Ejercicios

Introducción a la Relatividad General y la Cosmología
Curso 2025-2026

Unidad 2 Álgebra y Cálculo Tensorial

Ejercicio 2.1. Las ecuaciones de transformación entre las coordenadas polares (r, θ) y las coordenadas cartesianas (x, y) en un plano son:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Calcula las cuatro transformadas parciales $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$.

Ejercicio 2.2. Datas las ecuaciones de transformación entre las coordenadas cartesianas y las coordendadas polares (ver Ejercicio 2.1), considera la función escalar $\Phi = bxy$ y calcula su gradiente en ambos sistemas de referencia.

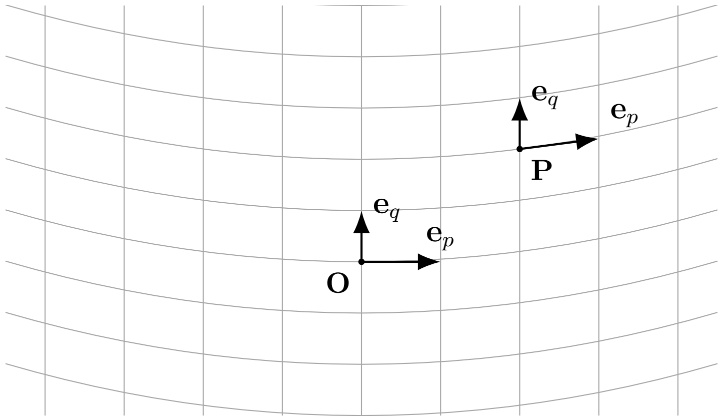
Ejercicio 2.3. Basándote en los resultados del Ejercicio 2.2, transforma las coordenadas cartesianas del vector $\nabla\Phi$ a coordenadas polares según las reglas de la transformación covariante de un vector. Comprueba que el resultado de dicha transformación coincide con las coordenadas polares del vector $\nabla\Phi$.

Ejercicio 2.4. Considera el sistema de coordenadas parabólicas (p, q) y sus transformaciones desde coordenadas cartesianas ordinarias (x, y) dadas por:

$$p(x, y) = x$$
$$q(x, y) = y - cx^2$$

donde c es una constante. Prueba que las ecuaciones de transformación inversa son:

$$x(p, q) = p$$
$$y(p, q) = cp^2 + q$$



Coordenadas parabólicas con $p = x$ y $q = y - cx^2$

Ejercicio 2.5. Dadas las ecuaciones de transformación entre coordenadas cartesianas y parabólicas del Ejercicio 2.4, y sabiendo que las componentes del tensor de la métrica en coordenadas cartesianas son las de la matriz identidad, i.e. $ds^2 = dx^2 + dy^2$, calcula el tensor de la métrica en coordenadas parabólicas (p, q).

Ejercicio 2.6. Sea un vector $\mathbf{A}$ con componentes en coordenadas parabólicas (p, q): $A^p = 1$, $A^q = 0$. De acuerdo con las transformaciones entre las coordenadas parabólicas y las cartesianas especificadas en el Ejercicio 2.4:
(a) Encuentra las componentes de este vector en el sistema de coordenadas cartesianas (x,y).
(b) ¿Tienen sentido estas componentes? (Pista: dibuja los vectores base $\mathbf{e}_p$ y $\mathbf{e}_q$ en un punto típico).
(c) Demuestra que $A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ tiene el mismo valor en ambos sistemas.

Ejercicio 2.7. Dadas las transformaciones entre coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ) del Ejercicio 2.1, considera el vector $\mathbf{V}$ con componentes en el sistema de referencia cartesiano $V^x = 1$ y $V^y = 0$ y calcula las componentes covariantes tanto en coordenadas cartesianas como polares. Comprueba que $V'^{\mu} V'_{\nu} = 1$ e interpreta el resultado.

Ejercicio 2.8. Por definición, la delta de Kronecker $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ tiene los mismos componentes en todos los sistemas de referencia ($\delta^{\mu}{}_{\nu} = 1$ si $\mu = \nu$, y cero en caso contrario). Prueba que la delta de Kronecker es un tensor de tipo (2,1), es decir, sus coordenadas se transforman de acuerdo con la siguente expresión:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \delta^{\alpha}{}_{\beta} = \delta'^{\mu}{}_{\nu} \equiv \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

Ejercicio 2.9. Prueba que la suma de dos tensores A y B de tipo (2, 1), es otro tensor C de tipo (2,1), tal que sus componentes $C^{\mu\nu}{}_{\alpha} = A^{\mu\nu}{}_{\alpha} + B^{\mu\nu}{}_{\alpha}$ satisfacen la regla de transformación de los tensores.

Ejercicio 2.10. Prueba que el product tensorial de dos tensores A y B de tipo (0, 2) y (1, 0) respectivamente, es otro tensor C de tipo (1,2), tal que sus componentes $C_{\mu\nu}{}^{\alpha} = A_{\mu\nu} B^{\alpha}$ satisfacen la regla de transformación de los tensores.

Ejercicio 2.11.

Ejercicio 2.12.

Ejercicio 2.13.

Ejercicio 2.14.

Ejercicio 2.15. Calcula las derivadas parciales $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$ de las transformaciones de Lorentz, donde $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + vx') \\ x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

y comprueba que se cumple la identidad:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

Ejercicio 2.16. Comprueba que la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$ es un tensor covariante de rango 2, i.e.

$$\eta'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

en los siguientes casos:
(a) $\mu = \nu = x^0$
(b) $\mu = x^0\,; \nu = x^1$
(c) $\mu = \nu = x^1$