LAPORAN TUGAS BESAR
MATA KULIAH IF2123 ALJABAR LINEAR DAN GEOMETRI
PROGRAM

Dosen Pengampu:
Dr. Judhi Santoso, M.Sc.
Arrival Dwi Sentosa, S.Kom., M.T.

Disusun oleh :

Rafa Abdussalam Danadyaksa	13523133
Lukas Raja Agripa	13523158
Muhammad Rizain Firdaus	13523164

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2024

Daftar Isi

BAB I

1.1. DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan (x = A -1 b), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, Anda diminta membuat satu atau lebih library aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, gunakan library tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Penjelasan tentang interpolasi dan regresi adalah seperti di bawah ini.

BAB II

2.1. TEORI SINGKAT

2.1.1. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss adalah suatu metode untuk mencari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer), sedemikian hingga matriksnya memiliki bentuk eselon baris. Selanjutnya, matriks tersebut diubah ke dalam bentuk sistem persamaan linear dan kemudian dilakukan substitusi balik mulai dari persamaan paling bawah.

Sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi Gauss :

$$x + 2y + z = 6$$
$$x + 3y + 2z = 9$$
$$2x + y + 2z = 12$$

Matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan linear tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Kemudian dilakukan OBE, sedemikian hingga matriks di atas menjadi bentuk eselon

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{pmatrix} R_2 - R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 12 \end{pmatrix} R_3 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 + 3R_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} R_3(\frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks eselon baris diubah kembali menjadi sistem persamaan linear:

$$x + 2y + z = 6$$

$$y + z = 3$$

$$z = 3$$

Kemudian dilakukan substitusi balik, yaitu

$$z = 3$$

$$y + (3) = 3,\ y = 0$$

$$x + 2.(0) + 3 = 6,\ x = 3$$

Jadi diperoleh himpunan penyelesaian

$$x = 3\ ,\ y = 0\ ,\ z = 3$$

2.1.2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan adalah suatu metode untuk mencari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan menggunakan OBE, sedemikian hingga matriksnya memiliki bentuk eselon baris tereduksi. Selanjutnya, matriks tersebut diubah ke dalam bentuk sistem persamaan linear dan kemudian dilakukan substitusi balik mulai dari persamaan paling bawah.

OBE pada contoh 1.2.3 dapat dilanjutkan, sedemikian hingga diperoleh matriks bentuk eselon baris tereduksi, yaitu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriks eselon baris tereduksi diubah kembali menjadi sistem persamaan linear, sehingga diperoleh himpunan penyelesaian

$$x = 3\ ,\ y = 0\ ,\ z = 3$$

2.1.3. Determinan

Determinan adalah nilai skalar yang dapat dihitung dari sebuah matriks persegi (n x n). Determinan digunakan dalam berbagai bidang matematika, termasuk aljabar linear, untuk menentukan beberapa sifat matriks, seperti apakah matriks tersebut invertible (dapat dibalik) atau tidak. Jika determinan sebuah matriks adalah nol, matriks tersebut singular, artinya tidak dapat dibalik.

Misalkan, matriks A = [A_{ij}], dengan ukuran n x n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka determinannya adalah

$$det(A) = \sum_{\sigma \epsilon\, S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Di mana:

- Sn adalah grup semua permutasi dari n elemen.
- $sgn(\sigma)$ adalah tanda dari permutasi σ (1 jika permutasi genap, -1 jika ganjil).
- $a_{i,\sigma(i)}$ adalah elemen matriks yang terletak pada baris i dan kolom yang sesuai dengan permutasi σ

Notasi ini mencakup semua kemungkinan cara untuk memilih elemen dari setiap baris dan kolom, dikalikan dengan tanda dari permutasi tersebut.

Hal ini dapat digambarkan agar lebih mudah dipahami. Misalkan kita mengambil Matriks dengan ukuran $3x3$, maka dapat disalin baris pertama dan kedua dan diletakkan setelah baris terakhir matriks

- JIka $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka:
- det(A)= $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

  atau

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{array} \right.$$

Adapun sifat sifat dari determinan yang harus diperhatikan adalah sebagai berikut,

- Determinan Matriks Identitas

$$det(I) = 1$$

- Determinan Matriks Transpose

$$det(A^T) = 1$$

- Perkalian Matriks

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$$

- Baris Identik / Kolom Identik

$$det(A) = 0$$

- Baris Proporsional (Satu baris / kolom adalah kelipatan dari baris / kolom lainnya)

$$det(A) = 0$$

- Operasi Pertukaran Baris

$$det(B) = - det(A),\ jika\ B\ adalah\ hasil\ pertukaran\ baris\ dari\ A$$

- Mengalikan baris dengan skalar

$$det(B) = k.det(A)$$

- Penjumlahan baris

$$det(B) = det(A),\ tidak\ mengubah\ determinan$$

- Determinan Matriks Segitiga

  Determinan dari matriks segitiga (atas atau bawah) adalah hasil kali dari elemen-elemen diagonalnya:

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

2.1.4. Matriks Balikan

Matriks balikan (atau matriks invers) adalah matriks yang, ketika dikalikan dengan matriks asalnya, menghasilkan matriks identitas. Matriks identitas adalah matriks persegi di mana semua elemen pada diagonal utama bernilai 1, dan semua elemen lainnya bernilai 0. Matriks balikan dari matriks A biasanya dilambangkan sebagai A^{-1}.

Adapun syarat-syarat matriks balikan adalah sebagai berikut,

1. Matriks Persegi: Matriks harus berupa matriks persegi, artinya jumlah baris dan kolomnya harus sama.
2. Determinan Tidak Nol: Matriks harus memiliki determinan yang tidak sama dengan 0. Jika determinan matriks sama dengan 0, maka matriks tersebut tidak memiliki balikan (disebut *singular*).

Jika A adalah matriks $n \; x \; n$ dan A^{-1} adalah balikan dari A, maka: $A \; x \; A^{T} = A^{T} x \; A = I$, di mana I adalah matriks identitas berukuran $n \; x \; n$. Rumusnya adalah sebagai berikut

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

Namun, ada pula terkhusus ukuran $2 \; x \; 2$, dapat menggunakan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dengan $ad - bc$ adalah determinan dari A

2.1.5. Matriks Kofaktor

Matriks Kofaktor adalah matriks yang setiap elemennya merupakan kofaktor dari elemen-elemen matriks asli. Kofaktor sendiri adalah nilai yang diperoleh dari minor elemen matriks, dengan tanda tergantung pada posisi elemen tersebut. Matriks kofaktor diperlukan dalam proses menghitung matriks balikan dengan menggunakan rumus umum $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} . adj(A)$, di mana matriks adjoin (atau adjungat) adalah transpose dari matriks kofaktor.

Adapun langkah langkah dalam membuat Matriks Kofaktor yaitu sebagai berikut,

1. Hitung Minor

   Minor dari suatu elemen pada matriks A, yang dilambangkan sebagai M_{ij}, adalah determinan dari submatriks yang diperoleh dengan menghilangkan baris iii dan kolom jjj dari matriks asli A.
2. Tentukan Kofaktor

   Kofaktor dari elemen A_{ij} pada matriks A dihitung dengan rumus:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Di mana $(-1)^{i+j}$ adalah tanda kofaktor yang mengikuti pola bergantian antara positif dan negatif berdasarkan posisi elemen.

3. Buat Matriks Kofaktor

   Matriks kofaktor adalah matriks yang tersusun dari kofaktor-kofaktor setiap elemen A_{ij}

2.1.6. Matriks Adjoin

Matriks Adjoin (atau matriks adjungat/adjugate) adalah matriks yang dibentuk dari matriks kofaktor suatu matriks persegi, kemudian dilakukan operasi transpose. Matriks adjoin digunakan dalam aljabar linear, terutama dalam menghitung balikan dari sebuah matriks persegi. Matriks ini sangat penting dalam berbagai aplikasi matematika, seperti dalam pemecahan sistem persamaan linear dan kalkulus matriks.

Berikut adalah langkah-langkah rinci untuk membuat matriks adjoin dari sebuah matriks persegi A:

1. Hitung Minor untuk Setiap Elemen:

   Minor dari elemen A_{ij}, dilambangkan sebagai M_{ij}, adalah determinan dari submatriks yang terbentuk setelah menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A.

2. Hitung Kofaktor untuk Setiap Elemen

   Kofaktor C_{ij} dihitung dari minor M_{ij} dengan menambahkan tanda sesuai dengan posisi elemen dalam matriks. Tanda kofaktor mengikuti pola $(-1)^{i+j}$, di mana i adalah indeks baris dan j adalah indeks kolom. Rumus kofaktor untuk setiap elemen A_{ij} adalah:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

   Hasil dari operasi ini akan membentuk matriks kofaktor.

3. Transpose Matriks Kofaktor

   Setelah matriks kofaktor dihitung, buat transpose dari matriks tersebut. Transpose berarti menukar elemen baris menjadi kolom dan elemen kolom menjadi baris. Matriks transpose dari suatu matriks C dinyatakan sebagai C^T, dan inilah yang kita sebut sebagai matriks adjoin.

2.1.7. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer, atau lebih dikenal sebagai Aturan Cramer, adalah metode dalam aljabar linear yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode ini menggunakan determinan dari matriks koefisien untuk menemukan solusi variabel dalam sistem.

Misalkan kita punya sistem persamaan Linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Sistem persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$A \cdot X = B$$

Di mana,

- A adalah matriks koefisien berukuran $n\ x\ n$
- X adalah vektor variabel $(x_1, x_2, x_3 ..., x_n)^T$
- B adalah vektor konstanta $(b_1, b_2, b_3 ..., b_n)^T$

Adapun syarat dalam menggunakan kaidah Cramer, yaitu sebagai berikut :

- Matriks A harus persegi (memiliki jumlah baris dan kolom yang sama).
- Determinan dari matriks A harus tidak sama dengan nol.. Jika determinan A nol, sistem persamaan tidak memiliki solusi unik.

Adapun Rumus dari Kaidah Cramer yaitu,

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Di mana:

- A adalah matriks koefisien dari sistem persamaan linear.

- A_i adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menggantikan kolom ke-i dengan vektor konstanta B.
- $det(A)$ adalah determinan dari matriks koefisien A, dan $det(A_i)$ adalah determinan dari matriks A_i.

Langkah-Langkah Menggunakan Kaidah Cramer:

1. Hitung Determinan Matriks Koefisien A

Hitung $det(A)$, yaitu determinan dari matriks koefisien A. Jika determinan ini nol, sistem tidak memiliki solusi unik.

2. Buat Matriks A_i untuk Setiap Variabel

Untuk setiap variabel x_i, buat matriks A_i dengan mengganti kolom ke-i dari matriks A dengan vektor konstanta B.

3. Hitung Determinan A_i

Untuk setiap matriks A_i, hitung determinan $det(A_i)$

4. Tentukan Solusi

Untuk setiap variabel x_i, solusinya adalah:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

2.1.8. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom adalah suatu metode untuk menemukan polinom yang melewati sekumpulan titik data tertentu. Ini adalah salah satu teknik dalam analisis numerik yang digunakan untuk memperkirakan nilai fungsi di antara dua titik data atau untuk menemukan hubungan fungsional yang mendekati nilai data yang diketahui.

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

Interpolasi polinom bertujuan untuk membangun sebuah polinom $P(x)$ dari derajat n yang melewati $n + 1$ titik data yang diketahui:

di mana $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ adalah titik-titik yang berbeda, dan $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ adalah nilai fungsi di titik-titik tersebut.

Polinom interpolasi $P(x)$ yang melewati semua titik ini adalah fungsi polinomial:

Tujuan dari interpolasi polinom adalah menemukan koefisien $(a_0, a_1, ..., a_n)$ sedemikian rupa sehingga polinom ini sesuai dengan data yang diberikan.

Ada beberapa metode untuk membangun interpolasi polinom, beberapa di antaranya adalah:

1. Interpolasi Polinom Lagrange
2. Interpolasi Polinom Newton
3. Interpolasi Spline (Spline Cubic)

Dalam konteks matriks, interpolasi polinom dapat diaplikasikan menggunakan metode matriks Vandermonde. Metode ini melibatkan pembentukan sistem persamaan linear dari sekumpulan titik data yang ingin kita interpolasi menggunakan polinom.

Misalkan kita memiliki $n + 1$ titik data $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ... (x_n, y_n)$ dan ingin mencari polinom interpolasi $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... a_nx^n$.

Adapun langkah - langkahnya sebagai berikut,

1. Membangun Sistem Persamaan Linear:

Dari titik-titik data $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ... (x_n, y_n)$, kita dapat membentuk persamaan berikut untuk setiap titik:

$$P(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0$$

$$P(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1$$

Sistem persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Matriks yang disebelah kiri disebut Matriks Vandermonde

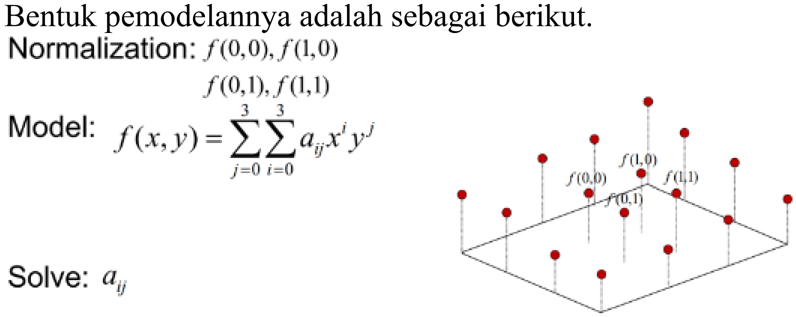
Matriks ini memiliki struktur khusus di mana elemen pada baris i dan kolom j adalah x_i^{j-1}. Secara umum, untuk titik data $x_0, x_1, \ldots, x_n$, matriks Vandermonde dapat dituliskan sebagai:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

2.1.9. Interpolasi Bicubic Spline

Bicubic spline interpolation adalah metode interpolasi yang digunakan untuk mengaproksimasi fungsi di antara titik-titik data yang diketahui. Bicubic spline interpolation melibatkan konsep spline dan konstruksi serangkaian polinomial kubik di dalam setiap sel segi empat dari data yang diberikan. Pendekatan ini menciptakan permukaan yang halus dan kontinu, memungkinkan untuk perluasan data secara visual yang lebih akurat daripada metode interpolasi linear.

Dalam pemrosesan menggunakan interpolasi bicubic spline digunakan 16 buah titik, 4 titik referensi utama di bagian pusat, dan 12 titik di sekitarnya sebagai aproksimasi turunan dari keempat titik referensi untuk membagun permukaan bikubik. Bentuk pemodelannya adalah sebagai berikut.



Selain melibatkan model dasar, juga digunakan model turunan berarah dari kedua sumbu, baik terhadap sumbu x, sumbu y, mapun keduanya. Persamaan polinomial yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j$$

$$f_x(x, y) = \sum_{j=0}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} i x^{i-1} y^j$$

$$f_y(x, y) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=0}^{3} a_{ij} j x^i y^{j-1}$$

$$f_{xy}(x, y) = \sum_{j=0}^{3} \sum_{i=0}^{3} a_{ij} ij x^{i-1} y^{j-1}$$

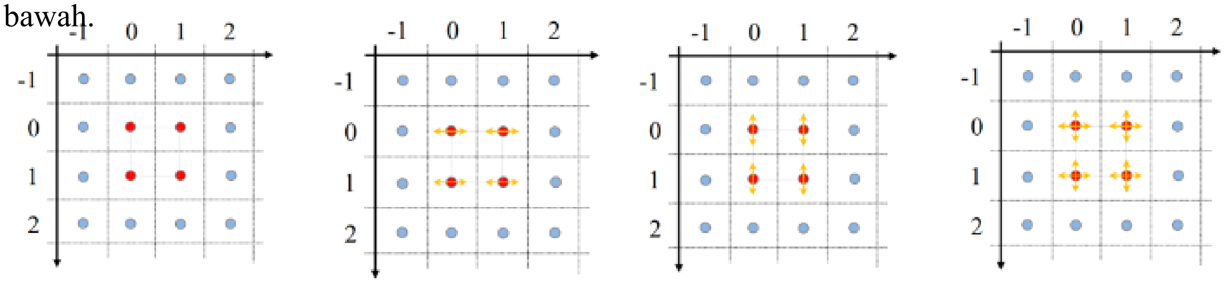
Dengan menggunakan nilai fungsi dan turunan berarah tersebut, dapat terbentuk sebuah matriks solusi X yang membentuk persamaan penyelesaian sebagai berikut.

$$y = Xa$$

$$\begin{bmatrix} f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(0,1) \\ f(1,1) \\ f_x(0,0) \\ f_x(1,0) \\ f_x(0,1) \\ f_x(1,1) \\ f_y(0,0) \\ f_y(1,0) \\ f_y(0,1) \\ f_y(1,1) \\ f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(1,0) \\ f_{xy}(0,1) \\ f_{xy}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{03} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Perlu diketahui bahwa elemen pada matriks X adalah nilai dari setiap komponen koefisien a_{ij} yang diperoleh dari persamaan fungsi maupun persamaan turunan yang telah dijelaskan sebelumnya. Sebagai contoh, elemen matriks X pada baris 8 kolom ke 2 adalah koefisien dari a_{10} pada ekspansi sigma untuk $f_x(1, 1)$ sehingga diperoleh nilai konstanta $1 \, x \, 1^{1-1} \, x \, 1^0 = 1$, sesuai dengan isi matriks X. Nilai dari vektor a dapat dicari dari persamaan $y = Xa$, lalu vektor a tersebut digunakan sebagai nilai variabel dalam

$f(x, y)$, sehingga terbentuk fungsi interpolasi bicubic sesuai model. Tugas Anda pada studi kasus ini adalah membangun persamaan $f(x, y)$ yang akan digunakan untuk melakukan interpolasi berdasarkan nilai $f(a, b)$ dari masukan matriks $4 \ x \ 4$. Nilai masukan a dan b berada dalam rentang [0, 1]. Nilai yang akan diinterpolasi dan turunan berarah disekitarnya dapat diilustrasikan pada titik berwarna merah pada gambar di bawah.



2.1.10. Regresi Linear

Regresi (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Pada tugas besar ini, anda diminta untuk membuat 2 jenis regresi yaitu Regresi Linier Berganda dan Regresi Kuadratik Berganda.

2.1.11. Regresi Kuadratik Berganda

Dalam kasus ini, proses mengubah data-data dalam regresi kuadratik berganda cukup berbeda dengan Regresi Linier Berganda. Bentuk persamaan dari regresi kuadratik ada 3, yaitu:

a. Variabel Linier: Variabel dengan derajat satu seperti X, Y, dan Z

b. Variabel Kuadrat: Variabel dengan derajat dua seperti X^2

c. Variabel Interaksi: 2 Variabel dengan derajat satu yang dikalikan dengan
satu sama lain seperti XY, YZ, dan XZ

Setiap n-peubah, jumlah variabel linier, kuadrat, dan interaksi akan berbeda-beda. Perhatikan contoh regresi kuadratik 2 variabel peubah sebagai berikut!

N menandakan jumlah peubah, terdapat 2 variabel linier yaitu u dan v, 2 variabel kuadrat yaitu u dan v, dan 1 variabel interaksi yaitu uv. Untuk setiap n-peubah, akan terdapat 1 konstan N (terlihat di bagian atas kiri gambar), n variabel linier, n variabel kuadrat, dan C variabel linier (dengan syarat $n > 1$). Tentu dengan bertambahnya peubah n, ukuran matriks akan bertumbuh lebih besar dibandingkan regresi linier berganda, tetapi solusi tetap bisa didapat dengan menggunakan SPL. Kedua model regresi yang dijadikan sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III

3.1. IMPLEMENTASI

Input.java

Tabel 3.1.1. Metode Matriks.java

Nama Metode	Tipe	Parameter	Deskripsi
inputMatriks	Public static		Fungsi untuk menginput matriks sesuai dengan baris dan kolom yang di input.

Matriks.java

Tabel 3.1.1. Metode Matriks.java

Nama Metode	Tipe	Parameter	Deskripsi
bacaMatriks	public		Fungsi untuk menginput elemen matriks.
cetakMatriks	public		Fungsi untuk mencetak/ memberikan keluaran berupa matriks
kaliMatriks	Public static	Matriks M, Matrik N	Fungsi untuk melakukan perkalian dua buah matriks
transposeMatriks	Public		Fungsi

SPL.java

Tabel 3.1.1. Metode SPL.java

Nama Metode	Tipe	Parameter	Deskripsi
SPLCreamer	Public static	Matriks M, string suffix.	Melakukan penyelesaian permasalahan dan mencari solusi SPL dengan kaidah cramer.
SPLInvers	Public static	Matriks M, String Suffix.	Melakukan penyelesaian permasalahan dan mencari solusi SPL dengan Metode Invers.
metodeGaussJordan	Public static	Matriks M, String Suffix.	Melakukan penyelesaian permasalahan dan mencari solusi SPL dengan Metode Gauss Jordan.
metodeGauss	Public static	Matriks M, String Suffix.	Melakukan penyelesaian permasalahan dan mencari solusi SPL dengan Metode Gauss.

Determinan.java
Tabel 3.1.1. Metode Determinan.java

Nama Metode	Tipe	Parameter	Deskripsi
determinanOBE	Public double	Matriks M	Mencari determinan dengan menggunakan metode determinan Operasi baris elementer.
determinanKofaktor			Mencari determinan dengan menggunakan metode ekspansi Kofaktor.

Invers.java

Tabel 3.1.1. Metode Invers.java

Nama Metode	Tipe	Parameter	Deskripsi
inversPakeGaussJordan	Public static		Mencari invers matriks dengan menggunakan metode Gauss Jordan.
inversPakeAdjoin	Public static		Mencari invers matriks dengan menggunakan metode invers adjoin.

Interpolasi.java

Tabel 3.1.1. Metode Interpolasi.java

Nama Metode	Tipe	Parameter	Deskripsi
interpolasiPolinom	Public static double	Matriks M, double xp	Fungsi untuk menghitung polinom interpolasi Lagrange
interpolasiSplineBikubik	Public static void		Fungsi untuk membaca matriks dari input pengguna
interpolasiSplineBikubik	Public ststic double	Matriks M, double x, doubly y	Fungsi untuk interpolasi bicubic pada dtid 2D

Regresi.java

Tabel 3.1.1. Metode regresi.java

Nama Metode	Tipe	Parameter	Deskripsi
regresiLinearBerganda	Public static void		Melakukan penyelesaian permasalahan regresi linear berganda
regresiKuadratikBerg	Public static void		Melakukan penyelesaian

anda			permasalahan regresi kuadratik berganda

BAB IV

4.1. EKSPERIMEN

1. Solusi SPL $Ax = b$
   a. Test case 1a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6

SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ?
```

   b. Test case 1b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
Silahkan masukan Matriks :
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1

x1 = 4,00
x2 = a + 1,00
x3 = 0
x4 = a - 1,00
x5 = a
```

   c. Test case 1c

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
0 1 0 0 1 0 2
0 0 0 1 1 0 -1
0 1 0 0 0 1 1

x1 = 0
x2 = -a + 1,00
x3 = 0
x4 = -a - 2,00
x5 = a + 1,00
x6 = a
```

d. Test case 1d

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
1 0,5 0,3333 1
0,5 0,3333 0,25 0
0,3333 0,25 0,2 0

x1 = 37,00
x2 = -36,00
x3 = 30,00
```

2. SPL berbentuk matriks *augmented*
   a. Test Case 2a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

```
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3

x1 = b - 1,00
x2 = 2,00a
x3 = a
x4 = b
```

b. *Test Case 2b*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0

SPL tersebut tidak memiliki solusi
```

3. SPL berbentuk

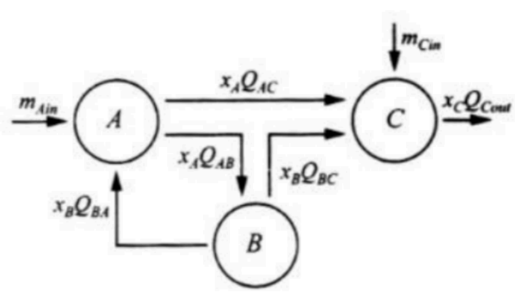
a. Test Case 3a

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

b. Test Case 3b

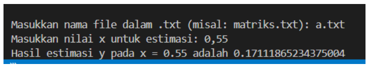
$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

4. Sistem reaktor

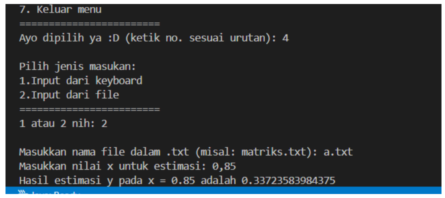


5. Studi Kasus Interpolasi
   a. Test Case 5a

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697



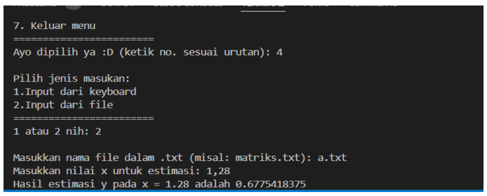
```
Masukkan nama file dalam .txt (misal: matriks.txt): a.txt
Masukkan nilai x untuk estimasi: 0,55
Hasil estimasi y pada x = 0.55 adalah 0.17111865234375004
```



```
7. Keluar menu
========================
Ayo dipilih ya :D (ketik no. sesuai urutan): 4

Pilih jenis masukan:
1.Input dari keyboard
2.Input dari file
========================
1 atau 2 nih: 2

Masukkan nama file dalam .txt (misal: matriks.txt): a.txt
Masukkan nilai x untuk estimasi: 0,85
Hasil estimasi y pada x = 0.85 adalah 0.33723583984375
```



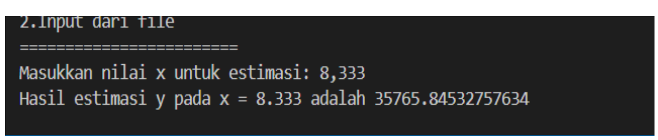
```
7. Keluar menu
========================
Ayo dipilih ya :D (ketik no. sesuai urutan): 4

Pilih jenis masukan:
1.Input dari keyboard
2.Input dari file
========================
1 atau 2 nih: 2

Masukkan nama file dalam .txt (misal: matriks.txt): a.txt
Masukkan nilai x untuk estimasi: 1,28
Hasil estimasi y pada x = 1.28 adalah 0.6775418375
```

b. Test Case 5b

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6,567	12.624
30/06/2022	7	21.807
08/07/2022	7,258	38.391
14/07/2022	7,451	54.517
17/07/2022	7,548	51.952
26/07/2022	7,839	28.228
05/08/2022	8,161	35.764
15/08/2022	8,484	20.813
22/08/2022	8,709	12.408
31/08/2022	9	10.534



```
2.Input dari file
========================
Masukkan nilai x untuk estimasi: 8,333
Hasil estimasi y pada x = 8.333 adalah 35765.84532757634
```

```
2.Input dari file
Masukkan nilai x untuk estimasi: 7,516
Hasil estimasi y pada x = 7.516 adalah 53537.71756255957
```

c. Test Case 5c

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

6. Studi Kasus Regresi Linear dan Kuadratik Berganda

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

7. Studi Kasus Interpolasi *Bicubic Spline*

$$\begin{pmatrix} 21 & 98 & 125 & 153 \\ 51 & 101 & 161 & 59 \\ 0 & 42 & 72 & 210 \\ 16 & 12 & 81 & 96 \end{pmatrix}$$

BAB V

5.1. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa Sistem Persamaan Linier (SPL) dapat diselesaikan dengan berbagai metode. Dalam Menyelesaikan SPL itu sendiri terdapat beberapa metode seperti, metode gauss, gauss jordan, matriks invers, dan kaidah cremer. Dimana setiap metode memiliki cara atau pendekatan yang berbeda-beda. Ada 3 kemungkinan solusi SPL yaitu, solusi unik, solusi banyak, dan tidak ada solusi. Solusi unik adalah saat masing-masing variabel bernilai untik atau hanya satu. Solusi banyak adalah saat nilai variabelnya tidak konstan, dan bergantung pada variabel lain. Tidak ada solusi terjadi ketika tidak ada nilai variabel yang memenuhi.

Sistem persamaaan linier dapat diaplikasikan dalam berbagai hal, contohnya seperti, Interpolasi dan Regresi Linier. Interpolasi terbagi menjadi 2 yaitu interpolasi polinomial dan interpolasi bicubic. Interpolasi polinomial adalah teknik yang dapat digunakan untuk memprediksi suatu nilai berdasarkan data yang dimiliki. Salah satu kasus pada tugas ini adalah memprediksi Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia. Interpolasi bicubic adalah metode hasil pengembangan dari interpolasi polinomial. Interpolasi bicubic dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi di antara titik-titik data yang diketahui. Regresi pada kasus ini juga terbagi menjadi dua yaitu, regresi linier dan regresi kuadratik berganda. Regresi linier.

5.2. SARAN

Berdasarkan hasil yang telah didapatkan, kami memberikan saran untuk pengembangan produk yang sudah dibuat, antara lain :

1. Melakukan lebih banyak testing untuk berbagai test case. Testing dilakukan untuk mengetahui suatu fungsi berjalan dengan benar atau tidak, sehingga dibutuhkan testing berbagai alternatif test case untuk berbagai kemungkinan.
2. Menambahkan GUI (Graphical User Interface) agar produk yang dihasilkan dapat lebih interaktif.
3. Menambahkan *image resizing and Stretching*.

5.3. KOMENTAR

NAMA	KOMENTAR
Rafa Abdussalam Danadyaksa	Hal ini diperlukan ketekunan dalam mendapatkan algoritma yang pas untuk melihat kondisi matriks yang beraneka ragam, seperti pembagian terhadap 0.
Lukas Raja Agripa	Baiknya untuk memulai project ini, sudah memiliki kemampuan

	dasar dalam matriks dan bagian bagian yang dibahas dalam laporan ini
Muhammad Rizain Firdaus	Saya sudah mengerjakan tugas ini dengan sungguh sungguh

5.4. REFLEKSI

Tabel 5.4 Refleksi

NAMA	REFLEKSI
Rafa Abdussalam Danadyaksa	Kurang eksplor, sehingga butuh waktu lebih untuk memahami yang mengakibatkan tidak dapat mengerjakan fitur bonus seperti GUI dan Image resizing dan stretching.
Lukas Raja Agripa	Karena ini baru pertama kalinya menggunakan bahasa Java, maka sangat membutuhkan banyak waktu untuk mengerjakan persoalan wajibnya sehingga tidak dapat mencoba bagian GUI meskipun saya tertarik untuk menyelesaikan GUI juga sebelum deadline.
Muhammad Rizain Firdaus	Baiknya ketika mengerjakan project ini dibutuhkan seorang yang ahli dalam perhitungan matriks dan bagian bagian yang dibahas dalam laporan ini.

Lampiran

Referensi

1. Strang, G. (2009). Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.
2. Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson.
3. https://www.academia.edu/31872759/Determinan_matriks
4. https://www.academia.edu/45564518/Metode_Eliminasi_Gauss?auto=download

Repository

- https://github.com/inRiza/Algeo01-23133

Link video

- -