# 1 Модель SEIR

Модель SEIR является моделью развития эпидемии.

Инфекция развивается по схеме «восприимчивые»(S) — «контактные»(E) — «инфицированные»(I) — «выздоровевшие»(R) и описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dT} = \mu N - \mu S - \beta \frac{I}{N} S \\ \frac{dE}{dT} = \beta \frac{I}{N} S - (\mu + \alpha) E \\ \frac{dI}{dT} = \alpha E - (\gamma + \mu) I \\ \frac{dR}{dT} = \gamma I - \mu R \end{cases}.$$

$\mu$ - уровень смертности;
$\alpha$ - величина, обратная среднему инкубационному периоду заболевания;
$\beta$ - коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием;
$\gamma$ - коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов;
$N$ - численность популяции

Первое уравнение системы означает, что изменение числа здоровых (и при этом восприимчивых к заболеванию) индивидуумов уменьшается со временем пропорционально числу контактов с инфицированными. После заражения здоровый индивид переходит в состояние контактного по данному заболеванию, или носителя инфекции.

Второе уравнение вносит задержку по времени при переходе из состояния контактного в состояние инфицированного (больного). Это происходит через время, равное инкубационному периоду болезни.

Третье уравнение описывает переход из состояния «контактный» в состояние «инфицированный».

Четвертое уравнение демонстрирует, что число выздоровевших в единицу времени пропорционально числу инфицированных. При этом в каждом состоянии индивидуум может погибнуть, что учитывает коэффициент $\mu$ в каждом уравнении.

Иначе говоря, в каждый момент времени каждый индивидуум с определенной вероятностью может заразиться, через некоторое время — заболеть, а затем поправиться либо погибнуть.

Численность популяции $N = S + E + I + R$ при этом не является постоянной с течением времени.

# 2 Решение системы

$$\begin{cases} \frac{dS}{dT} = \mu N - \mu S - \beta \frac{I}{N} S \\ \frac{dE}{dT} = \beta \frac{I}{N} S - (\mu + \alpha) E \\ \frac{dI}{dT} = \alpha E - (\gamma + \mu) I \\ \frac{dR}{dT} = \gamma I - \mu R \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{S(t_1)-S(t_0)}{t_1-t_0} = \mu N(t_0) - \mu S(t_0) - \beta\frac{I(t_0)}{N(t_0)}S(t_0) \\ \frac{E(t_1)-E(t_0)}{t_1-t_0} = \beta\frac{I(t_0)}{N(t_0)}S(t_0) - (\mu+\alpha)E(t_0) \\ \frac{I(t_1)-I(t_0)}{t_1-t_0} = \alpha E(t_0) - (\gamma+\mu)I(t_0) \\ \frac{R(t_1)-R(t_0)}{t_1-t_0} = \gamma I(t_0) - \mu R(t_0) \end{cases} \tag{2}$$

Первый шаг. Пусть $h = t_1 - t_0$

$$\begin{cases} S(t_1) = S(t_0) + h(\mu N(t_0) - \mu S(t_0) - \beta\frac{I(t_0)}{N(t_0)}S(t_0) \\ E(t_1) = E(t_0) + h(\beta\frac{I(t_0)}{N(t_0)}S(t_0) - (\mu+\alpha)E(t_0)) \\ I(t_1) = I(t_0) + h(\alpha E(t_0) - (\gamma+\mu)I(t_0)) \\ R(t_1) = R(t_0) + h(\gamma I(t0) - \mu R(t0)) \\ N(t0) = S(t_0) + E(t_0) + I(t_0) + R(t_0) \end{cases} \tag{3}$$

Второй шаг. Выпишем вспомогательные функции:

$$\begin{cases} S_1(t_1) = S(t_1) + h(\mu N(t_1) - \mu S(t_1) - \beta\frac{I(t_1)}{N(t_1)}S(t_1) \\ E_1(t_1) = E(t_1) + h(\beta\frac{I(t_1)}{N(t_1)}S(t_1) - (\mu+\alpha)E(t_1)) \\ I_1(t_1) = I(t_1) + h(\alpha E(t_1) - (\gamma+\mu)I(t_1)) \\ R_1(t_1) = R(t_1) + h(\gamma I(t_1) - \mu R(t_1)) \\ N_1(t_1) = S_1(t_1) + E_1(t_1) + I_1(t_1) + R_1(t_1) \end{cases} \tag{4}$$

Решение при $t = t_2$

$$\begin{cases} S(t_2) = S(t_1) + \frac{h}{2}(\mu(N(t_1) + N_1(t_1)) - \mu(S(t_1) + S_1(t_1)) - \beta(\frac{I(t_1)}{N(t_1)}S(t_1) + \frac{I_1(t_1)}{N_1(t_1)}S_1(t_1)) \\ E(t_2) = E(t_1) + \frac{h}{2}(\beta(\frac{I(t_1)}{N(t_1)}S(t_1) + \frac{I_1(t_1)}{N_1(t_1)}S_1(t_1)) - (\mu+\alpha)(E(t_1)) + E_1(t_1))) \\ I(t_2) = I(t_1) + \frac{h}{2}(\alpha(E(t_1) + E_1(t_1)) - (\gamma+\mu)(I(t_1) + I_1(t_1))) \\ R(t_2) = R(t_1) + \frac{h}{2}(\gamma(I(t_1) + I_1(t_1)) - \mu(R(t_1)) + R_1(t_1)) \\ N(t_2) = S(t_2) + E(t_2) + I(t_2) + R(t_2) \end{cases} \tag{5}$$

k-ый шаг. Выпишем вспомогательные функции Обозначим $h = t_k - t_{k-1}$

$$\begin{cases} S_1(t_{k-1}) = S(t_{k-1}) + h(\mu N(t_{k-1}) - \mu S(t_{k-1}) - \beta\frac{I(t_{k-1})}{Nt_{k-1})}S(t_{k-1}) \\ E_1(t_{k-1}) = E(t_{k-1}) + h(\beta\frac{I(t_{k-1})}{N(t_{k-1})}S(t_{k-1}) - (\mu+\alpha)E(t_{k-1})) \\ I_1(t_{k-1}) = I(t_{k-1}) + h(\alpha E(t_{k-1}) - (\gamma+\mu)I(t_{k-1})) \\ R_1(t_{k-1}) = R(t_{k-1}) + h(\gamma I(t_{k-1}) - \mu R(t_{k-1})) \\ N_1(t_{k-1}) = S_1(t_{k-1}) + E_1(t_{k-1}) + I_1(t_{k-1}) + R_1(t_{k-1}) \end{cases} \tag{6}$$

Решение при $t = t_k$

$$
\begin{cases}
S(t_k) = S(t_{k-1}) + \frac{h}{2}(\mu(N(t_{k-1}) + N_1(t_{k-1}) - (S(t_{k-1}) + S_1(t_{k-1})) - \beta(\frac{I(t_{k-1})}{N(t_{k-1})}S(t_{k-1}) + \frac{I_1(t_{k-1})}{N_1(t_{k-1})}S_1(t_{k-} \\
E(t_k) = E(t_{k-1}) + \frac{h}{2}(\beta(\frac{I(t_{k-1})}{N(t_{k-1})}S(t_{k-1}) + \frac{I_1(t_{k-1})}{N_1(t_{k-1})}S_1(t_{k-1})) - (\mu + \alpha)(E(t_{k-1})) + E_1(t_{k-1}))) \\
I(t_k) = I(t_{k-1}) + \frac{h}{2}(\alpha(E(t_{k-1}) + E_1(t_{k-1})) - (\gamma + \mu)(I(t_{k-1}) + I_1(t_{k-1}))) \\
R(t_k) = R(t_{k-1}) + \frac{h}{2}(\gamma(I(t_{k-1}) + I_1(t_{k-1})) - \mu(R(t_{k-1})) + R_1(t_{k-1})) \\
N(t_k) = S(t_k) + E(t_k) + I(t_k) + R(t_k)
\end{cases}
\tag{7}
$$