# Исследование сечений тессеракта гиперплоскостью

## используя методы компьютерного моделирования.

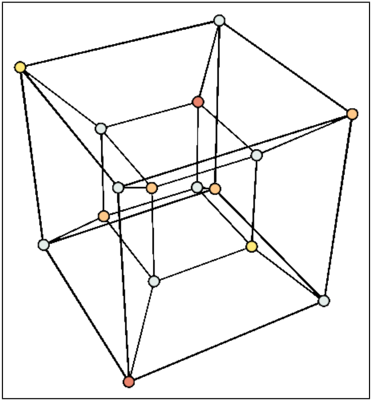
**Максимов Григорий, Нугманов Артур, Мустафин Ильгиз**

**Научный руководитель - Давлетбаев Марсель Фанилевич**

МАОУ "Лицей-интернат №2"
Московского района города Казани

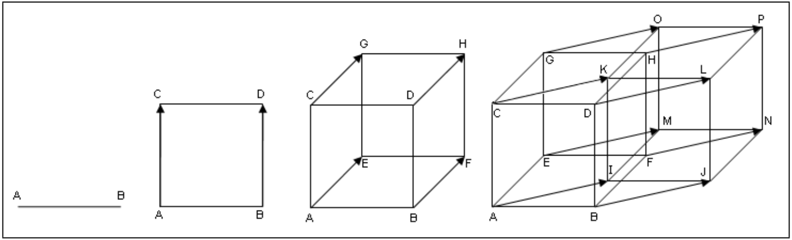
Конференция имени Лобачевского 2015

# Тессеракт. Общее определение



- Рассматриваемая нами модель имеет координаты $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, такие, что $x_1 \in [-1, 1]$.
- Ограгичивается 8 гиперплоскостями
- Имеет 8 трехмерных граней, 24 двумерных, 32 ребра и 16 вершин.

# Наглядный процесс формирования отображения тессеракта на трехмерную плоскость

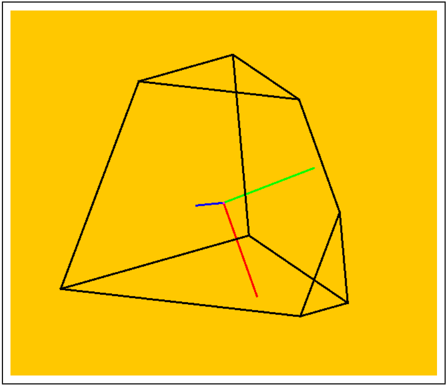


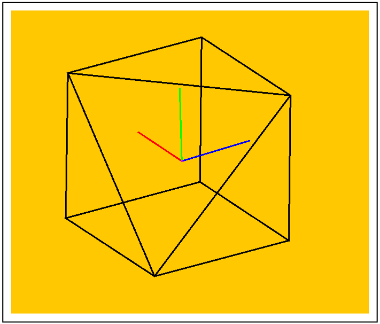

Наглядный процесс, как точка $A$ переходит постепенно в гиперкуб, приобретая новые размерности

# Лемма о размерности сечений

**Утверждение**

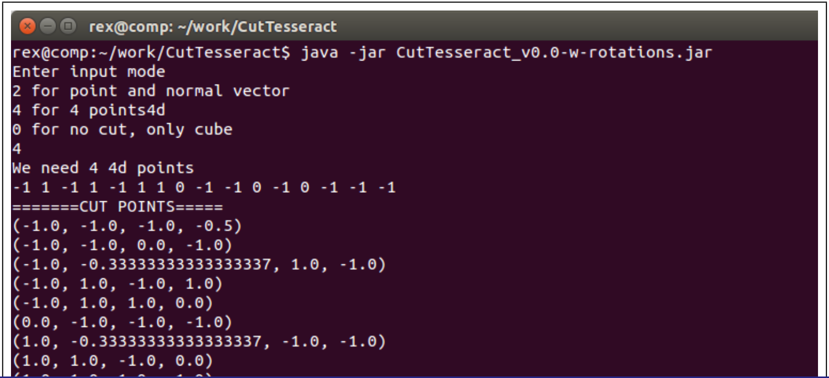
Сечение любого 4-мерного геометрического объекта 3 мерной гиперплоскостью есть геометрическое тело, имеющее размерность не более 3.





# Метод построения сечений тессеракта гиперплоскостью

- Задание гиперплоскости сечения
- Нахождение точек пересечения гиперплоскости и тессеракта
- Поворот получившегося сечения до вложимости его в трехмерное пространство
- Анализ полученного сечения



```
rex@comp: ~/work/CutTesseract
rex@comp:~/work/CutTesseract$ java -jar CutTesseract_v0.0-w-rotations.jar
Enter input mode
2 for point and normal vector
4 for 4 points4d
0 for no cut, only cube
4
We need 4 4d points
-1 1 -1 1 -1 1 1 0 -1 -1 0 -1 0 -1 -1 -1
=======CUT POINTS=====
(-1.0, -1.0, -1.0, -0.5)
(-1.0, -1.0, 0.0, -1.0)
(-1.0, -0.33333333333333337, 1.0, -1.0)
(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0)
(-1.0, 1.0, 1.0, 0.0)
(0.0, -1.0, -1.0, -1.0)
(1.0, -0.33333333333333337, -1.0, -1.0)
(1.0, 1.0, -1.0, 0.0)
```

# Задание гиперплоскости сечения

## Гиперплоскость сечения. Уравнение.

$ax + by + cz + dw + e = 0$

$(a, b, c, d, e)$ - коэффициенты

$M_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$

$\mathrm{M}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$

$\mathrm{M}_3 = (x_3, y_3, z_3, w_3)$

$\mathrm{M}_4 = (x_4, y_4, z_4, w_4)$

Задается по четырем точкам $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ с помощью матрицы:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & w - w_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & w_2 - w_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & w_3 - w_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix} = 0$$

# Задание гиперплоскости с помощью точки и вектора

Способ во многом аналогичен объявлению обыкновенной двумерной плоскости при помощи нормали к ней и точки, принадлежащей данной плоскости.

$A(x_1, y_1, z_1, w_1)$ - произвольная точка
$\overrightarrow{N}(x_2, y_2, z_2, w_2)$ - нормаль к искомой гиперплоскости
P(ax+by+cz+dw+e=0)
Свободный член $e$ можно выразить через следующую формулу
e=-(x$_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 + w_2 w_1$)

Таким образом, мы объявили гиперплоскость сечения.

# Нахождение точек пересечения гиперплоскости и тессеракта

Пусть $A$ - вершина гиперкуба, $P$ - наша гиперплоскость.
Произведем проверку взаимного расположения вершины тессеракта и гиперплоскости.

$A := (x_1, y_1, z_1, w_1)$
P:=(ax + by + cz + dw + e = 0)

$$\left[\begin{array}{ll} ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e = 0 & \text{Вершина принадлежит сечению} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e > 0 & \text{Вершина "выше" плоскости сечения} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e < 0 & \text{Вершина "ниже" плоскости сечения} \end{array}\right.$$

Далее при помощи параметрического уравнения находим точку пересечения.

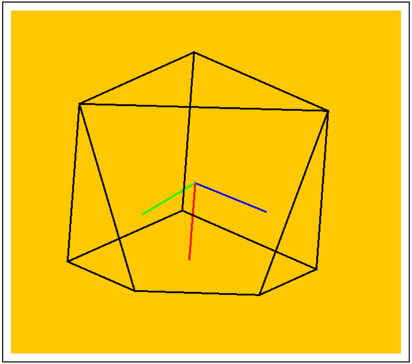
# Поворот сечения

## Матрицы поворота в четырехмерном пространстве.

$$M_{xy}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{yz}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{zw}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



# Лемма о выпуклости

**О выпуклости тессеракта**

Рассматриваемый в нашей работе тессеракт выпуклый.

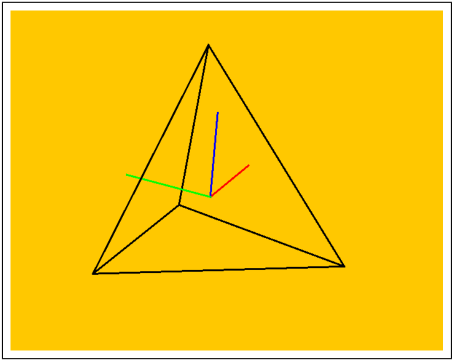
**Лемма 1**

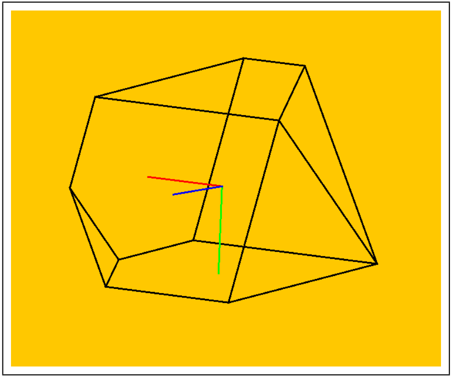
Сечением выпуклого тессеракта гиперплоскостью является выпуклое геометрическое тело.

# Лемма о количестве вершин

**Лемма 2**

Трехмерные сечения тессеракта имеют не менее 4 и не более 12 вершин.





# Лемма о четности суммы степеней вершин сечения

**Лемма 2**

Не существует сечений, сумма степеней вершин которых нечетна.

## Лемма о степени вершин

**Лемма 3**

Трехмерные сечения тессеракта состоят из вершин только со степенями 3 и 4.

# Теорема о параллельности граней противоположных сечений

**Теорема 1**

Грани сечения, полученные пересечением противоположных ячеек тессеракта гиперплоскостью, параллельны.

# Лемма о степени вершин

**Лемма 3**

Трехмерные сечения тессеракта состоят из вершин только со степенями 3 и 4.

Доказательство:

# Лемма о количестве вершин

**Теорема 2**

Трехмерные сечения тессеракта имеют не менее 4 и не более 12 вершин, но не 5.

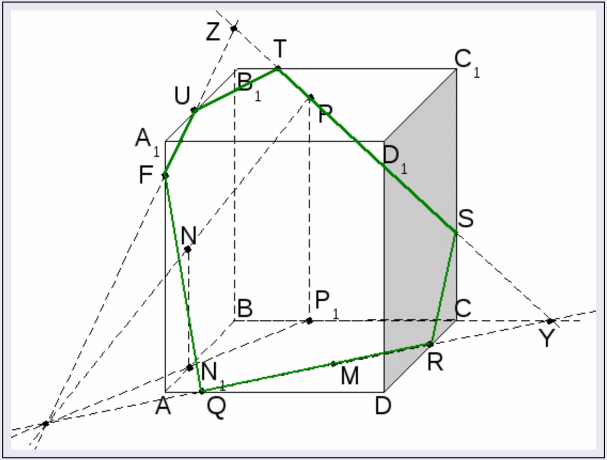
# Размерность сечения

**Сечение**

Сечение - это множество точек, принадлежащих, как тессеракту, так и гиперплоскости сечения.

Из этого следует вывод о отм, что сечение не может иметь размерность более 3. ч.т.д.

# Доказательсто выпуклости сечения



# Доказательство четности суммы степеней вершин сечения

**Лемма о рукопожатиях**

Любой конечный неориентированный граф имеет чётное число вершин нечётных степеней.

# Доказательство теоремы 1

$$P_1 \begin{cases} ax + by + cz + dw + e = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} ax + by + cz + dw + e = 0 \\ w = -1 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$