Trabalho 1 - Tópicos especiais em Telecomunicação

Inácio Lima de Souza Filho - 509153

1. a) Determinar K e esboçar $f_X(x)$:

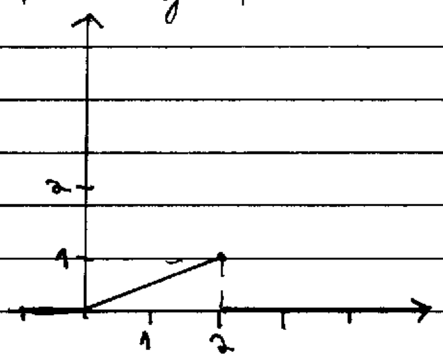
Pela normalização de uma densidade,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(X)\,dx = \int_0^2 KX\,dx = K\left[\frac{X^2}{2}\right]_0^2 = K\cdot\frac{2^2}{2} = K\cdot 2 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

Logo

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < X < 2, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

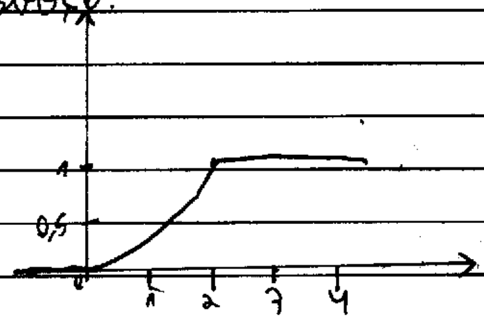
Esboço do gráfico:



b) Função de distribuição acumulada $F_X(X)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & X \leq 0, \\ \int_0^x \frac{1}{2}t\,dt = \frac{x^2}{4}, & 0 < X < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Esboço:



c) Calcular

$$P\left(\frac{1}{2} < X \le 1\right) = F_X(1) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^2}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{3}{16}$$

2)

Média:

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

Variância:

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

3) a) $m_X(t) = E[X(t)]$

$m_X(t) = E[A\cos(\omega t + \Phi)] = E[A]\,E[\cos(\omega t + \Phi)] =$

$= \left(\frac{0+2}{2}\right)\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0,$

pois $E[\cos(\omega t + \Phi)] = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega t + \phi)\,d\phi = 0.$

b) Autorelação:

$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[A^2\cos(\omega t_1 + \Phi)\cdot\cos(\omega t_2 + \Phi)].$

Como A e Φ são idependentes,

$E[A^2] = \int_0^2 a^2\,\frac{1}{2}\,da = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}.$

$E[\cos(\alpha + \Phi)\cos(\beta + \Phi)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\alpha+\phi)\cos(\beta+\phi)\,d\phi =$

$\frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta).$

Tomando $\alpha = \omega t_1$, $\beta = \omega t_2$,

$R_X(t_1,t_2) = \frac{4}{3}\,\frac{1}{2}\cos(\omega(t_1 - t_2)) = \frac{2}{3}\cos(\omega(t_1-t_2)).$

c) Verificação de estacionariedade fraca.

- $m_X(t) = 0$ é constante.
- $R_X(t_1, t_2)$ depende apenas de $T = t_2 - t_1$.

Logo, $X(t)$ é fracamente estacionário (WSS).

4) a) média $m_X[n]$

$$m_X[n] = E[A(-1)^n + W[n]] = (-1)^n E[A] + 0 =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1+3}{2} = 2(-1)^n$$

b) autocorrelação $R_X[m,n] = E[X[m]X[m]]$

$$R_X[m,n] = E[(A(-1)^m + W[m])(A(-1)^n + W[n])]$$

$$= E[A^2](-1)^{m+n} + E[W[m]W[n]]$$

$$= \frac{13}{3}(-1)^{m+n} + \sigma^2 \delta_{mn},$$

onde

$$E[A^2] = \int_1^3 \frac{a^2}{2} \, da = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^3 - 1^3}{3} = \frac{13}{3}.$$

c) Estacionariedade fraca?

- A média $m_X[n] = 2(-1)^n$ não é constante.
- $R_X[m,n]$ depende de $m+n$ (e não só de $n-m$).

Logo, não é WSS.

5)

Seja $X[n] = 1$ para cara, 0 para coroa.
Então.

$$E[X[n]] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

- Média do conjunto: $\frac{3}{4}$.
- Média de tempo em uma realização:
  - Se caiu a moeda justa, ao longo dos lançamentos tende a $1/2$.
  - Se caiu a moeda dupla, tende a 1.

Como a média temporal depende da moeda sorteada não é ergódico em média.

6) A densidade espectral é a transformada de Fourier de $R_x(T)$:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(T) e^{-j2\pi f T} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|T|} e^{-j2\pi f T} dT.$$

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|T|} e^{-j2\pi f T} dT = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + (2\pi f)^2}$$

Portanto

$$S_x(f) - \sigma^2 \frac{2\lambda}{\lambda^2 + (2\pi f)^2}.$$