dw + e = 0$
(a, b, c, d, e) - коэффициенты
(x, y, z, w) - координаты точек.

Задается по четырем точкам с помощью матрицы:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & w - w_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & w_2 - w_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & w_3 - w_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix} = 0$$

Задание гиперплоскости с помощью точки и вектора

$A(x_1, y_1, z_1, w_1)$ - произвольная точка
$\overrightarrow{N}(x_2, y_2, z_2, w_2)$ - нормаль к искомой гиперплоскости
P(ax+by+cz+dw+e=0)
e=-($\mathrm{x}_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 + w_2 w_1$)

Таким образом, мы объявили гиперплоскость сечения.

Нахождение точки пересечения гиперплоскости и тессеракта

Пусть A - вершина гиперкуба, P - наша гиперплоскость.
Произведем проверку взаимного расположения вершины тессеракта и гиперплоскости.

$A := (x_1, y_1, z_1, w_1)$
P:=(ax + by + cz + dw + e = 0)

$$\left[\begin{array}{lc} ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e = 0 & \text{Вершина принадлежит сечению} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e > 0 & \text{Вершина "выше" плоскости сечения} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e < 0 & \text{Вершина "ниже" плоскости сечения} \end{array}\right.$$

Далее при помощи параметрического уравнения находим точку пересечения. Надо дописать.

Поворот сечения

Матрицы поворота в четырехмерном пространстве.

$$M_{xy}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{yz}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{zw}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

PIC HERE

Лемма о выпуклости

О выпуклости тессеракта

Рассматриваемый в нашей работе тессеракт выпуклый.

Лемма 1

Сечением выпуклого тессеракта гиперплоскостью является выпуклое геометрическое тело.

Доказательство:

Лемма о количестве вершин

Лемма 2

Трехмерные сечения тессеракта потенциально имеют не менее 4 и не более 18 вершин.

Доказательство:

Теорема о параллельности граней противоположных сечений

Теорема 1

Грани сечения, полученные пересечением противоположных ячеек тессеракта гиперплоскостью, параллельны.

$$P_1 \begin{cases} ax + by + cz + dw + e = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} ax + by + cz + dw + e = 0 \\ w = -1 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

Лемма о степени вершин

Лемма 3

Трехмерные сечения тессеракта состоят из вершин только со степенями 3 и 4.

Доказательство:

Лемма о сечение с пятью вершинами

Лемма 4

Не существует сечений, состоящих из 5 вершин.

Доказательство: