

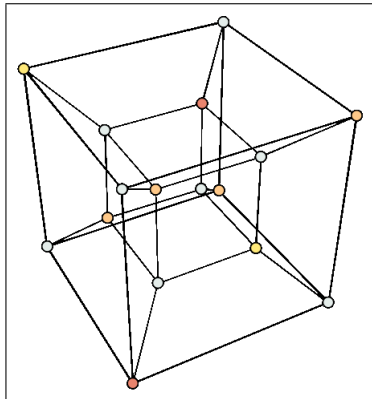
Исследование сечений тессеракта гиперплоскостью используя методы компьютерного моделирования.

Максимов Григорий, Нугманов Артур, Мустафин Ильгиз

Татаро - Турецкий Лицей №2
Московского района города Казани

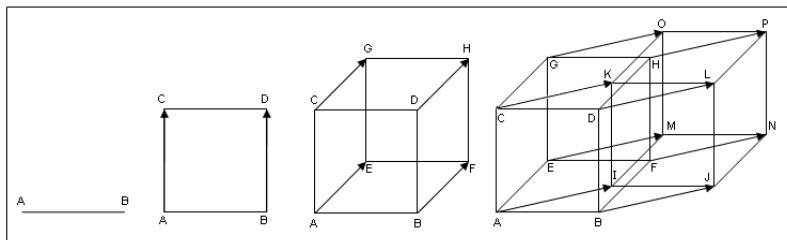
Конференция имени Лобачевского 2015

Тессеракт. Общее определение



- Рассматриваемая нами модель имеет координаты $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, такие, что $x_1 \in [-1, 1]$.
- Ограничивается 8 гиперплоскостями
- Имеет 8 трехмерных граней, 24 двумерных, 32 ребра и 16 вершин.

Наглядный процесс формирования отображения тессеракта на трехмерную плоскость



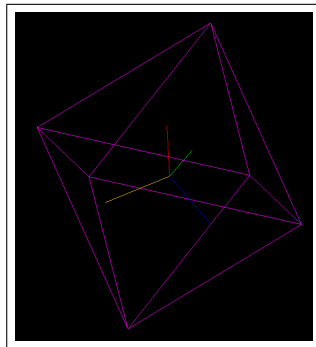
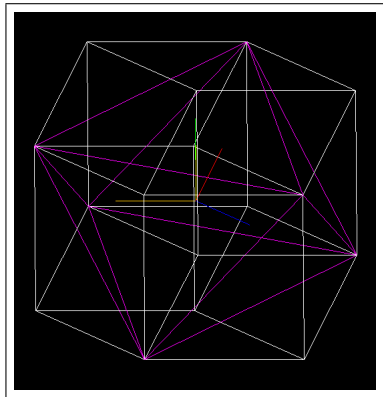
Наглядный процесс, как точка A переходит постепенно в гиперкуб, приобретая новые размерности

Раскрытие тезиса здесь.

Лемма о размерности сечений

Утверждение

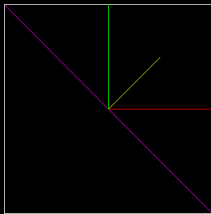
Сечение любого 4-мерного геометрического объекта 3 мерной гиперплоскостью есть геометрическое тело, имеющее размерность не более 3.



Метод построения сечений тессеракта гиперплоскостью

- Задать гиперплоскость сечения
- Найти точки пересечения гиперплоскости и тессеракта
- Повернуть получившееся сечения до вложимости его в трехмерное пространство
- Вывод полученного сечения, анализ результатов

```
Enter input mode
2 for point and normal vector
4 for 4 points4d
2
We need Point4d
0 0 0 0
We need Vector4d as Point4d
1 1 1 1
=====CUT POINTS=====
(-1.0, -1.0, 1.0, 1.0)
(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0)
(-1.0, 1.0, 1.0, -1.0)
(1.0, -1.0, -1.0, 1.0)
(1.0, -1.0, 1.0, -1.0)
(1.0, 1.0, -1.0, -1.0)
(1.0, 1.0, -1.0, -1.0)
=====
```



Задание гиперплоскости сечения

Гиперплоскость сечения. Уравнение.

$$ax + by + cz + dw + e = 0$$

(a, b, c, d, e) - коэффициенты

(x, y, z, w) - координаты точек.

Задается по четырем точкам с помощью матрицы:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & w - w_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & w_2 - w_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & w_3 - w_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, мы объявили гиперплоскость сечения.

Задание гиперплоскости с помощью точки и вектора

$A(x_1, y_1, z_1, w_1)$ - произвольная точка

$\vec{N}(x_2, y_2, z_2, w_2)$ - нормаль к искомой гиперплоскости

$P(ax+by+cz+dw+e=0)$

$e=-(x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 + w_2w_1)$

Таким образом, мы задали гиперплоскость, используя точку и вектор.

Нахождение точки пересечения гиперплоскости и тессеракта

Пусть A - вершина гиперкуба, P - наша гиперплоскость.

Произведем проверку взаимного расположения вершины тессеракта и гиперплоскости.

$$A := (x_1, y_1, z_1, w_1)$$

$$P := (ax + by + cz + dw + e = 0)$$

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e = 0 & \text{Вершина принадлежит сечению} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e > 0 & \text{Вершина "выше" плоскости сечения} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e < 0 & \text{Вершина "ниже" плоскости сечения} \end{cases}$$

Далее при помощи параметрического уравнения находим точку пересечения. Надо дописать.

Поворот сечения

Матрицы поворота в
четырёхмерном пространстве.

$$M_{xy}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{yz}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{zw}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

PIC HERE

Лемма о выпуклости

Лемма 1

Сечением выпуклого тессеракта гиперплоскостью является выпуклое геометрическое тело.