Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es

CAPÍTULO 2. ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

TEORÍA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

"Al igual que cualquier otro arte, la Ciencia de la Deducción y el Análisis sólo puede dominarse a través del estudio prolongado y paciente, y no es la vida tan larga como para que ningún mortal alcance en ello el mayor grado posible de perfección"

Sherlock Holmes

en *Estudio en Escarlata* (Arthur Conan Doyle)

P	Los animales que vuelan tienen alas
P	Las palomas vuelan
C	Las palomas tienen alas

De lo universal a lo particular

P	Las palomas vuelan
P	Las palomas tienen alas
C	Los animales que vuelan tienen alas

De lo particular a lo universal

P	Los animales que vuelan tienen alas
P	Las palomas tienen alas
C	Las palomas vuelan

Razonamiento basado en hipótesis

- Todo proceso de razonamiento, principalmente los del tipo deductivo, pueden ser formalizados a través de **estructuras deductivas**.

AMBITOS DE APLICACIÓN:

1. Son la base fundamental de las demostraciones en el **campo de las matemáticas**.
2. En este mismo contexto se encuentran las **inferencias estadísticas** que permiten la inferencia de datos cuantitativos/ y el cálculo de la probabilidad de una conclusión y de alternativas.

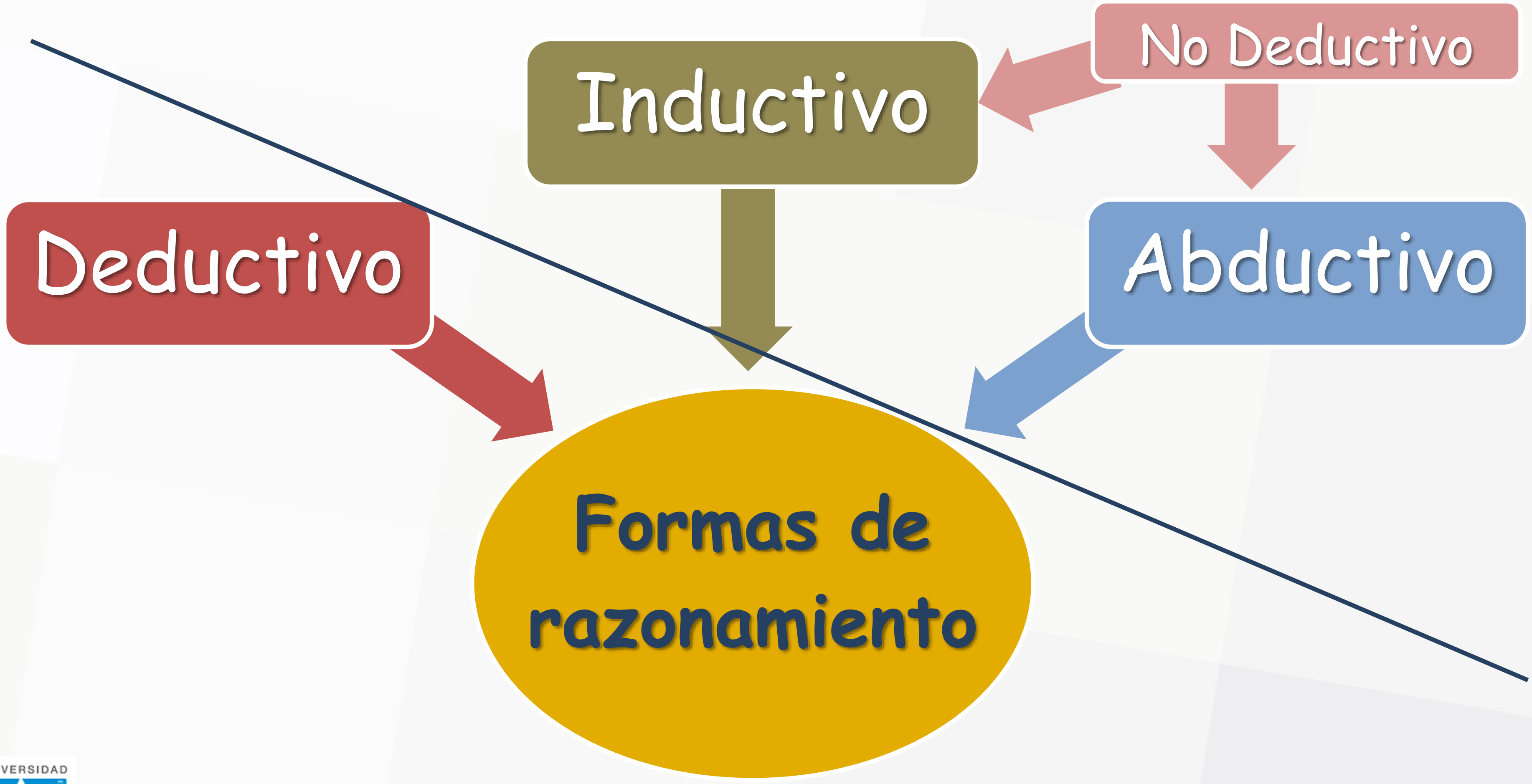
AMBITOS DE APLICACIÓN:

1. Tienen gran aplicación en el área de la **inteligencia artificial** para la construcción de sistemas de expertos, donde se parte de una base de conocimiento (premisas) que puede ser extendida automáticamente con el uso de reglas de inferencia, permitiendo así el aprendizaje autónomo del sistema, emulando el pensamiento humano.
2. También se utilizan en **ciencias de la computación** para verificar el correcto funcionamiento de los programas;
3. En las **ciencias físicas y naturales**, son útiles al realizar conclusiones de experimentos; y
4. En la **vida cotidiana** se emplean casi intuitivamente en disímiles situaciones.

- Los seres humanos tienen la capacidad de **razonar**, proceso mediante el cual se enlazan ideas de las que surgen otras.

- Todo razonamiento se basa en un conjunto de **premisas** que representan el conocimiento adquirido que al procesarlas permiten llegar a una **conclusión**, un nuevo conocimiento.

- Existen varias formas de **razonamiento**



RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Ofrece fundamentos concluyentes para aceptar la conclusión → La conclusión se desprende necesariamente de las premisas

RAZONAMIENTO NO DEDUCTIVO

Solo ofrece algún fundamento a favor de la conclusión, pero este fundamento no es concluyente

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

- Aquel razonamiento en el cual se parte de lo universal hacia lo particular, es decir, a partir de las causas se infieren los efectos.

P	Los animales que vuelan tienen alas
P	Las palomas vuelan
C	Las palomas tienen alas

De lo universal a lo particular

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

- Se parte de premisas de datos particulares para obtener conclusiones de carácter general.

P	Las palomas vuelan
P	Las palomas tienen alas
C	Los animales que vuelan tienen alas

De lo particular a lo universal

- La generalización no garantiza que la conclusión sea correcta. En el ejemplo, se asume que todos los animales que vuelan tienen alas a partir del conocimiento de que las palomas vuelan y tienen alas.
- Sin embargo, teóricamente se podría pensar en la posibilidad de que existiera un animal que volara sin necesidad de tener alas, pues solo se tiene la certeza de que esta conclusión se cumple para las palomas. Los mecanismos para certificar que una generalización es correcta se encuentran en el campo de la inducción matemática.

RAZONAMIENTO ABDUCTIVO

- Se trata de explicar la conclusión considerando las premisas como hipótesis explicativas. Este razonamiento está relacionado con la generación de hipótesis y creación de teorías. La abducción requiere de mucha creatividad e instinto para liberarse de la atadura del pensamiento racional, del conocimiento adquirido.

P	Los animales que vuelan tienen alas
P	Las palomas tienen alas
C	Las palomas vuelan

Razonamiento basado en hipótesis

RAZONAMIENTO ABDUCTIVO

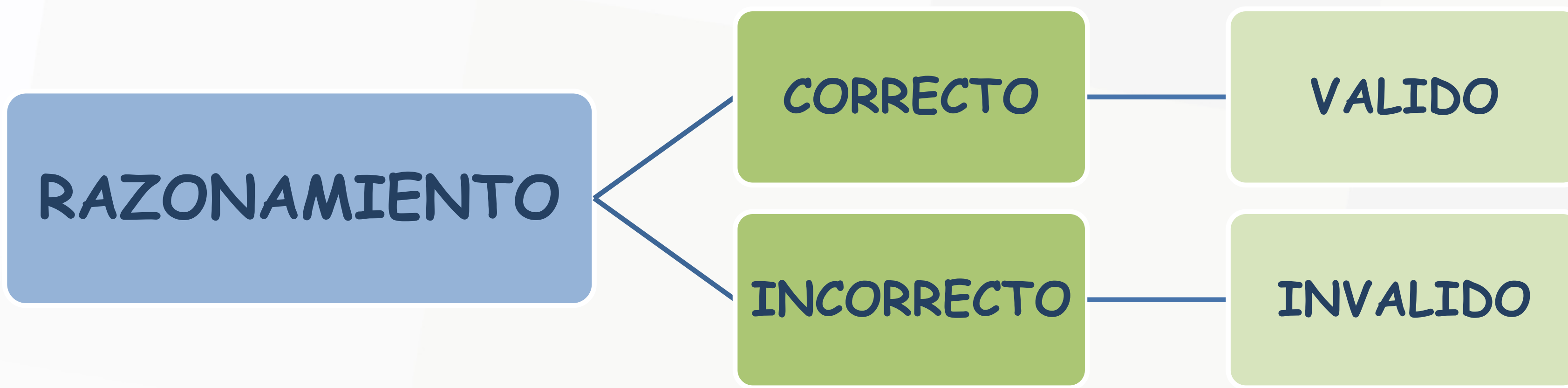
- En la abducción la conclusión no es segura sino tan solo probable.

- En el ejemplo la conclusión se cumple para las palomas pero existen animales como los pingüinos que tienen alas y no vuelan. Para determinar la validez del razonamiento se requieren otros métodos y técnicas que, dependiendo del contexto, permitirían asegurarla.

P	Los animales que vuelan tienen alas
P	Las palomas tienen alas
C	Las palomas vuelan

Razonamiento basado en hipótesis

VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO



VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO

- En cuanto a la validez de la conclusión obtenida en las diferentes formas de razonamiento, se puede concluir que mientras **la deducción puede comprobarse empíricamente**, en el caso de la inducción y la abducción, aunque no pueden ser validas sin una confirmación empírica, estas confirmaciones no eliminan la posibilidad de existencia de una excepción.

- En este capítulo se estudiará el método deductivo, específicamente el deductivo proposicional.

VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO	Se puede afirmar que son VALIDOS o INVALIDOS
RAZONAMIENTO NO DEDUCTIVO	Mas o menos PROBABLES

- En este capítulo se realiza un análisis de las estructuras deductivas, su formulación y la determinación de la validez semántica de los razonamientos deductivos representados mediante estas, así como un conjunto de leyes y reglas de inferencia que permiten demostrar estructuras más complejas.
- Se presentan, así mismo, diferentes métodos de demostración matemática que en su esencia implican el uso de las reglas de inferencia antes mencionadas.

EJEMPLO 4.1: RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Premisa mayor

p: *los animales sin bilis tienen larga vida.*

Premisa menor

q: *el hombre, el caballo y la mula no tienen bilis.*

se deduce entonces la **conclusión**

r: *el hombre, el caballo y la mula tienen larga vida.*

¿Qué es una deducción?

- Es un argumento donde la **conclusión** se **infiere** necesariamente de las **premisas**.

- Una **premisa** es cada una de las proposiciones anteriores a la conclusión de un argumento.

1. ESQUEMA DE LAS ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

- Las estructuras deductivas tienen el esquema siguiente:

  $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q_1, q_2, \ldots, q_m$

  donde el conjunto de proposiciones $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ representa las premisas y el conjunto $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$, $m > 0$, las conclusiones. El signo "$\vdash$" es el signo de deducción o consecuencia lógica.

  (se puede utilizar el símbolo "$\Rightarrow$" en lugar de "$\vdash$")

  Se interpreta como "a partir de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se deduce $q_1, q_2, \ldots, q_m$".

EJEMPLO 4.2: ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

El triángulo ABC es equilátero si tiene sus tres lados iguales. El triángulo ABC tiene tres lados iguales, entonces es equilátero.

- p_1: "*El triángulo ABC tiene tres lados iguales*"
- q: "*El triángulo ABC es equilátero*"
- Únicamente con p_1, no se puede deducir q, es necesaria otra premisa p_2 que defina "*El triángulo ABC es equilátero si tiene sus tres lados iguales*"
- La estructura deductiva sería:

  $p_1, p_2 \vdash q$ que en realidad seria: $p_1, p_1 \rightarrow q \vdash q$

EJEMPLO 4.3: ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

Si llueve no vamos al cine, no llueve entonces deduzco que vamos al cine.

- p_1 : "Si llueve no vamos al cine"
- p_2 : "Llueve"
- q_1: "Vamos al cine"
- La estructura deductiva sería:

$$p_1, \overline{p_2} \vdash q_1$$

- Si hacemos un análisis mas profundo de p_1: $p_2 \rightarrow \overline{q_1}$
- La estructura deductiva sería entonces:

$$p_2 \rightarrow \overline{q_1}, \overline{p_2} \vdash q_1$$

EJEMPLO 4.4: ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

El paciente presenta problemas para orinar y tiene dolores suprapúbicos intensos, por tanto el paciente tiene cistitis.

- p_1 : "El paciente presenta problemas para orinar"
- p_2 : "El paciente tiene dolores suprapúbicos intensos"
- q_1: "El paciente tiene cistitis"
- La estructura deductiva sería:

$$p_1, p_2 \vdash q_1$$

EJEMPLO 4.5: ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

El Equipo A es campeón si y sólo si se clasifica para la final y vence al Equipo D. Como el Equipo A es campeón, se deduce que el Equipo A vence al Equipo D.

- p_1 : "El equipo A es campeón"
- p_2 : "El equipo A se clasifica para la final"
- q_1: "El equipo A vence al equipo D"
- La premisa: "El Equipo A es campeón si y sólo si clasifica y vence al Equipo D" se expresa como:

$$p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge q_1)$$

- La estructura deductiva sería:

$$p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge q_1),\ p_1 \vdash q_1$$

2. VALIDEZ DE LAS DEDUCCIONES

- Una estructura deductiva es correcta si las premisas implican lógicamente la conclusión, es decir si todas las conclusiones son verdaderas en cada interpretación que haga ciertas todas las premisas.
- Se verifica usando las tablas de verdad.
- La tabla de verdad estaría formada por las posibles combinaciones de todas las variables involucradas en la estructura deductiva; una columna para los valores de verdad de cada una de las premisas y finalmente la conclusión o conclusiones.
- Si la estructura es $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3} \ldots \boldsymbol{p_n} \vdash \mathbf{q}$. El argumento es válido si

  $\boldsymbol{p_1} \wedge \boldsymbol{p_2} \wedge \boldsymbol{p_3} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{p_n} \Rightarrow \mathbf{q}$ es una **tautología**.

EJEMPLO 4.6: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

Determine la veracidad de las estructuras deductivas obtenidas en los ejemplos anteriores.

a) $p_1, p_1 \rightarrow q \vdash q$

b) $p_2 \rightarrow \overline{q_1}, \overline{p_2} \vdash q_1$

c) $p_1, p_2 \vdash q_1$

d) $p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge q_1), p_1 \vdash q_1$

EJEMPLO 4.6: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

a) $p_1, p_1 \to q \vdash q$

Variables		Premisas		Conclusión
p_1	q	p_1	$p_1 \to q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	**1**	**1**	**1**

Razonamiento válido

EJEMPLO 4.6: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

b) $p_2 \rightarrow \overline{q_1}, \overline{p_2} \vdash q_1$

Razonamiento inválido

Variables				Premisas		Conclusión
p_2	q_1	$\overline{p_2}$	$\overline{q_1}$	$p_2 \rightarrow \overline{q_1}$	$\overline{p_2}$	q
0	0	1	1	**1**	**1**	**0**
0	1	1	0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1

EJEMPLO 4.6: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

c) $p_1, p_2 \vdash q_1$

Premisas		Conclusión
p_1	p_2	q_1
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	**1**	**0**
1	**1**	**1**

Razonamiento inválido

EJEMPLO 4.6: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

d) $p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge q_1), p_1 \vdash q_1$

Variables			Premisas		Conclusión
p_1	p_2	q_1	$p_1 \leftrightarrow (p_2 \wedge q_1)$	p_1	q_1
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	**1**	**1**	**1**

Deducción correcta

Razonamiento válido

EJEMPLO 4.7: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

Probemos sin son correctos los siguientes razonamientos.

A) Si resuelvo todos los problemas del libro entonces aprendo Matemática Discreta. Aprendí Matemática Discreta, luego he resuelto todos los problemas del libro.

B) Si resuelvo todos los problemas del libro entonces aprendo Matemática Discreta. Resolví todos los problemas del libro, luego aprendí Matemática Discreta.

EJEMPLO 4.7: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

A) Si resuelvo todos los problemas del libro entonces aprendo Matemática Discreta. Aprendí Matemática Discreta, luego he resuelto todos los problemas del libro.

$$p \Rightarrow q, q \vdash p$$

p	q	$p \Rightarrow q$	q	p
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	**1**	**1**	**1**

Razonamiento inválido

EJEMPLO 4.7: VALIDEZ ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

B) Si resuelvo todos los problemas del libro entonces aprendo Matemática Discreta. Resolví todos los problemas del libro, luego aprendí Matemática Discreta.

$$p \Rightarrow q, p \vdash q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	p	q
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Razonamiento correcto

FALACIAS

- Las estructuras deductivas que no son válidas se denominan **falacias**.

FALACIAS COMUNES:

A. Negación del Antecedente

B. Afirmación de la Conclusión

A. Negación del Antecedente

- Algunas falacias surgen de la negación del antecedente:

  Si Claudia tiene las joyas robadas en su bolso, entonces es culpable.
  Las joyas no están en el bolso de Claudia.
  Por tanto, Claudia es inocente

- Para analizar la validez de este razonamiento se declaran las proposiciones siguientes:

  p: Claudia tiene las joyas robadas en su bolso.
  q: Claudia es culpable.

- Luego la estructura deductiva sería:

$$p \rightarrow q,\ \ \overline{p} \vdash \overline{q}$$

A. Negación del Antecedente

La tabla de verdad correspondiente:

$p \rightarrow q,\ \overline{p} \vdash \overline{q}$

el hecho de que Claudia no lleve las joyas robadas en el bolso no significa que no sea culpable, ya que si ella las robó bien pudo haberlas escondido en algún sitio.

Variables		Premisas		Conclusión
p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$
0	0	**1**	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**	**0**
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0

Razonamiento inválido

FALACIA

B. Afirmación de la Conclusión

- Otra forma de falacia es afirmar la conclusión:

  Cuando llueve el jardín está mojado
  El jardín está mojado
  Entonces llueve

- Las proposiciones que se utilizarán en la validación son las siguientes:
  p: Llueve
  q: el jardín está mojado.

- La estructura deductiva seria:

$$p \rightarrow q,\ q \vdash p$$

B. Afirmación de la Conclusión

La tabla de verdad correspondiente:

$p \rightarrow q, q \vdash p$

Analizando bien el razonamiento se puede ver que el hecho de que el jardín esté mojado no significa necesariamente que haya llovido, por ejemplo puede estar mojado porque alguien lo hayan regado.

Variables		Premisas		Conclusión
p	q	$p \rightarrow q$	q	p
0	0	1	0	0
0	1	**1**	**1**	**0**
1	0	0	0	1
1	1	**1**	**1**	**1**

Razonamiento inválido

FALACIA

ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS SIN PREMISAS

- Las estructuras deductivas no precisan obligatoriamente de la existencia de premisas pero sí debe obtenerse al menos una conclusión.
- En este caso para confirmar la veracidad de la deducción, **las conclusiones deben ser ciertas para todas las interpretaciones en la tabla de verdad**, es decir, deben ser **tautologías**.

EJEMPLO 4.8: ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS SIN PREMISAS

Sea p: "La puerta está abierta" una deducción natural es "la puerta está abierta o no está abierta"

$$\vdash p \vee \overline{p}$$

Variables	Conclusión
p	$p \vee \overline{p}$
0	1
1	**1**

La conclusión es una Tautología

⇓

Razonamiento válido

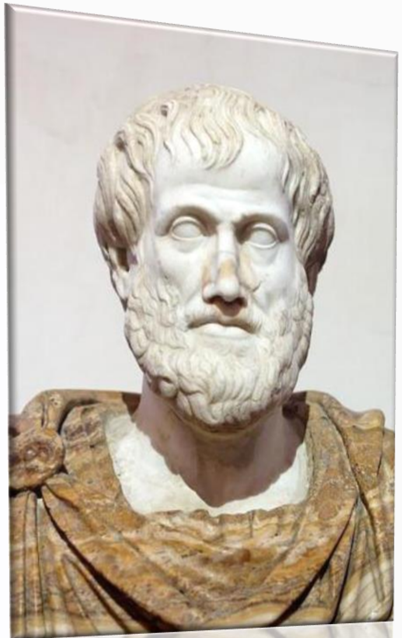
- En ocasiones resulta engorroso o no viable comprobar la veracidad de una deducción a partir de su tabla de verdad, ya que pudiera ser excesivamente larga o pudiera necesitarse determinar la veracidad de fórmulas en las que no intervienen variables proposicionales a las cuales asignarles valores de verdad. En estos casos se utiliza otro método basado en **reglas de inferencias**.

DEFINICION

REGLAS DE INFERENCIA:

- *Conjunto de reglas válidas que permiten demostrar la veracidad de una estructura deductiva partiendo de un conjunto de premisas (asumidas como ciertas) hasta deducir las conclusiones deseadas.*
- *Secuencia ordenada de estructuras deductivas, cada una de las cuales constituirá un paso de la demostración.*
- Tienen su origen en las implicaciones lógicas.
- Su estructura está formada por un conjunto de premisas (P_i) separadas por una línea horizontal de la conclusión (Q) de la regla:
- El símbolo ∴ se lee "por lo tanto".

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$



- Fue Aristóteles (384-322 a.C.), el padre de la lógica, quien en tiempos tan tempranos como el **siglo IV** antes de nuestra era, formuló la **regla de inferencia** básica llamada ***modus ponens***

- Es posible captar por medio de ***reglas*** los pasos más típicos que efectuamos cuando llevamos a cabo una deducción.
- Si una regla está bien elegida, nos conducirá desde cierto enunciado E a otro E' que es consecuencia lógica de E.
- El proceso por el que pasamos de E a E' es una ***inferencia lógica***.

PRINCIPALES REGLAS DE INFERENCIA

Nombre	Regla	Nombre	Regla
Modus Ponens	P $P \to Q$ ――― $\therefore Q$	Introducción de la disyunción o Adición	P ――― $\therefore P \vee Q$
Modus Tollens	$P \to Q$ $\overline{Q}$ ――― $\therefore \overline{P}$	Simplificación	$P \wedge Q$ ――― $\therefore P$
Silogismo Hipotético	$P \to Q$ $Q \to R$ ――― $\therefore P \to R$	Prueba por casos	$P \to R$ $Q \to R$ ――― $\therefore (P \vee Q) \to R$

PRINCIPALES REGLAS DE INFERENCIA

Nombre	Regla	Nombre	Regla
Silogismo Disyuntivo	$P \vee Q$ $\overline{P}$ ——— $\therefore Q$	Dilema constructivo	$P \rightarrow Q$ $R \rightarrow S$ $P \vee R$ ——— $\therefore Q \vee S$
Introducción de la conjunción	P Q ——— $\therefore P \wedge Q$	Dilema destructivo	$P \rightarrow Q$ $R \rightarrow S$ $\overline{Q} \vee \overline{S}$ ——— $\therefore (\overline{P} \vee \overline{R})$

PROCESO DE VALIDACION DE ESTRUCTURAS DEDCUTIVAS

- El **proceso de validación de estructuras deductivas utilizando reglas de inferencia**, se compone de un conjunto de pasos numerados que contienen, cada uno, una estructura deductiva.
- Cada paso será justificado a partir del anterior apoyándose en una regla de inferencia.
- La justificación se mostrará a un lateral del paso realizado.
- La última estructura deductiva de la demostración debe tener como conclusión la proposición que se desea verificar y, basándose en la validez de las transiciones entre los pasos, se puede asegurar que la misma es correcta.
- El esquema se representa de la siguiente forma:

(# del paso) Conclusión $<$ Justificación $>$

- El **razonamiento deductivo** es ampliamente utilizado en las ***demostraciones*** de proposiciones matemáticas, cuya veracidad se establece partiendo de la veracidad de un conjunto de proposiciones, algunas aceptadas como verdaderas, otras generalmente demostradas con anterioridad.

- El conjunto de las proposiciones aceptadas como verdaderas sin demostración previa, se denominan ***axiomas o postulados*** y constituyen el punto de partida para las demostraciones.

- Las proposiciones cuya veracidad ha sido demostrada previamente se denominan ***teoremas***.

- En este curso se presentan tres técnicas de demostración:

TECNICAS DE DEMOSTRACION COMUNES

- DIRECTA
- POR CONTRADICCION O REDUCCION AL ABSURDO
- POR INDUCCION MATEMATICA

1. DEMOSTRACION DIRECTA

- Gran parte de los teoremas matemáticos están compuestos por proposiciones condicionales del tipo:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

- Este tipo de proposiciones únicamente son falsas cuando $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$ es verdadera y la conclusión q es falsa; recordemos que en la tabla de verdad de la implicación si el antecedente es falso la proposición es verdadera independientemente del valor de verdad de la conclusión.

1. DEMOSTRACION DIRECTA

Una demostración de este tipo muestra que la verdad de la conclusión Q, se sigue lógicamente de la verdad de la hipótesis P. La demostración empieza asumiendo que P es verdad para después, utilizando cualquier información disponible, así como teoremas probados con anterioridad, probar que Q es verdad.

1. DEMOSTRACION DIRECTA

- Por tanto para llevar a cabo una **demostración formal basada en el método directo:**

- Se parte de reconocer a p_1, p_2,… y p_n como axiomas (verdaderas).

- Luego, para que el razonamiento (proposición condicional) sea válido se debe demostrar que *q* es verdadera utilizando otros axiomas o teoremas.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

EJEMPLO 4.11: DEMOSTRACION DIRECTA

Utilice el método de demostración directa para determinar la validez de los argumentos siguientes:

a) Si x e y son números enteros pares, entonces $13x + y$ es un número entero par.

EJEMPLO 4.11 - SOLUCION

Siguiendo el método de demostración directa se parte de que la hipótesis "x e y son números enteros pares" es verdadera y se intenta demostrar que la conclusión "$13x + y$ es un número entero par", también lo es.

Los números pares cumplen con la forma 2n, por tanto:

$x = 2n_1, y = 2n_2 \Rightarrow$

$13(2n_1) + 2n_2 = 2(13n_1 + n_2) = 2n$, donde $n = 13n_1 + n_2$

Al obtenerse como resultado un número que cumple con la forma 2n se puede afirmar que si x e y son número enteros pares, entonces "$13x + y$" es también un número entero par. Queda demostrada la validez del razonamiento.

2. DEMOSTRACION POR CONTRADICCION O REDUCCION AL ABSURDO

- La **demostración por contradicción**, también conocida como **demostración por reducción al absurdo**, constituye una demostración indirecta.
- El procedimiento es semejante al utilizado en el método directo, con la diferencia de que **se incluye entre los axiomas la negación de la conclusión**.
- **El objetivo es llegar a una contradicción del tipo $r \wedge \overline{r}$**, donde r representa cualquier proposición ya sea de las premisas o de las obtenidas en algún paso de la demostración.

2. DEMOSTRACION POR CONTRADICCION O REDUCCION AL ABSURDO

La demostración de un teorema diremos que es por contradicción cuando suponiendo que la conclusión, Q, es falsa y utilizando la hipótesis P, y otros teoremas y equivalencias lógicas establecidas previamente, se llega a una contradicción.

Hasta el próximo dia!

Universidad Europea del Atlántico

www.uneatlantico.es