Introduction : Bases de Haar

Ina Campan

7 avril 2023

Résumé

Introduction aux notions de Bases de Haar et de fonctions de Haar.

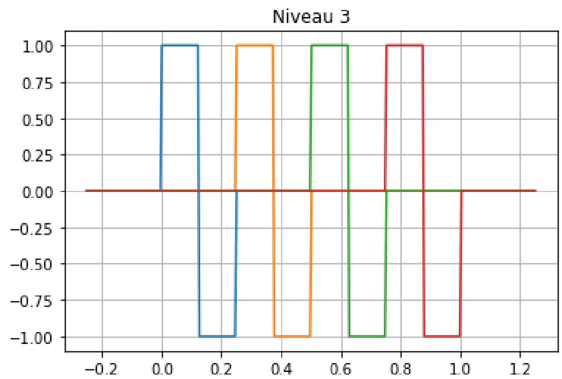
1 Fonctions de Haar rationnalisées

On définit une suite de fonctions sur $[0, 1]$ par niveaux :

1. La seule fonction du niveau 0 est la fonction constante égale à 1.
2. La seule fonction du niveau 1 est égale à 1 sur $[0,\ 1/2]$ et égale à -1 sur $[1/2,\ 1]$
3. Pour $k \geqslant 1$, soit f une fonction du niveau k. Alors f est égale à 1 sur un intervalle I_1, égale à -1 sur un intervalle I_2 et égale à 0 partout ailleurs. A partir de cette fonction, on définit deux fonctions pour le niveau $k+1$: la première vaut 1 sur la première moitié de I_1, -1 sur la deuxième moitié de I_1 et 0 partout ailleurs ; la deuxième fonction vaut 1 la première moitié de I_2, -1 sur la deuxième moitié de I_2 et 0 partout ailleurs.

Observation : au k-ième niveau, on a 2^{k-1} fonctions. La suite de fonctions obtenue s'appelle **suite des fonctions de Haar**.

FIGURE 1 – Représentation en python pour le niveau 3.



2 Les fonctions de la base de Haar

On pose : $j \leqslant 0$ et $0 \leqslant k \leqslant 2^j - 1$:

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & x \in [k2^{-j}, (k+\frac{1}{2})2^{-j}[\\ -2^{\frac{j}{2}} & x \in [(k+\frac{1}{2})2^{-j}, (k+1)2^{-j}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1 Bases Hilbertienne

Les fonctions de Haar forment une base Hilbertienne de l'espace $\mathbb{L}^2[0, 1[$:

1. la suite est orthogonale
2. la suite est totale : l'espace vectoriel engendré par la suite de fonctions est dense dans $\mathbb{L}^2[0, 1[$

3 Décomposition en base de Haar. Matrices

4 Implémentation Python pour les ondelettes

Il existe une bibliothèque python pour implémenter des codes concernant la compréssion des données :

```
import pywt
from pywt import wavedec
import numpy as np
```