

基于波动方程的间断伽辽金 方法在电磁仿真中的研究

作者姓名 杨琦

指导教师姓名、职称 史琰 教授

申请学位类别 工学硕士

学校代码 10701
分 类 号 0441

学 号 17021210786
密 级 公开

西安电子科技大学

硕士学位论文

基于波动方程的间断伽辽金 方法在电磁仿真中的研究

作者姓名：杨琦

一级学科：电子科学与技术

二级学科：电磁场与微波技术

学位类别：工学硕士

指导教师姓名、职称：史琰 教授

学 院：电子工程学院

提交日期：2020 年 4 月

The Discontinuous Galerkin Time Domain Method based on Wave Equation for Electromagnetic Simulation

A Thesis submitted to
XIDIAN UNIVERSITY
in partial fulfillment of the requirements
for the degree of Master
in Electronic Science and Technology

By

Yang Qi

Supervisor: Shi Yan Title:Professor

April 2020

西安电子科技大学 学位论文独创性（或创新性）声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同事对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。学位论文若有不实之处，本人承担一切法律责任。

本人签名：_____ 日 期：_____

西安电子科技大学 关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅、借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。同时本人保证，结合学位论文研究成果完成的论文、发明专利等成果，署名单位为西安电子科技大学。

保密的学位论文在____年解密后适用本授权书。

本人签名：_____ 导师签名：_____

日 期：_____ 日 期：_____

摘要

随着当今科学技术的发展，我们所面临的电磁环境也变得日益复杂，如何精确和高效地对电磁环境进行数值模拟成为了当前计算电磁学领域中亟需解决的问题。时域间断伽辽金方法（DGTD）作为一种新的数值方法，因其具有众多优势而受到了广泛的关注。本文分析和总结了该方法的优缺点和发展现状，并在此基础上探索和研究了新的电磁场数值求解技术。本文的主要工作内容和创新点包括以下几个部分：

1. 对于传统的 DGTD 方法内存占用高的问题，本文提出了一种基于波动方程的节点型时域间断伽辽金（NDGTD-WE）方法。首先，我们从波动方程出发推导出了单元下的 NDGTD-WE 主方程，并在该框架下发展了常用边界条件和总场/散射场源。然后，通过引入坐标映射函数将实际四面体单元与一个参考四面体单元建立了联系，使得 NDGTD-WE 方程中矩阵元素的计算能够在参考单元中进行，进而提出了一种低存储的 NDGTD-WE（LS-NDGTD-WE）方法。最后，通过数值实验表明了该方法在三阶基函数下相对误差能达到 0.015% 的计算精度，并且 LS-NDGTD-WE 方法的内存消耗仅占 NDGTD-WE 方法的 2%。
2. 为了扩展 NDGTD-WE 方法的应用范围，本文发展了一种基于 NDGTD-WE 框架的精确波端口边界条件。首先，我们从频域的波端口边界条件出发，推导了时域形式的波端口边界条件并将其添加到 NDGTD-WE 方法中，然后通过使用辅助方程替代了波端口边界条件中的时域卷积项，将时间复杂度从 $O(n^2)$ 降低到了 $O(n)$ ，进而提高了计算效率。最后通过数值算例验证了该方法的正确性。
3. 为了提高 NDGTD-WE 方法求解问题的规模，本文发展了一种基于 GPU 加速技术的低存储 NDGTD-WE（GPU-LS-NDGTD-WE）方法。首先，我们分析了 GPU 的硬件特性和 CUDA 的并行计算架构，然后通过将 LS-NDGTD-WE 方法中的矩阵还原过程放在 GPU 端进行，并优化了方程中矩阵向量乘操作，最后通过数值实验表明了该方法不仅拥有 LS-NDGTD-WE 方法低内存的优势，而且计算速度还比 NDGTD-WE 方法快 10 倍左右。

综上所述，本文基于传统的 DGTD 方法提出了一种新的 NDGTD-WE 方法，并在该方法的框架下针对不同环境下的电磁仿真问题开发了一系列实用和高效的电磁场求解技术。

关键词：时域间断伽辽金方法，波动方程，波端口边界条件，GPU 并行计算

ABSTRACT

With the development of science and technology, the electromagnetic environment we are facing has become increasingly complex. How to accurately and efficiently numerically simulate the electromagnetic environment has become an urgent problem in the field of computational electromagnetics. As a new numerical method, the discontinuous Galerkin time domain (DGTD) method has aroused general concern because of its many advantages. This thesis firstly analyzes and summarizes the advantages, disadvantages, and development status of discontinuous Galerkin time domain (DGTD) method. And then new numerical solution techniques have been developed based on the DGTD method. The main contributions of this thesis include the following parts:

1. For the problem of high memory usage of traditional DGTD method, this thesis proposes a nodal time-domain discontinuous Galerkin (NDGTD-WE) method based on wave equation. First, we derived the main NDGTD-WE equation from the wave equation and developed some common boundary conditions and TF/SF sources under this framework. Then, a coordinate mapping function was introduced to establish the relationship between the actual tetrahedral element and a reference tetrahedral element, so that the calculation of the matrix elements in the NDGTD-WE equation can be performed in the reference element. In this scenario, a low-storage NDGTD-WE (LS-NDGTD-WE) method was proposed. Finally, numerical examples show that the relative error of the method in terms of the third-order basis function can reach 0.015%, and the memory consumption of the LS-NDGTD-WE method is only 2% memory usage of the NDGTD-WE method.
2. In order to extend the application range of the NDGTD-WE method, this thesis develops an accurate waveport boundary condition under the NDGTD-WE framework. Starting from the waveport boundary condition in frequency domain, we firstly derived the time domain waveport boundary conditions and then implement it in the DGTD-WE method. Then, we replaced the time-domain convolution term in the waveport boundary condition by using the auxiliary equation method, reducing the calculation complexity from $O(n^2)$ to $O(n)$, and accordingly improving the calculation efficiency. Finally, numerical examples verify the correctness of the method.
3. In order to enhance the ability of NDGTD-WE method in the solution of large-scale

problems, a low-storage NDGTD-WE (GPU-LS-NDGTD-WE) method based on GPU acceleration technology has been developed in this thesis. First, we analyzed the hardware characteristics of the GPU and the parallel computing architecture of CUDA. Then the process of regenerating the matrix in the LS-NDGTD-WE method is implemented on the GPU, and the matrix-vector multiplication operations in the system equation is optimized. Finally, numerical examples show that this method not only has the memory advantage of the LS-NDGTD-WE method, but also accelerates the calculation by about 10 times compared with the NDGTD-WE method.

In summary, this thesis proposes a new NDGTD-WE method based on the traditional DGTD method, and develops a series of practical and efficient numerical solution techniques for electromagnetic simulation in different environments under this framework.

Keywords: discontinuous Galerkin time domain (DGTD), wave equation, waveport boundary condition, GPU parallel computing

插图索引

1.1	计算电磁学方法分类	2
2.1	简化的典型计算区域	10
2.2	总场/散射场示意图	13
3.1	参考单元与实际单元之间的映射	20
3.2	正四面体中作用在等间距节点上的形变函数	24
3.3	正四面体中的 LGL 点分布	24
3.4	积分点匹配示意图	26
3.5	PEC 谐振腔网格剖分 (Max. size : 0.10m)	28
3.6	PEC 谐振腔网格剖分 (Max. size : 0.05m)	29
3.7	LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的内存消耗对比	29
3.8	LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的时间消耗对比	30
3.9	CUB-87 导弹的几何结构	30
3.10	CUB-87 导弹的网格剖分	31
3.11	FEM 方法与 NDGTD-WE 方法的 RCS 计算结果对比	31
4.1	带有介质的波导结构示意图	34
4.2	辅助方程方法和直接卷积方法计算结果对比	41
4.3	辅助方程方法和直接卷积方法消耗时间对比	41
4.4	WR-90 波导几何结构	42
4.5	WR-90 波导网格剖分	42
4.6	WR-90 波导的 S 参数	43
4.7	WR-90 波导在 $t = 0.70\text{ns}$ 时的瞬态电场云图	43
4.8	WR-90 波导在 $t = 0.72\text{ns}$ 时的瞬态电场云图	43
4.9	WR-75 全金属波导滤波器示意图	44
4.10	WR-75 全金属波导滤波器的网格剖分	44
4.11	WR-75 全金属波导滤波器的 S 参数	45
4.12	介质波导滤波器示意图	45
4.13	介质波导滤波器网格剖分	46
4.14	介质波导滤波器的 S 参数	46

5.1	CPU 与 GPU 架构对比图	48
5.2	CUDA 编程架构	49
5.3	有限元网格与 GPU 网格的映射示意图	50
5.4	GPU 端的矩阵还原过程	51
5.5	GPU 端的矩阵向量乘过程	51
5.6	GPU-LS-NDGTD-WE 方法的计算过程流程图	52
5.7	Minkowski 分形结构贴片尺寸	53
5.8	Minkowski 多层频率选择表面的仿真模型	53
5.9	Minkowski 多层频率选择表面的 S 参数对比	54
5.10	GPU-LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的内存消耗对比	54
5.11	GPU-LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的时间消耗对比	55

表格索引

3.1	几种插值点方案的 Lebesgue 常数比较	24
3.2	不同基函数阶数下的精度对比	28

符号对照表

符号	符号名称
\in	属于
E	电场强度
D	电位移矢量
H	磁场强度
B	磁感应强度
J	电流密度
ρ	电荷密度
ε	介电常数
μ	磁导率

缩略语对照表

缩略语	英文全称	中文对照
FEM	Finite Element Method	有限元法
FETD	Finite Element Time Domain	时域有限元
FEFD	Finite Element Frequency Domain	频域有限元
FDTD	Finite Difference Time Domain	时域有限差分
FDFD	Finite Difference Frequency Domain	频域有限差分
FVTD	Finite Volume Time Domain	时域有限体积
DGTD	Discontinuous Galerkin Time Domain	时域间断伽辽金
PEC	Perfect Electric Conductor	理想电导体
PMC	Perfect Magnetic Conductor	理想磁导体
ABC	Absorbing Boundary Condition	吸收边界条件
PML	Perfectly Matched Layer	完美匹配层
TF/SF	Total Field/Scattered Field	总场/散射场
WPBC	Waveport Boundary Condition	波端口边界条件
ADE	Auxiliary Differential Equation	辅助微分方程
RCS	Radar Cross Section	雷达散射截面
GPU	Graphics Processing Unit	图形处理单元
CUDA	Compute Unified Device Architecture	统一计算设备架构

目录

摘要.....	I
ABSTRACT	III
插图索引.....	V
表格索引.....	VII
符号对照表.....	IX
缩略语对照表.....	XI
第一章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外现状	3
1.3 本论文主要研究内容及工作安排	5
第二章 NDGTD-WE 方法的基本原理	7
2.1 引言	7
2.2 NDGTD-WE 的主方程	7
2.3 数值流和边界条件	11
2.3.1 内罚数值流	12
2.3.2 常用边界条件	12
2.3.3 总场/散射场源	13
2.4 完全离散形式	14
2.4.1 空间离散化	14
2.4.2 时间离散化	17
2.5 本章小结	17
第三章 NDGTD-WE 方法的低存储策略.....	19
3.1 引言	19
3.2 参考四面体单元	20
3.3 插值点和基函数表达式	21
3.4 矩阵元素生成方法	25
3.5 数值算例和分析	27
3.5.1 PEC 谐振腔.....	27
3.5.2 CBU-87 洲际导弹	30
3.6 本章小结	32

第四章 NDGTD-WE 方法的波端口边界条件	33
4.1 引言	33
4.2 波端口边界条件的基本理论	33
4.2.1 频域波端口边界条件	33
4.2.2 时域波端口边界条件	36
4.3 波端口边界上的 NDGTD-WE 方程	37
4.4 辅助方程方法代替时域卷积	40
4.5 数值算例和分析	42
4.5.1 WR-90 矩形空波导	42
4.5.2 WR-75 波导滤波器	44
4.5.3 介质波导滤波器	45
4.6 本章小结	46
第五章 基于 GPU 加速的 LS-NDGTD-WE 方法	47
5.1 引言	47
5.2 CUDA 并行计算架构	47
5.2.1 GPU 的基本特性	48
5.2.2 CUDA 编程架构	48
5.3 CUDA 实现 LS-NDGTD-WE 方法	49
5.3.1 单元网格与 GPU 网格的映射	49
5.3.2 GPU 端的矩阵还原与矩阵向量乘	50
5.4 数值算例和分析	52
5.5 本章小结	55
第六章 总结与展望	57
6.1 全文总结	57
6.2 下一阶段工作展望	57
参考文献	59
致谢	63
作者简介	65

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

19世纪英国物理学家麦克斯韦建立了描述自然界一切宏观电磁现象的麦克斯韦方程组（Maxwell's Equations），在随后的20世纪里电磁学得到了飞速的发展，人们先后发明了无线通信、微波遥感和雷达探测等技术，时至今日电磁学已经深刻地影响和改变了人类的生活和工作方式。

人们对电磁问题进行分析，实质上是求在不同边界条件和媒质分布下的麦克斯韦方程组的解。通常，求解麦克斯韦方程组的方法可以分为解析方法、渐近方法和数值方法。解析方法的计算效率和精度较高，但其求解问题的范围非常有限。渐近方法通过引入不同的近似去简化分析，从而得到电磁问题的半解析公式，这在一定程度上扩大了解析方法的求解范围，但对于一些复杂电磁问题的分析，该方法的求解能力仍然非常有限。随着计算机技术的发展，数值方法由于其能够借助计算机辅助计算，并且几乎不受边界和媒质分布的约束，从而可以对复杂的电磁问题进行分析。因此，数值方法成为了目前分析电磁场问题的主流方法，并随之催生了一门新兴学科——计算电磁学（Computational Electromagnetics, CEM）。然而，随着近几年科学技术的快速发展，我们所面临的电磁环境也变得日益复杂。对复杂的电磁环境进行高效和精确的数值模拟显得尤为重要，成为了目前计算电磁学领域中的研究热点和难点。自麦克斯韦方程组被提出以来，众多科研工作者们经过百余年的努力，提出了许多数值方法用于求解麦克斯韦方程组，如图1.1所示。通常而言，这些数值方法可以根据求解域分为频域方法和时域方法两大类，而根据支配方程的形式不同，又可继续将其分为微分方程（Partial Differential Equation, PDE）方法和积分方程（Integral Equation, IE）方法两类。

在频域方法中，可以根据适用频率划分为高频方法和低频方法。高频方法主要包括几何光学法（Geometrical Optics, GO）、几何绕射理论（Geometrical Theory of Diffraction, GTD）、一致性绕射理论（Uniform Theory of Diffraction, UTD）、物理光学（Physical Optics, PO）和物理绕射理论（Physical Theory of Diffraction, PTD）等，这类方法的优点是在解决较高频段的电磁问题时耗费的计算资源少并且计算速度快，但由于其需要目标的电尺寸满足高频近似，认为目标上的非照射区域无感应电流，在处理结构间的多次反射和复杂介质散射存在精度和效率方面的问题，因此在复杂目标的计算领域应用仍然很有限；低频方法则是指通过求解频域麦克斯韦方程的IE形式或PDE形式的一类数值方法，其中具有代表性并且得到了广泛应用的有：频域有

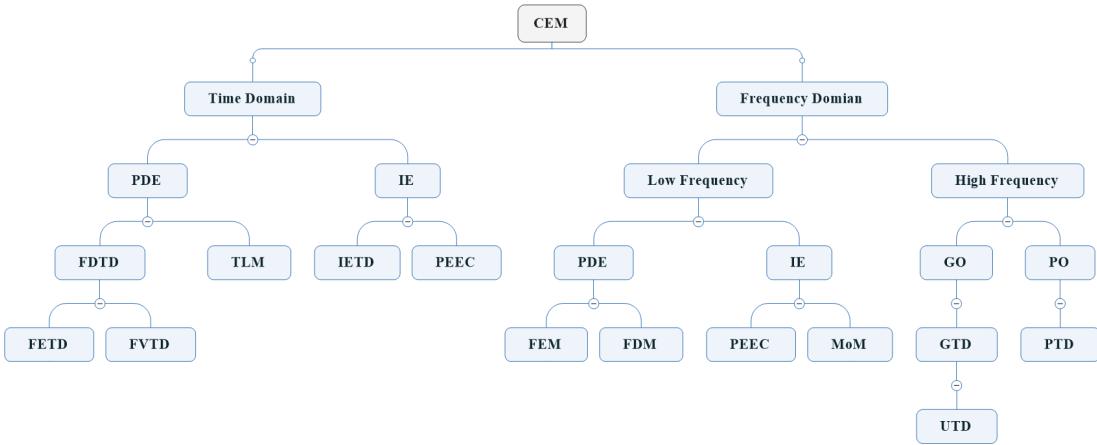


图 1.1 计算电磁学方法分类

限元 (Finite Element Frequency Domain, FEFD)^[1,2] 法、矩量法 (Method of Moment, MoM)^[3] 和快速算法等。作为频域方法, FEFD 具有灵活的建模能力, 适合用于求解几何模型较为复杂的电磁问题, 但它的缺点是需要构建人工截断边界条件; MoM 作为一种积分方法, 具有较高精度的计算结果, 并且由于它满足 Sommerfeld 辐射边界条件, 被广泛应用于求解辐射和散射问题。但由于受到 Green 函数的限制, 需要求解复杂的稠密矩阵, 尤其是在三维问题中矩阵规模会非常大。

另一方面, 时域方法则是通过求解时域麦克斯韦方程的 IE 形式或 PDE 形式的一类数值方法, 主要包括时域有限差分 (Finite Difference Time Domain, FDTD)^[4,5] 法和时域有限元 (Finite Element Time Domain, FETD)^[1,2,6,7] 法等。作为时域方法, FDTD 最早是在 1966 年由 Yee 在文献 [8] 中提出, 经过 50 多年的发展后已经成为了一项成熟的技术并且被广泛应用于商业软件中。传统的 FDTD 方法对 Maxwell 方程在时间上采用有限差分的格式, 在空间上采用 Yee 网格进行离散化。FDTD 具有计算效率高, 没有伪解和内存消耗低等优点, 但由于该方法采用的是六面体网格, 因此对一些复杂的几何模型难以进行精确地建模, 而且计算结果也存在较大的色散误差; 为了解决 FDTD 在建模能力上的不足, 一些学者从计算结构力学和计算流体力学中引入采用非结构化网格的 FETD 到 CEM 领域中, 弥补了 Yee 网格不能共形于媒质曲面的问题, 并且还能具有高阶的数值精度。但其缺点是系统矩阵的规模较大, 在大规模的电磁问题求解中能力仍很有限。

由于时域方法具有可以分析超宽带特性的瞬态电磁场问题, 能够形象地描绘电磁波的传播过程, 以及支持非线性模型的建立等众多优点, 并且随着近年来科技的发展, 人们对多物理场耦合问题的关注度越来越高, 时域方法也在其间扮演着重要的角色。因此, 人们迫切地希望能发展出一种新的方法, 使其既可以使用多种网格剖分技术来精确地建模几何模型, 同时还保证具有较高的计算精度和能够易于使用当

下的高性能计算平台，以解决较为复杂的电磁仿真问题。此时，一种结合了时域有限体积（Finite Volume Time Domain, FVTD）和时域有限元（FETD）的新方法——时域间断伽辽金（Discontinuous Galerkin Time Domain, DGTD）方法开始被人们所关注，该方法即保留了 FVTD 易于并行的特点，同时还拥有 FETD 高计算精度的优势。DGTD 方法的思想是将未知量利用空间插值基函数在网格单元上展开，要求 Maxwell 方程在弱形式下成立，通过伽辽金测试方法建立线性方程组，并通过数值流（Numerical Flux）建立单元之间的联系。DGTD 方法具有众多优点：可以使用混合网格技术很好地支持复杂模型的建立；利用任意高阶的插值空间基函数可以获得具有高阶收敛精度的计算结果；得益于数值流的引入，自适应网格剖分（ h -adaptivity）和自适应空间插值（ p -adaptivity）过程相比 FEM 更容易实现，并且通过显式的时间步进方案使其具有高度的并行能力。

虽然 DGTD 方法在近几年得到了较为快速的发展，但就目前已公开发表的文献来看大多数都是基于 Maxwell 方程的时域间断伽辽金（Discontinuous Galerkin Time Domain based on Maxwell Equation, DGTD-ME）方法，需要同时计算电场 **E** 和磁场 **H** 两个未知量。因此对于某些特定问题，如目标的散射计算问题只需要关注电场或者磁场其中一个未知量，会造成计算资源的浪费。另一方面，由于数值流的引入会在单元与单元之间的交界面产生冗余的未知量，这样也给计算资源带来了不小的负担。因此，为了弥补 DGTD-ME 方法带来的计算机内存消耗大的缺点，基于波动方程的时域间断伽辽金（Discontinuous Galerkin Time Domain based on Wave Equation, DGTD-WE）方法开始被一些学者所报道，但从目前的发展情况来看，DGTD-WE 方法还存在许多有待完善的地方。

1.2 国内外现状

DGTD 方法思想的出现最早可追溯到 1973 年，W. H. Reed 和 T. R. Hill 在文献 [9] 中提出了 DGTD 方法用于求解中子运输方程并通过数值算例初步验证了该方法的准确性和稳定性。1998 年人们首次将 DGTD 方法引入到 CEM 领域用于分析瞬态电磁场问题^[10]，2002 年 J. S. Hesthaven 和 T. Warburton 在文献 [11] 中建立了基于四面体网格的节点型间断伽辽金方法，之后他们又在文献 [12] 中详细地阐述了一维、二维和三维的 DGTD 方法，并在理论和数值结果上验证该方法的稳定性和高阶精度特性。至此，DGTD-ME 方法的理论框架已经基本确定。随着近几年并行技术的发展，由于 DGTD-ME 方法高度并行的特点吸引了众多的学者投入研究，得到了快速的发展和应用，我们大致可以从数值流、媒质模型、边界条件和计算性能四个方面来总结 DGTD-ME 方法在 CEM 领域中的研究进展。

在数值流方面，X. L. Li 和 J. M. Jin 等人在文献 [13] 中分别比较了单元级双场域

分解 (DFDD-ELD) 方法、使用迎风流的 DGTD-ME (DGTD-ME-Upwind) 方法和使用中心流的 DGTD-ME (DGTD-ME-Central) 方法的计算效率和精度。J. Alvarez 和 L. D. Angulo 等人在文献 [14, 15] 中分析了在 DGTD-ME 方法中使用不同数值流对系统的数值耗散、寄生解和矩阵本征值的影响，数值结果表明使用惩罚流可以有效地减小数值耗散。

在媒质模型方面，T. Lu 和 P. Zhang 等人在 2004 年的时候提出了 DGTD-ME 框架下的色散媒质建模方法，并将单轴完美匹配层 (Unaxial Perfectly Matched Layer, UPML) 边界条件加入到了 DGTD-ME 方法中^[16]。之后，D. Gedney 和 J. C. Young 等人提出用辅助微分方程 (Auxiliary Differential Equation, ADE) 方法表示媒质的本构关系，并成功建模了 Drude 材料以及多极 Debye 和 Lorentz 材料^[17]。

在边界条件方面，S. Abarbanel 等人在 2002 年的时候分析了 UPML 的后时不稳定性，并提出通过消除简并性来改善 UPML 的后时稳定性^[18]。N. C. Miller 和 A. D. Baczewski 等人在文献 [19] 中提出了 DGTD-ME 框架下的基于场变换的周期性边界条件，并成功建模了周期性电磁结构。为了提高周期结构仿真中吸收边界的性能，K. Sirenko 和 Y. Sirenko 等人在文献 [20] 中引入了精确吸收边界条件。C. -P. Chang 和 G. Chen 等人在文献 [21] 中提出了基于 DGTD-ME 框架下的精确波端口边界条件 (Waveport Boundary Condition, WPBC) 建模，通过用辅助方程方法代替直接求卷积提高了 WPBC 的计算效率。G. Chen 和 L. Zhao 等人在文献 [22] 中提出了一种建模非均匀波导的波端口边界条件和 S 参数提取的通用方案。

在计算性能方面，S. Dosopoulos 等人在文献 [23] 中提出了 DGTD-ME 框架下的基于蛙跳法的局部时间步进方法。J. F. Chen 等人在文献 [24, 25] 中提出了 DGTD-ME 框架下的显隐式混合时间步策略，大幅度地提高了多尺度电磁仿真问题的计算效率。M. Liu 和 K. Sirenko 等人在文献 [26] 中对传统的预测-校正时间积分算法进行了改进，时间步大小得到了显著增大。R. Diehl 和 K. Busch 等人在文献 [27] 中分析了几种低存储龙格库塔方法时间步方案，通过将部分迎风流和适当选择的低存储 RK 方案结合可以实现 60% 左右的加速。另一方面，通过使用 MPI 和 GPU 并行计算技术，DGTD-ME 方法的计算效率得到了大幅度的提升^[28-31]。

尽管 DGTD-ME 方法在近几年取得了较快的发展，但对于 DGTD-WE 方法的研究还相对较少。2007 年 M. J. Grote 和 A. Schneebeli 等人在文献 [32] 中首次将间断伽辽金方法应用到时域波动方程中并在理论上分析了稳定性和误差。C. Tian 和 Y. Shi 等人在文献 [33] 中提出了基于矢量波动方程的内罚时域间断伽辽金 (Interior Penalty Discontinuous Galerkin Time-Domain Method Based on Wave Equation, DGTD-WE) 方法用于求解三维电磁仿真问题，并分析了 DGTD-WE 方法的稳定性，通过数值实验表明了 DGTD-WE 方法比 DGTD-ME 方法在计算时间和内存消耗方面更有优势。随

后，他们又在文献 [34] 中提出了通过使用 DGTD-WE 方法求解电场，而磁场则借助与电场有关的弱形式辅助方程获得，建立了一种改进的 DGTD-WE 方法。P. Wang 和 Y. Shi 等人在文献 [35] 中将一般阻抗传输边界条件加入到了 DGTD-WE 方法中，并成功建模了石墨烯器件。可以看出，虽然 DGTD-WE 方法在最近几年获得了一些发展，但其功能的丰富性相比 DGTD-ME 方法仍有很多不足之处。

1.3 本论文主要研究内容及工作安排

本论文的主要目标是建立基于波动方程的节点型时域间断伽辽金 (Nodal Discontinuous Galerkin Time Domain based on Wave Euqation, NDGTD-WE) 方法，在此框架下发展不同应用场景的电磁场求解技术，并且结合高性能计算平台进一步增强该方法的求解能力。为此我们对后续章节作如下安排：

在第二章中，我们将介绍 NDGTD-WE 方法的基本原理。首先从矢量波动方程出发，将未知量使用节点型基函数在单元网格中展开，随后引入内罚流并发展在该数值流下的常用边界条件，接着通过伽辽金测试过程得到 NDGTD-WE 方法的半离散形式和矩阵元素表达式，进一步使用中心差分时间离散策略得到该方法的全离散形式，最后给出时间步的稳定性条件。

在第三章中，我们将给出上一章中矩阵元素表达式的具体计算方法，并提出一种 NDGTD-WE 方法的低存储策略。首先在局部坐标系下定义一个参考四面体单元，然后在该单元中生成具有良好行为的插值点和推导节点型基函数的表达式，接着通过坐标映射函数将实际单元与参考单元建立联系，进而使得在实际单元中的矩阵元素可以映射回参考单元中进行计算。因此，我们可以在每个实际单元中仅存储少量和映射有关的系数，然后在每个时间步进中再进行矩阵的还原，这样能够大幅地降低 NDGTD-WE 方法的内存消耗。最后，通过数值算例验证了该方法正确性，并且对比了低存储和非低存储的 NDGTD-WE 方法在内存消耗和计算时间上的差异。

在第四章中，为了扩展 NDGTD-WE 方法的应用范围，我们将精确波端口边界条件引入到该方法中。首先将波端口截面的电场使用模式场函数展开，然后通过模式匹配推导出在频域下的波端口边界条件，接着使用拉普拉斯逆变换将频域算子转换到时域中得到时域波端口边界条件，并且通过辅助方程方法代替时域波端口边界条件中的卷积计算过程，最后通过数值算例验证所提出方法的正确性。

在第五章中，为了增强 NDGTD-WE 方法对于大规模复杂电磁问题的求解能力，我们将 GPU 硬件加速技术引入到低存储 NDGTD-WE 方法中。首先通过分析 GPU 的硬件特性和 CUDA 并行计算架构，然后制定了低存储 NDGTD-WE 方法在 GPU 端的矩阵还原策略和矩阵向量乘方案，最后通过数值算例对基于 GPU 加速技术的低存储 NDGTD-WE 方法和非低存储 NDGTD-WE 方法进行了对比分析，结果显示前者相较

于后者在计算时间和内存消耗上都得到了大幅的性能提升。

在第六章中，我们将给出全文的总结和对下一阶段工作的展望。

第二章 NDGTD-WE 方法的基本原理

2.1 引言

随着科学技术的发展，我们所面临的电磁环境变得越来越复杂，如何精确和高效地求解电磁场问题一直是 CEM 领域面临的挑战。近年来，DGTD 方法作为一种新的时域算法，具有能够灵活地建模复杂模型和高阶计算收敛精度等优点，为当前在电磁仿真上面临的困境提供了一个新的解决思路。

目前在 CEM 领域中大多数和 DGTD 方法相关的文献都是基于 Maxwell 方程的 DGTD-ME 方法，需要同时求解电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 两个未知量。然而在分析某些特定的问题中，人们仅对电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 其中的一个未知量感兴趣，或者某些关键参数只需要通过其中一个未知量推算得到，如微波电路中的 S 参数等。因此基于 Maxwell 方程的 DGTD-ME 方法在处理这类问题的时候会造成一定程度上的计算资源浪费。为了缓解这种状况，C. Tian 和 Y. Shi 等人在文献 [33] 中提出了基于波动方程的时域间断伽辽金（DGTD-WE）方法，并通过数值实验表明了 DGTD-WE 方法在计算时间和内存消耗方面要优于 DGTD-ME 方法。该文献中所提出的 DGTD-WE 方法原理是从矢量波动方程出发，将主工作变量在四面体单元中使用叠层矢量基函数展开，然后通过引入内罚数值通量使得单元和单元之间得以互相解耦，最后经过伽辽金测试过程而获得单元下的矩阵方程。为了和接下来将要提出的方法加以区别，我们将使用叠层矢量基函数建立的 DGTD-WE 方法称之为 VDGTD-WE 方法。

在本章中，我们将介绍一种基于节点型基函数的 DGTD-WE 方法，将其称之为 NDGTD-WE 方法。和文献 [33] 中 VDGTD-WE 方法的不同之处在于基函数的选择上，这么做的原因是使用节点型基函数比叠层矢量型基函数更容易建立起局部坐标与实际坐标之间的联系。换句话说，可以更加容易将定义在实际体单元上的矩阵通过坐标映射到参考单元上，因此在一个单元内只需要存储少量和映射相关的系数而不再需要存储矩阵，能够大幅度地减少计算机内存的使用。我们在第三章中将详细介绍这种映射关系，在本章中主要介绍 NDGTD-WE 方法的基本原理。

2.2 NDGTD-WE 的主方程

在开始介绍 NDGTD-WE 方法之前，我们先假设有一个被边界条件所包围的计算区域 Ω ，这些边界条件可以是理想电导体边界 Γ_{PEC} 、理想磁导体边界 Γ_{PMC} 和一阶吸收边界 Γ_{ABC} 等。利用有限元方法的思想，将计算区域 Ω 划分为 N_e 个互相独立的子单元，并认为在每个单元中的介电常数 ϵ 和磁导率 μ 均为常数。需要注意的是，这

里的子单元我们并未指定它的形状类型，通常它可以是四面体、六面体或者三棱柱等。不失一般性，我们以电场 \mathbf{E} 作为主工作变量，因此在计算区域应满足如下的电场波动方程

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t}, \quad (2-1)$$

其中 \mathbf{J}_s 表示电流密度。为了便于公式推导，我们通过借助一个辅助变量 \mathbf{q} 将方程(2-1)写成如下的形式

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{q} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t}, \quad (2-2a)$$

$$\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{E}. \quad (2-2b)$$

在子单元 Ω_k 内，将电场 \mathbf{E} 使用节点型空间基函数展开为

$$\mathbf{E}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} \begin{Bmatrix} E_{xi}^k \\ E_{yi}^k \\ E_{zi}^k \end{Bmatrix} l_i(\mathbf{x}), \quad (2-3)$$

其中 $l_i(\mathbf{x})$ 表示定义在插值点 \mathbf{x}_i 上的 Lagrange 插值多项式， $E_{xi}^k, E_{yi}^k, E_{zi}^k$ 分别表示 E_x^k, E_y^k, E_z^k 分量在插值点 \mathbf{x}_i 上的值， N_p 表示在单元内的插值点个数。由于(2-2)式是两个矢量方程，为了便于伽辽金测试过程的进行，将(2-3)式中的标量基函数写成如下矢量形式

$$\begin{aligned} \Phi_i^x(\mathbf{x}) &= \{l_i(\mathbf{x}), 0, 0\}^T, \\ \Phi_i^y(\mathbf{x}) &= \{0, l_i(\mathbf{x}), 0\}^T, \\ \Phi_i^z(\mathbf{x}) &= \{0, 0, l_i(\mathbf{x})\}^T. \end{aligned} \quad (2-4)$$

此时，可以将(2-3)式改写为

$$\mathbf{E}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} E_{xi}^k \Phi_i^x(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_p} E_{yi}^k \Phi_i^y(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_p} E_{zi}^k \Phi_i^z(\mathbf{x}). \quad (2-5)$$

注意到由于(2-5)式中的电场 \mathbf{E}^k 被展开成了三项叠加的形式，因此在对(2-2)式做伽辽金测试的过程中，需要分别以 $\Phi_i^x, \Phi_i^y, \Phi_i^z$ 作为测试基函数对其进行三次伽辽金测试。

不失一般性，以 Φ_i^x 为例可以得到

$$\int_{\Omega} \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{q} \cdot \Phi_i^x dV + \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \Phi_i^x dV = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} \cdot \Phi_i^x dV, \quad (2-6a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \Phi_i^x dV = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \Phi_i^x dV. \quad (2-6b)$$

通过利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (2-7)$$

和高斯定理

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} dS, \quad (2-8)$$

可将(2-6)式写成

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} \cdot \Phi_i^x dV &= \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \Phi_i^x dV + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{q} \cdot \nabla \times \Phi_i^x dV \\ &\quad + \sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial\Omega_k} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{q} \right) \cdot \Phi_i^x dS, \end{aligned} \quad (2-9a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \Phi_i^x dV = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \Phi_i^x dV + \sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial\Omega_k} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \cdot \Phi_i^x dS. \quad (2-9b)$$

其中 Ω_k 表示计算区域 Ω 中的第 k 个单元。注意到上式由于使用了高斯定理，所以产生了两项对于子单元 Ω_k 边界上的面积分

$$\sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial\Omega_k} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{q} \right) \cdot \Phi_i^x dS, \quad (2-10)$$

和

$$\sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial\Omega_k} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \cdot \Phi_i^x dS. \quad (2-11)$$

通过观察不难发现这两项面积分在同一个面上被计算了两次。以(2-10)式为例，即对于内交界面 $f = \partial\Omega_{k^-} \cap \partial\Omega_{k^+}$ 将会出现

$$\int_f \hat{\mathbf{n}}_{k^-} \times \left(\frac{1}{\mu_{k^-}} \mathbf{q}_{k^-} \right) \cdot \Phi_i^x dS, \quad (2-12)$$

和

$$\int_f \hat{\mathbf{n}}_{k^+} \times \left(\frac{1}{\mu_{k^+}} \mathbf{q}_{k^+} \right) \cdot \Phi_i^x dS, \quad (2-13)$$

这里的上标 “-” 和 “+” 表示与面 f 相接的左右相邻面。我们注意到在 (2-12)式和(2-13)式中使用了自身单元与相邻单元内的值，为了保证解的唯一性和电磁场的连续性，需要在交界面上引入数值流来修正这两项积分。因此，我们可以将(2-9)式改写为

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} \cdot \Phi_i^x dV &= \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \Phi_i^x dV + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \mathbf{q} \cdot \nabla \times \Phi_i^x dV \\ &\quad + \sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial\Omega_k} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{q} \right)^* \cdot \Phi_i^x dS, \end{aligned} \quad (2-14a)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \Phi_i^x dV = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \Phi_i^x dV + \sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial\Omega_k} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^* \cdot \Phi_i^x dS. \quad (2-14b)$$

其中上标“*”表示数值流，它的具体形式我们将在下一节中讨论。为了得到辅助变量 \mathbf{q} 的支配方程，我们对(2-14b)式再次使用矢量恒等式变换，有

$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \Phi_i^x dV = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \Phi_i^x dV + \sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial \Omega_k} (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^* - \mathbf{E})) \cdot \Phi_i^x dS. \quad (2-15)$$

值得注意的是，如果我们对(2-14a)式作时间 t 的积分，并引入适当的数值流，就可以得到基于 Maxwell 方程的节点型时域间断伽辽金方法中的电场方程。

为了消除(2-14a)式中的辅助变量 \mathbf{q} ，将包含面积分的项写成

$$\sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial \Omega_k} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dS, \quad (2-16)$$

这里的 \mathbf{v} 表示测试函数， \mathbf{u} 表示数值流。如果积分面在计算区域的边界上，那么上式将退化为

$$\sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial \Omega_k \cap \Gamma_b} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dS = \int_{\Gamma_b} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (2-17)$$

这里的 Γ_b 表示所有边界的总称，即 $\Gamma_b = \Gamma_{ABC} \cup \Gamma_{PEC} \cup \Gamma_{PMC}$ 。

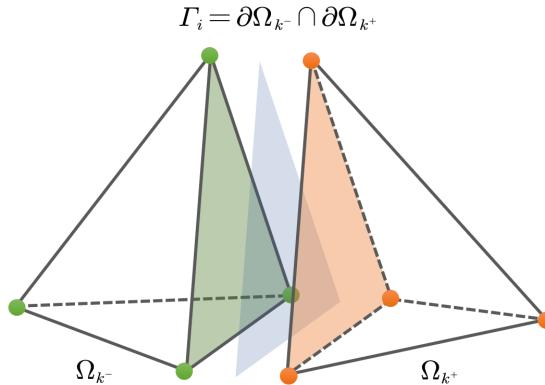


图 2.1 简化的典型计算区域

考虑到更一般的情况，如果积分面在计算区域的内边界 Γ_i 上，如图2.1所示，式(2-16)将变成如下形式

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial \Omega_k \cap \Gamma_i} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{\partial \Omega_{k-}} (\hat{\mathbf{n}}_{k-} \times \mathbf{u}_{k-}) \cdot \mathbf{v}_{k-} dS + \int_{\partial \Omega_{k+}} (\hat{\mathbf{n}}_{k+} \times \mathbf{u}_{k+}) \cdot \mathbf{v}_{k+} dS \\ &= - \int_{\Gamma_i} \{\mathbf{u}\} \cdot [\![\mathbf{v}]\!]_T dS + \int_{\Gamma_i} [\![\mathbf{u}]\!]_T \cdot \{\mathbf{v}\} dS. \end{aligned} \quad (2-18)$$

在上式中我们定义了两个新的操作符，即切向跳跃操作符 $[\![\cdot]\!]_T$ 和平均操作符 $\{\cdot\}$ ，分别表示为

$$\begin{cases} [\![\mathbf{u}]\!]_T = \hat{\mathbf{n}}^- \times \mathbf{u}^- + \hat{\mathbf{n}}^+ \times \mathbf{u}^+ & f \subset \Gamma_i \\ [\![\mathbf{u}]\!]_T = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} & f \subset \Gamma_b \end{cases}, \quad (2-19)$$

和

$$\begin{cases} \{\mathbf{u}\} = \frac{\mathbf{u}^- + \mathbf{u}^+}{2} & f \subset \Gamma_i \\ \{\mathbf{u}\} = \mathbf{u} & f \subset \Gamma_b \end{cases}. \quad (2-20)$$

结合(2-17)和(2-18)式，可以将(2-16)式表示为更一般的形式

$$\sum_{\Omega_k \in \Omega} \int_{\partial\Omega_k} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dS = - \int_{\Gamma_i} \{\mathbf{u}\} \cdot [\mathbf{v}]_T dS + \int_{\Gamma_i} [\mathbf{u}]_T \cdot \{\mathbf{v}\} dS + \int_{\Gamma_b} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (2-21)$$

接下来，把(2-21)式代入到(2-15)式中，可以得到

$$\int_{\Omega} [\nabla \times \mathbf{E} - \mathcal{L}(\{\mathbf{E}^* - \mathbf{E}\}) + \mathcal{R}([\mathbf{E}^* - \mathbf{E}]_T)] \cdot \Phi_i^x dV = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \Phi_i^x dV, \quad (2-22)$$

上式中的 \mathcal{R} 和 \mathcal{L} 算子的定义如下

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}(\mathbf{u}) \cdot \Phi_i^x dV = \int_{\Gamma_b \cup \Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \{\Phi_i^x\} dS, \quad (2-23a)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{u}) \cdot \Phi_i^x dV = \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot [\Phi_i^x]_T dS. \quad (2-23b)$$

由(2-22)式可以写出关于辅助方程 \mathbf{q} 的表达式

$$\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{E} - \mathcal{L}(\{\mathbf{E}^* - \mathbf{E}\}) + \mathcal{R}([\mathbf{E}^* - \mathbf{E}]_T). \quad (2-24)$$

最后将(2-23)式和(2-24)式代入(2-14a)式中，即可得到对于测试基函数 Φ_i^x 的基于波动方程的不连续伽辽金方法的主方程

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \Phi_i^x dV + \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \Phi_i^x dV \\ & - \int_{\Gamma_i} \{\mathbf{E}^* - \mathbf{E}\} \cdot [\mu^{-1} \nabla \times \Phi_i^x]_T dS + \int_{\Gamma_i} [\mathbf{E}^* - \mathbf{E}]_T \cdot \{\mu^{-1} \nabla \times \Phi_i^x\} dS \\ & - \int_{\Gamma_i} \{(\mu^{-1} \mathbf{q})^*\} \cdot [\Phi_i^x]_T dS + \int_{\Gamma_i} [(\mu^{-1} \mathbf{q})^*]_T \cdot \{\Phi_i^x\} dS \\ & + \int_{\Gamma_b} \mathbf{n} \times (\mu^{-1} \mathbf{q})^* \cdot \Phi_i^x dS + \int_{\Gamma_b} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^* - \mathbf{E}) \cdot \nabla \times \Phi_i^x dS \\ & = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} \cdot \Phi_i^x dV. \end{aligned} \quad (2-25)$$

同样地，我们再分别以 Φ_i^y 和 Φ_i^z 作为测试基函数进行和上述相同的伽辽金测试过程，可得到另外的两个式子。由于只需要在(2-25)式中将 Φ_i^x 替换成 Φ_i^y 和 Φ_i^z 即可，因此在这里不再展开。

2.3 数值流和边界条件

在上一节中我们虽然推导出了 NDGTD-WE 方法的主方程，但是还未给出具体数值流的形式，在本节中，我们将讨论基于 NDGTD-WE 方法的数值流选取和一些常用的边界条件。

2.3.1 内罚数值流

一般来说，数值流的选择直接影响着 DGTD 系统的稳定性，在文献中 [36] 作者给出了几种可用的数值流方案。在本文中，我们选用内罚流^[32,37]来建立相邻单元之间的联系，并在内罚流的基础上发展一些常用的边界条件。

在内边界面 Γ_i 上，内罚流的具体形式可以表示为

$$\mathbf{E}^* = \{\mathbf{E}\}, (\mu^{-1}\mathbf{q})^* = \{\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}\} - \tau_f [\mathbf{E}]_T, \quad (2-26)$$

其中 τ_f 为内边界面 Γ_i 上的内罚参数，值得注意的是，它的取值影响着整个求解系统的稳定性，在文献 [33] 中作者给出了它的计算方法，具体为

$$\tau_f = \alpha \mu_f^{-1} h_f^{-1}. \quad (2-27)$$

其中磁导率 μ_f 的取值为

$$\mu_f = \begin{cases} \min\{\mu_{f^-}, \mu_{f^+}\} & f \in \Gamma_i \\ \mu_f & f \in \Gamma_b. \end{cases}. \quad (2-28)$$

并且 h_f 表示四面体单元的内切球直径，其取值为

$$h_f = \begin{cases} \min\{h_{f^-}, h_{f^+}\} & f \in \Gamma_i \\ h_f & f \in \Gamma_b \end{cases}, \quad (2-29)$$

另外，在(2-27)式中的 α 是一个正常数，它与四面体单元的尺寸无关，但具有最小值 α_{min} 并且该最小值与基函数的阶数有关。如果 α 的取值小于 α_{min} ，那么 NDGTD-WE 系统的稳定性将会受到影响。因此需要适当选取 α_{min} 的取值来保证 NDGTD-WE 系统的稳定性，一般可以根据如下的经验公式计算得到

$$\alpha_{min} = 10N(N + 1), \quad (2-30)$$

其中 N 为基函数的阶数。

2.3.2 常用边界条件

对于 PEC 边界条件，电场在边界面上满足切向分量为 0，即

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (2-31)$$

将上式代入到(2-26)式中，可以得到内罚流对应的 PEC 边界条件

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^* = \mathbf{0}, (\mu^{-1}\mathbf{q})^* = \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E} - \tau_f \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}. \quad (2-32)$$

对于 PMC 边界条件，磁场的切向分量为 0，对应的电场满足

$$\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (2-33)$$

同样地将其代入到(2-26)式中，并注意到 $\mu^{-1}\mathbf{q} = -\partial\mathbf{H}/\partial t$ ，即可得到内罚流对应的 PMC 边界条件

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}, \hat{\mathbf{n}} \times (\mu^{-1}\mathbf{q})^* = \mathbf{0}. \quad (2-34)$$

对于一阶 ABC 边界条件，认为入射到 ABC 边界面的电磁波均为平面波，有

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + Y_s \hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}, \quad (2-35)$$

上式中的 Y_s 表示 ABC 边界所在单元的波导纳，即 $Y_s = \sqrt{\varepsilon/\mu}$ 。相应地，内罚流对应的 ABC 边界为

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}, \hat{\mathbf{n}} \times \mu^{-1}\mathbf{q}^* = -Y_s \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2-36)$$

2.3.3 总场/散射场源

在实际问题的电磁仿真中，除了上述提到的边界条件之外，通常还需要施加相应的电磁波源。总场/散射场（Total Field/Scattered Field, TF/SF）作为一种被广泛使用的电磁波源，可以有效地模拟平面波的传播。

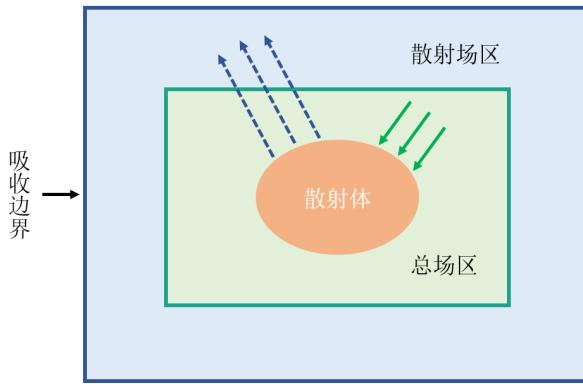


图 2.2 总场/散射场示意图

TF/SF 源的原理是将计算区域通过 TF/SF 边界划分为总场区和散射场区，总场区的场由入射场和反射场叠加而成，而散射场区通过在 TF/SF 边界减去入射场，所以只存在反射场，如图2.2所示。因此，在 TF/SF 边界面上有

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]|_{\Gamma_{TF/SF}} &= \hat{\mathbf{n}}_{TF} \times \mathbf{E}_{TF} + \hat{\mathbf{n}}_{SF} \times \mathbf{E}_{SF} \pm \hat{\mathbf{n}}_{TF} \times \mathbf{E}_{inc}, \\ \{\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}\}|_{\Gamma_{TF/SF}} &= \frac{1}{2} (\mu_{TF}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{TF} + \mu_{SF}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{SF}) \pm \frac{1}{2} \mu_{TF/SF}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_{inc}. \end{aligned} \quad (2-37)$$

其中，下标 TF 表示单元处于总场区，此时最后一项的符号取“+”；下标 SF 表示单元处于散射场区，最后一项的符号取“-”。另外，还可以用 $-\partial\mathbf{H}_{inc}/\partial t$ 来代替 $\nabla \times \mathbf{E}_{inc}$ 的计算。

2.4 完全离散形式

为了能够便于计算机进行求解，在这一节中我们将结合前面两节的内容推导出包含内罚流和一些常用边界条件的 NDGTD-WE 方程，然后对其进行空间和时间离散化，最终得到单元下的矩阵方程。

2.4.1 空间离散化

将在上一节中得到的内罚流表达式(2-26)和对应的 PEC 边界条件(2-32)、PMC 边界条件(2-32)和 ABC 边界条件(2-36)代入到 NDGTD-WE 的主方程(2-25)中，可以得到

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \Phi_i^x dV + \int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \Phi_i^x dV - \int_{\Gamma_i} [\mathbf{E}]_T \cdot \{\mu^{-1} \nabla \times \Phi_i^x\} dS \\
 & - \int_{\Gamma_i} \{\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}\} \cdot [\Phi_i^x]_T dS + \int_{\Gamma_i} \tau_f [\mathbf{E}]_T \cdot [\Phi_i^x]_T dS \\
 & + \int_{\Gamma_{PEC}} \hat{\mathbf{n}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \Phi_i^x) \cdot \mathbf{E} dS + \int_{\Gamma_{PEC}} \hat{\mathbf{n}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \Phi_i^x dS \\
 & + \int_{\Gamma_{PEC}} \tau_f \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \cdot \Phi_i^x dS - \int_{\Gamma_{ABC}} Y_s \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \Phi_i^x dS \\
 & = - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} \cdot \Phi_i^x dV. \tag{2-38}
 \end{aligned}$$

由于上式是建立在整个计算区域 Ω 上的，为了得到在子单元 Ω_k 下的方程，将单元中的电场 \mathbf{E}_k 作基函数展开并代入到上式中，从而可以得到 NDGTD-WE 方程的半离散形式

$$\begin{aligned}
 & [M_v^k] \frac{\partial^2 \mathbf{e}_x^k}{\partial t^2} + ([S_{zz}^k] \mathbf{e}_x^k - [S_{zx}^k] \mathbf{e}_z^k - [S_{yx}^k] \mathbf{e}_y^k + [S_{yy}^k] \mathbf{e}_x^k) \\
 & + \left([n_{zz} A^k] \frac{\partial \mathbf{e}_x^k}{\partial t} - [n_{xz} A^k] \frac{\partial \mathbf{e}_z^k}{\partial t} - [n_{xy} A^k] \frac{\partial \mathbf{e}_y^k}{\partial t} + [n_{yy} A^k] \frac{\partial \mathbf{e}_x^k}{\partial t} \right) \\
 & - ([n_z S_z^k] \mathbf{e}_x^k - [n_x S_z^k] \mathbf{e}_z^k - [n_x S_y^k] \mathbf{e}_y^k + [n_y S_y^k] \mathbf{e}_x^k) \\
 & + \sum_f \left([n_z S_{z,f}^k] \mathbf{e}_{x,f}^k - [n_x S_{z,f}^k] \mathbf{e}_{z,f}^k - [n_x S_{y,f}^k] \mathbf{e}_{y,f}^k + [n_y S_{y,f}^k] \mathbf{e}_{x,f}^k \right) \\
 & - ([n_z R_z^k] \mathbf{e}_x^k - [n_z R_x^k] \mathbf{e}_z^k - [n_y R_x^k] \mathbf{e}_y^k + [n_y R_y^k] \mathbf{e}_x^k) \\
 & - \sum_f \left([n_z R_{z,f}^k] \mathbf{e}_{x,f}^k - [n_z R_{x,f}^k] \mathbf{e}_{z,f}^k - [n_y R_{x,f}^k] \mathbf{e}_{y,f}^k + [n_y R_{y,f}^k] \mathbf{e}_{x,f}^k \right) \\
 & + ([n_{zz} M_s^k] \mathbf{e}_x^k - [n_{xz} M_s^k] \mathbf{e}_z^k - [n_{xy} M_s^k] \mathbf{e}_y^k + [n_{yy} M_s^k] \mathbf{e}_x^k) \\
 & - \sum_f \left([n_{zz} M_{s,f}^k] \mathbf{e}_{x,f}^k - [n_{xz} M_{s,f}^k] \mathbf{e}_{z,f}^k - [n_{xy} M_{s,f}^k] \mathbf{e}_{y,f}^k + [n_{yy} M_{s,f}^k] \mathbf{e}_{x,f}^k \right) \\
 & = - \frac{\partial \mathbf{j}_x^k}{\partial t}, \tag{2-39}
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{e}_x^k, \mathbf{e}_y^k, \mathbf{e}_z^k$ 分别表示电场的 x, y, z 分量在单元 Ω_k 的节点上的值所组成的列向量，即

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x^k &= \left\{ E_{x1}^k, E_{x2}^k, \dots, E_{xN_p}^k \right\}^T, \\ \mathbf{e}_y^k &= \left\{ E_{y1}^k, E_{y2}^k, \dots, E_{yN_p}^k \right\}^T, \\ \mathbf{e}_z^k &= \left\{ E_{z1}^k, E_{z2}^k, \dots, E_{zN_p}^k \right\}^T.\end{aligned}\quad (2-40)$$

同样地， $\mathbf{e}_{x,f}^k, \mathbf{e}_{y,f}^k, \mathbf{e}_{z,f}^k$ 分别表示与自身单元面 f 相邻的单元 Ω_k^+ 中的 x, y, z 分量电场值所构成的列向量。另外，式(2-39)中的矩阵定义如下

$$M_v^k(i, j) = \varepsilon_k \int_{\Omega_k} l_i(\mathbf{x}) l_j(\mathbf{x}) dV, \quad (2-41a)$$

$$S_{pq}^k(i, j) = \mu_k^{-1} \int_{\Omega_k} \frac{\partial l_i(\mathbf{x})}{\partial p} \frac{\partial l_j(\mathbf{x})}{\partial q} dV, \quad (2-41b)$$

$$n_p R_q^k(i, j) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mu_k^{-1} n_p l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial l_j(\mathbf{x})}{\partial q} dS + \int_{\Gamma_b \cap \Gamma_{PEC}} \mu_k^{-1} n_p l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial l_j(\mathbf{x})}{\partial q} dS, \quad (2-41c)$$

$$n_p S_q^k(i, j) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mu_k^{-1} n_p \frac{\partial l_i(\mathbf{x})}{\partial q} l_j(\mathbf{x}) dS + \int_{\Gamma_b \cap \Gamma_{PEC}} \mu_k^{-1} n_p \frac{\partial l_i(\mathbf{x})}{\partial q} l_j(\mathbf{x}) dS, \quad (2-41d)$$

$$n_{pq} M_s^k(i, j) = \int_{\Gamma_i \cup \Gamma_{PEC}} \tau_f n_p n_q l_i(\mathbf{x}) l_j(\mathbf{x}) dS, \quad (2-41e)$$

$$n_p S_{q,f}^k(i, j) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mu_k^{-1} n_p \frac{\partial l_i(\mathbf{x})}{\partial q} l_{j,f}(\mathbf{x}) dS, \quad (2-41f)$$

$$n_p R_{q,f}^k(i, j) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mu_{k,f}^{-1} n_p l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial l_{j,f}(\mathbf{x})}{\partial q} dS, \quad (2-41g)$$

$$n_{pq} M_{s,f}^k(i, j) = \int_{\Gamma_i} \tau_f n_p n_q l_i(\mathbf{x}) l_{j,f}(\mathbf{x}) dS, \quad (2-41h)$$

$$n_p A^k(i, j) = \int_{\Gamma_b \cap \Gamma_{ABC}} Y_s n_p l_i(\mathbf{x}) l_j(\mathbf{x}) dS, \quad (2-41i)$$

$$\mathbf{j}_p^k(i) = \int_{\Omega_k} J_{s,p}^k(\mathbf{x}) l_i(\mathbf{x}) dV, \quad (2-41j)$$

其中用下标 p 和 q 表示(2-39)式中的 x, y, z ， $l_{i,f}(\mathbf{x})$ 表示定义在与自身单元面 f 相邻的单元中节点 \mathbf{x}_i 上的 Lagrange 空间基函数。

注意到上述所建立的矩阵方程仅是对于测试基函数 Φ_i^x 的，由于在一个方程中包含了 $\mathbf{e}_x^k, \mathbf{e}_y^k, \mathbf{e}_z^k$ 三个未知量，所以我们还无法进行求解。因此，对基函数 Φ_i^y 和 Φ_i^z 也作上述同样的过程，即可得到对应的另外两个矩阵方程，通过联立三个矩阵方程就可以得到最终可以求解的矩阵方程。由于篇幅有限，对 Φ_i^y 和 Φ_i^z 相关的两个方程不再展开，而是直接给出最终的矩阵方程

$$[M_k] \frac{\partial^2 \mathbf{e}_k}{\partial t^2} + [A_k] \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial t} + [F_k] \mathbf{e}_k + \sum_f [P_{k,f}] \mathbf{e}_{k,f} + \mathbf{e}_k^{inc} = 0, \quad (2-42)$$

其中

$$\mathbf{e}_k = \left\{ E_{x1}^k, \dots, E_{xN_p}^k, E_{y1}^k, \dots, E_{yN_p}^k, E_{z1}^k, \dots, E_{zN_p}^k \right\}^T, \quad (2-43)$$

$$\mathbf{e}_k^{inc} = \left\{ \partial j_{x1}^k / \partial t, \dots, \partial j_{xN_p}^k / \partial t, \partial j_{y1}^k / \partial t, \dots, \partial j_{yN_p}^k / \partial t, \partial j_{z1}^k / \partial t, \dots, \partial j_{zN_p}^k / \partial t \right\}^T.$$

并且

$$[M_k] = \begin{bmatrix} [M_v^k] & & \\ & [M_v^k] & \\ & & [M_v^k] \end{bmatrix}, \quad (2-44)$$

$$[A_k] = \begin{bmatrix} [n_{zz}A^k] + [n_{yy}A^k] & -[n_{xy}A^k] & -[n_{xz}A^k] \\ -[n_{yx}A^k] & [n_{xx}A^k] + [n_{zz}A^k] & -[n_{yz}A^k] \\ -[n_{zx}A^k] & -[n_{zy}A^k] & [n_{yy}A^k] + [n_{xx}A^k] \end{bmatrix}, \quad (2-45)$$

矩阵 $[F_k]$ 由 3×3 的矩阵块构成，每个矩阵块的具体形式为

$$[F_{11}^k] = [S_{zz}^k] + [S_{yy}^k] - [n_z S_z^k] - [n_y S_y^k] - [n_z R_z^k] - [n_y R_y^k] + [n_{zz} M_s^k] + [n_{yy} M_s^k], \quad (2-46a)$$

$$[F_{12}^k] = -[S_{yx}^k] + [n_x S_y^k] + [n_y R_x^k] - [n_{xy} M_s^k], \quad (2-46b)$$

$$[F_{13}^k] = -[S_{zx}^k] + [n_x S_z^k] + [n_z R_x^k] - [n_{xz} M_s^k], \quad (2-46c)$$

$$[F_{21}^k] = -[S_{xy}^k] + [n_y S_x^k] + [n_x R_y^k] - [n_{yx} M_s^k], \quad (2-46d)$$

$$[F_{22}^k] = [S_{xx}^k] + [S_{zz}^k] - [n_x S_x^k] - [n_z S_z^k] - [n_x R_x^k] - [n_z R_z^k] + [n_{xx} M_s^k] + [n_{zz} M_s^k], \quad (2-46e)$$

$$[F_{23}^k] = -[S_{zy}^k] + [n_y S_z^k] + [n_z R_y^k] - [n_{yz} M_s^k], \quad (2-46f)$$

$$[F_{31}^k] = -[S_{xz}^k] + [n_z S_x^k] + [n_x R_z^k] - [n_{zx} M_s^k], \quad (2-46g)$$

$$[F_{32}^k] = -[S_{yz}^k] + [n_z S_y^k] + [n_y R_z^k] - [n_{zy} M_s^k], \quad (2-46h)$$

$$[F_{33}^k] = [S_{yy}^k] + [S_{xx}^k] - [n_y S_y^k] - [n_x S_x^k] - [n_y R_y^k] - [n_x R_x^k] + [n_{yy} M_s^k] + [n_{xx} M_s^k]. \quad (2-46i)$$

同样地，对于矩阵 $[P_{k,f}]$ 有

$$[P_{11}^{k,f}] = [n_z S_{z,f}^k] + [n_y S_{y,f}^k] - [n_z R_{z,f}^k] - [n_y R_{y,f}^k] - [n_{zz} M_{s,f}^k] - [n_{yy} M_{s,f}^k], \quad (2-47a)$$

$$[P_{12}^{k,f}] = -[n_x S_{y,f}^k] + [n_y R_{x,f}^k] + [n_{xy} M_{s,f}^k], \quad (2-47b)$$

$$[P_{13}^{k,f}] = -[n_x S_{z,f}^k] + [n_z R_{x,f}^k] + [n_{xz} M_{s,f}^k], \quad (2-47c)$$

$$[P_{21}^{k,f}] = -[n_y S_{x,f}^k] + [n_x R_{y,f}^k] + [n_{yx} M_{s,f}^k], \quad (2-47d)$$

$$[P_{22}^{k,f}] = [n_x S_{x,f}^k] + [n_z S_{z,f}^k] - [n_x R_{x,f}^k] - [n_z R_{z,f}^k] - [n_{xx} M_{s,f}^k] - [n_{zz} M_{s,f}^k], \quad (2-47e)$$

$$\left[P_{23}^{k,f} \right] = - [n_y S_{z,f}^k] + [n_z R_{y,f}^k] + [n_{yz} M_{s,f}^k], \quad (2-47f)$$

$$\left[P_{31}^{k,f} \right] = - [n_z S_{x,f}^k] + [n_x R_{z,f}^k] + [n_{zx} M_{s,f}^k], \quad (2-47g)$$

$$\left[P_{32}^{k,f} \right] = - [n_z S_{y,f}^k] + [n_y R_{z,f}^k] + [n_{zy} M_{s,f}^k], \quad (2-47h)$$

$$\left[P_{33}^{k,f} \right] = [n_y S_{y,f}^k] + [n_x S_{x,f}^k] - [n_y R_{y,f}^k] - [n_x R_{x,f}^k] - [n_{yy} M_{s,f}^k] - [n_{xx} M_{s,f}^k]. \quad (2-47i)$$

至此，我们就完成了 NDGTD-WE 方法的空间离散化过程。

2.4.2 时间离散化

我们在上一节的最后得到了半离散形式的 NDGTD-WE 主方程(2-42)，为了便于使用计算机进行求解，还需要对半离散形式的方程选取适当的时间离散方案以得到全离散形式的 NDGTD-WE 方程。常用的二阶时间导数离散策略有中心差分法、显式龙格库塔法和 Newmark- β 法。在本文中我们采用中心差分方法来进行时间离散，该方法具有显式的时间步进和二阶计算精度。

在(2-42)式中应用中心差分方法，可以得到全离散形式

$$\begin{aligned} \left([M_k] + \frac{\Delta t}{2} [A_k] \right) \mathbf{e}_k^{n+1} &= (2 [M_k] - \Delta t^2 [F_k]) \mathbf{e}_k^n - \Delta t^2 \sum_f [P_{k,f}] \mathbf{e}_{k,f}^n \\ &\quad + \left(\frac{\Delta t}{2} [A_k] - [M_k] \right) \mathbf{e}_k^{n-1} - \Delta t^2 \mathbf{e}_k^{inc}. \end{aligned} \quad (2-48)$$

至此，我们得到了能够适用于计算机求解的 NDGTD-WE 方法的全离散形式，从上式可以看出得益于显式的时间步进方案，建立的求解系统也是完全显式的。由于单元与单元之间的方程相互独立，因此适合并行计算。

需要注意的是，由于我们采用中心差分的时间离散方案，因此必须满足 CFL 时间稳定性条件。通常而言， Δt 需要小于某一个 Δt_{max} 值，即

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{5\varepsilon\mu}}{7} \frac{h_{min}}{N(N+1)+1}, \quad (2-49)$$

上式中的 N 表示基函数阶数，并且仅在 $\alpha = \alpha_{min}$ 时成立。

2.5 本章小结

在本章中，我们从矢量波动方程出发，使用节点型空间基函数将电场在单元下展开，然后通过伽辽金测试过程得到了 NDGTD-WE 方法的主方程。之后我们使用内罚流作为该方法的数值流，并开发了相应的 PEC、PMC、ABC 边界条件和总场/散射场源。最后通过在空间和时间上的离散化得到了 NDGTD-WE 方法的全离散形式。

第三章 NDGTD-WE 方法的低存储策略

3.1 引言

在上一章中，我们从矢量波动方程出发推导了 NDGTD-WE 求解系统，通过在空间和时间上的离散化最后得到了单元下的矩阵方程。由于我们在每个单元中都需要储存和 NDGTD-WE 求解系统相关的各类矩阵，这样随之带来的一个缺点就是会导致过高的内存消耗，尤其是当基函数的阶数较大的时候。另一方面，虽然我们在公式(2-41)中给出了矩阵元素的计算方法，其中包含了和 Lagrange 插值多项式相关的体积分和面积分项，但由于我们还未指定选用何种单元网格类型，因此也无法得到 Lagrange 插值多项式在单元中的数学表达式，更不能直接通过数值积分的方法来获得 NDGTD-WE 方法中的矩阵元素值。

在文献 [12] 中作者给出了一种基于四面体网格的 DGTD-ME 方法的矩阵生成方案。首先，通过坐标映射函数将一个参考四面体单元和任意四面体单元建立了联系，使得所有在实际四面体单元上的操作都可以映射到参考四面体单元中进行。然后在参考四面体单元中使用范德蒙 (Vandermonde) 矩阵将模式空间基函数与 Lagrange 空间基函数之间联系起来，在对模式空间基函数进行 Gram-Schmidt 正交化处理后，使得 DGTD-ME 系统中的矩阵生成转换成了和范德蒙矩阵相关的运算，如在参考单元中质量矩阵 (Mass-matrix) 的计算为

$$[M^I] = ([V] [V]^T)^{-1}, M^I(i, j) = \int_I l_i(\mathbf{r}) l_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3-1)$$

其中 $[V]$ 为范德蒙矩阵。同样地，对于 DGTD-ME 系统中的刚度矩阵 (Stiffness-matrix) 也可以通过微分矩阵和范德蒙矩阵相关的运算得到

$$[S_r^I] = [M^I] [D_r], S_r^I(i, j) = \int_I l_i(\mathbf{r}) \frac{\partial l_j(\mathbf{r})}{\partial r} d\mathbf{r}, \quad (3-2)$$

从而避免了直接求 Lagrange 空间基函数在四面体中的体积分与面积分项。

然而不幸的是，由于基于二阶矢量波动方程的 NDGTD-WE 方法和基于一阶矢量 Maxwell 方程的 DGTD-ME 方法的矩阵元素在定义上有很大的差别，我们无法通过像 DGTD-ME 方法中矩阵生成的方式来得到 NDGTD-WE 方法的矩阵。为此，在本章中我们将发展一种针对于 NDGTD-WE 方法的矩阵生成策略，首先借助在文献 [12] 中已经得到的范德蒙矩阵，将 Lagrange 空间基函数通过范德蒙矩阵和模式基函数展开得到间接表达式，然后使用三维高斯积分计算在参考四面体单元下的矩阵元素，最后通过坐标映射将任意四面体单元与参考四面体单元建立联系。

3.2 参考四面体单元

不失一般性，假设在任意一个四面体单元 Ω_k 中解的形式为

$$u_h^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_p} u_h^k(\mathbf{x}_i, t) l_i^k(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n(t) \psi_n(\mathbf{x}), \quad (3-3)$$

其中 $l_i^k(\mathbf{x})$ 是定义在单元中节点 \mathbf{x}_i 上的 Lagrange 插值多项式， $\psi_n(\mathbf{x})$ 和 \hat{u}_n 分别表示三维的模式基函数和模式系数， N_p 为在 N 阶基函数下四面体中插值点的个数，它们之间满足如下关系

$$N_p = \frac{(1+N)(2+N)(3+N)}{6}. \quad (3-4)$$

为了简化在任意四面体中矩阵的生成过程，我们通过引入一个映射函数 $\Psi(\mathbf{r})$ 将实际任意的四面体单元 Ω_k 和一个参考四面体单元 Ω_I 建立联系，如图3.1所示。因此，所有在实际四面体单元中的操作都可以映射回参考四面体中进行。

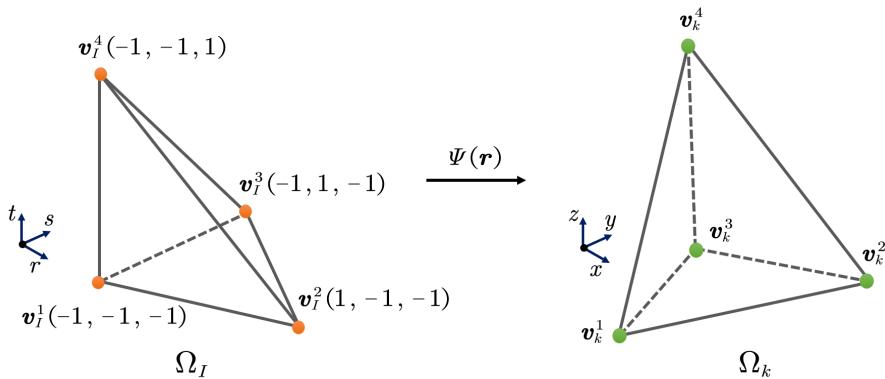


图 3.1 参考单元与实际单元之间的映射

首先，我们将参考四面体单元定义为

$$\Omega_I = \{\mathbf{r} = (r, s, t) \mid (r, s, t) \geq -1; r + s + t \leq -1\}. \quad (3-5)$$

在建立映射函数之前，先引入如下的重心坐标

$$0 \leq \lambda^i \leq 1, \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 = 1. \quad (3-6)$$

因此，在由四个顶点 $(\mathbf{v}_k^1, \mathbf{v}_k^2, \mathbf{v}_k^3, \mathbf{v}_k^4)$ 所构成的四面体 Ω_k 中任意一点都可以表示为

$$\mathbf{x} = \lambda^1 \mathbf{v}_k^1 + \lambda^2 \mathbf{v}_k^2 + \lambda^3 \mathbf{v}_k^3 + \lambda^4 \mathbf{v}_k^4. \quad (3-7)$$

同样也可以将参考单元中的任意一点表示为

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \lambda^3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3-8)$$

将上式结合式(3-6), 可以得到

$$\lambda^1 = \frac{t+1}{2}, \lambda^2 = \frac{s+1}{2}, \lambda^3 = -\frac{r+s+t+1}{2}, \lambda^4 = \frac{r+1}{2}, \quad (3-9)$$

将上式代入到(3-7)式中, 即可得到映射函数的表达式

$$\mathbf{x} = -\frac{r+s+t+1}{2}\mathbf{v}_k^1 + \frac{r+1}{2}\mathbf{v}_k^2 + \frac{s+1}{2}\mathbf{v}_k^3 + \frac{t+1}{2}\mathbf{v}_k^4 = \Psi(\mathbf{r}). \quad (3-10)$$

注意到映射函数 $\Psi(\mathbf{r})$ 是一个关于 \mathbf{r} 的线性函数, 因此对于任意的直边四面体都可以通过 Jacobian 变换与参考单元联系起来。由于

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_r & x_s & x_t \\ y_r & y_s & y_t \\ z_r & z_s & z_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \\ t_x & t_y & t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3-11)$$

其中用记号 a_b 表示 a 对 b 求偏导, 容易得到

$$\begin{aligned} r_x &= (y_s z_t - z_s y_t) / J, r_y = -(x_s z_t - z_s x_t) / J, r_z = (x_s y_t - y_s x_t) / J, \\ s_x &= -(y_r z_t - z_r y_t) / J, s_y = -(x_r z_t - z_r x_t) / J, s_z = -(x_r y_t - y_r x_t) / J, \\ t_x &= (y_r z_s - z_r y_s) / J, t_y = -(x_r z_s - z_r x_s) / J, t_z = (x_r y_s - y_r x_s) / J, \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中 J 为 Jacobian 系数, 即

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_s & x_t \\ y_r & y_s & y_t \\ z_r & z_s & z_t \end{vmatrix}. \quad (3-13)$$

另外, 通过(3-10)式可以得到

$$\mathbf{x}_r = (x_r, y_r, z_r) = \frac{\mathbf{v}_k^2 - \mathbf{v}_k^1}{2}, \mathbf{x}_s = \frac{\mathbf{v}_k^3 - \mathbf{v}_k^1}{2}, \mathbf{x}_t = \frac{\mathbf{v}_k^4 - \mathbf{v}_k^1}{2}. \quad (3-14)$$

至此, 我们完成了从任意四面体单元到参考四面体单元的映射, 所有在实际四面体上的运算都可以映射到参考单元进行。

3.3 插值点和基函数表达式

由于在上一节中我们建立了映射关系, 在实际单元上的运算都可以在参考单元中进行, 所以现在只需要关注在参考单元上的空间基函数和相关算子运算。同样, 我们假设在参考单元上解的形式为

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_p} u(\mathbf{r}_i) l_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n \psi_n(\mathbf{r}), \quad (3-15)$$

通过观察上式不难发现, 我们可以通过一个矩阵将模式系数 \hat{u}_n 和节点上的真实值 $u(\mathbf{r}_i)$ 联系起来, 即

$$\begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{r}_1) & \psi_2(\mathbf{r}_1) & \cdots & \psi_{N_p}(\mathbf{r}_1) \\ \psi_1(\mathbf{r}_2) & \psi_2(\mathbf{r}_2) & \cdots & \psi_{N_p}(\mathbf{r}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(\mathbf{r}_{N_p}) & \psi_2(\mathbf{r}_{N_p}) & \cdots & \psi_{N_p}(\mathbf{r}_{N_p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\mathbf{r}_1) \\ u(\mathbf{r}_2) \\ \vdots \\ u(\mathbf{r}_{N_p}) \end{bmatrix}, \quad (3-16)$$

上式中左边的矩阵我们把它称之为范德蒙 (Vandermonde) 矩阵, 记为 $[V]$, 并且它的矩阵元素表示为 $V(i, j) = \psi_j(\mathbf{r}_i)$ 。接下来, 为了保证范德蒙矩阵具有良好稳定的数值行为, 我们需要让模式基函数 $\psi_j(\mathbf{r}_i)$ 在参考单元 Ω_I 上是正交的。

首先, 我们可以从典范基出发构造正交基, N 维三变量的典范基可以表示为

$$\psi_m(\mathbf{r}) = r^i s^j t^k, (i, j, k) \geq 0; i + j + k \leq N, \quad (3-17)$$

其中

$$\begin{aligned} m = & 1 + \frac{(11 + 12N + 3N^2)i}{6} + \frac{(2N + 3)j}{2} + k \\ & - \frac{(2 + N)i^2}{2} - ij - \frac{j^2}{2} + \frac{i^3}{6}, 0 \leq i, j, k; i + j + k \leq N. \end{aligned} \quad (3-18)$$

显然现在基函数的数值行为是不稳定的, 需要对其进行 Gram-Schmidt 正交化, 有

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{8} P_i(a) P_j^{(2i+1,0)}(b) (1-b)^i P_k^{(2i+2j+2,0)}(c) (1-c)^{i+j}, \quad (3-19)$$

其中

$$a = -2 \frac{(1+r)}{s+t} - 1, b = 2 \frac{(1+s)}{1-t} - 1, c = t. \quad (3-20)$$

这里的 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 是 n 阶 Jacobi 多项式。

在得到正交基函数后, 我们还需要在参考四面体单元中确定一套具有良好插值行为的节点集。通常有几种方案^[38,39]能够在四面体中建立 N_p 个这样的插值点。在本文中, 我们使用在文献 [12] 中作者提出的一种基于 α -优化的 Legendre-Gauss-Lobatto 节点集, 我们将其称之为 LGL 点。首先, 使用在上一节中建立的重心坐标(3-6)定义一组等间距的节点集, 即

$$(i, j, k) \geq 0, i + j + k \leq N : (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = \left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}, \frac{k}{N} \right), \lambda^4 = 1 - \lambda^1 - \lambda^2 - \lambda^3. \quad (3-21)$$

如果将上式与(3-8)结合, 可得到在参考四面体中的等间距节点集。

接下来, 再定义一个中心为坐标原点的正四面体, 其顶点分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \mathbf{v}_2 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \\ \mathbf{v}_3 &= \left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \mathbf{v}_4 = \left(0, 0, \frac{3}{\sqrt{6}} \right). \end{aligned} \quad (3-22)$$

通过使用(3-21)中的重心坐标, 可以得到正四面体中的等间距节点集, 即

$$\mathbf{x} = \lambda^3 \mathbf{v}^1 + \lambda^4 \mathbf{v}^2 + \lambda^2 \mathbf{v}^3 + \lambda^1 \mathbf{v}^4. \quad (3-23)$$

在得到正四面体内的等间距分布的节点集后, 在正四面体的每一个面上使用对于三角形结构的二维形变函数, 然后再将这些变换混合到四面体的内部。其中, 正四

面体的四个面上的矢量形变函数分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^1 &= g_1(\lambda^2, \lambda^3, \lambda^4) \mathbf{t}^{1,1} + g_2(\lambda^2, \lambda^3, \lambda^4) \mathbf{t}^{1,2}, \\ \mathbf{w}^2 &= g_1(\lambda^1, \lambda^3, \lambda^4) \mathbf{t}^{2,1} + g_2(\lambda^1, \lambda^3, \lambda^4) \mathbf{t}^{2,2}, \\ \mathbf{w}^3 &= g_1(\lambda^1, \lambda^4, \lambda^2) \mathbf{t}^{3,1} + g_2(\lambda^1, \lambda^4, \lambda^2) \mathbf{t}^{3,2}, \\ \mathbf{w}^4 &= g_1(\lambda^1, \lambda^3, \lambda^2) \mathbf{t}^{4,1} + g_2(\lambda^1, \lambda^3, \lambda^2) \mathbf{t}^{4,2},\end{aligned}\tag{3-24}$$

其中 g_1 和 g_2 分别表示二维平面中在两个正交分量上的形变函数^[12], $\mathbf{t}^{f,1}$ 和 $\mathbf{t}^{f,2}$ 表示在正四面体的 f 面所在的平面中构成正交轴的两个向量, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{1,1} &= (1, 0, 0), \mathbf{t}^{1,2} = (0, 1, 0), \\ \mathbf{t}^{2,1} &= (1, 0, 0), \mathbf{t}^{2,2} = \left(0, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{8}{9}}\right), \\ \mathbf{t}^{3,1} &= \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}, 0\right), \mathbf{t}^{3,2} = \left(-\sqrt{\frac{1}{12}}, \frac{1}{6}, \sqrt{\frac{8}{9}}\right), \\ \mathbf{t}^{4,1} &= \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}, 0\right), \mathbf{t}^{4,2} = \left(\sqrt{\frac{1}{12}}, -\frac{1}{6}, \sqrt{\frac{8}{9}}\right).\end{aligned}\tag{3-25}$$

另外, 四个面上的标量混合函数 (Blending functions) 为

$$\begin{aligned}b^1(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4) &= \left(\frac{2\lambda^2}{2\lambda^2 + \lambda^1}\right) \left(\frac{2\lambda^3}{2\lambda^3 + \lambda^1}\right) \left(\frac{2\lambda^4}{2\lambda^4 + \lambda^1}\right), \\ b^2(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4) &= \left(\frac{2\lambda^1}{2\lambda^1 + \lambda^2}\right) \left(\frac{2\lambda^3}{2\lambda^3 + \lambda^2}\right) \left(\frac{2\lambda^4}{2\lambda^4 + \lambda^2}\right), \\ b^3(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4) &= \left(\frac{2\lambda^1}{2\lambda^1 + \lambda^3}\right) \left(\frac{2\lambda^2}{2\lambda^2 + \lambda^3}\right) \left(\frac{2\lambda^4}{2\lambda^4 + \lambda^3}\right), \\ b^4(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4) &= \left(\frac{2\lambda^1}{2\lambda^1 + \lambda^4}\right) \left(\frac{2\lambda^2}{2\lambda^2 + \lambda^4}\right) \left(\frac{2\lambda^3}{2\lambda^3 + \lambda^4}\right).\end{aligned}\tag{3-26}$$

结合(3-24)和(3-26)可以得到组合形变函数

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4) &= \left[1 + (\alpha\lambda^1)^2\right] b^1 \mathbf{w}^1 + \left[1 + (\alpha\lambda^2)^2\right] b^2 \mathbf{w}^2 \\ &\quad + \left[1 + (\alpha\lambda^3)^2\right] b^3 \mathbf{w}^3 + \left[1 + (\alpha\lambda^4)^2\right] b^4 \mathbf{w}^4.\end{aligned}\tag{3-27}$$

其中 α 是聚集调控因子, 在表3.1给出了在四面体几种不同节点集的 Lebesgue 常数^[12]。通常, Lebesgue 常数越小表示 Lgarange 插值基函数的收敛效果越好, 可以看出 α -优化节点集的 Lebesgue 常数要优于其它几种方案。在图3.2中我们展示了阶数为 6 和 8 下的基于 α -优化的组合形变函数在等间距点上的作用, 并且在图3.3中给出了在正四面体中 LGL 点的分布。最后, 通过映射函数将正四面体中的 LGL 点映射到参考单元中, 即可得到参考单元中的 LGL 点分布。

表 3.1 几种插值点方案的 Lebesgue 常数比较

N	α	Lebesgue 常数			
		α -优化	文献 [38]	文献 [39]	等间距点
1	0	1	1	1	1
2	0	2	2	2	2
3	0	2.93	2.93	2.93	3
4	0.1002	4.07	4.08	4.11	4.88
5	1.1332	5.32	5.35	5.62	8.09
6	1.5608	7.01	7.34	7.36	13.66
7	1.3413	9.21	9.76	9.37	23.38
8	1.2577	12.54	13.63	12.31	40.55
9	1.1603	17.02	18.9	15.66	71.15
10	1.0153	24.36	27.19	-	126.2

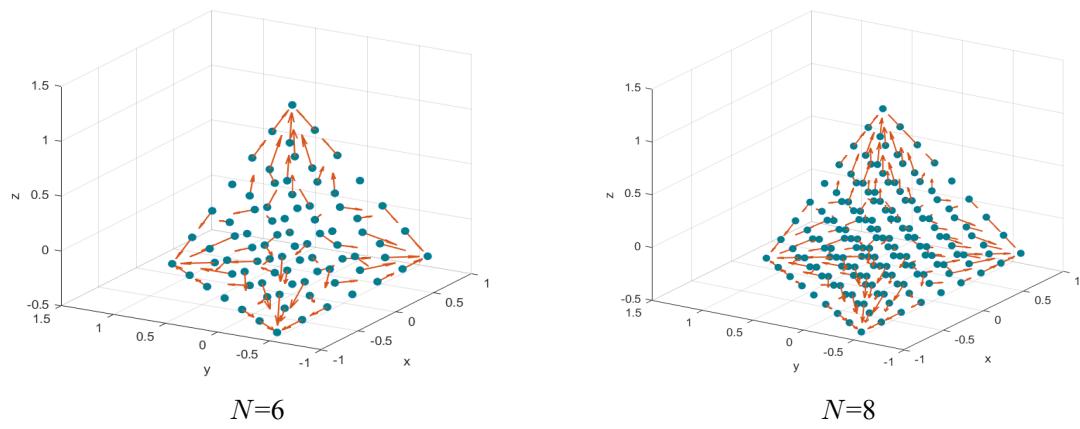


图 3.2 正四面体中作用在等间距节点上的形变函数

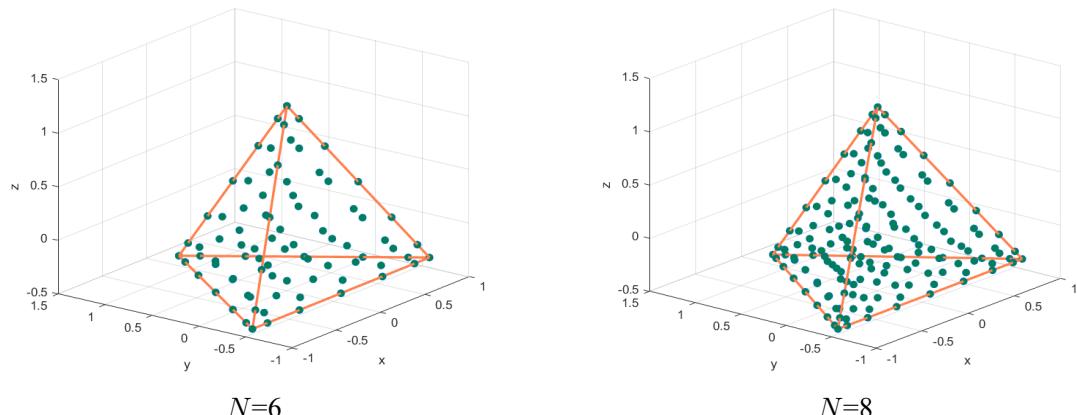


图 3.3 正四面体中的 LGL 点分布

在得到了正交的模式基函数和具有良好插值行为的 LGL 插值点后，我们现在可以将定义在参考四面体单元中的节点型基函数用范德蒙矩阵和模式基函数表示为

$$l_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_p} [V^T]_{i,n}^{-1} \psi_n(\mathbf{r}), \quad (3-28)$$

并且对于偏导项，有

$$\frac{\partial l_i(\mathbf{r})}{\partial u} |_{u=r,s,t} = \sum_{n=1}^{N_p} [V^T]_{i,n}^{-1} \frac{\partial \psi_n(\mathbf{r})}{\partial u}. \quad (3-29)$$

至此，我们完成了从任意四面体单元到参考四面体单元的映射，并且推导出了在参考四面体中 Lagrange 插值多项式的数学表达式。

3.4 矩阵元素生成方法

由于在前面两节中我们获得了从任意四面体到参考四面体单元的映射关系，并且推导出了参考四面体中基函数具体的表达式，因此已经具备生成在上一章(2-41)式中矩阵元素的条件。在这一节中，我们将结合前面两节的工作，推导出在(2-41)式中所有的矩阵元素生成方法。

对于矩阵 $[M_v^k]$ ，有

$$M_v^k(i, j) = \varepsilon_k \int_{\Omega_k} l_i(\mathbf{x}) l_j(\mathbf{x}) dV = \varepsilon_k J_v^k M^I(i, j), \quad (3-30)$$

其中 J_v^k 表示在单元 Ω_k 体中的 Jacobian 系数，并且

$$M^I(i, j) = \int_{\Omega_I} l_i(\mathbf{r}) l_j(\mathbf{r}) dV. \quad (3-31)$$

需要指出的是，这里的 $[M^I]$ 和 DGTD-ME 方法中的质量矩阵 (Mass-matrix) 定义相同，可以直接由范德蒙矩阵得到，即 $[M^I] = ([V] [V]^T)^{-1}$ 。

对于矩阵 $[S_{pq}^k]$ ，考虑到求导链法则

$$\frac{\partial l_i(\mathbf{x})}{\partial p} = \frac{\partial l_i(\mathbf{r})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial l_i(\mathbf{r})}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} + \frac{\partial l_i(\mathbf{r})}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p}, \quad (3-32)$$

因此，容易得到

$$\begin{aligned} S_{pq}^k(i, j) &= \frac{1}{\mu_k} \int_{\Omega_k} \frac{\partial l_i(\mathbf{x})}{\partial p} \frac{\partial l_j(\mathbf{x})}{\partial q} dV \\ &= \frac{J_v^k}{\mu_k} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial r}{\partial q} S_{rr}^I(i, j) + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial s}{\partial q} S_{rs}^I(i, j) + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial t}{\partial q} S_{rt}^I(i, j) \\ + \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial r}{\partial q} S_{sr}^I(i, j) + \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial s}{\partial q} S_{ss}^I(i, j) + \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial t}{\partial q} S_{st}^I(i, j) \\ + \frac{\partial t}{\partial p} \frac{\partial r}{\partial q} S_{tr}^I(i, j) + \frac{\partial t}{\partial p} \frac{\partial s}{\partial q} S_{ts}^I(i, j) + \frac{\partial t}{\partial p} \frac{\partial t}{\partial q} S_{tt}^I(i, j) \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (3-33)$$

其中 $[S_{ab}^I]$ 在参考单元 Ω_I 上的定义为

$$S_{ab}^I(i, j) = \int_{\Omega_I} \frac{\partial l_i(\mathbf{r})}{\partial a} \frac{\partial l_j(\mathbf{r})}{\partial b} dV. \quad (3-34)$$

这里用 a, b 表示 r, s, t , 以下情况类似。

对于在内边界面 Γ_i 上的矩阵 $[n_p R_q^k]$, 有

$$\begin{aligned} n_p R_q^k(i, j) &= \frac{n_p}{2\mu_k} \int_{\Gamma_i} l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial l_j(\mathbf{x})}{\partial q} dS \\ &= \frac{n_p J_s^k}{2\mu_k} \left[\frac{\partial r}{\partial q} R_r^I(i, j) + \frac{\partial s}{\partial q} R_s^I(i, j) + \frac{\partial t}{\partial q} R_t^I(i, j) \right], \end{aligned} \quad (3-35)$$

其中 J_s^k 表示在 Γ_i 上的面 Jacobian 系数, 并且 $[R_a^I]$ 定义为

$$R_a^I(i, j) = \int_{\partial\Omega_I} l_i(\mathbf{r}) \frac{\partial l_j(\mathbf{r})}{\partial a} dS. \quad (3-36)$$

需要注意的是, 如果边界面为 Γ_{PEC} 边界, 这一项的矩阵元素应该再乘以 2。

对于在内边界面 Γ_i 上的矩阵 $[n_p R_{q,f}^k]$, 有

$$\begin{aligned} n_p R_{q,f}^k(i, j) &= \frac{n_p}{2} \int_{\Gamma_i} \frac{1}{\mu_{k^+}} l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial l_j^+(\mathbf{x})}{\partial q} dS \\ &= \frac{n_p}{2} J_s^k \left[\frac{\partial r^+}{\partial q} R_{r,f}^I(i, j) + \frac{\partial s^+}{\partial q} R_{s,f}^I(i, j) + \frac{\partial t^+}{\partial q} R_{t,f}^I(i, j) \right], \end{aligned} \quad (3-37)$$

这里的上标 “+” 表示当前的运算是定义在相邻单元中进行的, 并且 $[R_{a,f}^I]$ 定义为

$$R_{a,f}^I(i, j) = \int_{\partial\Omega_I} l_i(\mathbf{r}) \frac{\partial l_j^+(\mathbf{r})}{\partial a} dS. \quad (3-38)$$

这里需要特别指出的是, 由于在交界面的左右两个四面体单元中它们的顶点排列顺序一般是不相同的, 会出现左右相邻面映射回参考四面体单元时不在同一个面上的情况, 如图3.4所示。因此, 当我们在计算这一项面积分时, 需要先进行积分点的匹配过程。对于(3-36)式可以看成是(3-38)式积分点刚好匹配的特殊情况。

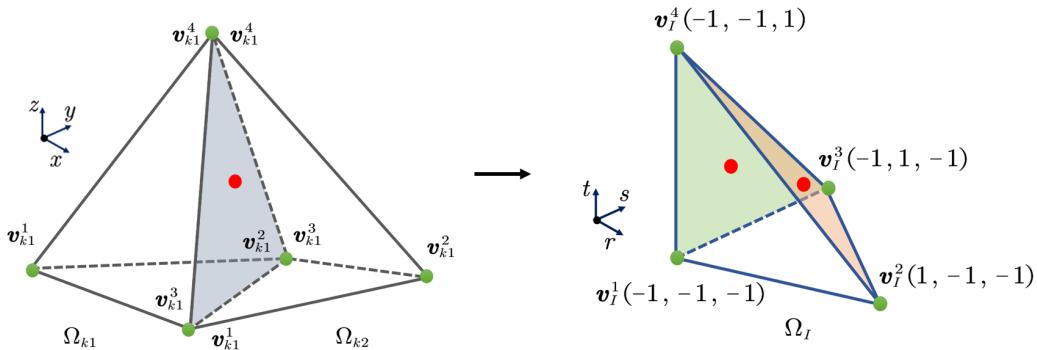


图 3.4 积分点匹配示意图

为了避免在每个单元中都做积分点匹配的过程，一种有效的解决方法是将两个相邻四面体所有可能出现的顶点排列顺序，不难发现一共有 4×6 种情况，在生成矩阵元素之前先把它们都存储下来，因此在生成矩阵元素时可以通过判断当前面所处的情况而进行直接索引。

对于矩阵 $[n_p S_q^k]$ ，从定义上我们不难发现它实际上是矩阵 $[n_p R_q^k]$ 的转置，同样还有矩阵 $[n_p S_{q,f}^k]$ 和矩阵 $[n_p R_{q,f}^k]$ 也互为转置，因此他们都可以通过已有的矩阵直接得到而不需要再进行额外的计算。

对于矩阵 $[n_{pq} M_s^k]$ 和矩阵 $[n_{pq} M_{s,f}^k]$ ，不论是在内边界或是 PEC 边界上，都有

$$\begin{aligned} n_{pq} M_s^k(i, j) &= \tau_f n_p n_q \int_{\Gamma_i \cup \Gamma_{PEC}} l_i(\mathbf{x}) l_j(\mathbf{x}) dS = \tau_f n_p n_q M_s^I(i, j), \\ n_{pq} M_{s,f}^k(i, j) &= \tau_f n_p n_q \int_{\Gamma_i \cup \Gamma_{PEC}} l_i(\mathbf{x}) l_j^+(\mathbf{x}) dS = \tau_f n_p n_q M_{s,f}^I(i, j), \end{aligned} \quad (3-39)$$

其中

$$\begin{aligned} M_s^I(i, j) &= \int_{\partial\Omega_I} l_i(\mathbf{r}) l_j(\mathbf{r}) dS, \\ M_{s,f}^I(i, j) &= \int_{\partial\Omega_I} l_i(\mathbf{r}) l_j^+(\mathbf{r}) dS. \end{aligned} \quad (3-40)$$

对于矩阵 $[n_p A^k]$ ，仅在 ABC 边界上有

$$n_p A^k(i, j) = \int_{\Gamma_b \cap \Gamma_{ABC}} Y_s n_p l_i(\mathbf{x}) l_j(\mathbf{x}) dS = Y_s n_p M_s^I(i, j). \quad (3-41)$$

至此，NDGTD-WE 方法中所有相关的矩阵元素生成完成。通过观察上述的过程，容易发现所有定义在实际四面体单元中的矩阵最后都能通过一些定义在参考单元中的矩阵还原得到，因此，对于 NDGTD-WE 方法内存消耗高的缺点，我们可以通过仅存储少量在参考单元下的矩阵和映射相关的系数，然后在每次时间步进迭代的时候再还原单元矩阵，这样就能大幅度地减少内存的消耗，我们将其称之为 LS-NDGTD-WE 方法。这种做法带来的一个缺点是会增加计算时间的消耗，但通过现有的硬件加速技术可以弥补这一缺点，我们把这个问题留在第五章中详细讨论。

3.5 数值算例和分析

3.5.1 PEC 谐振腔

在第一个算例中，我们通过计算一个尺寸为 $[-0.5m, 0.5m]^3$ 的 PEC 谐振腔来验证所提出的 NDGTD-WE 方法的准确性和效率。首先，使用四面体网格对计算区域进行离散化，最大离散尺寸设置为 $0.1m$ ，共得到 4705 个四面体单元，如图3.5所示。然后在坐标原点 $(0m, 0m, 0m)$ 处放置一个频率范围从 $f_{min} = 100\text{MHz}$ 到 $f_{max} = 300\text{MHz}$

的调制高斯脉冲点源，即

$$f(t) = \cos(2\pi f_0 t) e^{-4\pi(t-t_0)^2/\tau^2}, \quad (3-42)$$

其中 $f_0 = (f_{max} + f_{min})/2$, $\tau = 4/(f_{max} - f_{min})$, $t_0 = 0.8\tau$ 。最后在 $(0.25m, 0.25m, 0m)$ 处采集瞬态的电场值，通过傅里叶变换计算出谐振模式 k_{110} 下的谐振频率。表3.2中展示了通过 NDGTD-WE 方法获得的结果与解析解 ($f_{110} = 211.98528\text{MHz}$) 之间的相对误差，结果显示在一阶基函数的情况下相对误差为 0.131%，并且随着基函数阶数的增加，计算结果也更加精确。

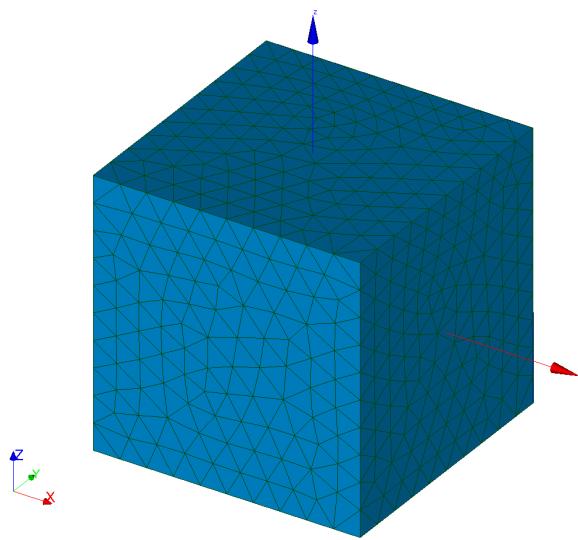


图 3.5 PEC 谐振腔网格剖分 (Max. size : 0.10m)

表 3.2 不同基函数阶数下的精度对比

阶数	计算结果 (MHz)	相对误差
1	212.26073	0.00131
2	211.90977	0.00036
3	211.95412	0.00015

另一方面，为了对比低存储与非低存储的 NDGTD-WE 方法在内存消耗和计算时间上的区别，我们进一步将 PEC 谐振腔的最大离散尺寸设置为 0.05m，共得到 32222 个四面体单元，如图3.6所示，这样做的目的是尽可能地消除与单元数目相关的内存偏差。我们使用型号为 Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1230 v5 @ 3.40GHz 的单核 CPU 分别统计两种方法在 1000 个时间步下的计算时长和内存消耗，如图3.7和3.8所示。其中从图3.7可以看出，LS-NDGTD-WE 方法大幅度地降低了 NDGTD-WE 方法的内存消耗，并且随着基函数阶数的升高，LS-NDGTD-WE 方法的内存消耗比率将变得更

小，在使用三阶基函数的情况下，LS-NDGTD-WE 方法的内存消耗仅占 NDGTD-WE 方法的 2%。

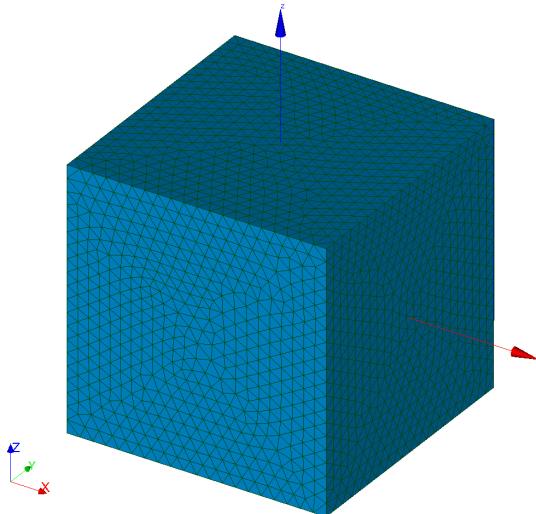


图 3.6 PEC 谐振腔网格剖分 (Max. size : 0.05m)

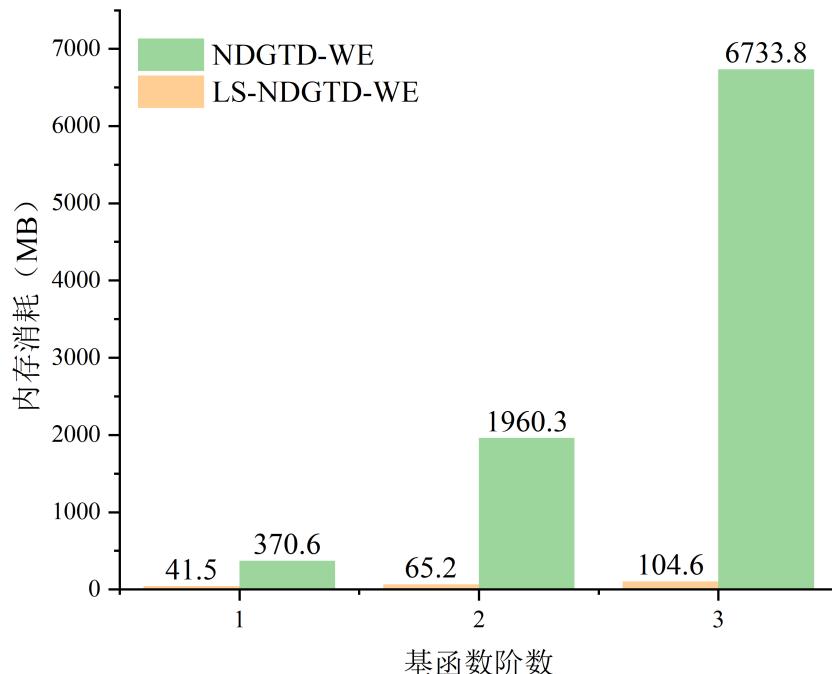


图 3.7 LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的内存消耗对比

然而不幸的是，由于低存储策略需要在每个时间步中还原矩阵，这样随之带来的是计算时间增加，如图3.8所示。在使用三阶基函数的情况下，LS-NDGTD-WE 方法的计算时间消耗是 NDGTD-WE 方法的 30.7 倍。为了缓解 LS-NDGTD-WE 方法计算速度慢的缺点，一种有效的策略是将 LS-NDGTD-WE 方法与目前广泛流行的 GPU 并行加速技术相结合，我们将在第五章中进行详细介绍。

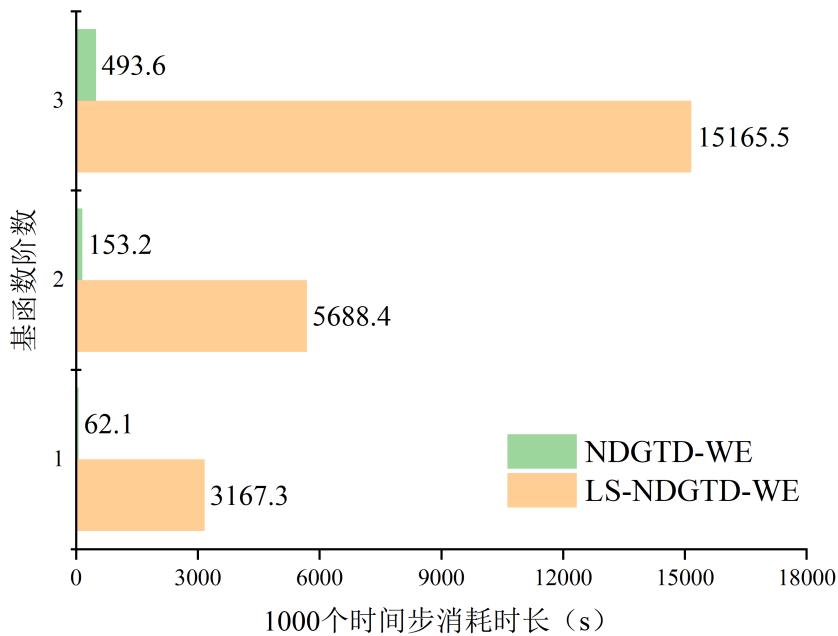


图 3.8 LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的时间消耗对比

3.5.2 CBU-87 洲际导弹

为了进一步验证 NDGTD-WE 方法在实际三维问题中的求解能力，我们计算一个型号为 CBU-87 的洲际导弹在 1GHz 下的双站雷达散射截面 (Bistatic RCS)。图3.9展示了 CBU-87 的几何模型，它可以被一个 $483.86\text{mm} \times 483.86\text{mm} \times 2262.01\text{mm}$ 的外接长方体所包围。

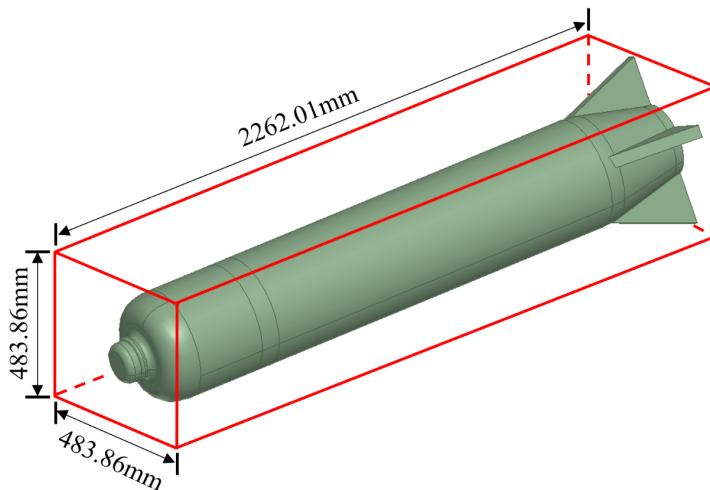


图 3.9 CBU-87 导弹的几何结构

首先我们采用总场/散射场方法引入 \hat{y} 方向极化沿着 $-\hat{z}$ 方向传播的入射波，其源的形式为调制高斯脉冲，频率范围设置为 0.5-1.5GHz，总场/散射场的边界设置在离导弹外接长方体的 $\lambda_{1\text{GHz}}/8$ 远处。然后使用一阶 ABC 作为吸收边界条件，将其设置在离导弹外接长方体的 $7\lambda_{1\text{GHz}}/6$ 远处。由于在 RCS 的计算过程中需要设置外推边界

面并且在外推边界面上要同时知道电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 两个未知量，因此我们将外推界面设置在离导弹外接长方体 $\lambda_{1\text{GHz}}$ 远处，并且通过 $\mu\partial\mathbf{H}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ 求得次工作变量 \mathbf{H} 。最后将网格最大离散尺寸设置为 $\lambda_{1\text{GHz}}/5$ ，在导弹的曲面处采用更加精细化的直边四面体网格剖分，共得到 89731 个四面体单元，如图3.10所示。我们使用二阶基函数的 NDGTD-WE 方法计算该模型，图3.11展示了 NDGTD-WE 方法和基于 FEM 方法的 HFSS 仿真软件计算结果对比，可以看出两种方法的结果基本一致，证明了 NDGTD-WE 方法在实际问题求解中的准确性。

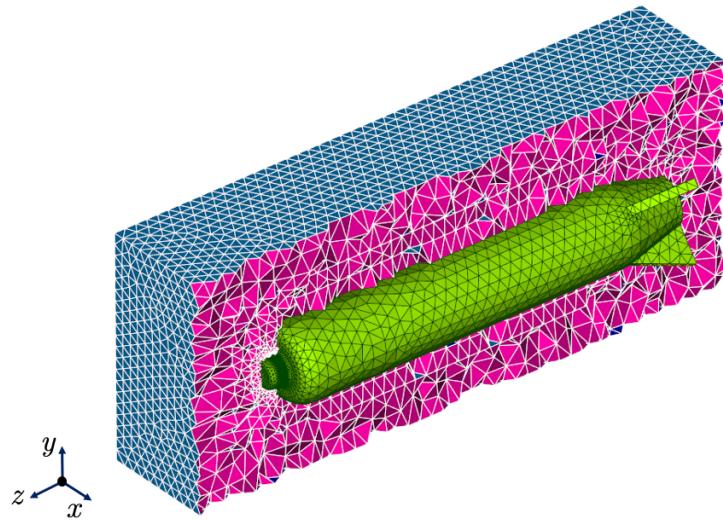


图 3.10 CUB-87 导弹的网格剖分

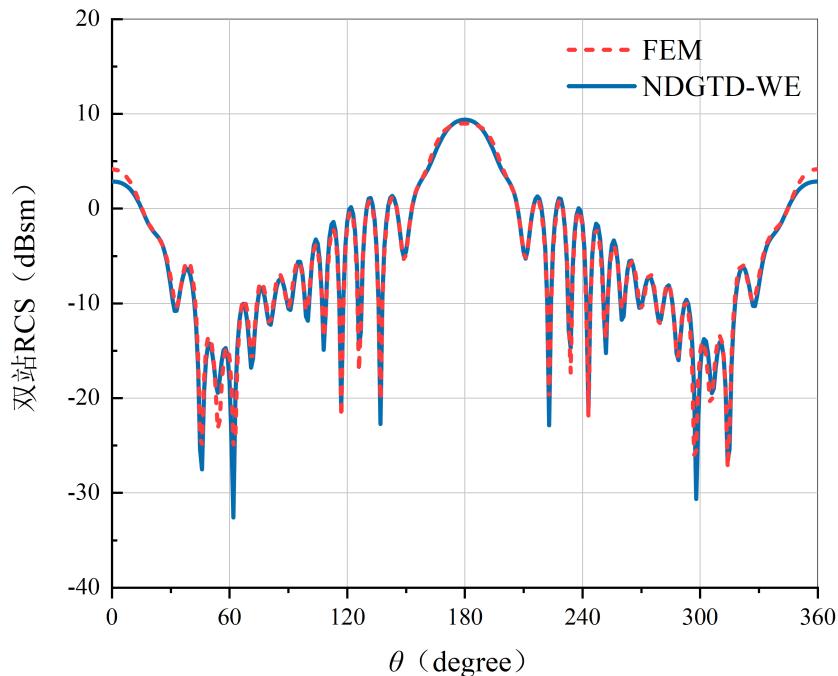


图 3.11 FEM 方法与 NDGTD-WE 方法的 RCS 计算结果对比

3.6 本章小结

在本章中，首先我们定义了映射函数将一个参考四面体与实际四面体建立了联系，并且给出了在参考四面体中 LGL 插值点的生成方法和节点型基函数的数学表达式，使得所有实际单元的矩阵元素都可以映射回参考四面体中计算。然后基于这种坐标映射，我们提出了一种低存储的 LS-NDGTD-WE 方法。最后通过两个算例验证了 NDGTD-WE 方法的计算精度和 LS-NDGTD-WE 方法在内存上的优势。

第四章 NDGTD-WE 方法的波端口边界条件

4.1 引言

在前面两章中，虽然我们建立了 NDGTD-WE 求解系统，并通过一些数值算例验证该方法的正确性和效率。但已实现的都是一些比较简单的边界条件和电磁波源，其应用范围还很有限。然而，在现实生活中大多数的电磁器件仿真中，比如波导和天线馈电结构等都包含有输入和输出端口，通常这些都需要在波端口上施加激励源。因此，对波端口进行精确和高效地建模显得尤为重要。

在波导结构的仿真中，传统的做法是在需要加波源的波导截面放置一个电流源或磁流源，使波源向截面的左右两端传播，并且在后方需要额外增加计算区域用于建模吸收边界条件，由于在波导中传播的电磁波是非平面波，通常需要使用比 ABC 吸收效果更好的 PML 边界条件来吸收波导中的电磁波。为了克服传统的波端口建模会额外消耗计算机资源的缺点，Z. Lou 和 J. -M. Jin 在文献 [40] 中提出一种基于 TDFEM 方法的精确波端口边界条件（Waveport Boundary Condition, WPBC）的建模方法，文中作者首先在频域将波导结构中的电磁场使用模态场展开，通过模式匹配能够无反射地将电磁波吸收，然后再将频域算子变换到时域中，就构造了时域波端口边界条件。后来，C. -P. Chang 和 G. Chen 等人在文献 [21] 中给出了在 DGTD-ME 框架下的 WPBC 建模方法，并通过用辅助方程方法代替直接时域卷积求解提高了波端口边界条件的计算效率。

就目前已公开发表的文献来看，还没有直接应用于 DGTD-WE 系统的波端口边界条件建模方法，但幸运的是，基于前人在时域算法中所做的工作，我们能够很方便地将波端口边界条件移植到 DGTD-WE 系统中。为此，在这一章中我们将讨论如何在 NDGTD-WE 系统中施加波端口边界条件。

4.2 波端口边界条件的基本理论

4.2.1 频域波端口边界条件

现假设有一个无限长的中间包含电介质或金属障碍的不连续矩形波导结构，如图4.1所示。为了能够将 NDGTD-WE 方法应用于这样的无界区域，需要在散射体的两侧分别放置虚拟平面，这两个虚拟平面用 S_1 和 S_2 表示，将无限区域截断为有限区域。为了唯一定义由 S_1 、 S_2 和波导壁所围成区域的边值问题，有必要为 S_1 和 S_2 中的每一个面规定边界条件。为此，假设波导中仅存在主模式不衰减地传播，并且 S_1

和 S_2 距离散射体足够远，使得被散射体激发出来的高阶模态在到达 S_1 和 S_2 之前就消失了。在截面尺寸为 $a \times b$ 的均匀矩形波导中，存在两组本征模式满足不同边界条件下的齐次亥姆霍兹方程。其中一组模式称为 TE_{mn} 模，由下式给出

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \psi_{mn}^{TE}}{\partial y}, E_y = -\frac{\partial \psi_{mn}^{TE}}{\partial z}, E_z = 0, \\ \psi_{mn}^{TE} &= \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm\gamma_{mn}z}. \end{aligned} \quad (4-1)$$

其中，

$$\gamma_{mn} = \begin{cases} j\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, & \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \leq k_0^2, \\ \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}, & \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > k_0^2. \end{cases} \quad (4-2)$$

另一组模式称为 TM_{mn} 模式，即

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \psi_{mn}^{TM}}{\partial x \partial z}, E_y = \frac{\partial^2 \psi_{mn}^{TM}}{\partial y \partial z}, E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) \psi_{mn}^{TM}, \\ \psi_{mn}^{TM} &= \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm\gamma_{mn}z}. \end{aligned} \quad (4-3)$$

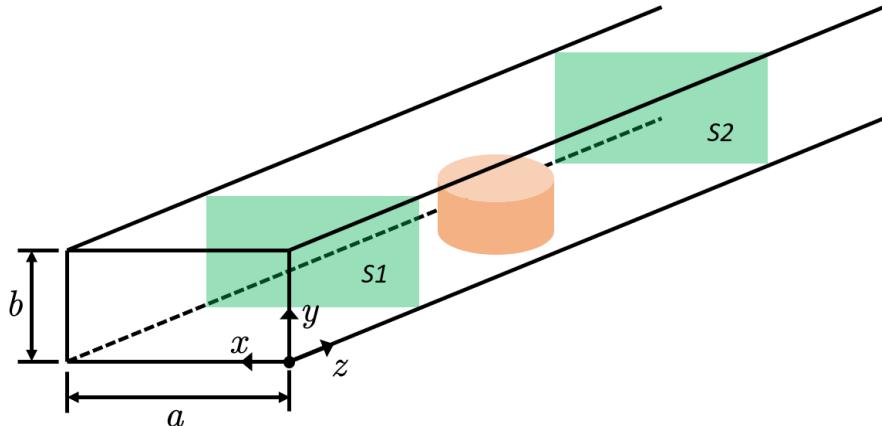


图 4.1 带有介质的波导结构示意图

这两组模式构成了一套完整的模式基函数，可以用来表示波导无源区中任意位置的电磁场。我们假设入射波沿着 \hat{z} 方向传播，虚拟截面 S_1 上的场可以表示为入射场和反射场叠加的形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}^{inc}(x, y, z) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \mathbf{e}_{mn}^{TE}(x, y) e^{\gamma_{mn}z} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} [\mathbf{e}_{tmn}^{TM}(x, y) + \hat{z} e_{zmn}^{TM}(x, y)] e^{\gamma_{mn}z}, \end{aligned} \quad (4-4)$$

其中 a_{mn} 和 b_{mn} 是待定的常系数，并且

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{mn}^{TE}(x, y) &= N_{mn} \left[\hat{x} \frac{n}{b} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) - \hat{y} \frac{m}{a} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right], \\ \mathbf{e}_{mn}^{TM}(x, y) &= N_{mn} \left[\hat{x} \frac{m}{a} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \hat{y} \frac{n}{b} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right], \\ \mathbf{e}_{zmn}^{TM}(x, y) &= \frac{N_{mn}}{\pi \gamma_{mn}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right),\end{aligned}\quad (4-5)$$

这里的 N_{mn} 表示归一化系数，即

$$N_{mn} = \sqrt{\nu_m \nu_n} / \sqrt{n^2 \frac{a}{b} + m^2 \frac{b}{a}}, \quad \nu_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (4-6)$$

不难发现， \mathbf{e}_{mn}^{TE} 和 \mathbf{e}_{tmn}^{TM} 满足如下的正交关系

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot \mathbf{e}_{mn}^{TM} dx dy &= 0, \\ \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot \mathbf{e}_{m'n'}^{TM} dx dy &= \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \\ \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \cdot \mathbf{e}_{tmn'}^{TM} dx dy &= \delta_{mm'} \delta_{nn'}.\end{aligned}\quad (4-7)$$

因此，我们可以通过取(4-4)式与 $\mathbf{e}_{m'n'}^{TM}$ 的标量积并且在整个波端口面上进行积分来确定 a_{mn} 的值，即

$$a_{mn} = e^{-\gamma_{mn} z_1} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot [\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}]_{z=z_1} dx dy, \quad (4-8)$$

其中 z_1 表示 S_1 在 \hat{z} 轴上的位置。同样地，对于 b_{mn} 也有

$$b_{mn} = e^{-\gamma_{mn} z_1} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \cdot [\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}]_{z=z_1} dx dy, \quad (4-9)$$

为了得到在 S_1 上的边界条件，我们对(4-4)式取旋度并用 $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{z}$ 叉乘上它，得到

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^{inc}) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \gamma_{mn} \mathbf{e}_{mn}^{TE}(x, y) e^{\gamma_{mn} z} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \frac{k_0^2}{\gamma_{mn}} \mathbf{e}_{tmn}^{TM}(x, y) e^{\gamma_{mn} z}.\end{aligned}\quad (4-10)$$

将 a_{mn} 和 b_{mn} 的表达式代入上式，可以得到在 $z = z_1$ 上的波端口边界条件

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + P(\mathbf{E}) = \mathbf{U}^{inc}, \quad (4-11)$$

其中，

$$\begin{aligned}P(\mathbf{E}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0^2}{\gamma_{mn}} \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \cdot \mathbf{E} dx dy \\ &\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} \mathbf{e}_{mn}^{TE} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot \mathbf{E} dx dy,\end{aligned}\quad (4-12)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{inc} = & \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^{inc}) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0^2}{\gamma_{mn}} \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \cdot \mathbf{E}^{inc} dx dy \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{mn} \mathbf{e}_{mn}^{TE} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot \mathbf{E}^{inc} dx dy.\end{aligned}\quad (4-13)$$

同样地，在截面 S_2 上，电场可以展开为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \mathbf{e}_{mn}^{TE}(x, y) e^{-\gamma_{mn} z} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} [\mathbf{e}_{tmn}^{TM}(x, y) - \hat{z} \mathbf{e}_{zmn}^{TM}(x, y)] e^{-\gamma_{mn} z},\end{aligned}\quad (4-14)$$

其中，

$$\begin{aligned}c_{mn} = & e^{\gamma_{mn} z_2} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot \mathbf{E}|_{z=z_2} dx dy, \\ d_{mn} = & e^{\gamma_{mn} z_2} \int_0^a \int_0^b \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \cdot \mathbf{E}|_{z=z_2} dx dy,\end{aligned}\quad (4-15)$$

上式的 z_2 表示 S_2 在 z 轴的位置，进而我们能得到在 S_2 上的波端口边界条件

$$\hat{z} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + P(\mathbf{E}) = 0, \quad (4-16)$$

这里的 $P(\mathbf{E})$ 和(4-12)式定义相同。

4.2.2 时域波端口边界条件

我们注意到上述的波端口边界条件是在频域下推导得到的，其中 γ_{mn} 是一个频域变量

$$\gamma_{mn} = \sqrt{k_{cmn}^2 - k^2}, k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{c}, \quad (4-17)$$

上式中的 c 表示光速， k_{cmn} 表示波导中模式数为 mn 的截止波数，即

$$k_{cmn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (4-18)$$

我们可以将公式(4-11)中的频域算子整理如下

$$\begin{aligned}H_{mn}(s) = & \gamma_{mn} = \sqrt{k_{cmn}^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}, \\ G_{mn}(s) = & -\frac{k^2}{\gamma_{mn}} = -\frac{k^2}{\sqrt{k_{cmn}^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}}.\end{aligned}\quad (4-19)$$

其中 $s = j\omega$, 为了找到 $H_m(s)$ 和 $G_m(s)$ 的拉普拉斯逆变换, 将上式重写为

$$\begin{aligned} H_{mn}(s) &= \frac{s}{c} + \left(\sqrt{k_{cmn}^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2} - \frac{s}{c} \right), \\ G_{mn}(s) &= \frac{s}{c} - \frac{s}{c} \frac{\sqrt{k_{cmn}^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2} - \frac{s}{c}}{\sqrt{k_{cmn}^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (4-20)$$

容易得到上式的拉普拉斯逆变换为

$$\begin{aligned} H_{mn}(t) &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} + h_m(t) *, \\ G_{mn}(t) &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} + g_m(t) *, \end{aligned} \quad (4-21)$$

这里的“*”表示时域卷积符号, 脉冲响应 $h_{mn}(t)$ 和 $g_{mn}(t)$ 的表达式如下

$$\begin{aligned} h_{mn}(t) &= \frac{k_{cmn}}{t} J_1(k_{cmn}ct) u(t), \\ g_{mn}(t) &= \frac{k_{cmn}}{t} J_1(k_{cmn}ct) u(t) - k_{cmn}^2 c J_0(k_{cmn}ct) u(t), \end{aligned} \quad (4-22)$$

其中 $u(t)$ 表示单位阶跃函数, $J_n(\cdot)$ 表示 n 阶贝塞尔 (Bessel) 函数。最后, 将得到的时域算子替换公式(4-12)和(4-13)中的频域算子即可得到时域波端口边界条件。

4.3 波端口边界上的 NDGTD-WE 方程

为了将上一节中推导出的时域形式的波端口边界条件应用到 NDGTD-WE 系统中, 我们需要修改主方程(2-25)中在边界 Γ_b 上的数值流项, 和 ABC 边界条件类似, 可以写出波端口边界条件对应的内罚流表达式

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E}|_{\Gamma_P}, \hat{\mathbf{n}} \times (\mu^{-1} \mathbf{q})^* = \mu^{-1} \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \mathbf{E}|_{\Gamma_P}. \quad (4-23)$$

其中 Γ_P 表示单元中的波端口边界。由于在波端口边界面 Γ_P 上 $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^* - \mathbf{E}) = 0$, 因此主方程将只剩下一项约束条件。同样地, 我们对这一项使用伽辽金测试过程, 在包

含入射波的端口上有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \Phi_i^x dS &= \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \mathbf{U}^{inc} \cdot \Phi_i^x dS - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} P(\mathbf{E}) \cdot \Phi_i^x dS \\
&= \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}^{inc}) \cdot \Phi_i^x dS \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}(t) \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \int_{S_P} \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \cdot \mathbf{E}^{inc} dS \right\} \cdot \Phi_i^x dS \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn}(t) \mathbf{e}_{mn}^{TE} \int_{S_P} \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot \mathbf{E}^{inc} dS \right\} \cdot \Phi_i^x dS \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}(t) \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \int_{S_P} \mathbf{e}_{tmn}^{TM} \cdot \mathbf{E} dS \right\} \cdot \Phi_i^x dS \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn}(t) \mathbf{e}_{mn}^{TE} \int_{S_P} \mathbf{e}_{mn}^{TE} \cdot \mathbf{E} dS \right\} \cdot \Phi_i^x dS,
\end{aligned} \tag{4-24}$$

其中 S_P 表示整个波端口边界面。对于只包含接收端的波端口边界条件，只需要将上式中的入射场 \mathbf{E}^{inc} 置零即可。为了便于进行接下来的推导，现假设入射场以主模 TE_{10} 模作为激励，即 $\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{e}_{10}^{TE} f(t)$ ，并且在波导结构中靠近波端口边界处也仅存在 TE_{10} 模，在实际中这种假设也是合理的。那么，上式可以被化简为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \Phi_i^x dS &= - \frac{2}{\mu} \left[\frac{1}{c} \frac{d}{dt} + h_{10}(t) * \right] f(t) \int_{\Gamma_P} \mathbf{e}_{10}^{TE} \cdot \Phi_i^x dS \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \left\{ \left[\frac{1}{c} \frac{d}{dt} + h_{10}(t) * \right] \mathbf{e}_{10}^{TE} \int_{S_P} \mathbf{e}_{10}^{TE} \cdot \mathbf{E} dS \right\} \cdot \Phi_i^x dS.
\end{aligned} \tag{4-25}$$

我们注意到在上式右手边公式的最后一项包含了在整个波端口面 S_P 上的积分，并且在它的前面含有对时间求导数的算子 d/dt 。在采用中心差分时间策略的 NDGTD-WE 系统里需要将时域算子直接施加到波端口面上所有的未知量中，而不是先通过计算整个面上的积分得到模式系数，再将算子施加到模式系数上，其原因是这样会导致时间步失配进而引起系统不稳定。如果单独来看这一项，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \left\{ \left[\frac{1}{c} \frac{d}{dt} + h_{10}(t) * \right] \mathbf{e}_{10}^{TE} \int_{S_1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \cdot \mathbf{E} dS \right\} \cdot \Phi_i^x dS \\
&= \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_P} \mathbf{e}_{10}^{TE} \cdot \Phi_i^x dS \left[\frac{1}{c} \frac{d}{dt} + h_{10}(t) * \right] \sum_{k=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_p} \int_{S_P^k} \mathbf{e}_{10}^{TE} (E_{xj}^k \Phi_j^x + E_{yj}^k \Phi_j^y + E_{zj}^k \Phi_j^z) dS,
\end{aligned} \tag{4-26}$$

其中 N_w 表示波端口面 S_P 上的单元个数。不难发现，在上式中由于时间算子 d/dt 直接作用到波端口边界所有单元的未知量中，这将导致每个单元中的未知量都与整个波端口边界相关。为了将 NDGTD-WE 系统和当前的波端口边界方程适配，需要将

NDGTD-WE 的矩阵方程写成隐式的形式，即

$$\begin{aligned} ([M_p] - [W_p]) \mathbf{e}_p^{n+1} &= (2[M_p] - \Delta t^2 [F_p]) \mathbf{e}_p^n - \Delta t^2 \sum_f [P_{p,f}] \mathbf{e}_{p,f}^n - [M_p] \mathbf{e}_p^{n-1} \\ &\quad - [W_p] \left(\frac{\mathbf{e}_p^{n-1}}{2c\Delta t} - h_{10}(t) * \mathbf{e}_p^n \right) - 2 \left(\frac{1}{c} \frac{d}{dt} + h_{10}(t) * \right) f(t) \mathbf{C}_p, \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中矩阵 $[M_p]$ 是由(2-42)式中的矩阵 $[M_k]$ 所张成的对角矩阵，即

$$[M_p] = \text{diag}([M_1], [M_2], \dots, [M_{N_w}]), \quad (4-28)$$

同样地，矩阵 $[F_p]$ 和 $[P_{p,f}]$ 也被类似定义，并且

$$\mathbf{e}_p = \left\{ E_{x1}^1, \dots, E_{xN_p}^1, E_{y1}^1, \dots, E_{yN_p}^1, E_{z1}^1, \dots, E_{zN_p}^1, E_{x1}^2, \dots, E_{xN_p}^2, \dots, E_{zN_p}^{N_w} \right\}^T, \quad (4-29)$$

$$\mathbf{C}_p = \left\{ \begin{array}{l} \int_{S_P^1} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_1^x dS, \dots, \int_{S_P^1} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_{N_p}^x dS, \int_{S_P^1} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_1^y dS, \dots, \\ \int_{S_P^1} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_{N_p}^y dS, \int_{S_P^1} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_1^z dS, \dots, \int_{S_P^1} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_{N_p}^z dS, \dots, \\ \int_{S_P^2} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_1^x dS, \dots, \int_{S_P^2} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_{N_p}^x dS, \dots, \int_{S_P^{N_w}} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_{N_p}^z dS \end{array} \right\}^T, \quad (4-30)$$

需要注意的是，由波端口边界条件产生的矩阵 $[W_p]$ 是一个满元素矩阵，其定义为

$$W_p(i, j) = \int_{S_P^{k(i)}} \mu^{-1} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_{n(i)}^{p(i)} dS \cdot \int_{S_P^{k(j)}} \mathbf{e}_{10}^{TE} \Phi_{n(j)}^{p(j)} dS, \quad (4-31)$$

上式中的 $n(i)$ 、 $k(i)$ 和 $p(i)$ 通过如下规则计算得到

$$\begin{aligned} n(i) &= \text{mod}(i, N_p), k(i) = \text{fix}(i/3N_p) + 1, \\ p(i) &= \begin{cases} x, \text{fix}(\text{mod}(i, 3N_p)/N_p) = 0 \\ y, \text{fix}(\text{mod}(i, 3N_p)/N_p) = 1 \\ z, \text{fix}(\text{mod}(i, 3N_p)/N_p) = 2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4-32)$$

这里的 $\text{mod}()$ 表示取余函数， $\text{fix}()$ 表示取整函数。

值得一提的是，虽然我们在(4-27)式中只考虑到了波导中仅存在 TE_{10} 模式情况，但对于任意我们感兴趣的模式 TE_{mn}/TM_{mn} 都可以通过类似的过程得到。另外，对于任意多个端口的波导结构，其 S 参数可以通过如下公式得到

$$S_{ij} = 20 \log \left[\frac{A_i(\omega)}{A_j(\omega)} \right], \quad (4-33)$$

其中 i, j 表示端口编号，并且

$$A_i(\omega) = \text{FFT} \left[\int_{S_i} \mathbf{E}_t(t) \cdot \mathbf{e}_{mn}^{TE/TM} dS \right], \quad (4-34)$$

上式中 S_i 指的是第 i 个端口的截面，算子 $\text{FFT}[\cdot]$ 表示傅里叶变换。如果端口包含激励源，那么上式将变为

$$A_i(\omega) = \text{FFT} \left[\int_{S_i} (\mathbf{E}_t(t) - \mathbf{E}^{inc}(t)) \cdot \mathbf{e}_{mn}^{TE/TM} dS \right]. \quad (4-35)$$

4.4 辅助方程方法代替时域卷积

我们注意到(4-27)式中包含有卷积项 $h_{mn}(t) * f(t)$, 通常按照卷积的定义直接进行计算是一件非常耗时的事情, 其计算复杂度为 $O(n^2)$ 。为了缓解这个问题, 在本小节中我们将介绍一种辅助方程方法来代替直接计算卷积。

首先, 将贝塞尔函数写成如下积分形式

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi, \quad (4-36)$$

将上式代入到卷积方程中, 有

$$\begin{aligned} h_{mn}(t) * f(t) &= \frac{2k_{cmn}^2 c}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \int_0^t \cos[k_{cmn} c(t-\tau) \cos \varphi] f(\tau) d\tau d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \frac{\partial g(t, \varphi)}{\partial t} d\varphi, \end{aligned} \quad (4-37)$$

其中 $g(t, \varphi)$ 是一个辅助方程, 定义为

$$g(t) = k_{cmn} \int_0^t \frac{\sin[k_{cmn} c(t-\tau) \cos \varphi]}{\cos \varphi} f(\tau) d\tau, \quad (4-38)$$

然后, 通过使用卷积恒等式

$$\frac{d}{dt} [x(t) * y(t)] = x'(t) * y(t) = x(t) * y'(t), \quad (4-39)$$

可以得到辅助方程 $g(t, \varphi)$ 对时间的导数, 即

$$\frac{\partial g(t, \varphi)}{\partial t} = k_{cmn}^2 c \int_0^t \cos[k_{cmn} c(t-\tau) \cos \varphi] f(\tau) d\tau. \quad (4-40)$$

所提出的辅助方程 $g(t, \varphi)$ 满足如下的二阶差分方程

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + (k_{cmn} c \cos \varphi)^2 \right] g(t, \varphi) = f(t) k_{cmn}^2 c. \quad (4-41)$$

我们可以通过计算上式的差分方程, 求出 $\partial g(t, \varphi) / \partial t$ 在 $[0, \pi/2]$ 上每个高斯积分点的值, 然后再将其代入到(4-37)中, 最后通过高斯积分即可得到卷积的结果。如果我们选用中心差分的时间策略, 那么在高斯积分点 φ_i 上有

$$g_{\varphi_i}^{n+1} = \Delta t^2 \left(-g_{\varphi_i}^n c^2 k_{cmn}^2 \cos^2 \varphi_i + k_{cmn}^2 f(t^n) \right) + 2g_{\varphi_i}^n - g_{\varphi_i}^{n-1}, \quad (4-42)$$

在 n 时刻对时间的偏导为

$$\frac{\partial g_{\varphi_i}^n}{\partial t} = \frac{g_{\varphi_i}^{n+1} - g_{\varphi_i}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (4-43)$$

为验证辅助方程方法的正确性, 现假设有一个型号为 WR-90 的波导, 其端口尺寸为 $22.86\text{mm} \times 10.16\text{mm}$, 并且将 $f(t)$ 设置为 8-12GHz 的调制高斯脉冲, 时间步

大小设置为 $\Delta t = 4 \times 10^{-12}$ s，分别使用直接卷积方法和辅助方程方法计算式(4-37)。图4.2显示了两种方法的结果对比，其中辅助方法方法采用的是 10 点高斯积分，可以看出辅助方程方法的结果和直接计算卷积一致。图4.3展示了两种方法随着时间步进增加每个时间步用来计算卷积所消耗的时间对比，该计算结果是基于 AMD Ryzen 5 2500U@2.00GHz 的平台使用 Matlab 2018b 软件计算所得到的，可以看出直接计算卷积的方法所消耗的时间随着时间步增加呈线性增长，而辅助方程方法所消耗的时间在每个时间步中都是相同的，其计算复杂度为 $O(n)$ 。

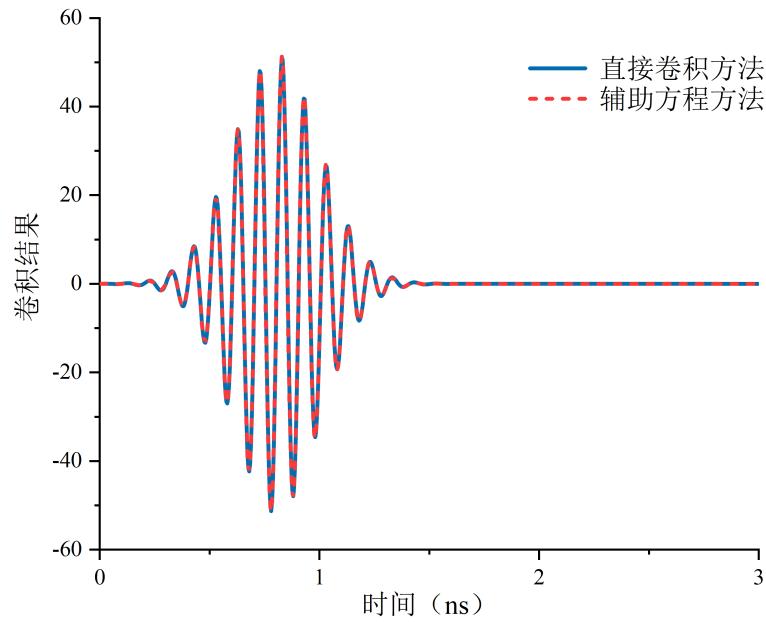


图 4.2 辅助方程方法和直接卷积方法计算结果对比

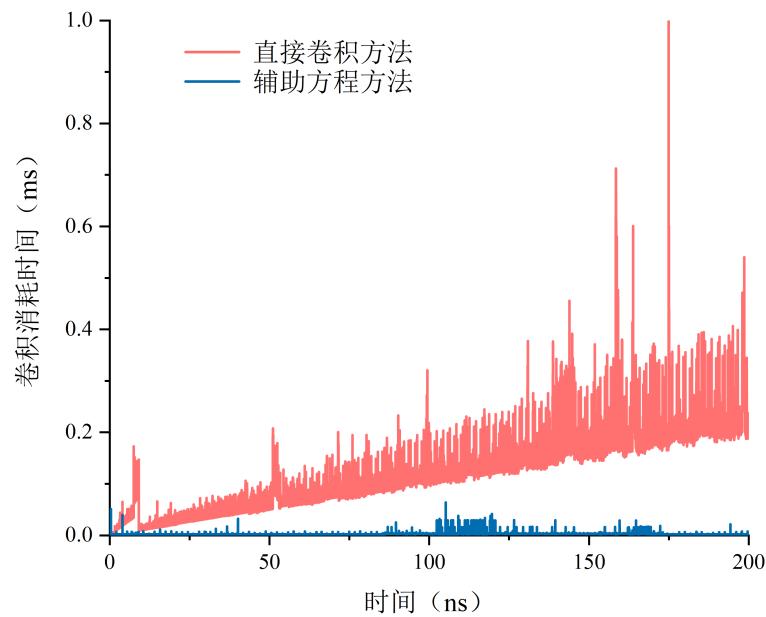


图 4.3 辅助方程方法和直接卷积方法消耗时间对比

4.5 数值算例和分析

4.5.1 WR-90 矩形空波导

为了验证所提出波端口边界条件的正确性，我们通过计算一段空波导来观察波导中场的传播情况。现考虑一段型号为 WR-90 的波导，其端口尺寸为 $(a \times b) = (22.86\text{mm} \times 10.16\text{mm})$ ，长度为 40mm，如图4.4所示。在波导的两端分别设置波端口边界条件，并且在 $z = 0\text{mm}$ 处的端口设置一个主模激励源 $\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{e}_{10}^{TE} f(t)$ ，其频率范围为 8-12GHz。使用 $\lambda_{12\text{GHz}}/10$ 作为最大尺寸来剖分计算区域，共得到 3685 个四面体，如图4.5所示。

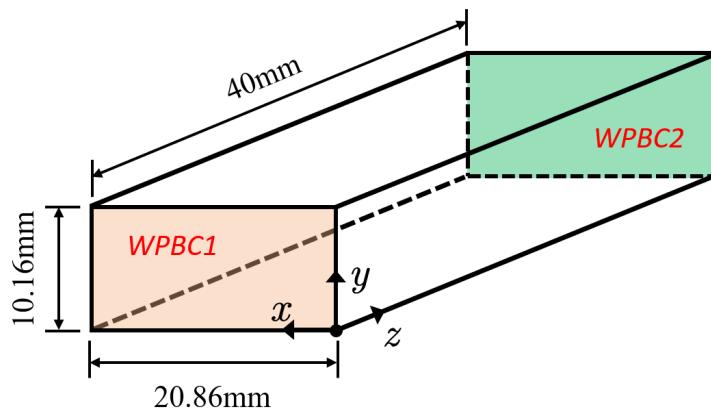


图 4.4 WR-90 波导几何结构

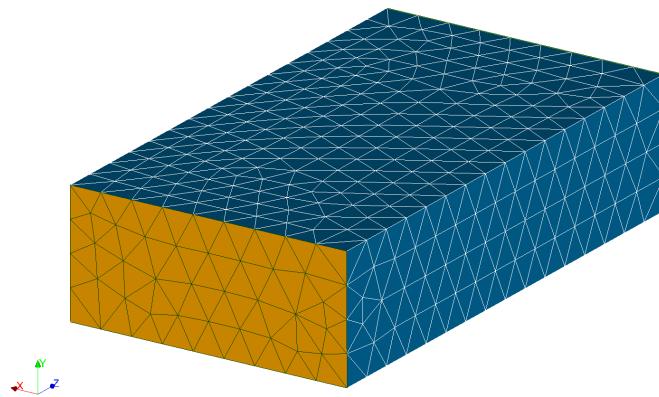


图 4.5 WR-90 波导网格剖分

为保证结果的准确性，我们使用二阶基函数计算该模型，并通过使用(4-33)式计算该结构的 S 参数，结果如图4.6所示，可以看出 S_{11} 在主模工作频率范围内小于-20dB，并且 S_{21} 几乎无衰减，验证了我们所提出波端口边界的正确性。图4.7和图4.8分别展示了波导在 $t = 0.70\text{ns}$ 和 $t = 0.72\text{ns}$ 时的瞬态电场云图。

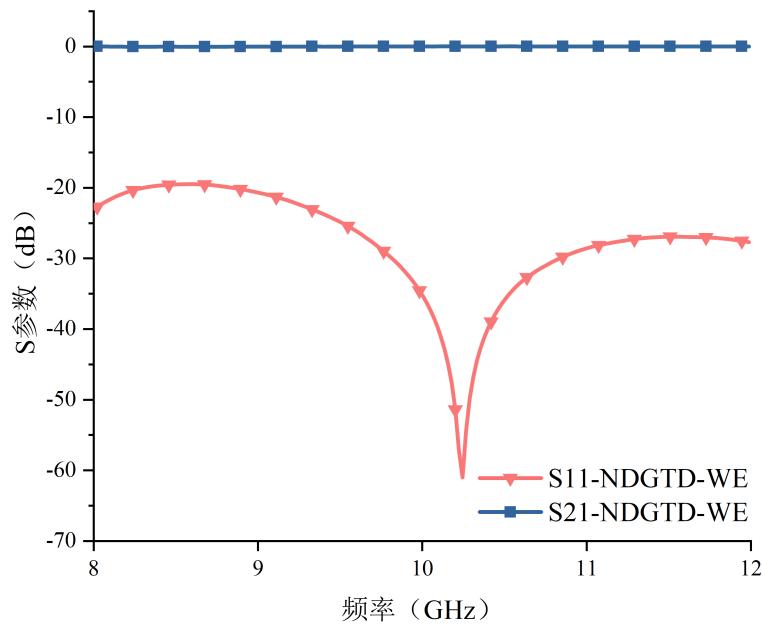


图 4.6 WR-90 波导的 S 参数

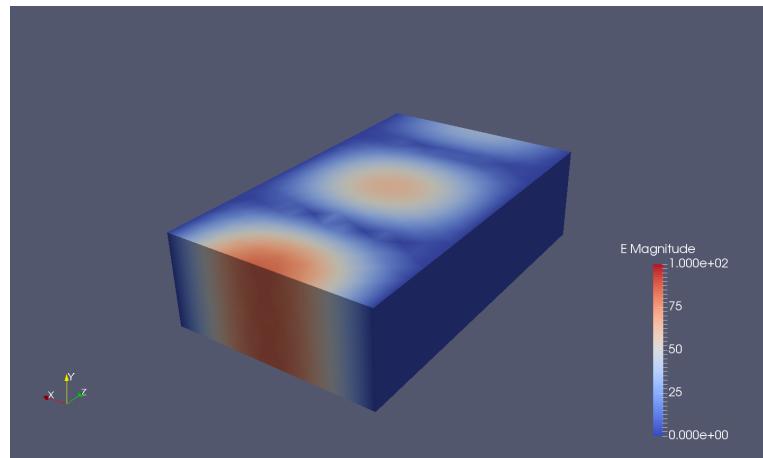


图 4.7 WR-90 波导在 $t = 0.70\text{ns}$ 时的瞬态电场云图

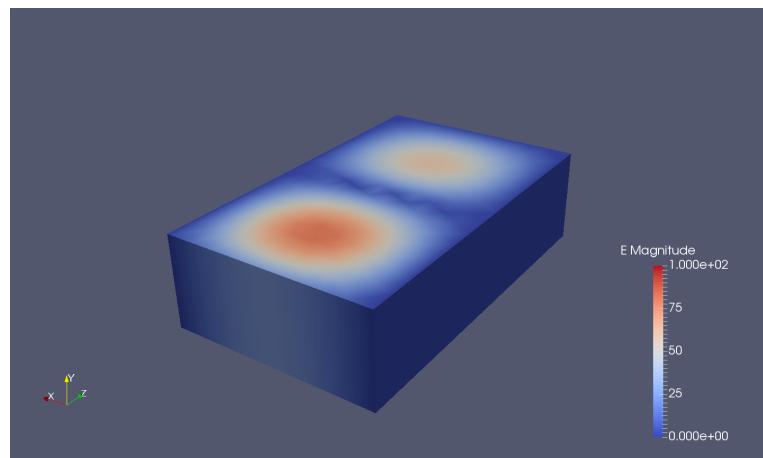


图 4.8 WR-90 波导在 $t = 0.72\text{ns}$ 时的瞬态电场云图

4.5.2 WR-75 波导滤波器

在第二个算例中，为了验证所提出的波端口边界条件在实际问题中的求解能力，我们考虑一个全金属的 WR-75 波导滤波器，如图4.9所示，它的尺寸参数分别为 $a=19.05\text{mm}$, $b=9.525\text{mm}$, $l_1=15.68\text{mm}$, $l_2=17.605\text{mm}$, $w_1=10.52\text{mm}$, $w_2=7.089\text{mm}$, $w_3=6.52\text{mm}$, $t=2\text{mm}$ 。我们使用 10-12GHz 的调制高斯脉冲在其中一个端口来激励 TE_{10} 模式，并且在另一端设置波端口边界条件作为吸收边界。使用 $\lambda_{12\text{GHz}}/10$ 作为最大剖分尺寸，共得到 18157 个单元，如图4.10所示。我们使用二阶基函数的 NDGTD-WE 方法来计算该模型，其中时间步 Δt 设置为 $1\text{e-}13\text{s}$ ，并且在 $2\text{e-}8\text{s}$ 处终止计算。在基于 Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1230 v5 @ 3.40GHz 的平台上采用 8 核 CPU 进行计算，整个过程耗时 13410s，内存占用 1271MB。计算结果如图4.11所示，通过和基于 FEM 方法的 HFSS 商业电磁仿真软件的计算结果对比，可以发现本文所提出的方法具有良好的计算精度。

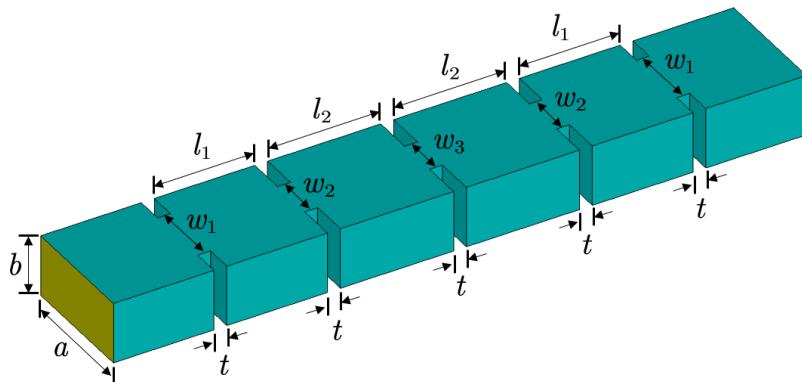


图 4.9 WR-75 全金属波导滤波器示意图

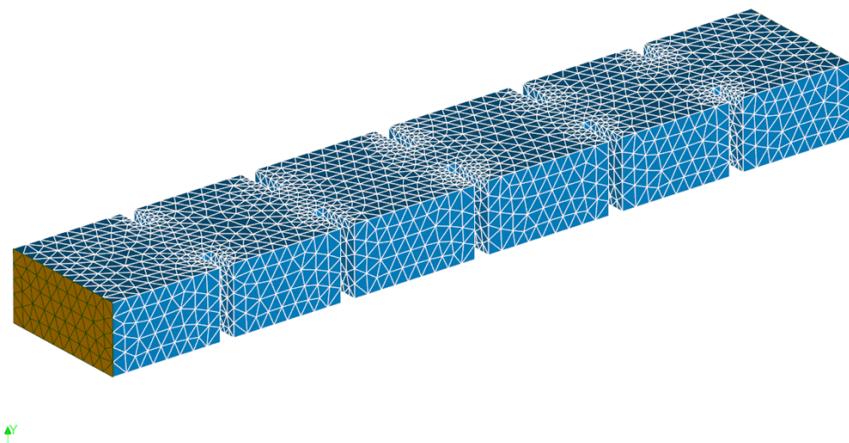


图 4.10 WR-75 全金属波导滤波器的网格剖分

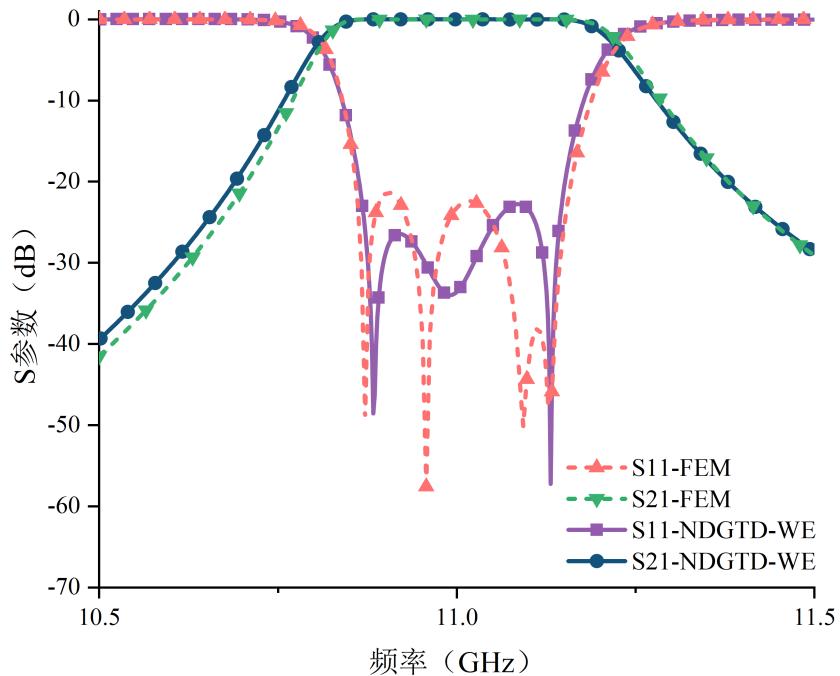


图 4.11 WR-75 全金属波导滤波器的 S 参数

4.5.3 介质波导滤波器

作为第三个算例，我们通过计算一个介质波导滤波器来验证该方法在计算包含介质块的波导结构中的计算精度。介质波导滤波器的结构如图4.12所示，其中介质块的相对介电常数为 6.0，我们通过在其中一个端口施加一个频率范围为 10-14GHz 的调制高斯脉冲源，并且以 TE_{10} 模作为激励模式，然后在另一个端口设置波端口边界条件作为吸收边界。

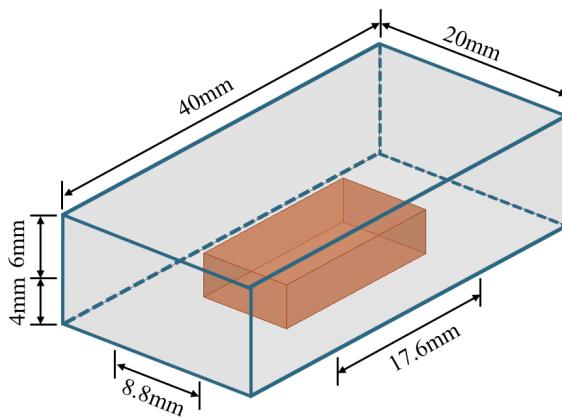


图 4.12 介质波导滤波器示意图

我们使用 $\lambda_{12\text{GHz}}/10$ 作为最大剖分尺寸，共得到 3520 个四面体单元，如图4.13所示。分别采用本文中的 NDGTD-WE 方法和基于 FEM 方法的 HFSS 商业仿真软件来计算该模型，其中 NDGTD-WE 方法使用二阶基函数，时间步 Δt 设置为 2e-13s，并

且在 $4e-9s$ 处终止计算。在基于 Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1230 v5 @ 3.40GHz 的平台上采用 8 核 CPU 进行计算，整个过程耗时 396s，内存占用 288MB。图4.14展示了 NDGTD-WE 方法和 FEM 方法的计算结果对比，可以发现两种方法计算结果基本吻合，进一步验证了该方法的正确性。

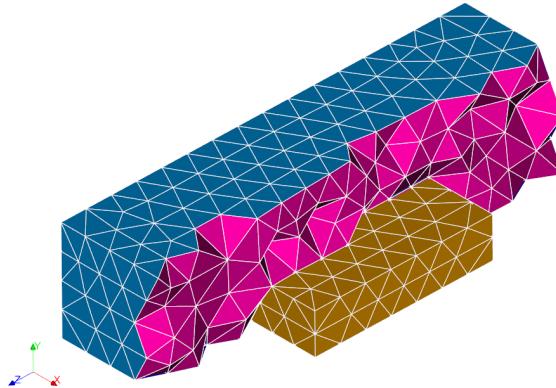


图 4.13 介质波导滤波器网格剖分

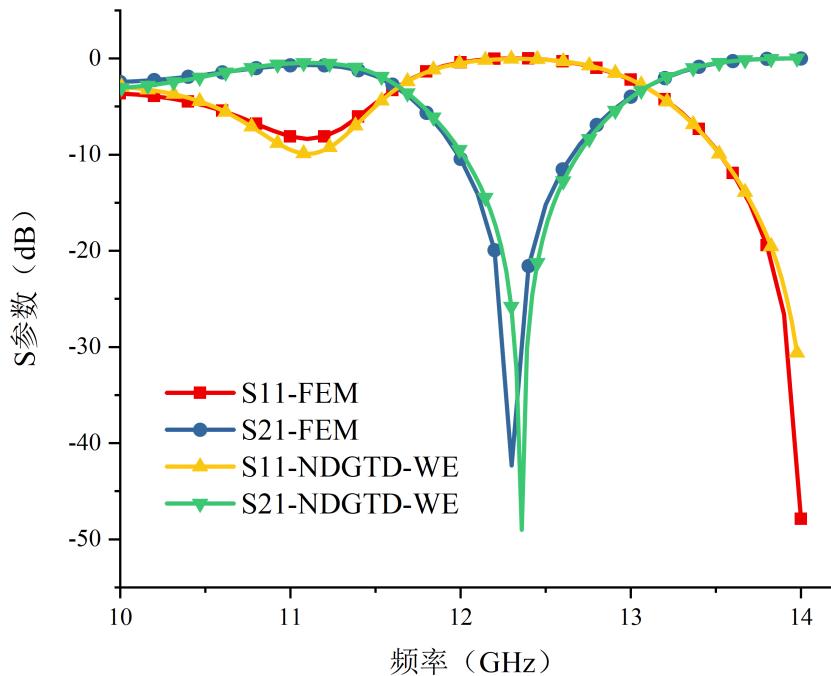


图 4.14 介质波导滤波器的 S 参数

4.6 本章小结

在本章中，我们首先从频域波端口边界条件出发，推导了时域形式的波端口边界条件，然后将其加入到了 NDGTD-WE 方法中，通过使用辅助方程方法代替直接求时域卷积提高了计算效率，最后通过数值算例验证了该波端口边界条件的正确性从而扩展了 NDGTD-WE 方法求解问题的范围。

第五章 基于 GPU 加速的 LS-NDGTD-WE 方法

5.1 引言

在面前的几章中，虽然我们建立了 NDGTD-WE 方法并开发了一些实用的功能，但在实际工程中求解电磁仿真问题的能力仍很有限。其原因是在面临一些大规模问题的求解中，非低存储的 NDGTD-WE 方法由于内存消耗高而导致求解能力过于依赖计算机硬件设备，人们需要付出高昂的硬件成本。另一方面，如果我们采用低存储的 LS-NDGTD-WE 方法，这样做虽然能很大程度上缓解内存消耗的压力，但其带来的缺点是人们无法忍受的计算时长。实际上，这个矛盾也一直是计算电磁学领域中热门的话题，人们总是希望找到一种既能算大规模又能算得快，同时还能保证计算精度的方法。

幸运的是，随着最近几年计算机并行技术的快速发展，尤其是 GPU 计算架构的发展已经达到了在通用计算能力方面要比同等价位的 CPU 高很多的地步，又得益于 DGTD 方法的高并行特点，计算电磁学领域的人们又看到了新的曙光。在 2009 年，Klöckner 等人首次将 GPU 加速技术应用到了 DGTD 方法中，他们对比了单精度的 DGTD 方法使用单核 GPU 和单核 CPU 运行在计算效率上的差别，获得了 40-60 倍的加速比^[41]。之后，N. Gödel 等人在文献 [42] 中使用 GPU 实现了 DG-FEM 方法，在计算散射问题中获得了 30-40 倍的加速比。L. Zhao 等人在文献 [31] 中通过使用 GPU 加速 DGTD-ME 方法，在计算电大尺寸问题中达到了 24-75 倍的加速比。

综上所述，使用 GPU 加速技术能够给适合并行计算的算法带来巨大的性能提升，GPU 并行计算发展到现在也已经非常成熟，越来越多的新服务器采用“MPI+GPU”的异构平台，以更小的成本获得更高的计算效率。因此，在本章中我们将探讨如何使用 GPU 加速技术来实现本文所提出的 NDGTD-WE 方法。

5.2 CUDA 并行计算架构

作为并行计算的产物，GPU 在早期主要用于图形开发，对于非图形开发者很难利用它强大的计算能力。直到显卡厂商 NVIDIA 于 2007 年 6 月推出统一计算设备架构（Compute Unified Device Architecture, CUDA）后才逐渐让 GPU 并行计算被不同行业的开发人员所使用，该架构包含了 GPU 内部的并行计算引擎和 CUDA 指令集架构，并且让开发人员可以使用 C 语言（CUDA3.0 已经开始支持 C++ 和 FORTRAN 语言）进行 GPU 程序的编写。因此，在使用 GPU 硬件加速技术之前，我们有必要了解一些 GPU 和 CUDA 相关的知识。

5.2.1 GPU 的基本特性

GPU 作为并行计算设备之所以能够大幅地提升计算性能，是因为 GPU 的设计是通过增加更多的计算核心来增加性能，而摒弃了最大限度提高时钟频率、预测执行、分值预测和存储转发等传统的提升 CPU 性能的方法，图5.1展示了 CPU 和 GPU 不同的硬件架构。因此，GPU 被专门用于不需要复杂逻辑处理的计算密集型、高度并行的数据处理。通常而言，得益于 GPU 硬件架构的优势，在单双精度浮点数计算中 GPU 比 CPU 基本都有至少 10 倍以上的加速。

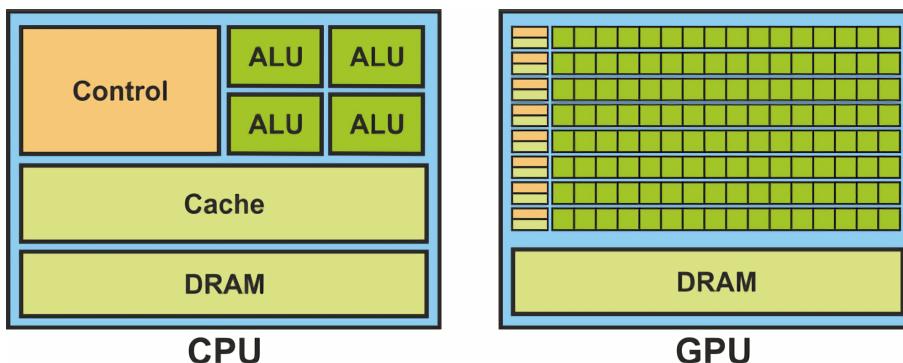


图 5.1 CPU 与 GPU 架构对比图

由于 GPU 对复杂流程控制的要求较低，可以通过计算而不是大数据高速缓存来隐藏存储器访问延迟，因此当实际问题可以转化为许多数据元素并行执行相同程序，并行计算算术强度高的问题时，使用 GPU 实现能获得更高的效率。不同部件并行计算时的计算顺序是无序的，如何控制各个部件的无序并行和有序组合就成了与传统串行计算算法最大的区别。并行计算的思维与串行计算的有很大不同，为了利用 CUDA 进行 GPU 计算编程，我们需要对 CUDA 的编程架构进行深入了解。

5.2.2 CUDA 编程架构

在 CUDA 的编程架构中，GPU 作为 CPU 的协处理器，与 CPU 共同协作完成计算任务。如图5.2所示，一个完整的 CUDA 程序由主机端 (Host) 和设备端 (Device) 代码组成，主机代码在 CPU 上串行计算，主要是数据预处理、逻辑判断等 CPU 擅长的操作，而大量的数据计算放到 GPU 中并行执行，这种设备端代码称为内核 (Kernel)。每个内核函数被抽象成一个网格 (Grid)，网格划分成很多个相同形状的线程块 (Block)，每一个线程块中又有许多的线程 (Thread)。执行计算时，块内的线程是并行的，块与块之间也是并行的，即每个内核函数都拥有两个层次的并行。而在 SM 2.x 之后的架构，还增加了并发运行多个内核的能力，只要每个内核的内存块足够小（使一个内核不会占满整个 GPU 的资源），在不同 CUDA 流 (Stream) 中的内核就可以并行执行。这样，实际上 GPU 计算存在着三层并行机制，对应不同粒度的并行计算。

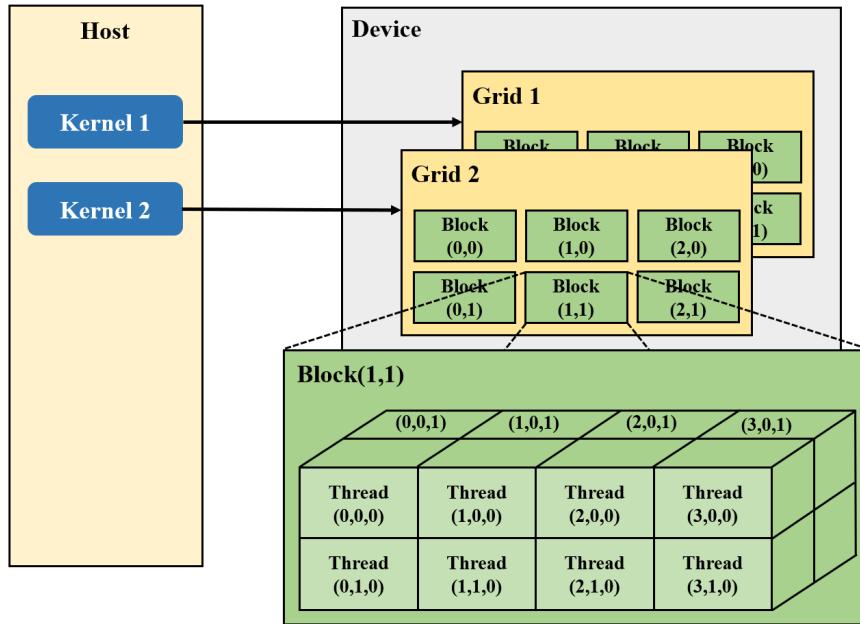


图 5.2 CUDA 编程架构

这些抽象概念在实际的应用中很有价值，它表示我们可以把大问题划分成不同流中的粗粒度并行问题，每一个粗粒度并行问题又可以划分成多个线程块并行处理的粗粒度子问题，而每一个粗粒度子问题最终分割成块内线程并行处理的细粒度线程任务，从而与 GPU 并行层次一一对应，达到理论上最佳的并行效率。

5.3 CUDA 实现 LS-NDGTD-WE 方法

由于 GPU 显存容量和 CPU 内存相比来说要小很多，当求解问题的规模超过了 GPU 显存容量时，计算过程中就需要在 CPU 和 GPU 之间通过 PCIe 接口频繁传输数据，但 PCIe 接口的传输带宽很低，造成了大部分时间都浪费在传输数据的现象，导致整体计算效率低下。因此，为了使需要传输的数据减小以达到传输和计算的时间相互重叠的目的，我们使用低存储的 LS-NDGTD-WE 方法来进行 CUDA 的实现，以此提高加速性能并减小内存占用。

5.3.1 单元网格与 GPU 网格的映射

根据前文对 CUDA 编程架构的分析，我们知道 GPU 并行计算中有三层并行机制，如何将 LS-NDGTD-WE 方法有效地融合到这三层并行机制中是我们当前需要解决的问题。首先，由于 DGTD 方法中单元与单元之间的求解过程相互独立，GPU 并行计算的第一步就是要将实际的单元映射到 GPU 架构中。每个 GPU 可以抽象为一个网格，网格可以是一维、二维、三维的，当一个尺寸为 $(\text{dimX} \times \text{dimY} \times \text{dimZ})$ 的

网格被声明，就意味着有 $(\text{dimX} \times \text{dimY} \times \text{dimZ})$ 个相同大小的线程块被调度在硬件上执行运算，而且这些运算都是并行的。因此，我们采用一维的网格声明，把模型剖分得到的每一个四面体单元交由一个线程块来处理，这就构成了第一层并行。

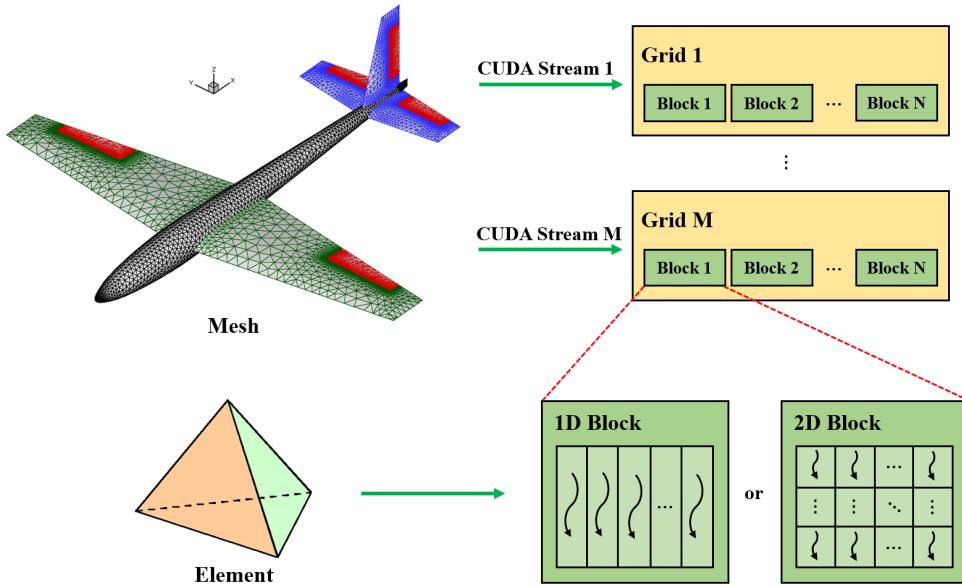


图 5.3 有限元网格与 GPU 网格的映射示意图

由于实际的 GPU 网格能运行的最大线程块数量是 65535，当单元数很大时，需要将其以 65535 为界分成不同的组，每一组用一个 CUDA 流来调用内核。只要硬件允许，每个 CUDA 流下的内核都是并行的，这就构成最外层的并行。又因为每个线程块又可划分为很多条并行执行的线程，每个线程块的线程声明也是可以一维、二维、三维的，因此这就构成了第三层并行。

5.3.2 GPU 端的矩阵还原与矩阵向量乘

为了适应 GPU 网格容量有限的特性，首先我们在 CPU 端将还原矩阵所需要的参数进行分段存储。然后，在每个时间步中通过调用两个 CUDA 流，一个用于异步传输矩阵还原系数，另一个用于处理矩阵还原和矩阵向量乘操作。由于这两个流之间是同时进行的，这就表示传输数据和计算时间是互相重叠的，当计算时间长于传输数据时间，就可以忽略掉传输数据的时间。

在 LS-NDGTD-WE 方法中，我们一共在参考四面体中定义了 206 个通用矩阵（Universal Matrix）用于还原实际四面体中的矩阵，每个矩阵的维度都为 $N_p \times N_p$ 。因此，在用于矩阵还原和矩阵向量乘的 CUDA 流中为了获得更好的性能，首先通过使用 `dim3 Block(Np, Np, 1)` 语句定义一个和矩阵维度相同，并且与矩阵操作最相符的二维线程块结构，如图5.4所示，其中每一条线程对应于矩阵中一个元素的还原过程。然后再进行矩阵之间的重组，得到 NDGTD-WE 主方程(2-42)中用于迭代的矩阵。

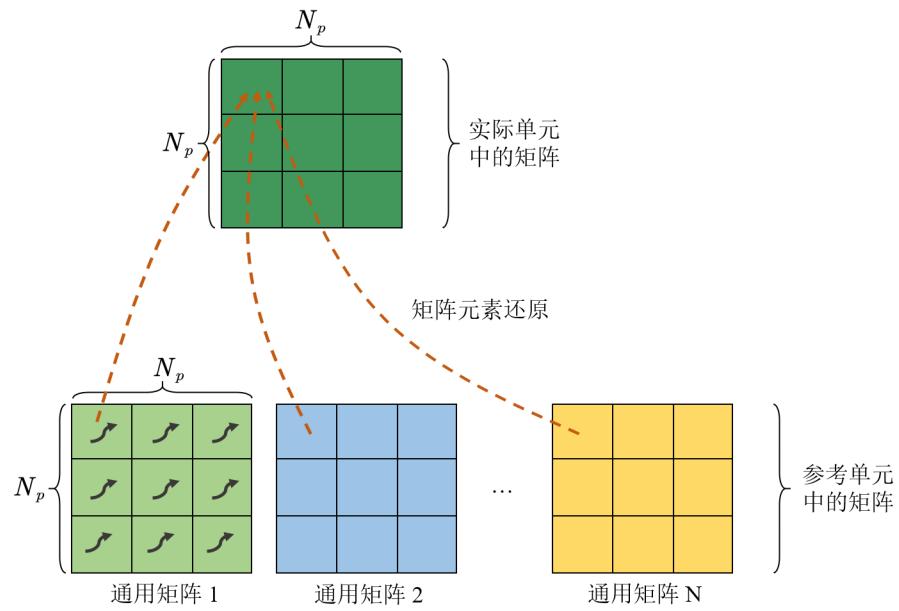


图 5.4 GPU 端的矩阵还原过程

在矩阵元素还原完成后，我们再调用一维线程块结构进行矩阵向量乘操作。为了减少线程分支，最大限度地发挥 GPU 并行计算能力，将每个单元所需的矩阵和向量进行重组，重组规则是将单元中所有的矩阵按照一定顺序排成一个长矩阵，所有的向量保持和矩阵相同顺序排成一列长向量，如图5.5所示。重组的整个过程都由 GPU 操作并且存放在 GPU 中读写速度最快的共享内存中。矩阵和向量都重组完成后，就可以执行矩阵向量乘操作。

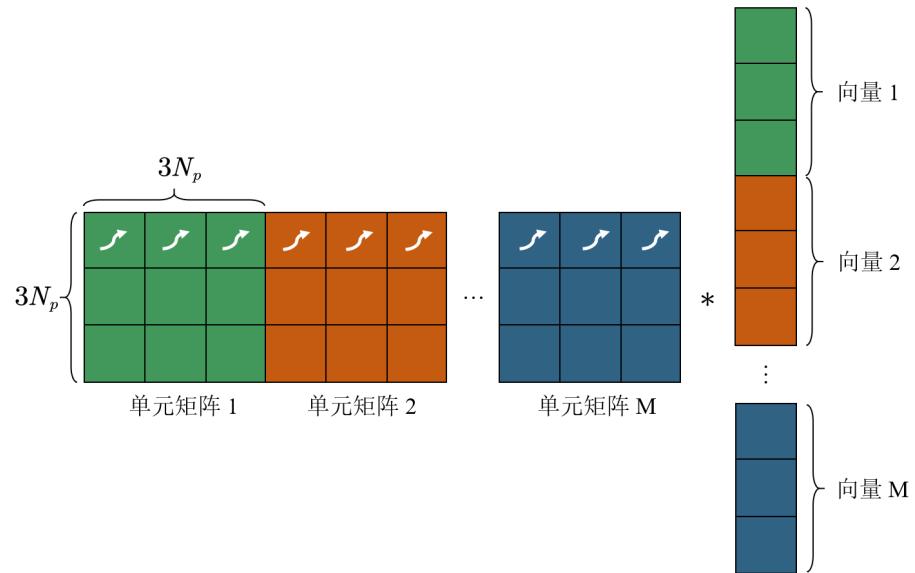


图 5.5 GPU 端的矩阵向量乘过程

待所有单元都计算完成后，我们将在 GPU 端计算得到的场值更新到 CPU 端，并调用 `cudaMemcpy()` 函数将源激励从 CPU 端传输到 CPU 端，执行同步过程，整个计

算过程如图5.6所示。至此，我们就完成了低存储 LS-NDGTD-WE 方法的 GPU 实现。

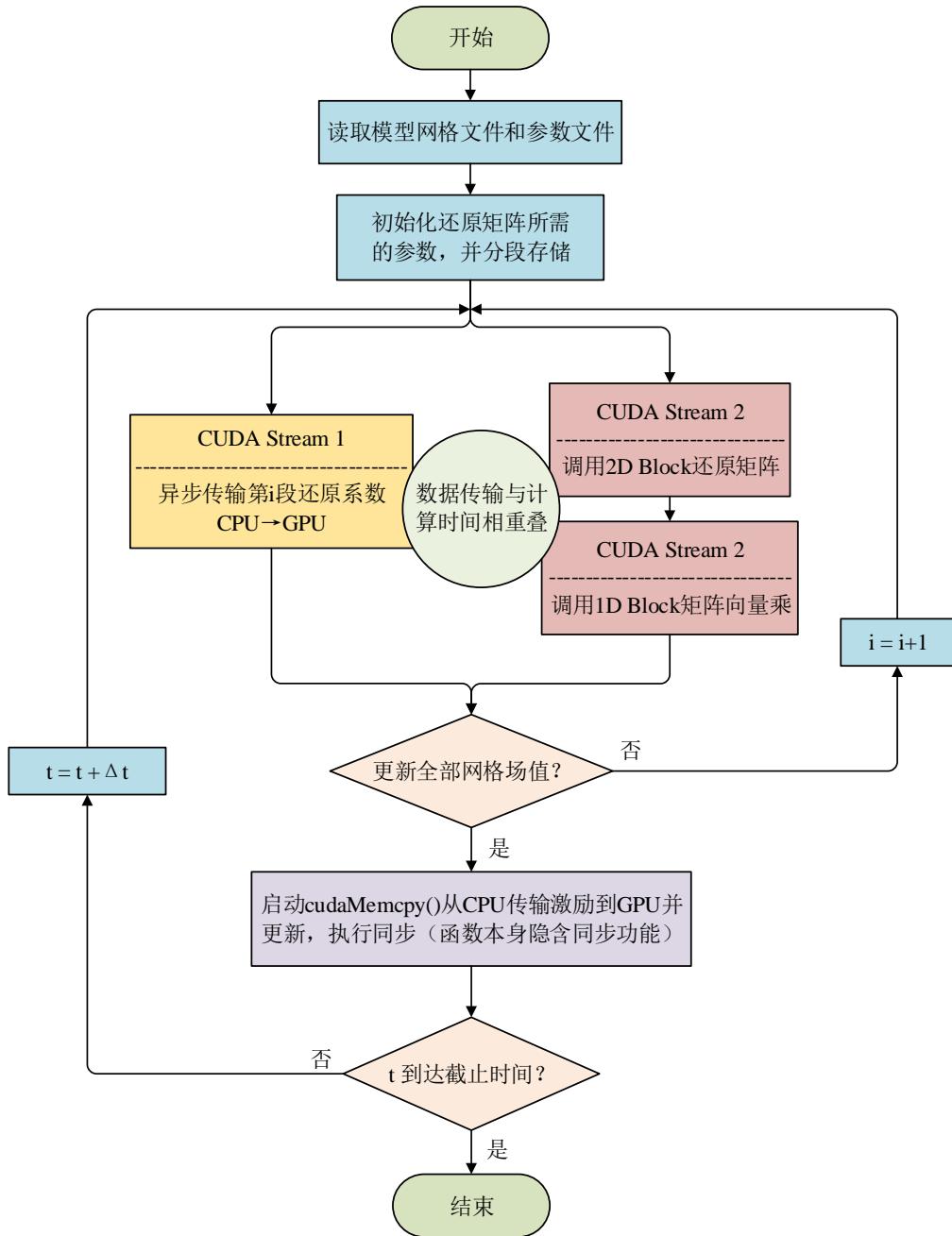


图 5.6 GPU-LS-NDGTD-WE 方法的计算过程流程图

5.4 数值算例和分析

为了验证本章所提出的基于 GPU 加速的 LS-NDGTD-WE 方法 (GPU-LS-NDGTD-WE) 方法正确性和加速性能，我们考虑一个基于 Minkowski 分形结构的多层次频率选

择表面^[43]，它由四个 $\varepsilon_r = 2.65$ 的介质基板和五个分形结构金属贴片组成。其中分形结构如图5.7所示，它的尺寸参数分别为 $P_x = 7.5\text{mm}$, $P_y = 7.5\text{mm}$, $W_{SL} = 0.2\text{mm}$, $L = 4.5\text{mm}$, $q = 0.8$, $SL = 6\text{mm}$, $t = 0.4$ 。仿真模型如图5.8所示，通过在模型的左右两侧施加 PMC 边界和在上下两侧施加 PEC 边界来模拟周期边界条件，并且在前后两侧使用一阶 ABC 作为吸收边界条件。我们在离最外层金属贴片 10mm 远处的地方设置一个 \hat{z} 方向极化和沿 \hat{y} 方向入射的总场/散射场激励源，其形式为 7-13GHz 的调制高斯脉冲源。使用 $\lambda_{13\text{GHz}}/10$ 作为模型的最大剖分尺度，共得到 23937 个四面体单元。通过在沿 \hat{y} 方向模型前后两侧的中心位置采集瞬态电场值并通过傅里叶变换得到其 S 参数。

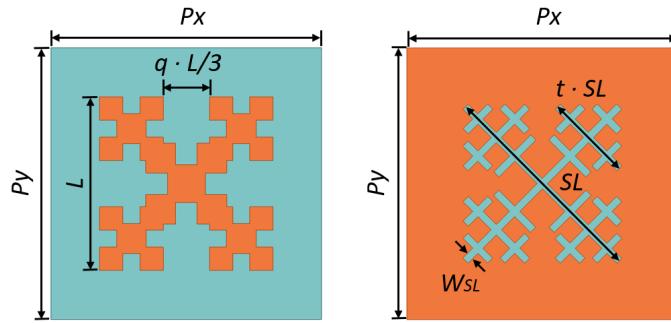


图 5.7 Minkowski 分形结构贴片尺寸

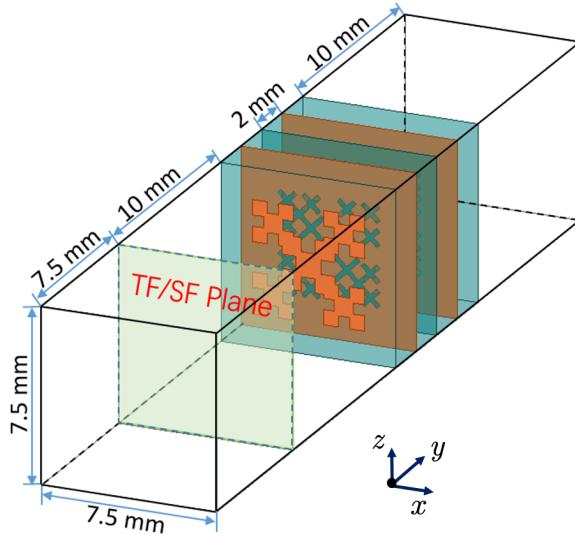


图 5.8 Minkowski 多层频率选择表面的仿真模型

由于在第二节中我们已经对比过 LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法在内存消耗和计算速度上的差异，因此在这里我们直接对 GPU-LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法进行对比。首先，我们使用型号为 Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2683

v3@2.00GHz 的单核 CPU 运行 NDGTD-WE 方法和使用型号为 NVIDIA Tesla P100 的 GPU 显卡运行 GPU-LS-NDGTD-WE 方法, 图5.9展示了采用二阶基函数计算得到的 S 参数, 通过和基于 FEM 方法的 HFSS 商业仿真软件对比发现三种方法的计算结果基本吻合, 以此可以证明本文方法的正确性。

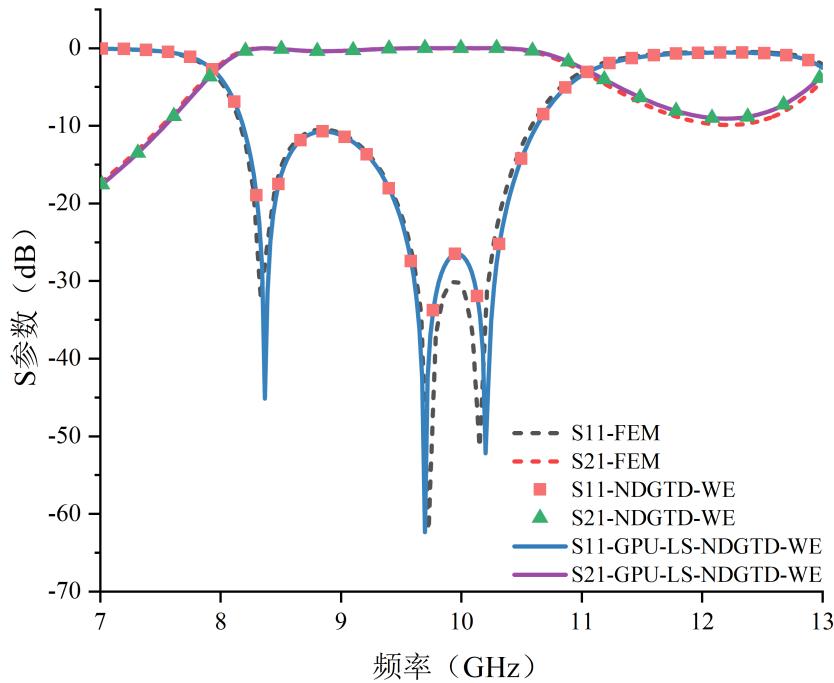


图 5.9 Minkowski 多层频率选择表面的 S 参数对比

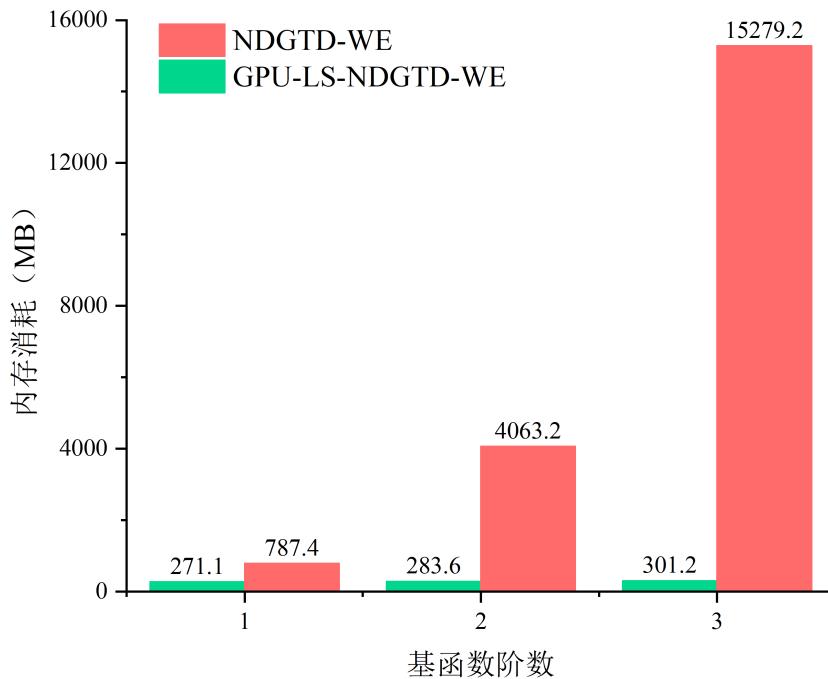


图 5.10 GPU-LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的内存消耗对比

另一方面, 通过统计 GPU-LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法在不同阶数

下的内存消耗，结果如图5.10所示，可以看出 GPU-LS-NDGTD-WE 方法的内存消耗相比 NDGTD-WE 方法大幅度地降低了，在三阶基函数情况下仅占 NDGTD-WE 方法的 2%。同样地，通过统计两种方法在不同阶数下运行 1000 个时间步的时间消耗，结果如图5.11所示，可以看出 GPU-LS-NDGTD-WE 方法相比 NDGTD-WE 方法分别在一、二、三阶基函数的情况下有 11.3 倍、14.3 倍和 10.4 倍的加速比，其计算性能得到了大幅提升。

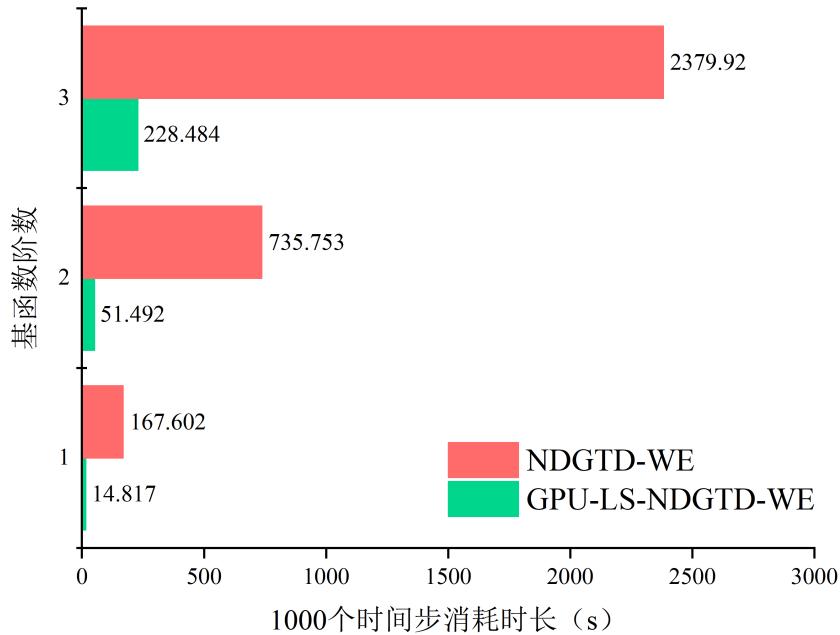


图 5.11 GPU-LS-NDGTD-WE 方法和 NDGTD-WE 方法的时间消耗对比

5.5 本章小结

在本章中，我们讨论了如何利用 GPU 并行加速技术实现 LS-NDGTD-WE 方法，其中详细介绍了 GPU 的硬件特性和 CUDA 并行计算架构，并且优化了在 GPU 端的矩阵还原和矩阵向量乘的过程，最后通过算例验证了在本章提出的方法的正确性，并且展现出了 GPU-LS-NDGTD-WE 方法相对 NDGTD-WE 方法的巨大性能提升，为大规模电磁计算问题提供了新的解决思路。

第六章 总结与展望

6.1 全文总结

DGTD 方法作为一种新的电磁场数值方法拥有并行效率高和计算精度高等众多优势，现已发展成为了解决复杂环境电磁场问题的有力工具。本文通过对传统的 DGTD 方法进行了总结和分析，针对传统的 DGTD 方法内存消耗大的问题提出了一种基于节点型基函数的波动方程时域不连续伽辽金方法，并在该方法的基础上发展多种边界条件和高性能求解技术。具体而言，本文的工作可以总结为以下几个方面：

1. 建立了能够求解三维电磁问题的 NDGTD-WE 方法。在本文中，首先从波动方程出发推导了 NDGTD-WE 方法的公式，引入内罚流作为该方法的数值流，并且发展了基于内罚流的 PEC、PMC、ABC 边界条件和总场/散射场源。然后通过坐标映射函数将一个参考单元与实际单元建立了联系，进而提出了一种低存储的 LS-NDGTD-WE 方法。最后通过数值算例对比了不同基函数阶数下 NDGTD-WE 方法的计算精度和 LS-NDGTD-WE 与 NDGTD-WE 方法在内存消耗和计算时间上面的差别。
2. 发展了基于 NDGTD-WE 方法的精确波端口边界条件。为了能够对需要波端口激励的电磁器件进行高效和精确地建模，本文从频域的波端口边界条件出发推导了时域形式的波端口边界条件，并将其加入到了 NDGTD-WE 方法中。然后利用辅助方程方法代替了波端口边界条件中的卷积计算，降低了时间复杂度，进而提高了计算效率。最后通过数值算例验证了该方法的正确性。
3. 发展了基于 GPU 加速技术的 LS-NDGTD-WE 方法。针对 NDGTD-WE 方法在实际应用中内存消耗高，而 LS-NDGTD-WE 方法又计算时间长的矛盾问题，本文通过分析 GPU 的硬件特性和 CUDA 并行计算架构，提出了一种基于 GPU 加速技术的 LS-NDGTD-WE 方法，并且对方程中的矩阵向量乘进行了优化。通过数值算例验证了该方法在计算时间和内存消耗上都优于非低存储的 NDGTD-WE 方法，性能获得了大幅提升。

6.2 下一阶段工作展望

由于本人的时间和能力有限，本文所提出的 NDGTD-WE 方法在实际工程应用中还有许多有待完善的地方，下一阶段的工作主要可以从以下几个方面开展：

1. 发展更多的基于 NDGTD-WE 方法的边界条件和激励源。为了能够更好地模拟真实的电磁环境，往往需要多种边界和电磁激励源，例如比 ABC 吸收效果更好的理想匹配层（PML）吸收边界，还有无限周期边界条件等。
2. 发展基于 NDGTD-WE 方法的非共形混合网格技术。在本文中仅讨论了共形四面体网格的情况，然而对于复杂的电磁仿真问题来说采用非共形的混合网格技术能够有效降低单元数目，进而更进一步地提高计算效率。
3. 发展基于 NDGTD-WE 方法的局部时间步技术。在分析一些复杂目标的电磁散射问题中，会出现模型的网格尺度差异很大的情况，由于在本文中所采用的时间步策略 Δt 仅取决于最小网格尺寸，从而会导致因为部分的小尺度网格而影响整体的计算效率。局部时间步技术能够在尺度大的网格中采用较大的时间步，在尺度小的网格中采用较小的时间步，从而有效提高该方法的计算效率。

参考文献

- [1] JIAO D, ERGIN A, SHANKER B, et al. A fast higher-order time-domain finite element-boundary integral method for 3-D electromagnetic scattering analysis[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2002, 50(9) : 1192 – 1202. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2002.801375>.
- [2] JIN J-M. The finite element method in electromagnetics[M]. 3rd. [S.l.] : Wiley-IEEE Press, 2014.
- [3] GIBSON W C. The Method of Moments in Electromagnetics[M]. 2nd. [S.l.] : Chapman and Hall/CRC, 2014 : 450.
- [4] TAFLOVE A, HAGNESS S C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method[M]. 3rd. [S.l.] : Artech house, 2005.
- [5] TAFLOVE A, OSKOOI A, JOHNSON S G. Advances in FDTD Computational Electrodynamics Photonics and Nanotechnology[M]. [S.l.] : Artech House, 2013 : 750.
- [6] JIN J-M, RILEY D J. Finite Element Analysis of Antennas and Arrays[M/OL]. Hoboken, NJ, USA : John Wiley & Sons, Inc., 2008 : 467. <http://dx.doi.org/10.1002/9780470409732>.
- [7] COHEN G, PERNET S. Scientific Computation : Finite Element and Discontinuous Galerkin Methods for Transient Wave Equations[M/OL]. Dordrecht : Springer Netherlands, 2017. <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-017-7761-2>.
- [8] YEE K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1966, 14.
- [9] REED W H, HILL T R. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation[J]. Los Alamos Report LA-UR-73-479, 1973(836) : 10.
- [10] REMAKI M, FEZOUI L. Une méthode de Galerkin Discontinu pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène[J], 1998.
- [11] HESTHAVEN J S, WARBURTON T. Nodal High-Order Methods on Unstructured Grids[J], 2002, 181(1) : 186 – 221.
- [12] HESTHAVEN J S, WARBURTON T. Texts in Applied Mathematics, Vol 54 : Nodal Discontinuous Galerkin Methods[M/OL]. New York, NY : Springer New York, 2008. <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-72067-8>.
- [13] LI X, JIN J-M. A Comparative Study of Three Finite Element-Based Explicit Numerical Schemes for Solving Maxwell's Equations[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(3) : 1450 – 1457. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2011.2180341>.
- [14] ALVAREZ J, ANGULO L D, Rubio Bretones A, et al. A Spurious-Free Discontinuous Galerkin Time-Domain Method for the Accurate Modeling of Microwave Filters[J/OL]. IEEE Transactions

- on Microwave Theory and Techniques, 2012, 60(8) : 2359 – 2369. <http://dx.doi.org/10.1109/TMTT.2012.2202683>.
- [15] ALVAREZ J, ANGULO L D, CABELLO M R, et al. An Analysis of the Leap-Frog Discontinuous Galerkin Method for Maxwell's Equations[J/OL]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2014, 62(2) : 197 – 207. <http://dx.doi.org/10.1109/TMTT.2013.2295775>.
- [16] LU T, ZHANG P, CAI W. Discontinuous Galerkin methods for dispersive and lossy Maxwell's equations and PML boundary conditions[J/OL]. Journal of Computational Physics, 2004, 200(2) : 549 – 580. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2004.02.022>.
- [17] GEDNEY S D, YOUNG J C, KRAMER T C, et al. A discontinuous Galerkin finite element time-domain method modeling of dispersive media[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(4) : 1969 – 1977. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2012.2186273>.
- [18] ABARBANEL S, GOTTLIEB D I, HESTHAVEN J S. Long Time Behavior of the Perfectly Matched Layer Equations in Computational Electromagnetics[J/OL]. Journal of Scientific Computing, 2002, 17(1-4) : 405 – 422. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1015141823608>.
- [19] MILLER N C, BACZEWSKI A D, ALBRECHT J D, et al. A Discontinuous Galerkin Time Domain Framework for Periodic Structures Subject to Oblique Excitation[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(8) : 4386 – 4391. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2014.2324012>.
- [20] SIRENKO K, SIRENKO Y, BAGCI H. Exact Absorbing Boundary Conditions for Periodic Three-Dimensional Structures: Derivation and Implementation in Discontinuous Galerkin Time-Domain Method[J/OL]. IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques, 2018, 3(c) : 108 – 120. <http://dx.doi.org/10.1109/jmmct.2018.2859315>.
- [21] CHANG C P, CHEN G, YAN S, et al. Waveport modeling for the DGTD simulation of electromagnetic devices[J]. International Journal of Numerical Modelling Electronic Networks Devices and Fields, : e2226.
- [22] CHEN G, ZHAO L, YU W, et al. A General Scheme for the Discontinuous Galerkin Time-Domain Modeling and S-Parameter Extraction of Inhomogeneous Waveports[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, : 1 – 12.
- [23] DOSOPOULOS S, LEE J-F. Interior Penalty Discontinuous Galerkin Finite Element Method for the Time-Dependent First Order Maxwell's Equations[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(12) : 4085 – 4090. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2010.2078445>.
- [24] CHEN J, TRANGENSTEIN J A, LAYTON A T. A Hybrid Spectral-Element / Finite-Element Time-Domain Method for Multiscale Electromagnetic Simulations[D]. [S.I.] : Duke University, 2010 : 94.
- [25] CHEN J, LIU Q H. Discontinuous Galerkin Time-Domain Methods for Multiscale Electromagnetic Simulations: A Review[J/OL]. Proceedings of the IEEE, 2013, 101(2) : 242 – 254. <http://dx.doi.org/>

- 10.1109/JPROC.2012.2219031.
- [26] LIU M, SIRENKO K, BAGCI H. An Efficient Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Highly Accurate Solution of Maxwell Equations[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(8) : 3992 – 3998. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2012.2201092>.
- [27] DIEHL R, BUSCH K, NIEGEMANN J. Comparison of low-storage Runge-Kutta schemes for discontinuous galerkin time-domain simulations of Maxwell's equations[J/OL]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2010, 7(8) : 1572 – 1580. <http://dx.doi.org/10.1166/jctn.2010.1521>.
- [28] DOSOPOULOS S, GARDINER J D, LEE J-F. An MPI/GPU parallelization of an interior penalty discontinuous Galerkin time domain method for Maxwell's equations[J/OL]. Radio Science, 2011, 46(3) : 1 – 10. <http://dx.doi.org/10.1029/2011RS004689>.
- [29] GODEL N, NUNN N, WARBURTON T, et al. Scalability of higher-order discontinuous galerkin FEM computations for solving electromagnetic wave propagation problems on GPU clusters[J/OL]. IEEE Transactions on Magnetics, 2010, 46(8) : 3469 – 3472. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2010.2046022>.
- [30] POTRATZ C, GLOCK H-W, van RIENEN U. Time-Domain Field and Scattering Parameter Computation in Waveguide Structures by GPU-Accelerated Discontinuous-Galerkin Method[J/OL]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2011, 59(11) : 2788 – 2797. <http://dx.doi.org/10.1109/TMTT.2011.2166163>.
- [31] ZHAO L, CHEN G, YU W. GPU accelerated discontinuous Galerkin time domain algorithm for electromagnetic problems of electrically large objects[J/OL]. Progress In Electromagnetics Research B, 2016, 67 : 137 – 151. <http://dx.doi.org/10.2528/PIERB16021802>.
- [32] GROTE M J, SCHNEEBELI A, SCHÖTZAU D. Interior penalty discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations: Energy norm error estimates[J/OL]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 204(2 SPEC. ISS.) : 375 – 386. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2006.01.044>.
- [33] Tian C, Shi Y, Chan C H. Interior Penalty Discontinuous Galerkin Time-Domain Method Based on Wave Equation for 3-D Electromagnetic Modeling[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(12) : 7174 – 7184. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2017.2756678>.
- [34] Tian C, Shi Y, Chan C H. An Improved Vector Wave Equation-Based Discontinuous Galerkin Time Domain Method and Its Hybridization With Maxwell' s Equation-Based Discontinuous Galerkin Time Domain Method[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2018, 66(11) : 6170 – 6178. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2018.2866992>.
- [35] Wang P, Shi Y, Tian C, et al. Analysis of Graphene-Based Devices Using Wave Equation Based Discontinuous Galerkin Time-Domain Method[J/OL]. IEEE Antennas and Wireless Propagation

- Letters, 2018, 17(12) : 2169–2173. <http://dx.doi.org/10.1109/LAWP.2018.2869824>.
- [36] ARNOLD D N, BREZZI F, COCKBURN B, et al. Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems[C] // COCKBURN B, KARNIADAKIS G E, SHU C-W. Discontinuous Galerkin Methods. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2000 : 89–101.
- [37] ARNOLD D N, BREZZI F, COCKBURN B, et al. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems[J/OL]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 39(5) : 1749–1779. <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142901384162>.
- [38] CHEN Q, BABUŠKA I. Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and a triangle[J/OL]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 128 : 405–417. [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00889-6](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(95)00889-6).
- [39] HESTHAVEN J, TENG C. Stable Spectral Methods on Tetrahedral Elements[J/OL]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 21 : 2352–2380. <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827598343723>.
- [40] Zheng Lou, Jian-Ming Jin. An accurate waveguide port boundary condition for the time-domain finite-element method[C/OL] // 2005 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium : Vol 1B. 2005 : 117–120 vol. 1B. <http://dx.doi.org/10.1109/APS.2005.1551498>.
- [41] A A, WARBURTON T, B J, et al. Nodal Discontinuous Galerkin Methods on Graphics Processors[J/OL]. Journal of Computational Physics, 2009, 228 : 7863–7882. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.06.041>.
- [42] Gödel N, Schomann S, Warburton T, et al. GPU Accelerated Adams–Bashforth Multirate Discontinuous Galerkin FEM Simulation of High-Frequency Electromagnetic Fields[J/OL]. IEEE Transactions on Magnetics, 2010, 46(8) : 2735–2738. <http://dx.doi.org/10.1109/TMAG.2010.2043655>.
- [43] Li Y, Li L, Zhang Y, et al. Design and Synthesis of Multilayer Frequency Selective Surface Based on Antenna-Filter-Antenna Using Minkowski Fractal Structures[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2015, 63(1) : 133–141. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2014.2367523>.

致谢

行文至此，意味着我的硕士生涯即将画上一个句号。回首自己在西电求学的七年时光，其间有过难过和痛苦的时刻，但更多感受到的是快乐和幸福。很感激自己一路走来结识了那么多优秀的人，让我也能够跟在他们的脚步后面努力学着成为一个优秀的人。

首先感谢我的导师史琰教授，本论文是在史琰老师悉心指导下完成的。我从大三的专业课上第一次认识史琰老师，在听课的过程中我感受到了史琰老师极其严谨和负责的教学态度，曾记得史琰老师在课堂上谈到他的导师梁昌洪教授说过的一句话：正是因为在我们前面有这么优秀并努力的人，所以我们没有任何理由不去努力变得优秀。我想这大概是一个导师能给学生带来的最大财富了。当我获得推免资格后，毫不犹豫就选了史琰教授作为我的导师。直到今天，我依然庆幸自己当初所做的选择，经过大四一年和硕士三年和史琰老师的相处，我切身地体会到了史琰老师作为一名科研工作者，拥有渊博的学识和极强的专业素养，而作为一名研究生导师，对每一位学生都认真负责，在生活和科研上都无微不至地关心着自己的学生。史琰老师的这些优秀品质对我的影响将成为我生命中最宝贵的财富。

然后感谢我们算法组的所有成员，包括田诚毅大师兄、王鹏师兄、班振国和朱世琛师弟。田诚毅大师兄作为算法组的第一人，拥有超强的专业能力和工作效率，没有大师兄的指导和鞭策，我不可能成长得这么迅速。一直以来都是大师兄带着我们算法组所有人从入门到能够自己独立工作，大师兄认真和负责的态度影响着我们所有人。王鹏师兄作为继大师兄毕业后的新任大师兄，在生活和科研上都给了我很大的帮助，我永远记得自己代码调不出来痛苦难过的时候，王鹏师兄陪我一起 debug，最终找到错误所在。感谢王鹏师兄带给我们家人般的温馨。振国兄作为七年的舍友，在各方面都能力超群，朝夕相处的过程中早已形成了某种默契，感谢无需多言，这么久以来的陪伴和支持我都牢记在心，我坚定不移地相信振国兄的博士生涯一定会硕果累累。感谢朱世琛师弟在我找工作的那段时间对我的帮助，师弟理论扎实，内心丰富而有趣，我相信将来一定会成为非常优秀的人。

感谢损友杨杰，奇妙的缘分让我们一起从天柱来到西安，本科同专业，硕士同实验室。七年的友谊，让我在他乡也不曾感到孤单，我会永远记得一起旅游、吃火锅、唱歌和看电影的时光。感谢可爱大方并优秀的李可师姐，我的第一份工作离不开师姐的帮助和悉心指导，师姐不仅工作能力强，在麻将桌上更是神采飞扬，给我们带了无限的欢乐。感谢同级的杨金喜、孟贊奎、沈华，一起吃饭的时光总是那么短暂，虽然每天都在吐槽食堂，但因为有你们的存在而变得很享受。感谢师弟孟皓轩、魏文岳和

师妹张璇，在我找工作其间给我提供了很多帮助，更多的是在生活中一起谈论各种新闻八卦，让我觉得放松和开心。感谢已经毕业了的师姐张琳、张向凡和蔡怡，师兄张颖、郑威和许锐等等，你们对我的教导我会永远铭记在心。

感谢和我一起做竞赛的本科兼硕士同学李镇宁和艾壮，能和你们一起工作是我莫大的荣幸，很开心能和你们一起努力，一起分享获奖的喜悦。感谢同级的陈培钰同学，感谢你时不时的零食和水果，感谢你能陪我一起讨论问题，一起在实验室吐槽各种事情，一起分享找工作的信息，一起鼓励彼此。感谢打粉老师王杨子同学，感谢你的樱桃和粽子，能和你一起分享和谈论追星资讯是一件很开心的事情。

最后，感谢自己的父母和妹妹，你们是我求学路上坚强的后盾，没有你们的支持我不可能过得这么快乐与充实。感谢所有在我生命中给我带来感动的人，是你们在我身上浪费的时间，让我变得如此珍贵。

作者简介

1. 基本情况

杨琦，男，贵州省天柱县人，1995年1月出生，西安电子科技大学电子工程学院电磁场与微波技术专业2017级硕士研究生。

2. 教育背景

2013.08 ~ 2017.07, 西安电子科技大学, 本科, 专业: 电子信息工程

2017.08 ~ 2020.07, 西安电子科技大学, 硕士, 专业: 电磁场与微波技术

3. 攻读硕士学位期间的研究成果

3.1 已录用学术期刊论文

- [1] Q. Yang, Y. Shi, Z. Ban and S. Zhu, "A Nodal Discontinuous Galerkin Time Domain Method Based on Wave Equation," in IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, doi: 10.1109/LAWP.2020.2988916.
- [2] Z. G. Ban, Y. Shi, Q. Yang, P. Wang, S. C. Zhu and L. Li, "GPU-Accelerated Hybrid Discontinuous Galerkin Time Domain Algorithm with Universal Matrices and Local Time Stepping Method," in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, doi: 10.1109/TAP.2020.2972404.

3.2 已发表学术会议论文

- [1] Q. Yang and Y. Shi, "Application of Nodal Discontinuous Galerkin Time Domain Method Based on Wave Equation in Electromagnetic Simulations," 2019 Photonics & Electromagnetics Research Symposium - Fall (PIERS - Fall), Xiamen, China, 2019, pp. 1075-1081, doi: 10.1109/PIERS-Fall48861.2019.9021891.

3.3 参与科研项目及获奖

- [1] 国家自然科学基金,轨道角动量波在等离子体媒质中的传输特性研究,2018~2021年,在研,主要参与人。
- [2] “华为杯”第15届中国研究生数学建模竞赛,一等奖,2018年12月。
- [3] Best Student Paper Award, Honorable Mention, PIERS2019 in Xiamen.

