Amélioration de l'Efficacité

Efficacité d'un estimateur X:

$$\mathrm{Eff}[X] = \frac{1}{\mathrm{MSE}[X]C(X)}.$$

On cherche des façons de l'améliorer.

Amélioration de l'Efficacité

Efficacité d'un estimateur X:

$$\mathrm{Eff}[X] = \frac{1}{\mathrm{MSE}[X]C(X)}.$$

On cherche des façons de l'améliorer.

On va voir:

1. Exemple.
2. Théorie.

Exemple: le centre d'appels téléphonique

B = facteur d'achalandage pour la journée.
On suppose ici que $\mathbb{P}[B = b_t] = q_t$, où

t	1	2	3	4
b_t	0.8	1.0	1.2	1.4
q_t	0.25	0.55	0.15	0.05

On a $\mathbb{E}[B] = 1$.

Exemple: le centre d'appels téléphonique

B = facteur d'achalandage pour la journée.
On suppose ici que $\mathbb{P}[B = b_t] = q_t$, où

t	1	2	3	4
b_t	0.8	1.0	1.2	1.4
q_t	0.25	0.55	0.15	0.05

On a $\mathbb{E}[B] = 1$.

Arrivées des appels: processus de Poisson de taux $B\lambda_j$ durant l'heure j.

Exemple: le centre d'appels téléphonique

B = facteur d'achalandage pour la journée.
On suppose ici que $\mathbb{P}[B = b_t] = q_t$, où

t	1	2	3	4
b_t	0.8	1.0	1.2	1.4
q_t	0.25	0.55	0.15	0.05

On a $\mathbb{E}[B] = 1$.

Arrivées des appels: processus de Poisson de taux $B\lambda_j$ durant l'heure j.

Le reste est comme dans l'example vu au chap. 1. Les données aussi.

Exemple: le centre d'appels téléphonique

B = facteur d'achalandage pour la journée.
On suppose ici que $\mathbb{P}[B = b_t] = q_t$, où

t	1	2	3	4
b_t	0.8	1.0	1.2	1.4
q_t	0.25	0.55	0.15	0.05

On a $\mathbb{E}[B] = 1$.

Arrivées des appels: processus de Poisson de taux $B\lambda_j$ durant l'heure j.

Le reste est comme dans l'example vu au chap. 1. Les données aussi.

$X_i = G_i(s)$ = nombre d'appels dont le service a débuté après moins de s secondes d'attente, le jour i.
On veut estimer $\mu = \mathbb{E}[G_i(s)]$, disons pour $s = 20$

On simule n jours, indépendamment.

On simule n jours, indépendamment. Soit $X_i = G_i(s)$ pour le jour i, et

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On a $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \mathrm{Var}[X_i]/n$.

On simule n jours, indépendamment. Soit $X_i = G_i(s)$ pour le jour i, et

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On a $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \mathrm{Var}[X_i]/n$.

Une expérience avec $n = 1000$ nous a donné $\bar{X}_n = 1518.3$ et $S_n^2 = 21615$.

On simule n jours, indépendamment. Soit $X_i = G_i(s)$ pour le jour i, et

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On a $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \mathrm{Var}[X_i]/n$.

Une expérience avec $n = 1000$ nous a donné $\bar{X}_n = 1518.3$ et $S_n^2 = 21615$.
La variance estimée de $\bar{X}_n$ est alors $\widehat{\mathrm{Var}}[\bar{X}_n] = 21.6$.

On simule n jours, indépendamment. Soit $X_i = G_i(s)$ pour le jour i, et

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On a $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \mathrm{Var}[X_i]/n$.

Une expérience avec $n = 1000$ nous a donné $\bar{X}_n = 1518.3$ et $S_n^2 = 21615$.

La variance estimée de $\bar{X}_n$ est alors $\widehat{\mathrm{Var}}[\bar{X}_n] = 21.6$.

L'erreur relative de cet estimateur de variance est inférieure à 8% avec une "confiance" d'environ 90%.

On simule n jours, indépendamment. Soit $X_i = G_i(s)$ pour le jour i, et

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On a $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \mathrm{Var}[X_i]/n$.

Une expérience avec $n = 1000$ nous a donné $\bar{X}_n = 1518.3$ et $S_n^2 = 21615$.

La variance estimée de $\bar{X}_n$ est alors $\widehat{\mathrm{Var}}[\bar{X}_n] = 21.6$.

L'erreur relative de cet estimateur de variance est inférieure à 8% avec une "confiance" d'environ 90%.

Voyons comment améliorer cet estimateur $\bar{X}_n$, en réduisant sa variance.

On simule n jours, indépendamment. Soit $X_i = G_i(s)$ pour le jour i, et

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On a $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \mathrm{Var}[X_i]/n$.

Une expérience avec $n = 1000$ nous a donné $\bar{X}_n = 1518.3$ et $S_n^2 = 21615$.

La variance estimée de $\bar{X}_n$ est alors $\widehat{\mathrm{Var}}[\bar{X}_n] = 21.6$.

L'erreur relative de cet estimateur de variance est inférieure à 8% avec une "confiance" d'environ 90%.

Voyons comment améliorer cet estimateur $\bar{X}_n$, en réduisant sa variance.

Pour chaque méthode proposée, nous donnerons des résultats numériques pour $n = 1000$.

Estimation indirecte.

A_i = nombre total d'arrivées au jour i;
$D_i = A_i - X_i$.

Estimation indirecte.

A_i = nombre total d'arrivées au jour i;
$D_i = A_i - X_i$.

On sait que $a = \mathbb{E}[A_i] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1660$.

Estimation indirecte.

A_i = nombre total d'arrivées au jour i;

$D_i = A_i - X_i$.

On sait que $a = \mathbb{E}[A_i] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1660$.

On peut écrire $\mu = \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[A_i - D_i] = a - \mathbb{E}[D_i]$, que l'on peut estimer par

$$\bar{X}_{\mathrm{i},n} = \mathbb{E}[A_i] - \bar{D}_n = a - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i.$$

Cet estimateur a moins de variance que $\bar{X}_n$ ssi $\mathrm{Var}[D_i] < \mathrm{Var}[X_i]$.

Estimation indirecte.

A_i = nombre total d'arrivées au jour i;
$D_i = A_i - X_i$.

On sait que $a = \mathbb{E}[A_i] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1660$.

On peut écrire $\mu = \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[A_i - D_i] = a - \mathbb{E}[D_i]$, que l'on peut estimer par

$$\bar{X}_{\mathrm{i},n} = \mathbb{E}[A_i] - \bar{D}_n = a - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i.$$

Cet estimateur a moins de variance que $\bar{X}_n$ ssi $\mathrm{Var}[D_i] < \mathrm{Var}[X_i]$.

Variance estimée: $\widehat{\mathrm{Var}}[X_{\mathrm{i},i}] = \widehat{\mathrm{Var}}[D_i] = 18389$.

Variable de contrôle (VC). Idée: exploiter l'information auxiliaire.
Par exemple, si A_i est plus grand que d'habitude ($A_i > E[A_i] = 1660$), on s'attend à ce que ce jour là, X_i et D_i surestiment $E[X_i]$ et $E[D_i]$.
Ou peut-être l'inverse!

Variable de contrôle (VC). Idée: exploiter l'information auxiliaire.
Par exemple, si A_i est plus grand que d'habitude ($A_i > E[A_i] = 1660$), on s'attend à ce que ce jour là, X_i et D_i surestiment $E[X_i]$ et $E[D_i]$.
Ou peut-être l'inverse!

On pourrait faire une "correction" à ces estimateurs: remplacer X_i par

$$X_{\mathrm{c},i} = X_i - \beta(A_i - 1660)$$

où β est une constante appropriée.

Variable de contrôle (VC). Idée: exploiter l'information auxiliaire.
Par exemple, si A_i est plus grand que d'habitude ($A_i > E[A_i] = 1660$), on s'attend à ce que ce jour là, X_i et D_i surestiment $E[X_i]$ et $E[D_i]$.
Ou peut-être l'inverse!

On pourrait faire une "correction" à ces estimateurs: remplacer X_i par

$$X_{\mathrm{c},i} = X_i - \beta(A_i - 1660)$$

où β est une constante appropriée. Alors

$$\bar{X}_{\mathrm{c},n} = \bar{X}_n - \beta(\bar{A}_n - 1660).$$

Variable de contrôle (VC). Idée: exploiter l'information auxiliaire.
Par exemple, si A_i est plus grand que d'habitude ($A_i > E[A_i] = 1660$), on s'attend à ce que ce jour là, X_i et D_i surestiment $E[X_i]$ et $E[D_i]$.
Ou peut-être l'inverse!

On pourrait faire une "correction" à ces estimateurs: remplacer X_i par

$$X_{c,i} = X_i - \beta(A_i - 1660)$$

où β est une constante appropriée. Alors

$$\bar{X}_{c,n} = \bar{X}_n - \beta(\bar{A}_n - 1660).$$

On a $E[\bar{X}_{c,n}] = E[X_i]$ et

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_{c,n}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i] + \beta^2\mathrm{Var}[A_i] - 2\beta\mathrm{Cov}[A_i, X_i]}{n}.$$

Variable de contrôle (VC). Idée: exploiter l'information auxiliaire.
Par exemple, si A_i est plus grand que d'habitude ($A_i > E[A_i] = 1660$), on s'attend à ce que ce jour là, X_i et D_i surestiment $E[X_i]$ et $E[D_i]$.
Ou peut-être l'inverse!

On pourrait faire une "correction" à ces estimateurs: remplacer X_i par

$$X_{c,i} = X_i - \beta(A_i - 1660)$$

où β est une constante appropriée. Alors

$$\bar{X}_{c,n} = \bar{X}_n - \beta(\bar{A}_n - 1660).$$

On a $E[\bar{X}_{c,n}] = E[X_i]$ et

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_{c,n}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i] + \beta^2 \mathrm{Var}[A_i] - 2\beta \mathrm{Cov}[A_i, X_i]}{n}.$$

Cette variance est une fonction quadratique en β, que l'on minimise en prenant

$$\beta = \beta^* = \mathrm{Cov}[A_i, X_i]/\mathrm{Var}[A_i].$$

La variance minimale est

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{c},n}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i] - (\beta^*)^2 \mathrm{Var}[A_i]}{n} = \mathrm{Var}[\bar{X}_n](1 - \rho^2[A_i, X_i])$$

où $\rho[A_i, X_i]$ est le coeff. de corrélation entre A_i et X_i.

La variance minimale est

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{c},n}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i] - (\beta^*)^2 \mathrm{Var}[A_i]}{n} = \mathrm{Var}[\bar{X}_n](1 - \rho^2[A_i, X_i])$$

où $\rho[A_i, X_i]$ est le coeff. de corrélation entre A_i et X_i.

On ne connait pas $\mathrm{Cov}[A_i, X_i]$, mais:

(a) On peut l'estimer par des expériences pilotes.

(b) On peut l'estimer par les mêmes n simulations que $\bar{X}_n$.

La variance minimale est

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{c},n}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i] - (\beta^*)^2 \mathrm{Var}[A_i]}{n} = \mathrm{Var}[\bar{X}_n](1 - \rho^2[A_i, X_i])$$

où $\rho[A_i, X_i]$ est le coeff. de corrélation entre A_i et X_i.

On ne connait pas $\mathrm{Cov}[A_i, X_i]$, mais:

(a) On peut l'estimer par des expériences pilotes.

(b) On peut l'estimer par les mêmes n simulations que $\bar{X}_n$.

Avec (b) on obtient l'estimateur (légèrement biaisé):

$$\bar{X}_{\mathrm{ce},n} = \bar{X}_n - \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} (A_i - \bar{A}_n)(X_i - \bar{X}_n) \right] \frac{\bar{A}_n - a}{\mathrm{Var}[A_i]}.$$

La variance minimale est

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{c},n}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i] - (\beta^*)^2\mathrm{Var}[A_i]}{n} = \mathrm{Var}[\bar{X}_n](1 - \rho^2[A_i, X_i])$$

où $\rho[A_i, X_i]$ est le coeff. de corrélation entre A_i et X_i.

On ne connait pas $\mathrm{Cov}[A_i, X_i]$, mais:

(a) On peut l'estimer par des expériences pilotes.

(b) On peut l'estimer par les mêmes n simulations que $\bar{X}_n$.

Avec (b) on obtient l'estimateur (légèrement biaisé):

$$\bar{X}_{\mathrm{ce},n} = \bar{X}_n - \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A}_n)(X_i - \bar{X}_n)\right]\frac{\bar{A}_n - a}{\mathrm{Var}[A_i]}.$$

Conditionnellement à B_i, $A_i \sim \mathrm{Poisson}(1660 B_i)$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[A_i] &= \mathrm{Var}[\mathbb{E}[A_i|B_i]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[A_i|B_i]] = \mathrm{Var}[1660 B_i] + \mathbb{E}[1660 B_i] \\ &= 1660^2\mathrm{Var}[B_i] + 1660\mathbb{E}[B_i] = 67794.4.\end{aligned}$$

La variance minimale est

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{c},n}] = \frac{\mathrm{Var}[X_i] - (\beta^*)^2 \mathrm{Var}[A_i]}{n} = \mathrm{Var}[\bar{X}_n](1 - \rho^2[A_i, X_i])$$

où $\rho[A_i, X_i]$ est le coeff. de corrélation entre A_i et X_i.

On ne connait pas $\mathrm{Cov}[A_i, X_i]$, mais:

(a) On peut l'estimer par des expériences pilotes.

(b) On peut l'estimer par les mêmes n simulations que $\bar{X}_n$.

Avec (b) on obtient l'estimateur (légèrement biaisé):

$$\bar{X}_{\mathrm{ce},n} = \bar{X}_n - \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A}_n)(X_i - \bar{X}_n)\right]\frac{\bar{A}_n - a}{\mathrm{Var}[A_i]}.$$

Conditionnellement à B_i, $A_i \sim \mathrm{Poisson}(1660 B_i)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[A_i] &= \mathrm{Var}[\mathbb{E}[A_i|B_i]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[A_i|B_i]] = \mathrm{Var}[1660 B_i] + \mathbb{E}[1660 B_i] \\
&= 1660^2 \mathrm{Var}[B_i] + 1660 \mathbb{E}[B_i] = 67794.4.
\end{aligned}$$

Variance empirique obtenue ici: 3310.

En prenant $\beta = 1$, on retrouve l'estimateur indirect:

$$\bar{X}_{\mathrm{i},n} = \bar{X}_n - (\bar{A}_n - 1660) = 1660 - \bar{D}_n.$$

En prenant $\beta = 1$, on retrouve l'estimateur indirect:

$$\bar{X}_{\mathrm{i},n} = \bar{X}_n - (\bar{A}_n - 1660) = 1660 - \bar{D}_n.$$

Si on combine VC + indirect, on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\mathrm{i,c},n} &= a - \bar{D}_n - \beta_2(\bar{A}_n - a) \\ &= \bar{A}_n - \bar{D}_n - (1 + \beta_2)(\bar{A}_n - a) \\ &= \bar{X}_n - (1 + \beta_2)(\bar{A}_n - a), \end{aligned}$$

i.e., $\bar{X}_{\mathrm{i,c},n}$ est équivalent à $\bar{X}_{\mathrm{c},n}$ avec $\beta = 1 + \beta_2$.
Donc avec VC, l'estimation indirecte ne sert à rien dans ce cas-ci.

En prenant $\beta = 1$, on retrouve l'estimateur indirect:

$$\bar{X}_{\mathrm{i},n} = \bar{X}_n - (\bar{A}_n - 1660) = 1660 - \bar{D}_n.$$

Si on combine VC + indirect, on obtient:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{\mathrm{i,c},n} &= a - \bar{D}_n - \beta_2(\bar{A}_n - a) \\
&= \bar{A}_n - \bar{D}_n - (1+\beta_2)(\bar{A}_n - a) \\
&= \bar{X}_n - (1+\beta_2)(\bar{A}_n - a),
\end{aligned}$$

i.e., $\bar{X}_{\mathrm{i,c},n}$ est équivalent à $\bar{X}_{\mathrm{c},n}$ avec $\beta = 1 + \beta_2$.
Donc avec VC, l'estimation indirecte ne sert à rien dans ce cas-ci.

Autres VCs possibles: B_i, moyenne des durées de service, etc.

Stratification.

Le facteur d'achalandage B_i est une source de variabilité importante ici.

Stratification.

Le facteur d'achalandage B_i est une source de variabilité importante ici.

Essayons de la contrôler. En posant $\mu_t = \mathbb{E}[X_i \mid B_i = b_t]$, on a

$$\mu = \mathbb{E}[X_i]$$

Stratification.

Le facteur d'achalandage B_i est une source de variabilité importante ici.

Essayons de la contrôler. En posant $\mu_t = \mathbb{E}[X_i \mid B_i = b_t]$, on a

$$
\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{E}[X_i] = \sum_{t=1}^{4} \mathbb{P}[B_i = b_t] \cdot \mathbb{E}[X_i \mid B_i = b_t] \\
&= .25\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 0.8] + .55\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 1.0] \\
&\quad + .15\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 1.2] + .05\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 1.4] \\
&= .25\,\mu_1 + .55\,\mu_2 + .15\,\mu_3 + .05\,\mu_4.
\end{aligned}
$$

Stratification.

Le facteur d'achalandage B_i est une source de variabilité importante ici.

Essayons de la contrôler. En posant $\mu_t = \mathbb{E}[X_i \mid B_i = b_t]$, on a

$$\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{E}[X_i] = \sum_{t=1}^{4} \mathbb{P}[B_i = b_t] \cdot \mathbb{E}[X_i \mid B_i = b_t] \\
&= .25\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 0.8] + .55\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 1.0] \\
&\quad + .15\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 1.2] + .05\,\mathbb{E}[X_i \mid B_i = 1.4] \\
&= .25\,\mu_1 + .55\,\mu_2 + .15\,\mu_3 + .05\,\mu_4.
\end{aligned}$$

Idée: estimer μ_t séparément pour chaque t.

Supposons qu'il y a N_t jours où $B_i = b_t$ et soient $X_{t,1}, \ldots, X_{t,N_t}$ les valeurs de X_i pour ces jours. On peut estimer $\mu_t = E[X_i \mid B_i = b_t]$ par

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} X_{t,i}$$

Supposons qu'il y a N_t jours où $B_i = b_t$ et soient $X_{t,1}, \ldots, X_{t,N_t}$ les valeurs de X_i pour ces jours. On peut estimer $\mu_t = E[X_i \mid B_i = b_t]$ par

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} X_{t,i}$$

et μ par

$$\bar{X}_{\mathrm{s},n} = \sum_{t=1}^{4} q_t \hat{\mu}_t = .25\hat{\mu}_1 + .55\hat{\mu}_2 + .15\hat{\mu}_3 + .05\hat{\mu}_4.$$

Supposons qu'il y a N_t jours où $B_i = b_t$ et soient $X_{t,1}, \ldots, X_{t,N_t}$ les valeurs de X_i pour ces jours. On peut estimer $\mu_t = E[X_i \mid B_i = b_t]$ par

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} X_{t,i}$$

et μ par

$$\bar{X}_{\mathrm{s},n} = \sum_{t=1}^{4} q_t \hat{\mu}_t = .25\hat{\mu}_1 + .55\hat{\mu}_2 + .15\hat{\mu}_3 + .05\hat{\mu}_4.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{s},n} \mid N_1, N_2, N_3, N_4] &= \sum_{t=1}^{4} q_t^2 \mathrm{Var}[\hat{\mu}_t | N_t] = \sum_{t=1}^{4} q_t^2 \sigma_t^2 / N_t \\ = \quad & .25^2\sigma_1^2/N_1 + .55^2\sigma_2^2/N_2 + .15^2\sigma_3^2/N_3 + .05^2\sigma_4^2/N_4. \end{aligned}$$

où $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}[X_i \mid B_i = b_t]$. On gagne si $\sigma_t^2 < \mathrm{Var}[X_i]$.

Supposons qu'il y a N_t jours où $B_i = b_t$ et soient $X_{t,1}, \ldots, X_{t,N_t}$ les valeurs de X_i pour ces jours. On peut estimer $\mu_t = E[X_i \mid B_i = b_t]$ par

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} X_{t,i}$$

et μ par

$$\bar{X}_{\mathrm{s},n} = \sum_{t=1}^{4} q_t \hat{\mu}_t = .25\hat{\mu}_1 + .55\hat{\mu}_2 + .15\hat{\mu}_3 + .05\hat{\mu}_4.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{s},n} \mid N_1, N_2, N_3, N_4] &= \sum_{t=1}^{4} q_t^2 \mathrm{Var}[\hat{\mu}_t | N_t] = \sum_{t=1}^{4} q_t^2 \sigma_t^2 / N_t \\ &= .25^2\sigma_1^2/N_1 + .55^2\sigma_2^2/N_2 + .15^2\sigma_3^2/N_3 + .05^2\sigma_4^2/N_4. \end{aligned}$$

où $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}[X_i \mid B_i = b_t]$. On gagne si $\sigma_t^2 < \mathrm{Var}[X_i]$.

Si les B_i sont générés normalement: post-stratification.

Pour estimer μ par stratification, on peut aussi fixer les $N_t = n_t$ à l'avance, c'est-à-dire choisir à l'avance combien de jours on aura $B_i = b_t$ pour chaque valeur de t.

Pour estimer μ par stratification, on peut aussi fixer les $N_t = n_t$ à l'avance, c'est-à-dire choisir à l'avance combien de jours on aura $B_i = b_t$ pour chaque valeur de t.

Allocation proportionnelle: prendre $n_t = nq_t$.

Pour estimer μ par stratification, on peut aussi fixer les $N_t = n_t$ à l'avance, c'est-à-dire choisir à l'avance combien de jours on aura $B_i = b_t$ pour chaque valeur de t.

Allocation proportionnelle: prendre $n_t = nq_t$.
Avec $n = 1000$, cela donne $n_1 = 250$, $n_2 = 550$, $n_3 = 150$, $n_4 = 50$.

Pour estimer μ par stratification, on peut aussi fixer les $N_t = n_t$ à l'avance, c'est-à-dire choisir à l'avance combien de jours on aura $B_i = b_t$ pour chaque valeur de t.

Allocation proportionnelle: prendre $n_t = nq_t$.
Avec $n = 1000$, cela donne $n_1 = 250$, $n_2 = 550$, $n_3 = 150$, $n_4 = 50$.

Allocation optimale: choisir les n_t pour minimiser $\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{s},n}]$ sous la contrainte $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. On obtient:

$$\frac{n_t}{n} = \frac{\sigma_t P[B_i = b_t]}{\sum_{t=1}^{4} \sigma_t P[B_i = b_t]} = \frac{\sigma_t q_t}{\sum_{t=1}^{4} \sigma_t q_t}.$$

Pour estimer μ par stratification, on peut aussi fixer les $N_t = n_t$ à l'avance, c'est-à-dire choisir à l'avance combien de jours on aura $B_i = b_t$ pour chaque valeur de t.

Allocation proportionnelle: prendre $n_t = nq_t$.
Avec $n = 1000$, cela donne $n_1 = 250$, $n_2 = 550$, $n_3 = 150$, $n_4 = 50$.

Allocation optimale: choisir les n_t pour minimiser $\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{s},n}]$ sous la contrainte $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. On obtient:

$$\frac{n_t}{n} = \frac{\sigma_t P[B_i = b_t]}{\sum_{t=1}^{4} \sigma_t P[B_i = b_t]} = \frac{\sigma_t q_t}{\sum_{t=1}^{4} \sigma_t q_t}.$$

On ne connait pas ces σ_t, mais on peut les estimer par des essais pilotes.

Pour estimer μ par stratification, on peut aussi fixer les $N_t = n_t$ à l'avance, c'est-à-dire choisir à l'avance combien de jours on aura $B_i = b_t$ pour chaque valeur de t.

Allocation proportionnelle: prendre $n_t = nq_t$.
Avec $n = 1000$, cela donne $n_1 = 250$, $n_2 = 550$, $n_3 = 150$, $n_4 = 50$.

Allocation optimale: choisir les n_t pour minimiser $\mathrm{Var}[\bar{X}_{\mathrm{s},n}]$ sous la contrainte $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. On obtient:

$$\frac{n_t}{n} = \frac{\sigma_t P[B_i = b_t]}{\sum_{t=1}^{4} \sigma_t P[B_i = b_t]} = \frac{\sigma_t q_t}{\sum_{t=1}^{4} \sigma_t q_t}.$$

On ne connait pas ces σ_t, mais on peut les estimer par des essais pilotes.

Avec $n_0 = 800$ essais pilotes, 200 par valeur de t, j'ai obtenu $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (219, 512, 182, 87)$ (après arrondi).

Résultats numériques pour $n = 1000$:

Method	Estimator	Mean	$S_n^2(\pm 9\%)$	Ratio
Crude estimator	$\bar{X}_n$	1518.2	21615	1.000
Indirect	$\bar{X}_{\mathrm{i},n}$	1502.5	18389	0.851
CV A_i, with pilot runs	$\bar{X}_{\mathrm{c},n}$	1510.1	3305	0.153
CV A_i, no pilot runs	$\bar{X}_{\mathrm{ce},n}$	1510.2	3310	0.153
Indirect + CV, no pilot runs	$\bar{X}_{\mathrm{i,c},n}$	1510.1	3309	0.153
Stratification (propor.)	$\bar{X}_{\mathrm{sp},n}$	1509.5	1778	0.082
Stratification (optimal)	$\bar{X}_{\mathrm{so},n}$	1509.4	1568	0.073
Strat. (propor.) + CV	$\bar{X}_{\mathrm{sp,c},n}$	1509.2	1140	0.053
Strat. (optimal) + CV	$\bar{X}_{\mathrm{so,c},n}$	1508.3	900	0.042

Stratégies combinées.

Stratification combinée avec VC:

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t} X_{\mathrm{c},t,i} = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t}[X_{t,i} - \beta_t(A_{t,i} - a\, b_t)].$$

Stratégies combinées.

Stratification combinée avec VC:

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t} X_{\mathrm{c},t,i} = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t}[X_{t,i} - \beta_t(A_{t,i} - a\,b_t)].$$

On minimise $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}[X_{\mathrm{c},t,i}]$ en prenant

$$\beta_t = \beta_t^* = \frac{\mathrm{Cov}[A_{t,i},\ X_{t,i}]}{\mathrm{Var}[A_{t,i}]} = \frac{\mathrm{Cov}[A_i, X_i | B_i = b_t]}{ab_t}.$$

Stratégies combinées.

Stratification combinée avec VC:

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t} X_{\mathrm{c},t,i} = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t}[X_{t,i} - \beta_t(A_{t,i} - a\, b_t)].$$

On minimise $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}[X_{\mathrm{c},t,i}]$ en prenant

$$\beta_t = \beta_t^* = \frac{\mathrm{Cov}[A_{t,i},\, X_{t,i}]}{\mathrm{Var}[A_{t,i}]} = \frac{\mathrm{Cov}[A_i, X_i | B_i = b_t]}{ab_t}.$$

L'ajout d'une VC change les σ_t^2: l'allocation optimale n'est plus la même.

Stratégies combinées.

Stratification combinée avec VC:

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t} X_{\mathrm{c},t,i} = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t}[X_{t,i} - \beta_t(A_{t,i} - a\, b_t)].$$

On minimise $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}[X_{\mathrm{c},t,i}]$ en prenant

$$\beta_t = \beta_t^* = \frac{\mathrm{Cov}[A_{t,i},\ X_{t,i}]}{\mathrm{Var}[A_{t,i}]} = \frac{\mathrm{Cov}[A_i, X_i | B_i = b_t]}{a b_t}.$$

L'ajout d'une VC change les σ_t^2: l'allocation optimale n'est plus la même.
Avec $n_0 = 800$ essais pilotes, j'ai obtenu
$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (1.020, 0.648, 0.224, -0.202)$ et
$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (131, 503, 247, 119)$ comme estimation des valeurs optimales.

Stratégies combinées.

Stratification combinée avec VC:

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t} X_{\mathrm{c},t,i} = \frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t}[X_{t,i} - \beta_t(A_{t,i} - a\, b_t)].$$

On minimise $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}[X_{\mathrm{c},t,i}]$ en prenant

$$\beta_t = \beta_t^* = \frac{\mathrm{Cov}[A_{t,i},\ X_{t,i}]}{\mathrm{Var}[A_{t,i}]} = \frac{\mathrm{Cov}[A_i, X_i | B_i = b_t]}{ab_t}.$$

L'ajout d'une VC change les σ_t^2: l'allocation optimale n'est plus la même.
Avec $n_0 = 800$ essais pilotes, j'ai obtenu
$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (1.020, 0.648, 0.224, -0.202)$ et
$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (131, 503, 247, 119)$ comme estimation des valeurs optimales.

Avec $n = 10^5$ et obtenu les estimations suivantes pour la variance ($\pm 1\%$):
$\mathrm{Var}[X_i] = 21998$; $\mathrm{Var}[X_{\mathrm{i},i}] = 17996$; $\mathrm{Var}[X_{\mathrm{c},i}] = 3043$; $\mathrm{Var}[X_{\mathrm{so,c},i}] = 885$.

Comparer deux systèmes similaires

On a supposé dans l'exemple que les durées de service des appels suivent une loi $\mathrm{Gamma}(1, 0.01)$, i.e., exponentielle de moyenne $\theta = \theta_1 = 100$.

Comparer deux systèmes similaires

On a supposé dans l'exemple que les durées de service des appels suivent une loi $\mathrm{Gamma}(1, 0.01)$, i.e., exponentielle de moyenne $\theta = \theta_1 = 100$.

Supposons que l'on diminue légèrement θ à:

$$\theta = \theta_2 = \theta_1 - \delta$$

pour $\delta > 0$ très petit.

Comparer deux systèmes similaires

On a supposé dans l'exemple que les durées de service des appels suivent une loi $\text{Gamma}(1, 0.01)$, i.e., exponentielle de moyenne $\theta = \theta_1 = 100$.

Supposons que l'on diminue légèrement θ à:

$$\theta = \theta_2 = \theta_1 - \delta$$

pour $\delta > 0$ très petit.

Si on utilise les mêmes nombres aléatoires, cela équivaut à multiplier les durées de service par $(1 - \delta/\theta_1)$, i.e., $\theta_2 = (1 - \delta/\theta_1)\theta_1$.

Comparer deux systèmes similaires

On a supposé dans l'exemple que les durées de service des appels suivent une loi $\mathrm{Gamma}(1, 0.01)$, i.e., exponentielle de moyenne $\theta = \theta_1 = 100$.

Supposons que l'on diminue légèrement θ à:

$$\theta = \theta_2 = \theta_1 - \delta$$

pour $\delta > 0$ très petit.

Si on utilise les mêmes nombres aléatoires, cela équivaut à multiplier les durées de service par $(1 - \delta/\theta_1)$, i.e., $\theta_2 = (1 - \delta/\theta_1)\theta_1$.

On veut estimer $\mu(\theta_2) - \mu(\theta_1) = \mathbb{E}_\theta[X_2] - \mathbb{E}_\theta[X_1]$.
(Pour voir l'effet d'augmenter un peu la vitesse des serveurs.)

On simule n jours pour chaque valeur de θ.
$X_{1,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_1;
$X_{2,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_2;
$\Delta_i = X_{2,i} - X_{1,i}$,

$$\bar{\Delta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

On simule n jours pour chaque valeur de θ.
$X_{1,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_1;
$X_{2,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_2;
$\Delta_i = X_{2,i} - X_{1,i}$,

$$\bar{\Delta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

On peut simuler $X_{1,i}$ et $X_{2,i}$
(i) avec des v.a. indépendantes (VAI),
(ii) avec des v.a. communes (VAC).

On simule n jours pour chaque valeur de θ.
$X_{1,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_1;
$X_{2,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_2;
$\Delta_i = X_{2,i} - X_{1,i}$,

$$\bar{\Delta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

On peut simuler $X_{1,i}$ et $X_{2,i}$
(i) avec des v.a. indépendantes (VAI),
(ii) avec des v.a. communes (VAC).

On a

$$\mathrm{Var}[\Delta_i] = \mathrm{Var}[X_{1,i}] + \mathrm{Var}[X_{2,i}] - 2\mathrm{Cov}[X_{1,i},\, X_{2,i}].$$

On simule n jours pour chaque valeur de θ.
$X_{1,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_1;
$X_{2,i}$ = valeur de $G_i(s)$ avec θ_2;
$\Delta_i = X_{2,i} - X_{1,i}$,

$$\bar{\Delta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

On peut simuler $X_{1,i}$ et $X_{2,i}$
(i) avec des v.a. indépendantes (VAI),
(ii) avec des v.a. communes (VAC).

On a

$$\mathrm{Var}[\Delta_i] = \mathrm{Var}[X_{1,i}] + \mathrm{Var}[X_{2,i}] - 2\mathrm{Cov}[X_{1,i},\, X_{2,i}].$$

Idée de (ii): rendre la covariance positive.

Comment implanter les VAC?

Comment implanter les VAC?

Utiliser des “random streams” différents pour générer:
(1) le facteur d’achalandage B_i;
(2) les temps inter-arrivées;
(3) les durées des appels;
(4) les durées de patience.

Comment implanter les VAC?

Utiliser des “random streams” différents pour générer:
(1) le facteur d’achalandage B_i;
(2) les temps inter-arrivées;
(3) les durées des appels;
(4) les durées de patience.

Pour cet exemple, on a tout généré par inversion: une uniforme par v.a.

Pour les durées de service $\mathrm{Gamma}(\alpha, 1/\theta)$ avec $\alpha \neq 1$, il serait aussi ok de laisser la méthode de rejet, parce qu’on ne change que le paramètre d’échelle θ, et que la méthode de rejet est appliquée dans l’implantation avec ce paramètre égal à 1, avant de multiplier par θ.

Synchronisation: Lorsqu'on change les durées de service, les durées d'attente changent et les décisions d'abandon peuvent ainsi changer. Si on ne génère les durées de service que pour les clients qui n'abandonnent pas, alors on peut perdre la synchronisation: on peut avoir une durée de service de moins à générer dans un système que dans l'autre.

Synchronisation: Lorsqu'on change les durées de service, les durées d'attente changent et les décisions d'abandon peuvent ainsi changer. Si on ne génère les durées de service que pour les clients qui n'abandonnent pas, alors on peut perdre la synchronisation: on peut avoir une durée de service de moins à générer dans un système que dans l'autre.

On peut générer les durées de service:

(a) pour tous les appels, même les abandons,

(b) seulement pour les appels servis.

Synchronisation: Lorsqu'on change les durées de service, les durées d'attente changent et les décisions d'abandon peuvent ainsi changer. Si on ne génère les durées de service que pour les clients qui n'abandonnent pas, alors on peut perdre la synchronisation: on peut avoir une durée de service de moins à générer dans un système que dans l'autre.

On peut générer les durées de service:

(a) pour tous les appels, même les abandons,

(b) seulement pour les appels servis.

Le pour et le contre de chaque possibilité...

Synchronisation: Lorsqu'on change les durées de service, les durées d'attente changent et les décisions d'abandon peuvent ainsi changer. Si on ne génère les durées de service que pour les clients qui n'abandonnent pas, alors on peut perdre la synchronisation: on peut avoir une durée de service de moins à générer dans un système que dans l'autre.

On peut générer les durées de service:

(a) pour tous les appels, même les abandons,

(b) seulement pour les appels servis.

Le pour et le contre de chaque possibilité...

De même, la durée de patience n'a pas besoin d'être générée pour les clients qui n'attendent pas. On peut la générer:

(c) pour tous les appels,

(d) seulement si nécessaire.

Résultats avec $n = 10^4$.

Method	$\delta = 10$		$\delta = 1$		$\delta = 0.1$	
	$\bar{\Delta}_n$	$\widehat{\mathrm{Var}}[\Delta_i]$	$\bar{\Delta}_n$	$\widehat{\mathrm{Var}}[\Delta_i]$	$\bar{\Delta}_n$	$\widehat{\mathrm{Var}}[\Delta_i]$
IRN (a + c)	55.2	56913	4.98	45164	0.66	44046
IRN (a + d)	52.2	54696	7.22	45192	-1.82	45022
IRN (b + c)	50.3	56919	9.98	44241	1.50	45383
IRN (b + d)	53.7	55222	5.82	44659	1.36	44493
CRN, no sync. (b + d)	56.0	3187	5.90	1204	0.19	726
CRN (a + c)	56.4	2154	6.29	37	0.62	1.8
CRN (a + d)	55.9	2161	6.08	158	0.74	53.8
CRN (b + c)	55.8	2333	6.25	104	0.63	7.9
CRN (b + d)	55.5	2323	6.44	143	0.59	35.3