

Ejercicios de Relatividad General y Cosmología

Iñaki Ortiz de Landaluce

Introducción a la Relatividad General y Cosmología, Curso 2025-2026

Unidad 1 Introducción a la Relatividad

Ejercicio 1.1. Siendo γ el factor de Lorentz, la cantidad $(\gamma - 1)$ da una medida de la diferencia entre los efectos relativistas y la mecánica Newtoniana para distintos regímenes de velocidades. Siendo $\beta = v/c$, calcula su valor para obtener los siguientes valores de $(\gamma - 1)$: (a) 0.01, (b) 0.1, (c) 1 (d) 10 y (e) 100.

Ejercicio 1.2. Una varilla de longitud 1m está inclinada 45° en el plano xy con respecto al eje x . Un observador con velocidad $\sqrt{2/3}c$ se aproxima a la varilla en la dirección positiva del eje x . ¿Cuál es la longitud de la varilla y el ángulo de inclinación con respecto a su eje x que mide el observador?

Ejercicio 1.3. Cuando los rayos cósmicos primarios impactan en la atmósfera, se crean muones a una altitud entre 10km y 20km. Un muón en el laboratorio vive en promedio un tiempo $\tau_0 = 2,2\mu s$ antes de desintegrarse en un electrón (o un positrón) y dos neutrinos. Aunque un muón sólo puede moverse $\tau_0 c \approx 660m$ durante el tiempo τ_0 , una gran fracción de muones logra alcanzar la superficie de la Tierra. ¿Cómo puede explicarse esto? Realiza el cálculo numérico para un muón que se mueve con velocidad $0,999c$.

Ejercicio 1.4. Una varilla de longitud L yace en el plano xz de un sistema de coordenadas. Si el ángulo entre la varilla y el eje x es θ , calcula la longitud de la varilla según la ve un observador que se mueve con velocidad v a lo largo del eje x .

Ejercicio 1.5. Un observador K' se mueve con velocidad constante v a lo largo del eje x^1 positivo de un observador K . Una varilla delgada está paralela al eje x'^1 y se mueve en la dirección del eje x'^2 positivo con velocidad relativa u . Demuestra que, según el observador K la varilla forma un ángulo ϕ con el eje x^1 tal que

$$\tan\phi = -\frac{uv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ejercicio 1.6. Si un evento A causa el evento B , entonces debe cumplirse que el evento A ocurra antes que el evento B en todos los sistemas de referencia inerciales, de lo contrario, en algunos sistemas inerciales, los observadores verían un evento que precede a su causa, lo cual es absurdo. Por simplicidad en nuestro argumento, definamos coordenadas de modo que ambos eventos ocurran en el eje x positivo en un cierto sistema S . Utiliza las ecuaciones

apropiadas de transformación de Lorentz para diferencias de coordenadas para mostrar que si $\Delta t > 0$ en el sistema S , pero $\Delta s^2 > 0$ (es decir, el intervalo entre eventos es de tipo espacial), entonces es posible encontrar un sistema S' que se mueve con velocidad $\beta < 1$ relativa a S donde $\Delta t' < 0$ (es decir, el orden temporal es diferente). Muestra también que no es posible si $\Delta s^2 < 0$ (el intervalo es de tipo temporal).

Ejercicio 1.7. En un sistema inercial S , un objeto que comienza en reposo en $t = 0$ se mueve con una aceleración constante a a lo largo del eje x de coordenadas, es decir, $x = at^2/2$. Determina el tiempo propio del objeto para alcanzar la velocidad v_0 en S .

Ejercicio 1.8. Tenemos dos sistemas de referencia inerciales S y S' , donde S' se mueve con velocidad v en la dirección del eje x positivo respecto a S . Si un objeto se mueve con velocidad constante u respecto a S a lo largo del mismo eje x , demuestra que la velocidad medida desde el sistema de referencia S' a lo largo del eje x' , satisface la siguiente ecuación:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Ejercicio 1.9. Una varilla se mueve con velocidad v a lo largo del eje x positivo en un sistema inercial S . Un observador en reposo en S' mide que la longitud de la varilla es L . Otro observador se mueve con velocidad $-v$ a lo largo del eje x . ¿Qué longitud, expresada como función de L y v , medirá este observador para la varilla? La medición se realiza de la manera habitual, midiendo los extremos de forma simultánea para cada observador en sus respectivos sistemas de referencia.

Ejercicio 1.10. Verifica a partir de la formula de la transformación de Lorentz entre dos sistemas inerciales con movimiento relativo uniforme en la dirección x , que cualquier objeto que viaja a velocidad c en uno de los sistemas inerciales, también viaja a velocidad c en el otro.