



Tecnológico de Monterrey
Modelación computacional del movimiento

“Motor de Simulación del Movimiento”

Profesores:

Mauricio Guerra Vargas
Adrián Arreola Pérez
Ernesto Momox Beristain

Presentan:

Agustín Domínguez Cruz A01702875
Carlos Iñaki Román Martínez A01702712
Jesús Machuca Rodríguez A01703076

Fecha

21 de octubre de 2020

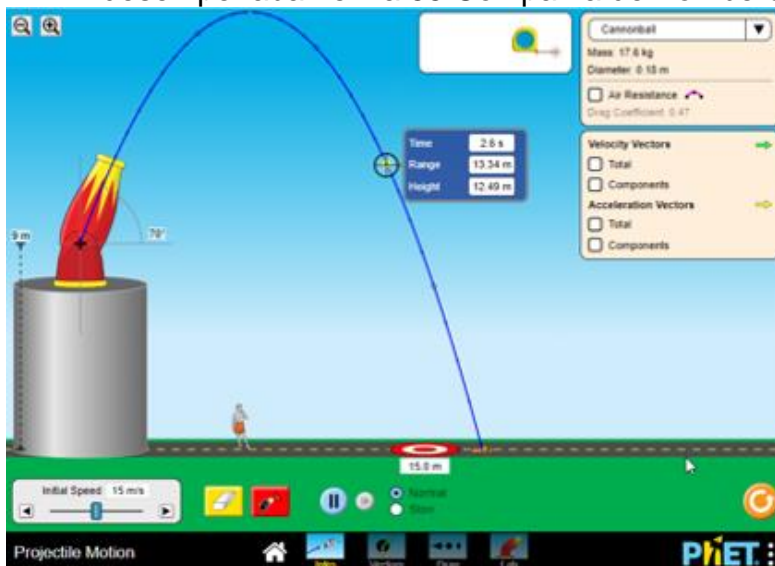
índice

CAPÍTULO 1.....	3
CAPÍTULO 2.....	4
SECCIÓN 2A.....	4
SECCIÓN 2B.....	4
SECCIÓN 2C.....	5
SECCIÓN 2D.....	6
CAPÍTULO 3.....	7
SECCIÓN 3A.....	7
SECCIÓN 3B.....	7
SECCIÓN 3C.....	8
SECCIÓN 3D.....	8
SECCIÓN 3E.....	10
CAPÍTULO 4.....	10
SECCIÓN 4A.....	10
SECCIÓN 4B.....	12
SECCIÓN 4C.....	18
CAPÍTULO 5.....	19
CAPÍTULO 6.....	21

1) Reto e introducción

El 3 de junio de 2018 el Volcán de Fuego hizo erupción en Guatemala. La erupción dejó más de 300 personas muertas, heridos y miles de personas evacuadas. Dentro de los muertos, lamentablemente, se cuentan a los rescatistas. El Universal en su edición del 8 de junio de 2018, describe este acto heroico de los rescatistas,

"Rescatistas de luto. A más de 19 kilómetros de distancia, en Atolengo, la situación también es crítica. Ahí los cuerpos de emergencia están de luto. La furia del volcán les arrebató las vidas de dos compañeros que se desempeñaban en la 55 Compañía de Bomberos..." -El Universal



Con el objetivo de reducir al mínimo este tipo de incidentes fatales, la empresa Serious Games se encuentra en el proceso de diseño de un juego para la capacitación de rescatistas. Para esto, la empresa ha decidido desarrollar el juego Huehuetéotl "Dios del Fuego", cuyo tema principal es entrar por

Figura 1.1

sobrevivientes mientras el volcán Popocatepetl se encuentra en erupción. Parte de la mecánica del juego (Enlaces a un sitio externo.), involucra calcular con gran precisión la trayectoria y lugar de impacto de los objetos sólidos arrojados por el volcán. Una vez conocidos los lugares de impacto, se pueden definir las áreas de daño causado en los elementos del juego, principalmente en los "Non-player characters" (NPCs) y en el avatar del jugador.

2) Erupciones volcánicas

2a ¿Qué son?



Figura 2.1

Según la Comisión Nacional de prevención de riesgos y atención de emergencias de Costa Rica, una erupción volcánica se define cuando un volcán activo arroja gases, ceniza, rocas y lava. Algunos pueden arrojar piedras de gran tamaño golpeando a las personas, dañando los techos de casas, bloqueando los caminos y causando daños a la agricultura. En otras ocasiones pueden producir lluvias de ceniza acompañada de gases tóxicos que causan quemaduras y daños a la piel, restringen la respiración e irritan los ojos. De igual forma, pueden salir flujos de lava, en su mayoría a una velocidad lenta, que destruye todo a su paso. Por los cauces de los ríos situados en la falda de un volcán, pueden bajar lodo, piedras y árboles (CNE, 2020)

2b ¿Qué consecuencias se producen cuando ocurre una erupción volcánica?

Según La Organización Panamericana de la Salud, una erupción volcánica puede ocasionar desastres en “cadena” cuyas consecuencias pueden ser mayores que la misma erupción. Estas incluyen:

- Efectos sísmicos a partir del volcán en erupción.
- Inundaciones o deslizamientos de nieve, tierra o fango causados por calentamiento del terreno y vibraciones que causa el volcán.
- La erupción significa la expulsión de cenizas, gases, polvo, rocas, y/o lava.



-Los daños que causa una erupción volcánica son diversos, estos incluyen la contaminación de las fuentes superficiales de agua potable debido al material tóxico que emite el volcán que puede causar la muerte de la fauna y flora que depende de esta agua. En ocasiones extremas, la ceniza y sustancias tóxicas pueden penetrar la tierra y contaminar depósitos de agua potable subterráneos. Puede provocar incendios severos en áreas cercanas. Son capaces de causar daños a

Figura 2.2

obras y edificaciones en las cercanías del evento. La erupción de lava, de piedras que pueden ser lanzadas a gran distancia pueden producir daños en prácticamente en toda el área, esto puede causar la destrucción de las líneas de transmisión de energía eléctrica y de comunicación (PAHO/OPS, NA).

2c ¿Qué personas se encuentran involucradas en estos eventos?



En realidad, toda la población afectada por la erupción volcánica es partícipe durante y después de esta. En una revista muy buena de la Organización Panamericana de la Salud titulada “Los volcanes y la protección de la salud”, menciona a los partícipes y sus roles a más detalle. Los principales participantes son el sector de salud, la comunidad y los equipos de emergencia. La planificación y

Figura 2.3

contribución de todos es indispensable. Las estrategias que ellos proponen son las siguientes:

- La población debe de conocer a los encargados de la coordinación de desastres; identificar a los científicos y las autoridades políticas que son los que toman decisiones en estas situaciones y las hacen escuchar.

- Es necesario ser un miembro clave de todo equipo de emergencia, mediante la recopilación de información útil para sus propios planes y la defensa de los intereses sanitarios del público.
- Los funcionarios que trabajan en casos de emergencias y los medios de comunicación necesitan saber la opinión de la comunidad sobre las consecuencias de las decisiones que se estén considerando y que pudiesen afectar a la salud pública.
- Compartir información puede aliviar temores, disipar mitos acerca de peligros a los que se enfrentan las personas e infundirles esperanza sobre lo que se está realizando para lograr que retornen a la vida normal.

(OMS, OPS, 2002)

2d Ejemplos de erupciones recientes y sus efectos.

Erupción Volcánica del Taal

El Volcán Taal en el norte de las Filipinas hizo erupción el 13 de enero de este año. La erupción causó el desalojo de aproximadamente 17,000 personas. Su gigantesca columna de humo y su nube de cenizas ha sido lo más problemático en esta última erupción de uno de los volcanes más activos en las Filipinas.

(Ingeoexpert, 2018)



Figura 2.4

Erupción volcánica del Whakaari



Figura 2.5

El lunes 9 de diciembre del 2019, el volcán Whakaari de la isla Homonima en Nueva Zelanda, entró en erupción y causó aproximadamente 6 casualidades. Además,

decenas de personas resultaron heridas y las autoridades fallaron en encontrar a turistas desaparecidos. (Ingeoexpert, 2018)

Erupción volcánica de Stromboli



Figura 2.6

El volcán Stromboli localizado al norte de Sicilia en Italia, entró en erupción el 3 de julio del 2019. La erupción volcánica provocó una muerte y varios heridos. Muchos turistas en el área se tuvieron que lanzar al mar para evitar ser capturado por el material expulsado por el volcán. El Stromboli es uno de los volcanes más activos de Italia y de toda Europa teniendo actividad constante con estallidos violentos cada pocos años. (Ingeoexpert, 2018)

3) Videojuegos Serios

3a ¿Qué son?

Los videojuegos serios son juegos que no están destinados para el entretenimiento de una persona, están destinados para fines educativos, científicos, médicos, ingenieros, etc. (Fuerte, 2018)



Figura 3.1

3b ¿Cuál es la diferencia con los videojuegos normales?

Los videojuegos serios son diseñados para aprender habilidades en específico, como puede ser rescatar personas en determinadas situaciones o para hacer simulaciones de determinadas situaciones en la ingeniería o medicina y los videojuegos normales su fin es simplemente entretenimiento (Marcano, 2008)

3c ¿Qué videojuegos existen para capacitar a rescatistas?

Hazmat: es un juego enfocado para los bomberos donde se hacen simulaciones con escenarios diferentes, donde el jugador tiene que controlar radios y otro tipo de herramientas para poder hacer las labores de los bomberos y sirve para entrenar bomberos para situaciones de emergencia.

Incident commander: es un juego donde hay varias simulaciones como un retén de rehenes, desastres por tormenta, ataques terroristas, derrames químicos, etc. y el usuario pertenece a un grupo de rescatistas para poder solucionar la problemática.



Figura 3.2

3d ¿Existen animaciones de erupciones? ¿Cuáles?

Animación 1: Esta simulación de la erupción de los 4 diferentes tipos de volcanes nos muestra, cómo se comporta cada uno. En esta animación se muestra una vaga representación de las trayectorias de la lava por volcán, sin embargo, debajo de cada tipo incluye una pequeña explicación.

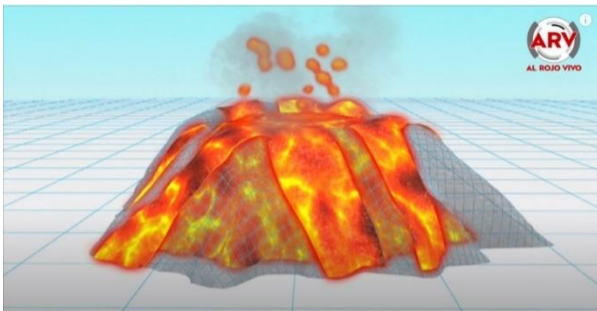


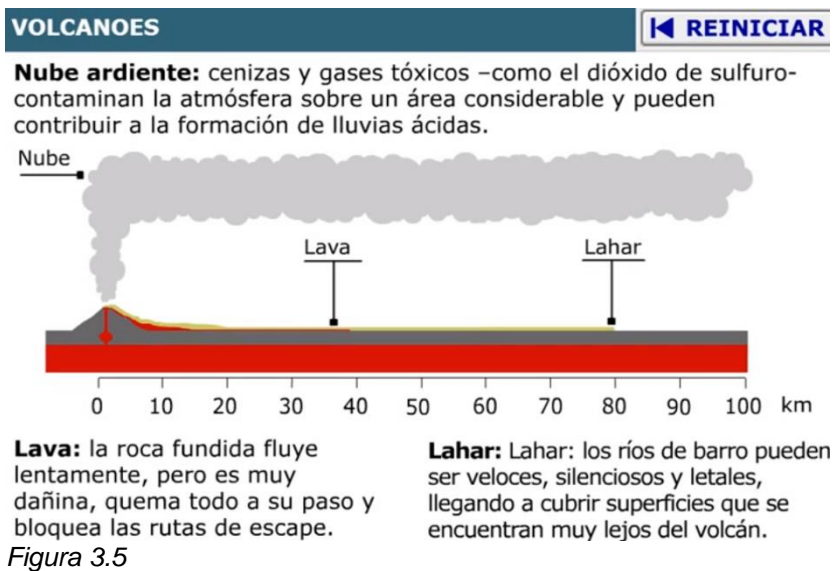
Figura 3.3

Animación 2: Esta animación es del volcán Sarychev que tuvo lugar en 2009, esta animación fue hecha con imágenes tomadas por la ISS, y se convirtió en una animación 3D para ver la magnitud y el alcance que tuvo el volcán. (NASA, 2009)



Figura 3.4

Animación 3: En esta animación se puede observar cuál es el alcance de la lava y del lahar, esto nos ayuda a simular la distancia que cada elemento puede tener en el ambiente y el impacto que tiene en el mismo.



3e ¿Cómo se hace una animación de trayectoria de proyectiles?

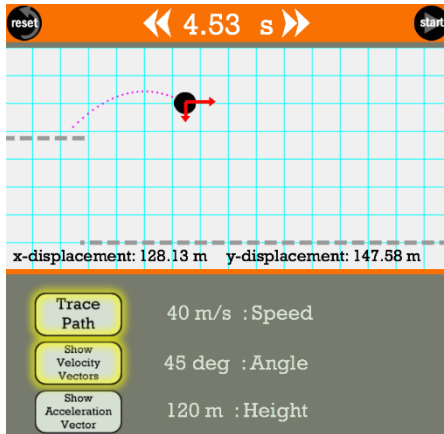


Figura 3.6

Para poder animar la trayectoria de un proyectil se necesita definir parámetros, cómo la posición inicial cómo un vector del proyectil. se debe de declarar la aceleración, el desplazamiento que tiene, declarar la velocidad inicial. Después, se utiliza las fórmulas de Movimiento Uniforme Acelerado para determinar su posición, a la posición se declara cómo una variable y utiliza una función que marque la posición.

4) Modelación de proyectiles con ecuaciones diferenciales

4a Proyectiles en vacío

Un proyectil es cualquier objeto que, una vez que está en movimiento, es influenciado solamente por la fuerza hacia abajo de la gravedad. (Academy, NA)

Podemos modelar la trayectoria de un proyectil de la siguiente manera:

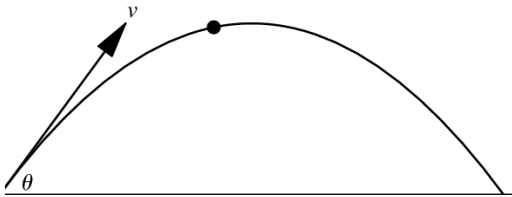


Figura 4.1

Notamos que el proyectil en este caso tiene una velocidad inicial v disparada a un ángulo θ .

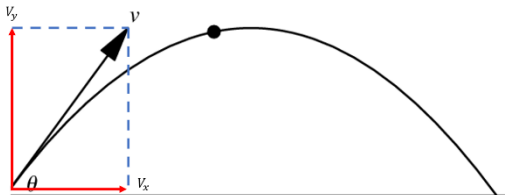


Figura 4.2

Para modelar su movimiento necesitamos conocer las componentes en el eje horizontal y vertical

Trabajaremos las ecuaciones por separado en cada dimensión,

Dimensión horizontal:

$$V_x = v \cos(\theta) \quad (eq\ 4.1)$$

$$a_x = 0 \quad (eq\ 4.2)$$

como la aceleración es 0 entonces el plano horizontal se modela como:

$$V_x = \frac{x}{t} \quad (eq\ 4.3)$$

Dimensión Vertical:

$$V_y = v \sin(\theta) \quad (eq\ 4.4)$$

$$a_y = -g \quad (eq\ 4.5)$$

donde $g = 9.80665\ m/s^2$

Podemos reescribir la ecuación 4.5 como sigue:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \quad (eq\ 4.5)$$

Separe variables para despejar a v_y de la ecuación 4.5.

$$dv_y = -g dt \leftrightarrow \int dv_y = \int -g dt =$$

$$v_y = v_{y0} - gt \quad (eq\ 4.6)$$

Reescriba v_y como $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación 4.6 con fin de encontrar la posición en y

$$\frac{dy}{dx} = v_{y0} - gt$$

Separe variables:

$$dy = (v_{y0} - gt) dt$$

Integre ambos lados de la ecuación:

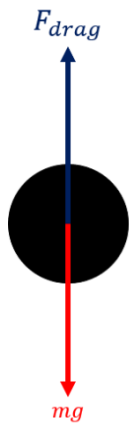
$$\int dy = \int (v_{y0} - gt) dt =$$

$$y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (eq\ 4.7)$$

Las ecuaciones 4.3, 4.5, 4.6 y 4.7 modelan el movimiento de un proyectil en 2 dimensiones. Las figuras 4.1 y 4.2 muestran la trayectoria de un proyectil con velocidad inicial y un ángulo de disparo. Se vuelve evidente que la ecuación 4.6 para la velocidad en “y” tiene comportamiento real y crece indefinidamente. La ecuación 4.7 muestra que la posición vertical tiene comportamiento cuadrático que es consistente con su trayectoria mostrada en las figuras 4.1 y 4.2.

4b Resistencia al aire

Cuando hay aire presente entonces la aceleración ya no es constante, ya que el aire va frenando al proyectil. La fuerza de arrastre en un objeto sometido a caída con aire es proporcional al área transversal del objeto y su rapidez al cuadrado. La ecuación general es la siguiente: $F_{drag} = -(k_1 v + k_2 v^2)$ donde k_1 y k_2 son constantes. La ecuación que describe la fuerza de arrastre para proyectiles esféricos es la siguiente: $F_{drag} = -(c_1 v + c_2 r^2 v^2)$ en donde c_1 es una constante que tiene que ver con la viscosidad del fluido, c_2 con la densidad del fluido y r su radio. Cuando se habla de aire el término viscoso se puede ignorar y nos queda: $F_{drag} = -c_2 r^2 v^2$ pero lo más común es verla escrita de la siguiente manera: $F_{drag} = \frac{1}{2} C_d A \rho v^2$ en donde ρ es la densidad del aire, A su área transversal y C_d es el coeficiente de arrastre. Para la demostración de este proyecto se usará $F_{drag} = \frac{1}{2} C_d A \rho v^2$ asumiendo que las partículas son esféricas. (Lewin, 2015)



Para la dimensión vertical las dos fuerzas que actúan sobre el objeto son su peso y la fuerza de arrastre. Recordemos la segunda ley de Newton para describir las fuerzas presentes:

$$\sum F_y = ma$$

$$mg - \frac{1}{2} C_d A \rho v^2 = ma \quad (\text{eq 4.8})$$

Reemplace a por $\frac{dv}{dx}$

Figura 4.3

$$m \frac{dv}{dx} = mg - \frac{1}{2} C_d A \rho v^2 \quad (\text{eq 4.8})$$

nótese que tenemos una ecuación diferencial separable que se resolverá para la velocidad del objeto.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{mg - \frac{1}{2}C_d A \rho v^2}{m} = \frac{2mg - C_d A \rho v^2}{2m}$$

Separe variables:

$$dv = \frac{2mg - C_d A \rho v^2}{2m} dt$$

Integre ambos lados con fin de resolver para v:

$$\int \frac{1}{2mg - C_d A \rho v^2} dv = \int \frac{1}{2m} dt$$

Para simplificar todas las constantes, déjese $2mg = a$ y $C_d A \rho = b$

$$\int \frac{1}{a - bv^2} dv = \frac{t}{2m}$$

$$\int \frac{1}{b(\frac{a}{b} - v^2)} dv = \frac{t}{2m}$$

Para resolver la integral del lado izquierdo, se usará la técnica de sustitución trigonométrica hiperbólica:

$$\frac{1}{b} \int \frac{1}{\frac{a}{b} - v^2} dv = \frac{t}{2m}$$

$$\text{déjese } v = \sqrt{\frac{a}{b}} \tanh(\theta) \therefore dv = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sech}^2(\theta) d\theta$$

$$\frac{1}{b} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sech}^2(\theta)}{\frac{a}{b} - \frac{a}{b} \tanh^2(\theta)} d\theta = \frac{t}{2m}$$

$$\frac{1}{b} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{sech}^2(\theta)}{\frac{a}{b} (1 - \tanh^2(\theta))} d\theta = \frac{t}{2m}$$

Recordamos la identidad que $1 - \tanh^2(\theta) = \operatorname{sech}^2(\theta)$ para simplificar la integral:

$$\frac{1}{b} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}} d\theta = \frac{t}{2m}$$

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{b}} \theta = \frac{t}{2m}$$

Reemplace θ por $\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}v\right)$:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}v\right)=\frac{t}{2m}$$

Despeje a v :

$$\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}v\right)=\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{ta}{2m}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}v=\tanh\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{ta}{2m}\right)$$

$$v=\sqrt{\frac{a}{b}}\tanh\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{ta}{2m}\right)$$

Sustituya $2mg = a$ y $C_dA\rho = b$

$$v=\sqrt{\frac{2mg}{C_dA\rho}}\tanh\left(\sqrt{\frac{C_dA\rho}{2mg}}\frac{2mg}{2m}t\right)$$

$$v=\sqrt{\frac{2mg}{C_dA\rho}}\tanh\left(\sqrt{\frac{C_dA\rho}{2mg}}gt\right)$$

Finalmente tenemos que:

$$v_y=\sqrt{\frac{2mg}{C_dA\rho}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gC_dA\rho}{2m}}t\right) \quad (eq\ 4.9)$$

Para encontrar la aceleración derivaremos la expresión para v_y (eq 4.9) con respecto al tiempo

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2mg}{C_dA\rho}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gC_dA\rho}{2m}}t\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{gC_dA\rho}{2m}} \sqrt{\frac{2mg}{C_dA\rho}} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{gC_dA\rho}{2m}} t \right)$$

$$a_y = g \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{gC_dA\rho}{2m}} t \right) \quad (\text{eq 4.10})$$

Vemos que el comportamiento que la aceleración en y ya no es constante como la aceleración en la ecuación 4.5 que no tiene resistencia al aire. Su comportamiento es más complicado, empieza en 9.80655 m/s*s y va disminuyendo hasta llegar a 0. Cuando la aceleración llega a 0 quiere decir que la partícula ha alcanzado su velocidad terminal. La velocidad terminal se describe al final de este capítulo.

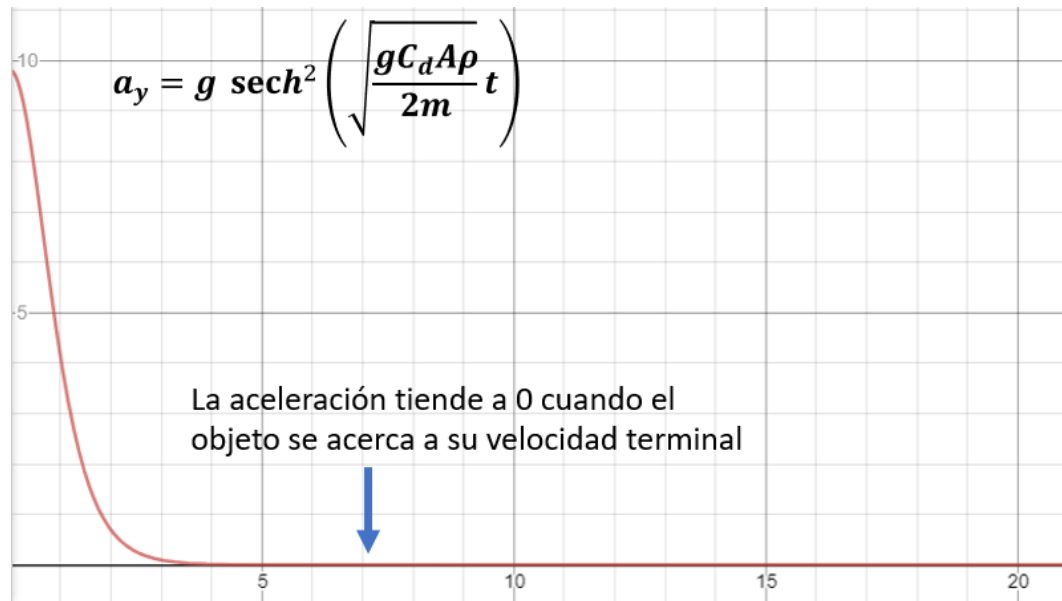


Figura 4.4

Para encontrar la posición integramos la expresión para v_y (eq 4.9) con respecto al tiempo

$$x = \int \sqrt{\frac{2mg}{C_dA\rho}} \tanh \left(\sqrt{\frac{gC_dA\rho}{2m}} t \right) dt$$

$$x = \sqrt{\frac{2mg}{C_dA\rho}} \int \tanh \left(\sqrt{\frac{gC_dA\rho}{2m}} t \right) dt$$

$$\text{déjese } u = \sqrt{\frac{gC_d A \rho}{2m}} t \rightarrow du = \sqrt{\frac{gC_d A \rho}{2m}} dt$$

$$\sqrt{\frac{2m}{gC_d A \rho}} \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \int \tanh(u) du = \frac{2m}{C_d A \rho} \int \tanh(u) du = \frac{2m}{C_d A \rho} \int \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} du$$

$$\text{déjese } v = \cosh(u) \therefore dv = \sinh(u) du$$

$$\frac{2m}{C_d A \rho} \int \frac{1}{v} dv = \frac{2m}{C_d A \rho} \ln(v) = \frac{2m}{C_d A \rho} \ln(\cosh(u))$$

$$y = \frac{2m}{C_d A \rho} \ln \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{gC_d A \rho}{2m}} t \right) \right) \quad (eq \ 4.11)$$

Como se puede observar, la posición vertical ya no es cuadrática como lo es sin resistencia al aire (eq 4.7). Tiene un comportamiento para nada intuitivo donde la función que la describe es el logaritmo natural del coseno hiperbólico del tiempo.

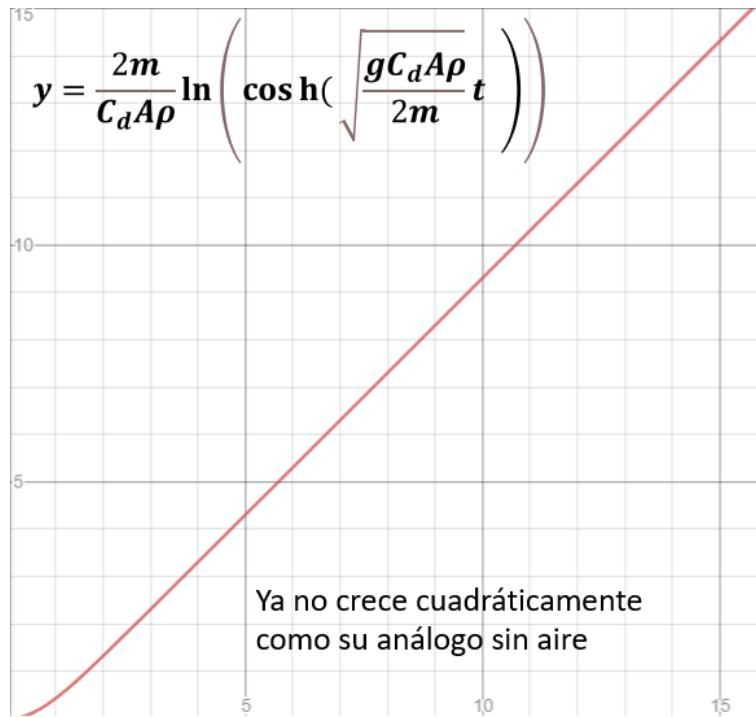
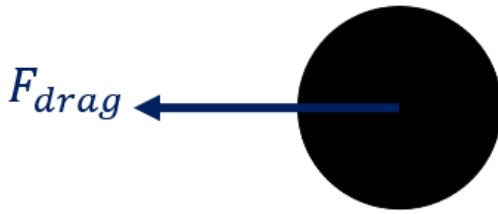


Figura 4.5

Para el eje horizontal:



$$\sum F_x = ma$$

Escriba las fuerzas involucradas en el eje horizontal:

Figura 4.6

$$ma = -\frac{1}{2}C_d A \rho v^2 \quad (\text{eq 4.12})$$

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}C_d A \rho v^2 \quad (1) \quad \text{déjese } C_d A \rho = b \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{2m} v^2$$

$$\frac{dv}{bv^2} = -\frac{dt}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{bv^2} dv = -\int \frac{1}{2m} dt \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{bv} = -\frac{t}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{2m}{bt}$$

$$v_x = \frac{2m}{C_d A \rho t} \quad (\text{eq 4.13})$$

Para encontrar la aceleración en x se debe derivar v_x (eq 4.13) con respecto al tiempo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{2m}{C_d A \rho t}$$

$$a_x = -\frac{2m}{C_d A \rho t^2} \quad (\text{eq 4.14})$$

Para encontrar la posición en x se tendrá que integrar v_x (eq 4.13) con respecto al tiempo

$$x = \int \frac{2m}{C_d A \rho t} dt = \frac{2m}{C_d A \rho} \int \frac{1}{t} dt = \frac{2m}{C_d A \rho} \ln|t|$$

$$x = \frac{2m}{C_d A \rho} \ln(t) \quad (\text{eq 4.15})$$

Se observa que las ecuaciones de cinemática para una partícula bajo resistencia al aire no son tan sencillas y no se pueden modelar como la ecuación (eq 4.3) en donde la velocidad es lineal. Aquí tenemos ecuaciones para nada intuitivas donde:

$$x \propto \ln(t)$$

$$v_x \propto \frac{1}{t}$$

$$a_x \propto \frac{1}{t^2}$$

4c Velocidad terminal

La velocidad terminal es aquella velocidad máxima que una partícula puede alcanzar cuando se mueve en un fluido como el aire. Esta velocidad se logra cuando la fuerza de arrastre crece hasta ser igual al peso del objeto. Para encontrar la velocidad terminal en nuestras ecuaciones se debe tomar el límite cuando la velocidad tiende al infinito de la ecuación (eq 4.9) (Lewin, 2015):

$$v_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \tanh\left(\sqrt{\frac{g C_d A \rho}{2m}} t\right)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh\left(\sqrt{\frac{g C_d A \rho}{2m}} t\right) \quad \text{déjese } k = \sqrt{\frac{g C_d A \rho}{2m}}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(kt) = \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(kt) = \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}$$

Como se tiene un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ se puede aplicar la regla de L'Hopital

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2ke^{2kt}}{2ke^{2kt}} = \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{C_d A \rho}} \quad (\text{eq 4.16})$$

A continuación, se muestra el comportamiento de la velocidad del proyectil (eq 4.9)

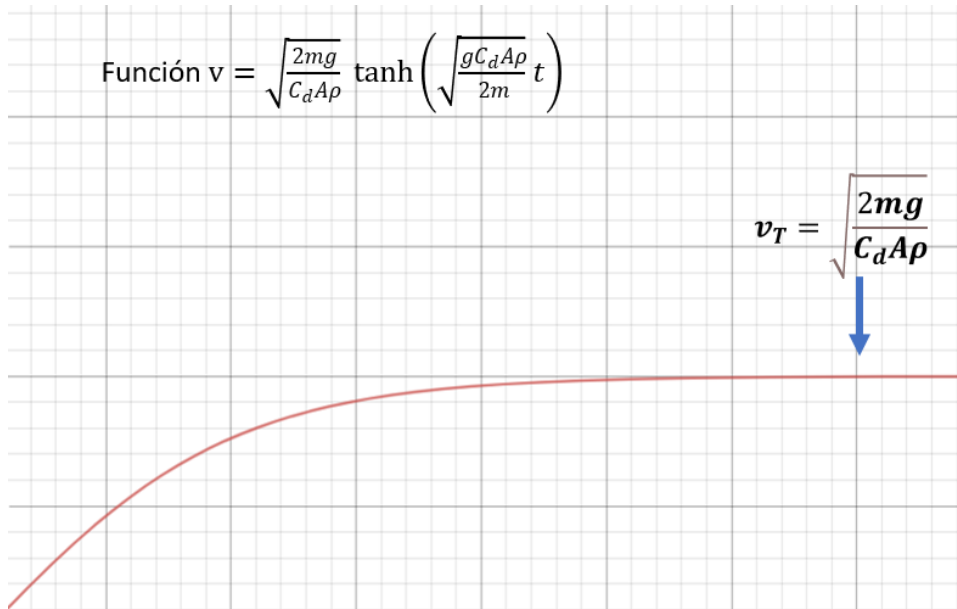


Figura 4.7

5) Método Verlet

Para simplificar la notación, consideramos el movimiento de una partícula en una dimensión. El primer paso para aplicar el método numérico de Verlet que emana del método de Euler es escribir las ecuaciones de movimiento de Newton como dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas.

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \text{ y } \frac{dx}{dt} = v(t) \quad (\text{eq 5.1})$$

Donde $a(t) \equiv a(x(t), v(t), t)$. Se deja Δt como el intervalo de tiempo entre pasos sucesivos y a_n, v_n y x_n como los valores de la aceleración a , velocidad y la posición de la partícula x en el tiempo $t_n = t_0 + n\Delta t$. El objetivo es encontrar valores de x_{n+1} y v_{n+1} en el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Δt debe ser elegido para que el método integral tenga una solución estable, mientras más pequeño sea mejor.

La naturaleza de muchos algoritmos para resolver integrales se puede entender expandiendo $v_{n+1} = v(t_n + \Delta t)$ y $x_{n+1} = x(t_n + \Delta t)$ en una serie de Taylor:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t + O[(\Delta t)^2], \quad (\text{eq 5.2})$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n (\Delta t)^2 + O[(\Delta t)^3]. \quad (\text{eq 5.3})$$

Uno de los algoritmos de orden superior sin deriva más comunes se atribuye comúnmente a Verlet. Escribimos la expansión de la serie de Taylor para x_{n-1}

$$x_{n-1} = x_n - v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n (\Delta t)^2. \quad (eq\ 5.4)$$

Si sumamos las formas directa e inversa, la ecuación. 5.3 y 5.4 respectivamente, obtenemos

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n + a(\Delta t)^2 \quad (eq\ 5.5)$$

De manera similar, la resta de la serie de Taylor para x_{n+1} y x_{n-1} produce:

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} \quad (eq\ 5.6)$$

La ecuación 5.6 también es conocida como la Verlet original

Por lo tanto, el error global asociado con el algoritmo de Verlet es de tercer orden para la posición y de segundo orden para la velocidad. Sin embargo, la velocidad no juega ningún papel en la integración de las ecuaciones de movimientos.

Dado que el algoritmo de Verlet no se inicia automáticamente, se debe utilizar otro algoritmo para obtener los primeros términos. Un problema adicional es que la nueva ecuación de velocidad 5.6 encontrada calculando la diferencia entre dos cantidades del mismo orden de magnitud. Cuando se utilizan computadoras que siempre funcionan con precisión numérica finita, dicha operación da como resultado una pérdida de precisión numérica y puede dar lugar a un error sustancial.

Una versión matemáticamente equivalente del algoritmo de Verlet original viene dada por:

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n (\Delta t)^2 \quad (eq\ 5.7)$$

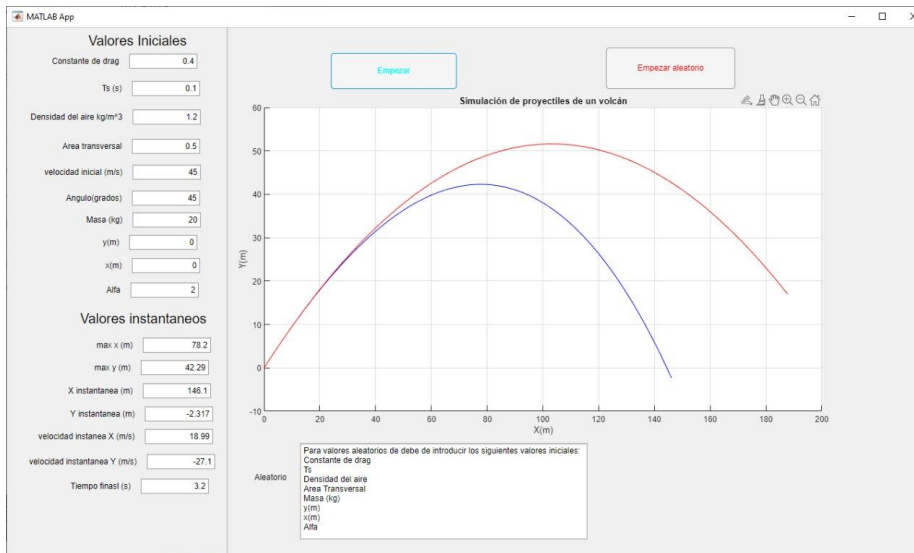
$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} (a_{n+1} + a_n) \Delta t \quad (eq\ 5.8)$$

Vemos que estas 2 ecuaciones (5.7 y 5.8) conocidas como la velocidad en forma de algoritmo Verlet, se autoinicia sola y minimiza errores. Estas fueron las

ecuaciones que se usaron en nuestra simulación del proyectil para resolver las ecuaciones diferenciales de la dinámica de proyectiles en presencia de resistencia al aire.

(Nikolic, NA)

6) Simulación y Resultados



Cómo podemos notar, la simulación pide posición inicial, velocidad inicial y ángulo de disparo que son exactamente los parámetros que se requieren para por lo menos modelar la trayectoria de un proyectil en 2 dimensiones sin resistencia al aire como se explica en la sección 4a en el capítulo 4. Pero, también pide densidad del aire, área transversal, coeficiente de fricción y un exponente alfa que son la receta de la ecuación de la fuerza de arrastre debido al aire.

Valores Iniciales

Constante de drag

Ts (s)

Densidad del aire kg/m³

Area transversal

velocidad inicial (m/s)

Angulo(grados)

Masa (kg)

y(m)

x(m)

Alfa

figura 6.1

$$F_{drag} = \frac{1}{2} C_d A \rho v^2$$

Área transversal (pointing to A)
 Exponente alfa (pointing to 2)
 Coeficiente de fricción (pointing to C_d)
 Densidad del aire (pointing to ρ)

Figura 6.2

Con esto en mente podemos observar que en nuestra primera simulación se despliega la trayectoria de una partícula con resistencia al aire y la misma partícula sin resistencia al aire. Notamos que el proyectil recorre mayor distancia horizontal que si esta sufriera una fuerza de arrastre por el aire, algo completamente intuitivo y consistente con las ecuaciones 4.3 y 4.15 que describen la posición horizontal del objeto. La ecuación de desplazamiento en x sin resistencia al aire crece linealmente con el tiempo mientras que si esta sufre fricción con el aire crece logarítmicamente, es de sobra conocido que algo lineal crece más rápido que algo logarítmico.

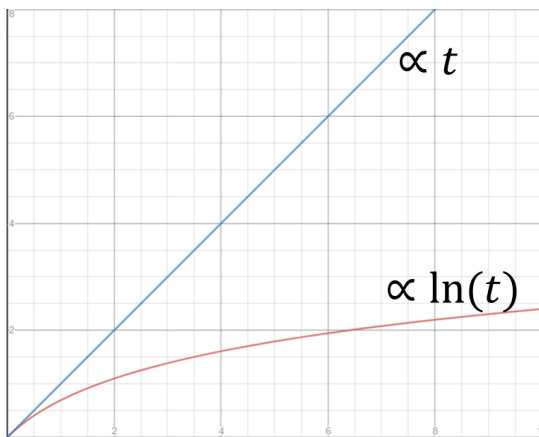


Figura 6.3

En cuanto a la posición vertical, vemos que el proyectil sin resistencia al aire llega más alto que con dicha condición. Esto es de nuevo, muy intuitivo y consistente con las ecuaciones 4.11 y 4.7 que describen su posición vertical. La ecuación 4.7 crece cuadráticamente mientras la 4.11 crece logarítmicamente con el coseno hiperbólico del tiempo, en este caso no es muy trivial cuál crece más rápido, pero como se muestra en la figura 4.5 y las trayectorias de nuestra simulación se vuelve evidente que la ecuación 4.7 crece más rápido.

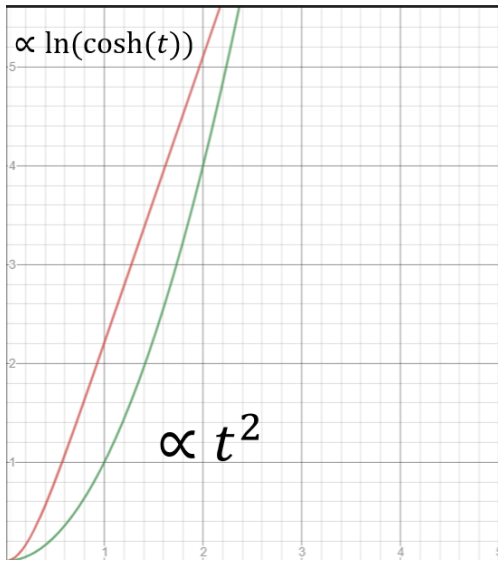


Figura 6.4

Cuando vemos los 3 proyectiles salir aleatoriamente notamos que todas tienen un comportamiento común, y esto es de esperarse ya que lo único que cambia es su ángulo de disparo y velocidad inicial, fuera de eso todos siguen las ecuaciones establecidas en el capítulo 4 y las aproximaciones con el método Verlet explicado en el capítulo 5.

Notamos que tiene una trayectoria Similar a la figura 6.5 en donde se ilustra objetos lanzados por un volcán y gracias a su temperatura brilla y muestran su recorrido casi parabólico.



Figura 6.5

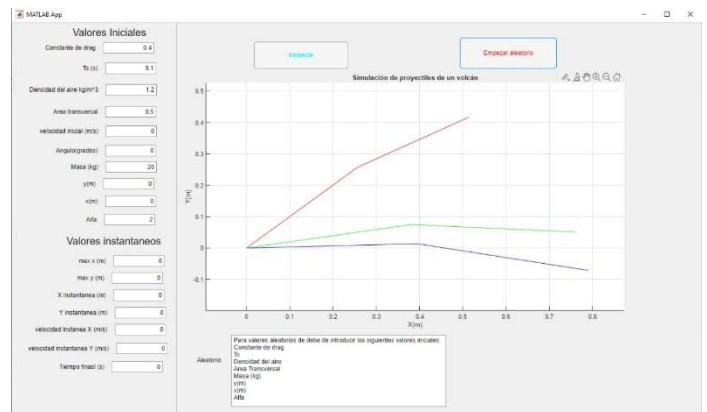


Figura 6.6

Referencias:

- Academy, K. (NA de NA de NA). *¿Qué es el movimiento de un proyectil en 2D?* Obtenido de Khan Academy: <https://es.khanacademy.org/science/physics/two-dimensional-motion/two-dimensional-projectile-mot/a/what-is-2d-projectile-motion>
- CNE. (21 de 10 de 2020). *Comisión Nacional de Prevención de Riesgos y Atención de Emergencias Costa Rica*. Obtenido de ¿Qué es una erupción volcánica?: https://www.cne.go.cr/reduccion_riesgo/informacion_educativa/recomendaciones_consejos/erupcion.aspx
- Fuerte, K. (28 de 9 de 2018). *Observatorio de Innovación Educativa*. Obtenido de ¿Qué son los Serious Games?: <https://observatorio.tec.mx/edu-news/que-son-los-serious-games#:~:text=Los%20Serious%20Games%20o%20%E2%80%9Cjuegos,%2C%20ingenier%C3%ADa%20y%20pol%C3%ADtica%2C%20principalmente.>
- Ingeoexpert. (8 de 5 de 2018). *Las erupciones volcánicas más recientes y sus tipos*. Obtenido de Ingeoexpert: <https://ingeoexpert.com/2018/05/08/erupciones-volcanicas/?v=0b98720dcb2c>
- Lewin, W. (7 de 2 de 2015). *8.01x - Lect 12 - Air Drag, Resistive Forces, Conservative Forces, Terminal Velocity*. Obtenido de Physics 8.01: <https://www.youtube.com/watch?v=djCCno4Cbcw&t=2116s>
- Marcano, B. (2008). JUEGOS SERIOS Y ENTRENAMIENTO EN LA SOCIEDAD DIGITAL. *Revista Electrónica Teoría de la Educación*, 107. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/2010/201017343006.pdf>
- NASA. (25 de 6 de 2009). *NASA*. Obtenido de Sarychev Volcano: https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1397.html
- Nikolic, B. K. (NA). Verlet Method. *Computational methods of Physics*, 20-32.
- OMS, OPS. (2002). Los volcanes y la protección de la salud. En O. OMS, *Los volcanes y la protección de la salud* (pág. 20). NA: Organización Panamericana de la Salud.
- PAHO/OPS. (NA de NA de NA). *Mitigación de Desastres Naturales en Sistemas de Agua Potable y Alcantarillado Sanitario - Guías para el Análisis de Vulnerabilidad (OPS)*. Obtenido de Organización Panamericana de la Salud: <http://www.nzdl.org/gsdImod?e=d-00000-00---off-0paho--00-0----0-10-0---0---0direct-10---4-----0-0l--11-en-50---20-about---00-0-1-00-0--4----0-0-11-10-0utfZz-8-10&cl=CL1.1&d=HASH019be954bbcf27a6c38831f0.6.6.6>=1.%20Accessed%2029%2009%202020.>

Figuras:

- 1.1 https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_en.html
- 2.1 <https://images.app.goo.gl/oX6U5nSmGDLG2jUF8>
- 2.2 <https://images.app.goo.gl/9YNibg3xeYaHk6X8A>
- 2.3 <https://images.app.goo.gl/72qc9Cnm7JWDDPvh9>
- 2.4 <https://images.app.goo.gl/2beEFXj86sGURmbM9>
- 2.5 <https://images.app.goo.gl/MW88pKVwbZhTjME98>

- 2.6 <https://images.app.goo.gl/TguMm6epjQqy59Ec6>
- 3.1 <https://images.app.goo.gl/Ac9DcsYnQQ6aFVqG9>
- 3.2 <https://images.app.goo.gl/VLSQUW4NmnffKfat9>
- 3.3 <https://images.app.goo.gl/Q3DJ5MZVhz4o2gh1A>
- 3.4 <https://images.app.goo.gl/oLSCfhng9ovAoFKk6>
- 3.5 http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0124-81702013000200009
- 3.6 <https://www.physicsclassroom.com/Physics-Interactives/Vectors-and-Projectiles/Projectile-Simulator/Projectile-Simulator-Interactive>
- 4.1 <https://images.app.goo.gl/4RpcLgWgq7SszEkr8>
- 4.2 <https://images.app.goo.gl/4RpcLgWgq7SszEkr8>
- 4.3 Hecha en Powerpoint
- 4.4 <https://www.desmos.com/>
- 4.5 <https://www.desmos.com/>
- 4.6 Hecha en Powerpoint
- 4.7 <https://www.desmos.com/>
- 6.2 Hecha en Powerpoint
- 6.3 <https://www.desmos.com/>
- 6.4 <https://www.desmos.com/>
- 6.6 <https://images.app.goo.gl/qHvi9sEt9pj661Pu5>