Отчёт по лабораторной работе 8

дисциплина: Математическое моделирование

Зорин Илья Михайлович, НПИбд-02-18

Содержание

Цель работы

Построить модель конкуренции двух фирм.

Задание

Вариант 47

Случай 1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом). Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \dfrac{\partial M_2}{\partial \theta} = \dfrac{c_2}{c_1} M_2 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 N q}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2}$$

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

Случай 2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - (\dfrac{b}{c_1} + 0.00027) M_1 M_2 - \dfrac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \dfrac{\partial M_2}{\partial \theta} = \dfrac{c_2}{c_1} M_2 - \dfrac{b}{c_1} M_1 M_2 - \dfrac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$M_{1.0} = 3.44, M_{2.0} = 2.13, p_{cr} = 25, N = 30, q = 1, \tau_1 = 12, \tau_2 = 15, \tilde{p}_1 = 10, \tilde{p}_2 = 9.5$

Замечание: Значения $p_{cr}, \tilde{p}_{1,2}, N$ указаны в тысячах единиц, а значения $M_{1,2}$ указаны в млн единиц.

Обозначения:

N – число потребителей производимого продукта;

τ – длительность производственного цикла;

p – рыночная цена товара;

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции;

q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени;

$\theta = \frac{t}{c_1}$ – безразмерное время.

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

3. Найдите стационарное состояние системы для первого случая.

Теоретическое введение

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия.

τ – длительность производственного цикла.

p – рыночная цена товара.

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

δ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

κ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$ \tag{1} Q = q - k \frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}}), $$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = \frac{Sq}{k}$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$ \tag{2} \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M \delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M \delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa $$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$ \tag{3} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma (-\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) $$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть предложению), а второй член – спросу.

Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$ \tag{4} -\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0 $$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$ \tag{5} p = p_{cr}(1 - \frac{M \delta}{\tau \tilde{p} Nq}) $$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$ \tag{6} \frac{\partial M}{\partial t} = M \frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2 (\frac{\delta}{\tau \delta{p}})^2 \frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa $$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$

$$ \tag{7} \tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$ \tag{8} a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq \frac{(\tau \tilde{p})^2}{p_{cr} \delta^2} $$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения M равны

$$ \tag{9} \tilde{M}_+ = Nq \frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}) \tilde{p}, \tilde{M}_- = \kappa \tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние $\widetilde{M}_+$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\widetilde{M}_-$ неустойчиво, так что при $M < \widetilde{M}_-$ оборотные средства падают ($\partial M/ \partial t < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\widetilde{M}_-$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла с учётом сказанного.

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей какимлибо иным способом).

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$ \tag{10} \begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = - \frac{M_1}{\tau_1} + N_1q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = - \frac{M_2}{\tau_2} + N_2q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_2 \end{cases} $$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме соответственно. Величины N_1 и N_2 – числа потребителей, приобревших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p. Тогда

$$ \tag{11} \begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = - N_1q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = - N_2q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \end{cases} $$

где $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$ \tag{12} \begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = - \frac{M_1}{\tau_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = - \frac{M_2}{\tau_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}) - \kappa_2 \end{cases} $$

Уравнение для цены по аналогии с (3)

$$ \tag{13} \frac{\partial p}{\partial t} = - \gamma (\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq (1 - \frac{p}{p_{cr}}) $$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$ \tag{14} p = p_{cr} (1 - \frac{1}{Nq} (\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2})) $$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$ \tag{15} \begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \end{cases} $$

где

$$ \tag{16} a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2} $$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки (κ_1, κ_2) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1\theta$. Получим следующую систему:

$$ \tag{17} \begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases} $$

Выполнение лабораторной работы

1. Написал код на языке Python:

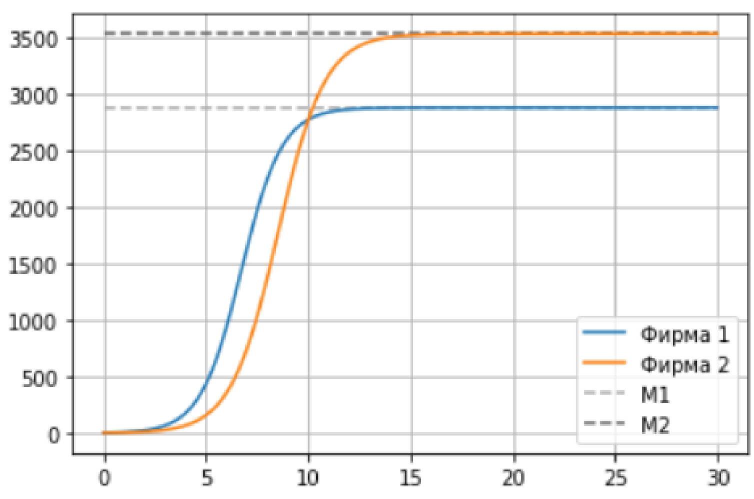
```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

M10 = 3.44
M20 = 2.13
x0=[M10, M20]

pcr = 25
N = 40
q = 1

tau1 = 12
tau2 = 15

p1 = 10
p2 = 9.5

t0 = 0
tmax = 30
dt = 0.01
t = np.arange(t0, tmax, dt)

a1 = pcr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
a2 = pcr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
b = pcr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)
c1 = (pcr-p1)/(tau1*p1)
c2 = (pcr-p2)/(tau2*p2)

def S1(x, t):
    dx1 = (c1/c1)*x[0] - (a1/c1)*x[0]*x[0] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1]
    return dx1, dx2

def S2(x, t):
    dx1 = x[0] - (b/c1 + 0.00021)*x[0]*x[1] - (a1/c1)*x[0]*x[0]
    dx2 = (c2/c1)*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1]
    return dx1, dx2

y1 = odeint(S1, x0, t)
y2 = odeint(S2, x0, t)
```

```
M1 = (a2*c1-b*c2)/(a1*a2-b*b)
M2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b)
print(M1, "; ", M2)

plt.plot(t, y1[:,0], label='Фирма 1')
plt.plot(t, y1[:,1], label='Фирма 2')
plt.hlines(M1, t0, tmax, colors="darkgrey", linestyles='dashed', label='M1')
plt.hlines(M2, t0, tmax, colors="dimgrey", linestyles='dashed', label='M2')
plt.legend(loc=4)
plt.grid()

plt.plot(t, y2[:,0], label='Фирма 1')
plt.plot(t, y2[:,1], label='Фирма 2')
plt.legend()
plt.grid()
```

2.1 Получила следующее значение стационарного состояния для 1-ого случая:

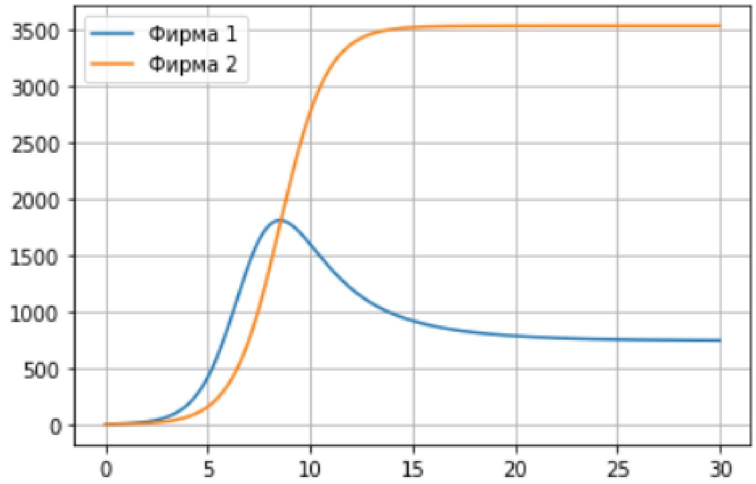
$M_1 = 2879.8259747608695, M_2 = 3533.8000120850857$

2.2 Получила следующие графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для 1-ого случая (см. рис. @fig:001):



Изменение оборотных средств. 1-ый случай

2.3 Получил следующие графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для 2-ого случая (см. рис. @fig:002):



Изменение оборотных средств. 2-ой случай

Выводы

Построил модель конкуренции двух фирм с помощью Python.

Нашёл стационарное состояние системы для 1-ого случая.

В 1-ом случае фирма 2 будет иметь по итогу больше оборотных средств, чем фирма 1.

Во 2-ом случае фирма 1 стремительно достигнет мимолетного успеха, а затем окажется в проигрыше: фирма 2 будет иметь по итогу больше оборотных средств, чем фирма 1.