Исследование сечений тессеракта гиперплоскостью

используя методы компьютерного моделирования.

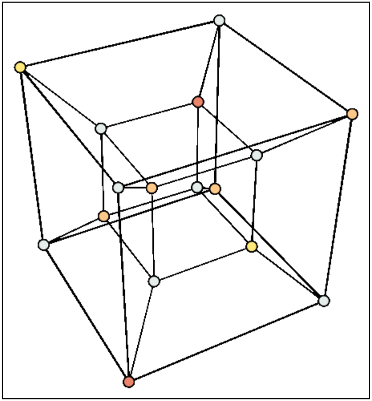
Максимов Григорий, Нугманов Артур, Мустафин Ильгиз

Научный руководитель - Давлетбаев Марсель Фанилевич

МАОУ "Лицей-интернат №2"
Московского района города Казани

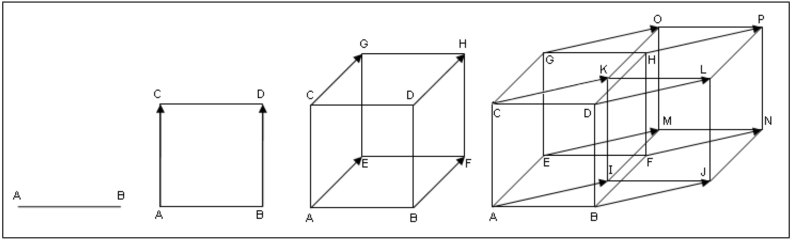
Конференция имени Лобачевского 2015

Тессеракт. Общее определение



- Рассматриваемая нами модель имеет координаты $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, такие, что $x_i \in [-1, 1]$.
- Ограничивается 8 гиперплоскостями
- Имеет 8 трехмерных граней, 24 двумерных, 32 ребра и 16 вершин.

Наглядный процесс формирования отображения тессеракта на трехмерную плоскость

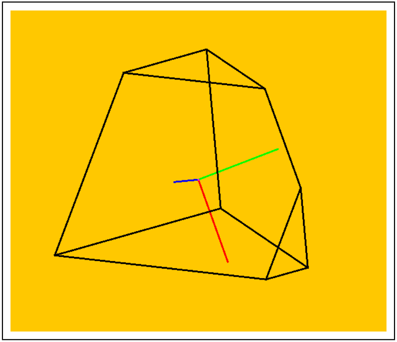


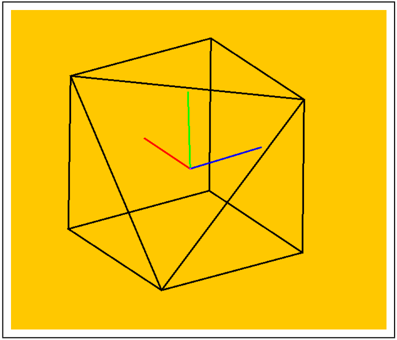
Наглядный процесс как точка A переходит постепенно в гиперкуб, приобретая новые размерности

Лемма о размерности сечений

Лемма 1

Сечением любого 4-мерного геометрического объекта 3 мерной гиперплоскостью является геометрическое тело, имеющее размерность не более 3.





Лемма о выпуклости

Утверждение

Тессеракт - выпуклое четырехмерное тело.

Лемма 2

Сечением тессеракта гиперплоскостью является выпуклое геометрическое тело.

Метод построения сечений тессеракта гиперплоскостью

- Задание гиперплоскости сечения
- Нахождение точек пересечения гиперплоскости и тессеракта
- Поворот получившегося сечения до вложимости его в трехмерное пространство
- Анализ полученного сечения

```
rex@comp:~/work/CutTesseract$ java -jar CutTesseract_v0.0-w-rotations.jar
Enter input mode
2 for point and normal vector
4 for 4 points4d
0 for no cut, only cube
4
We need 4 4d points
-1 1 -1 1 -1 1 1 0 -1 -1 0 -1 0 -1 -1 -1
=======CUT POINTS=====
(-1.0, -1.0, -1.0, -0.5)
(-1.0, -1.0, 0.0, -1.0)
(-1.0, -0.33333333333333337, 1.0, -1.0)
(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0)
(-1.0, 1.0, 1.0, 0.0)
(0.0, -1.0, -1.0, -1.0)
(1.0, -0.33333333333333337, -1.0, -1.0)
(1.0, 1.0, -1.0, 0.0)
(1.0, 1.0, 1.0, -1.0)
======================
(0.3481553119113957, -0.5222329678670935, 0.3481553119113957, 0.6963106238227914)
```

Задание гиперплоскости сечения с помощью точек

Гиперплоскость сечения. Уравнение.

$ax + by + cz + dw + e = 0$
(a, b, c, d, e) - коэффициенты
$M_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)$
$\mathrm{M}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$
$\mathrm{M}_3 = (x_3, y_3, z_3, w_3)$
$\mathrm{M}_4 = (x_4, y_4, z_4, w_4)$

Задается по четырем точкам (M_1, M_2, M_3, M_4) с помощью матрицы:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & w - w_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & w_2 - w_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & w_3 - w_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix} = 0$$

Задание гиперплоскости с помощью точки и вектора

Способ аналогичен объявлению обыкновенной двумерной плоскости при помощи нормали к ней и точки, принадлежащей данной плоскости.

$A(x_1, y_1, z_1, w_1)$ - произвольная точка
$\overrightarrow{N}(x_2, y_2, z_2, w_2)$ - нормаль к искомой гиперплоскости
P(ax+by+cz+dw+e=0)
Свободный член e можно выразить через следующую формулу
e=-($x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 + w_2 w_1$)

Таким образом, мы объявили гиперплоскость сечения.

Нахождение точек пересечения гиперплоскости и тессеракта

Пусть A - вершина гиперкуба, P - наша гиперплоскость.
Произведем проверку взаимного расположения вершины тессеракта и гиперплоскости.

$A := (x_1, y_1, z_1, w_1)$
P:=(ax + by + cz + dw + e = 0)

$$\left[\begin{array}{ll} ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e = 0 & \text{Вершина принадлежит сечению} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e > 0 & \text{Вершина "выше" плоскости сечения} \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + e < 0 & \text{Вершина "ниже" плоскости сечения} \end{array}\right.$$

В случае, если две вершины находятся в разных полуплоскостях находим точку пересечения ребра и гиперплоскости при помощи параметрического уравнения.

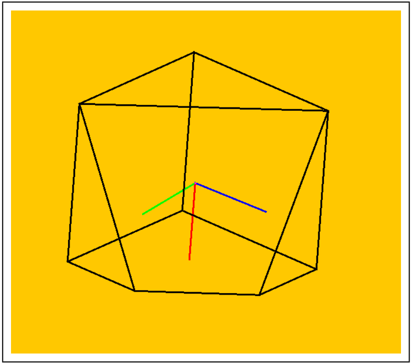
Поворот сечения

Матрицы поворота в четырехмерном пространстве.

$$M_{xy}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{yz}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{zw}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



Теорема о параллельности граней противоположных сечений

Теорема 1

Грани сечения, полученные пересечением противоположных ячеек тессеракта гиперплоскостью, параллельны.

Лемма о четности суммы степеней вершин сечения

Лемма 3

Не существует сечений, сумма степеней вершин которых нечетна.

Лемма о степени вершин

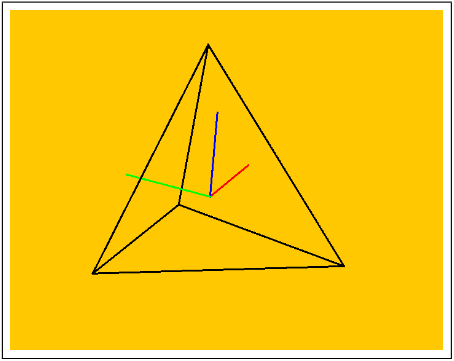
Лемма 4

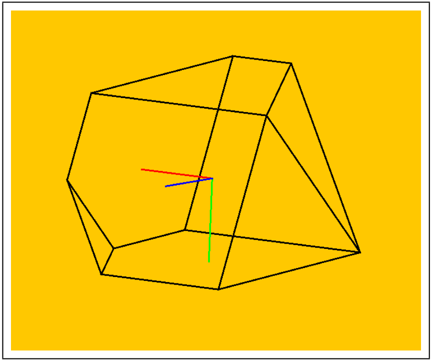
Трехмерные сечения тессеракта состоят из вершин только со степенями 3 и 4.

Теорема о количестве вершин

Теорема 2

Трехмерные сечения тессеракта имеют не менее 4 и не более 12 вершин, но не 5.





Гипотеза о количестве разных сечений

Гипотеза

Количество топологически различных сечений равно 30.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	∑
0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	3	0	5	12
1	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	4	0	0	7
2	0	0	0	0	0	0	2	0	4	0	0	0	0	6
3	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
∑	1	0	0	0	3	0	6	0	8	0	7	0	5	30

Заключение

Мы на Github

https://github.com/imustafin/CutTesseract

Сайт проекта

http://imustafin.github.io/CutTesseract/

Размерность сечения

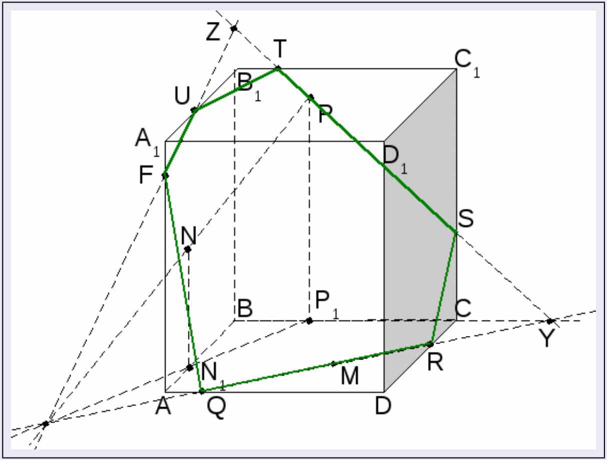
Сечение

Сечение - это множество точек, принадлежащих, как тессеракту, так и гиперплоскости сечения.

Из этого следует вывод о том, что сечение не может иметь размерность более 3, так как размерность секущей гиперплоскости - 3.

[I] Назад

Доказательсто выпуклости сечения



[I] Назад

Доказательство теоремы 1

$$P_1 \begin{cases} ax + by + cz + dw + e = 0 \\ w = 1 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} ax + by + cz + dw + e = 0 \\ w = -1 \end{cases}$$

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Возьмем $M_1(x_1; y_1; z_1; 1)$, такую, что $M_1 \in P_1$

Пусть ax+by=0

Тогда x=-bk; y=ak;

Тогда $M_2(x_1 - bk; y_1 + ak; z_1; 1) \in P_1$

Аналогично найдем точку M_3, взяв ax+cz=0

Тогда x=-cn; z=an;

Из этого следует, что $M_3(x_1 - cn; y_1; z_1 + an; 1) \in P_1$

$\overrightarrow{M_1 M_2} = (-bk; ak; 0; 0)$, $\overrightarrow{M_1 M_3} = (-cn; 0; an; 0)$

Возьмем $\mathrm{M}_4(x_2; y_2; z_2; -1)$, такую, что $M_2 \in P_2$
Пусть ax+by=0
Тогда x=-bk; y=ak;
Тогда $\mathrm{M}_5(x_2 - bk; y_2 + ak; z_2; -1) \in P_2$
Аналогично найдем точку M_6, взяв ax+cz=0
Тогда x=-cn; z=an;
Из этого следует, что $\mathrm{M}_6(x_2 - cn; y_2; z_2 + an; -1) \in P_2$

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{M_4 M_5} = (-bk; ak; 0; 0) \\ \overrightarrow{M_4 M_6} = (-cn; 0; an; 0) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{M_1 M_2} = (-bk; ak; 0; 0) \\ \overrightarrow{M_1 M_3} = (-cn; 0; an; 0) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{M_4 M_5} = (-bk; ak; 0; 0) \\ \overrightarrow{M_4 M_6} = (-cn; 0; an; 0) \end{array}\right.$$

Как видим, пары неколлинеарных векторов в двух плоскостях равны
Как следствие и плоскости, задаваемые ими, параллельны.

Доказательство четности суммы степеней вершин сечения

Лемма о рукопожатиях

Любой конечный неориентированный граф имеет чётное число вершин нечётных степеней.

[I] Назад

Доказательство Леммы о степени вершин

Данная лемма является следствием Теоремы 1 о параллельности. Так как тессеракт состоит из 8 ячеек, пары которых параллельны, то при сечении данного тессеракта гиперплоскостью образуются 4 пары параллельных двумерных пдлоскостей.
Как следствие, одновременно пересекаться в одной точке могут лишь 4 из них. То есть максимальная степень вершины сечения тессеракта - 4.
Как известно, для получения точки требуется пересечь как минимум три плоскости. Как следствие, минимальная степень вершины сечения будет 3.

[I] Назад

Доказательство Теоремы 2 о количестве вершин

Как ивестно, для получения трехмерного геометрического тела требуется минимум 4 вершины.
По теореме Эйлера для многогранников:

$$\begin{cases} V \text{ - количество вершин, } E \text{ - ребер, } F \text{ - граней.} \\ V - E + F = 2 \\ F \leq 8 \\ \text{Пусть } V = x + y \\ x \text{ - количество вершин со степенью 3} \\ y \text{ - количество вершин со степенью 4} \\ E = \frac{3x+4y}{2}, \text{ по лемме о рукопожатиях и лемме о степени вершин} \end{cases}$$

Доказательство Теоремы 2 о количестве вершин

V - количество вершин, E - ребер, F - граней.

$F = 2 - E + V$

$2 - V + E \leq 8$

$E - V \leq 6$

$\frac{3x+4y}{2} - x - y \leq 6$

$x + 2y \leq 12$

$V = x + y \leq x + 2y \leq 12$

Таким образом мы нашли верхний предел степени вершины сечения

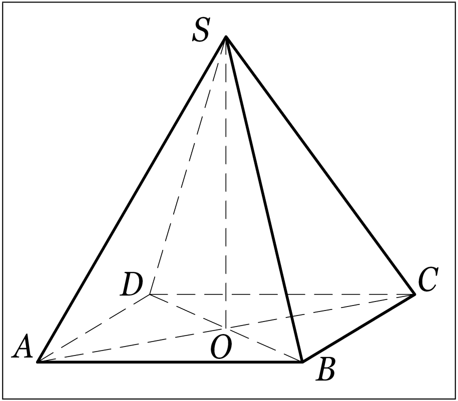
Доказательство Теоремы 2 о количестве вершин

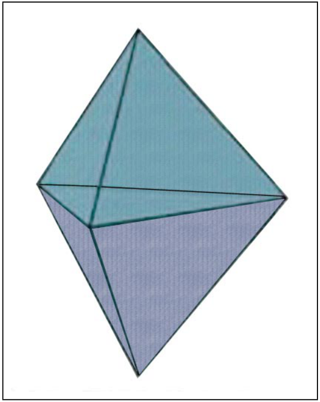
Рассмотрим все графы с 5 вершинами, имеющие степень 3 и 4.

33333 - не может быть по Лемме о четности
33334 - может быть
33344 - не может быть по Лемме о четности
33444 - может быть
34444 - не может быть по Лемме о четности
44444 - не планарный граф

Таким образом остаются два графа, потенциально нам подходящие.

Доказательство Теоремы 2 о количестве вершин





33334

33444

Они не являются сечениями гиперкуба, так как у них более 4 граней и нет ни одной пары параллельных.