1. 座標平面上の曲線 $C: y = x^3 - x$ の接線のうち、点 $P(a, b)$ を通るものがちょうど 3 本存在するような点 (a, b) の存在範囲を図示するとき、その境界線の方程式を求めよ。

接点の x 座標を t とする。与えられた曲線の方程式より、

$$y' = 3x^2 - 1$$

なので、接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t \quad \Longleftrightarrow \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

これが (a, b) を通るので、

$$\begin{aligned} b &= (3t^2 - 1) \cdot a - 2t^3 \\ 2t^3 - 3at^2 + a + b &= 0 \end{aligned}$$

題意の条件が成り立つのは、この t に関する 3 次方程式の実数解が 3 つ存在するとき、すなわち $f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ としたときに、$y = f(t)$ と $y = 0$ との共有点が 3 つになるときである。

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6t^2 - 6at \\ &= 6t(t - a) \end{aligned}$$

である。

(i) $a > 0$ のとき、増減表は下図となる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$a+b$	$\searrow$	$-a^3+a+b$	$\nearrow$

よって、$y = f(t)$ と $y = 0$ との共有点が 3 つになるのは、$a + b > 0$ かつ $-a^3 + a + b < 0$、すなわち $b > -a$ かつ $b < a^3 - a$ のとき。

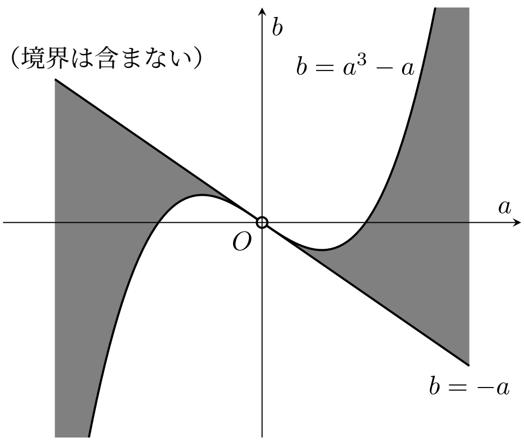
(ii) $a = 0$ のとき、$f'(t) = 6t^2 \geq 0$ なので、$f(t)$ は増加関数であり、$y = f(t)$ と $y = 0$ との共有点が 3 つになることはない。

(iii) $a < 0$ のとき、増減表は下図となる。

t	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	$-a^3+a+b$	$\searrow$	$a+b$	$\nearrow$

よって、$y = f(t)$ と $y = 0$ との共有点が 3 つになるのは、$-a^3 + a + b > 0$ かつ $a + b < 0$、すなわち $b > a^3 - a$ かつ $b < -a$ のとき。

(i)〜(iii) より、点 (a,b) の存在範囲は下図。



よって、求める境界線の方程式は、$b = a^3 - a$ と $b = -a$。

2. n を 2 以上の自然数とする。$n^4 + 4$ が素数となるような n をすべて求めよ。

法を 5 とする。

(i) $n \equiv \pm 1$ のとき

$n^2 \equiv 1$ より、

$$n^4 + 4 \equiv 1^2 + 4 \equiv 0$$

よって、$n^4 + 4$ が素数となるのは $n^4 + 4 = 5$ のときのみであり、このとき $n = 1$。しかしこれは、n が 2 以上の自然数であることに反する。よって、題意を満たす n は存在しない。

(ii) $n \equiv \pm 2$ のとき

$n^2 \equiv 4$ より、

$$n^4 + 4 \equiv 4^2 + 4 \equiv 0$$

よって、(i) と同様にして、題意を満たす n は存在しない。

(iii) $n \equiv 0$ のとき

$n = 5N$（N は自然数）とおける。このとき、

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= (5N)^4 + 4 \\ &= \left((5N)^2\right)^2 + 2^2 \\ &= (25N^2 + 2)^2 - 2 \cdot (5N)^2 \cdot 2 \\ &= (25N^2 + 2)^2 - (10N)^2 \\ &= (25N^2 + 10N + 2)(25N^2 - 10N + 2) \end{aligned}$$

ここで、

$$25N^2 - 10N + 2 = 25\left(N - \frac{1}{5}\right)^2 + 1 \geq 17 \quad (\because N \geq 1)$$

であり、$N > 0$ より $25N^2 + 10N + 2 > 25N^2 - 10N + 2$ なので、$n^4 + 4$ は必ず合成数となる。

よって、$n^4 + 4$ が素数となるような n は存在しない。

(i)〜(iii) より、題意を満たす n は存在しない。

3. 複素数平面上で、点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、$w = z + \frac{2}{z}$ が描く図形は何か。

点 z は原点を中心とする半径 1 の円周上を動くので、$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とおける。このとき、

$$\begin{aligned}
w &= z + \frac{2}{z} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta + 2\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} \\
&= \cos\theta + i\sin\theta + 2\cdot(\cos\theta - i\sin\theta) \\
&= 3\cos\theta - i\sin\theta
\end{aligned}$$

よって、w は長軸 6、短軸 2 の楕円を描く。

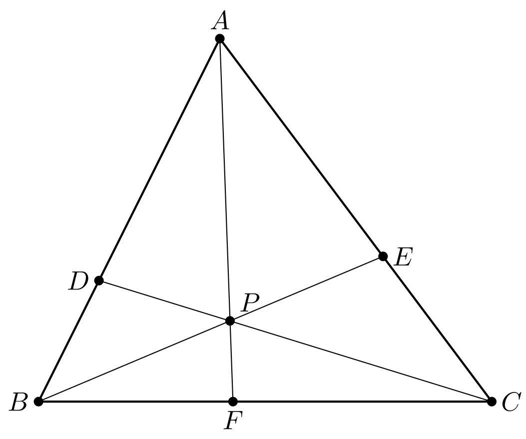
4. 積分 $I = \int_0^\pi e^{-x}\sin x dx$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
I &= \left[-e^{-x}\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-e^{-x}\cos x)dx \\
&= 0 - \left(\left[e^{-x}\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}(-\sin x)dx\right) \\
&= -\left(e^{-\pi}\cdot(-1) - 1\cdot 1\right) - I \\
&= 1 + e^{-\pi} - I
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
2I &= 1 + e^{-\pi} \\
I &= \frac{1 + e^{-\pi}}{2}
\end{aligned}$$

5. 三角形 ABC において、辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D、辺 AC を 3 : 2 に内分する点を E とする。線分 BE と CD の交点を P とし、直線 AP と辺 BC の交点を F とする。このとき、比 BF : FC を求めよ。



チェバの定理より、

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} \cdot \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$$
$$\frac{2}{1} \cdot \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} \cdot \frac{2}{3} = 1$$
$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} = \frac{3}{4}$$

よって、BF : FC = 3 : 4

6. サイコロを n 回投げて、出た目の積を X_n とする。X_n が 5 で割り切れる確率 p_n を求めよ。

求める確率は一度も 5 が出ない確率なので、

$$p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

7. 実数 $x,\ y$ が $x^2 + xy + y^2 = 3$ を満たすとき、$x + y$ の取りうる値の最大値を求めよ。

$x + y = u,\ xy = v$ とする。与式より、

$$(x+y)^2 - xy = 3$$
$$u^2 - v = 3$$
$$v = u^2 - 3$$

また、解と係数の関係より、x と y は t に関する二次方程式 $t^2 - ut + v = 0$ の 2 解である。x と y が実数であるのは、この方程式の判別式を D としたときに $D \geq 0$ のときである。

$$D = u^2 - 4v$$

より、

$$u^2 - 4v \geq 0$$

これらより、

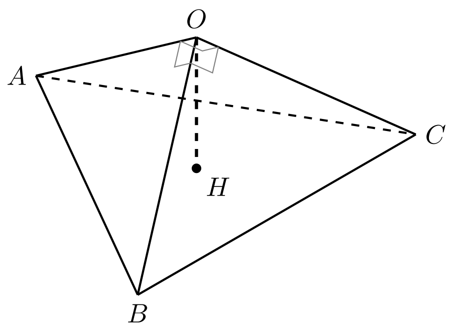
$$u^2 - 4(u^2 - 3) \geq 0$$
$$3u^2 \leq 12$$
$$u^2 \leq 4$$
$$-2 \leq u \leq 2$$

よって、求める最大値は 2。

8. 極限値 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\\
=&\int_0^1 \log(1+x)dx=[(1+x)\log(1+x)-(1+x)]_0^1\\
=&(2\log 2-2)-(1\cdot 0-1)\\
=&2\log 2-1
\end{aligned}
$$

9. 四面体 OABC において、OA = OB = OC = 1、$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$ とする。頂点 O から底面 ABC に下した垂線の足を H とするとき、OH の長さはいくらか。



三角錐 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\cdot 1=\frac{1}{6}$$

一方、ヘロンの公式より、$s=\frac{\mathrm{AB+BC+CA}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ とすると、

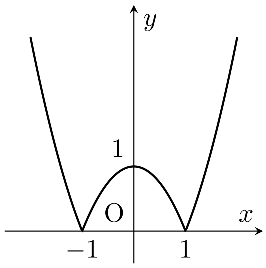
$$\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{s(s-\mathrm{AB})(s-\mathrm{BC})(s-\mathrm{CA})}=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、

$$\text{三角錐 OABC}=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}$$
$$\mathrm{OH}=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

10. $f(x) = |x^2 - 1|$ とする。方程式 $f(x) = kx + 2$ が異なる 4 つの実数解をもつような定数 k の範囲を求めよ。

$f(x) = kx + 2$ が異なる 4 つの実数解をもつのは、$y = f(x)$ と $y = kx + 2$ のグラフが異なる 4 点で交わるときである。$y = f(x)$ のグラフは下図となる。



$y = f(x)$ と $y = kx + 2$ のグラフの $x \leq -1,\ 1 \leq x$ の部分の共有点の個数は、

$$\begin{cases} -2 \leq k \leq 2 \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個} \\ k < -2,\ 2 < k \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個} \end{cases}$$

また、$-x^2 + 1 = kx + 2 \Leftrightarrow x^2 + kx + 1 = 0$ の判別式を D とすると、

$$D = k^2 - 4$$

なので、$-x^2 + 1 = 0$ と $kx + 2 = 0$ は、$k = \pm 2$ のとき $x = \mp 1$ で接する。よって、$y = f(x)$ と $y = kx + 2$ のグラフの $-1 < x < 1$ の部分の共有点の個数は、

$$\begin{cases} -2 \leq k \leq 2 \text{ のとき} \quad 0 \text{ 個} \\ k < -2,\ 2 < k \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個} \end{cases}$$

以上より、$y = f(x)$ と $y = kx + 2$ のグラフの共有点の個数は、任意の k に対して 2 個となる。よって、題意を満たす k は存在しない。