Езици, автомати и изчислимост

Факултет по математика и информатика, СУ

Александра Соскова

Въведение в теория на автоматите, формалните езици и сложността

Hopcroft, Motvani, Ulman

- Addison-Vesley, 2002
- Ориентирана към приложения
- Недостатъчно материал

$\neq$ старата книга на Hopcroft Ullman.

Elements of the theory of computation

Lewis and Papadimitiou

- 2. ed. Prentice-hall, 1998
- Добра теоретичнамотивация
- Добре обяснен материал

Introduction to the theory of computation

Introduction to the theory of computation

- 2. ed. PWS publ comp, MIT, 2006
- Неформално описание – интуиция
- Богат, добре обяснен материал

Увод в дискретната математика

К. Манев

- КЛМН, София, 2003
- автомати и гарматики – добре (друга структура)
- изчислимост и сложност – малко

Система за оценяване

- Текущ контрол
  - Тестове на всички основни алгоритми и конструкции (упражнения)
  - Тестове на всички основни дефиниции и теореми (формулировка) (лекции)
- Писмен изпит
- Устен изпит

История

- 3в. пр.н.е. Евклид; 9в. Ал-Хоразми;
- 1646-1716 Годфрид Лайбниц;
- 1832 Чарлз Бабидж – Analytical Engine (Ада Байрон);
- 1900 Давид Хилберт – Хилбертовата програма;
- 1933 Курт Гьодел – Теорема за непълнота;
- 1936 Алан Тюринг – Машини на Тюринг, Стивън Клини - теория на рекурсивните функции;
- Алонзо Чърч – λ изчислими функции;
- Шепердсон и Стържиц – МНР;
- Чомски, Майхил, Нероуд, Скот, Рабин – автомати;
- Стивън Кук – сложност.

Основни парадигми

Формални езици: Езикът с който общуваме с компютъра?

Теория на автоматите: Абстрактен модел на прости изчисления.

Изчислимост: Какви проблеми (не) може да се разрешат с компютър?

Сложност: Кои проблеми (не) можем да разрешим ефективно?

Защо ни трябва всичко това?

- (не)директно приложение: (алгоритми, идеи, методи), в езиците за програмиране, компилатори, обработка на текст, (лингвистика), хардуерно и софтуерно инженерство, ...
- Опит с типични дискретни доказателства $\rightsquigarrow$ теория на алгоритмите, логика, теория на изчислимостта, ...

Формални езици, регулярни операции

Азбука: *крайно* множество от сиволи (Σ)

Думи (в Σ): крайна редица от символи от Σ (w)

Език: множество от думи в Σ (L)

Празната дума: ε $(\{\varepsilon\} \neq \emptyset)$

Конкатенация на думи: $ac \cdot bab = acbab.$

Конкатенация на езици:

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$$

$$\{ab, ba\} \cdot \{aa, bb\} = \{abaa, abbb, baaa, babb\}$$

Обединение на езици:

$$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$$

Пример: $\{ab, ba\} \cup \{aa, bb\} = \{ab, ba, aa, bb\}$

Означения

Конкатенация: $w^0 = \varepsilon, w^n = w \cdot w^{n-1}$ (за $n \geq 1$)

$L^0 = \{\varepsilon\}, L^n = L \cdot L^{n-1}$ (за $n \geq 1$)

Пример:$a^3 = aaa, \{a, bb\}^2 = \{aa, abb, bba, bbbb\}$

Звезда на Клини: $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

(всяка отделна дума е крайна!)

Пример: $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$

Σ^*: Множеството от всички думи в Σ.

Позитивна обвивка : $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

Допълнителен език: $L^c = \Sigma^* \setminus L$

Регулярни езици

Основни: $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ и $\{a\}$ за всяко $a \in \Sigma$ са регулярни езици;

$\cup$ Ако L_1 и L_2 са регулярни, то и $L_1 \cup L_2$ е регулярен;

$\cdot$ Ако L_1 и L_2 са регулярни , то и $L_1 \cdot L_2$ е регулярен;

$*$ Ако L е регулярен, то и L^* е регулярен.

Един език е регулярен, ако се получава от основните с помощта на операциите обединение, конкатенация и звезда, приложени краен брой пъти.

Означения

Начало (префикс): u

Поддума (инфикс): v

Край (суфикс): x

Обратна: $(c_1c_2\dots c_k)^R = c_k\dots c_2c_1$

Дължина ($|w|$): броят на буквите в w

- $L^{=} := \{0^n 1^n : n \geq 1\} = \{01, 0011, 000111, \ldots\}$
- $\{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\} = \{abc, aabbcc, aaabbbccc, \ldots\}$
- $\{ww : w \in \Sigma^*\} = \{\varepsilon, 00, 11, 0000, 0101, 1010, \ldots\}$
- $\{ww^R : w \in \Sigma^*\} = \{\varepsilon, 00, 11, 0000, 0110, 1001, \ldots\}$
- $L_P := \{w : w = w^R\} = \{\epsilon, 0, 1, 00, 11, 000, 010, 101, \ldots\}$

Палиндроми:

- English: Ana, level, eye, civic, refer
- A Santa lived as a devil at NASA, Borrow or rob
- German: gnudung, hangnah, kajak, lagerregal
- Bulgrarian: Аз обичам мач и боза
- Насила закараха свинете ни в Сахара! - каза Лисан
- Latin: Sator Arepo Tenet Opera Rotas .

Пример за формален език

Балансирани леви и десни скоби $L_{()}$ в $\Sigma = \{(,)\}$:

- $\varepsilon \in L_{()}$,
- ако $u \in L_{()}$, $v \in L_{()}$, то $uv \in L_{()}$,
- ако $u \in L_{()}$, то $(u) \in L_{()}$.

Алгоритмични проблеми

Принадлежност на дума: $w \in L$?

Еквивалентност: $L_1 = L_2$?

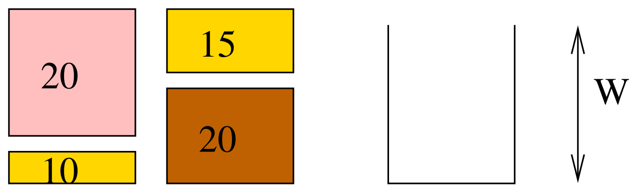
Спецификация:

- математическа дефиниция (описание) на езика (кога една дума $w \in L$)
- гарматики
- разпознаватели = автомати(машини),
- трансформации между различни спецификации на L.

Защо формални езици?

- **Езиците за програмиране, форматът на данните,. . . са формални езици.**
- Лесно се формулират задачите.
- Много алгоритмични проблеми се свеждат до принадлежност на дума в даден формален език.

Пример: Задачата за раницата



- **n** обекта с тегло $w_i \in \mathbb{N}$ и стойност (печалба) p_i
- да се намери подмножество x от обектите
- такова, че $\sum_{i \in x} w_i \leq W$ и
- с максимална печалба $\sum_{i \in x} p_i$

Пример: Задачата за раницата

Дефинираме $L \subseteq \{0, 1, `,'\}^*$:
$w \in L$, ако w е списък от $2n + 2$ двоични числа, разделени със запетая $P, W, w_1, p_1, \ldots, w_n, p_n$, такива че $\exists x \subseteq \{1, \ldots, n\} : \sum_{i \in x} p_i \geq P$ и $\sum_{i \in x} w_i \leq W$.

Принадлежността към езика $L \rightsquigarrow$ Задачата за раницата:

- намираме оптималното P с двоично търсене
- намираме съотвеното x, махайки от списъка елемент по елемент.

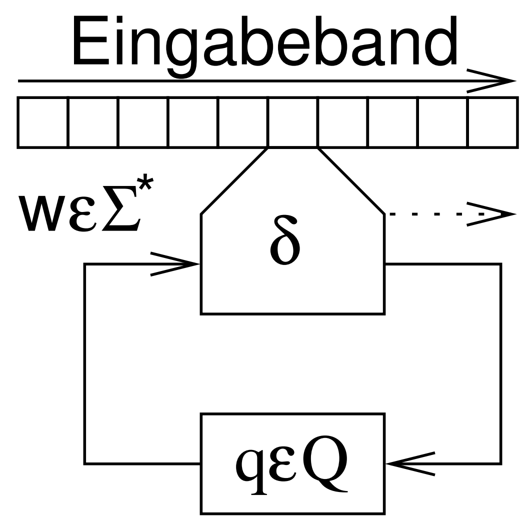
Всичко $\leq n + \log \sum_i p_i$, за да сведем единия проблем до другия „малко“

Теория на автоматите

Крайни автомати

Един детерминиран краен автомат се състои от:

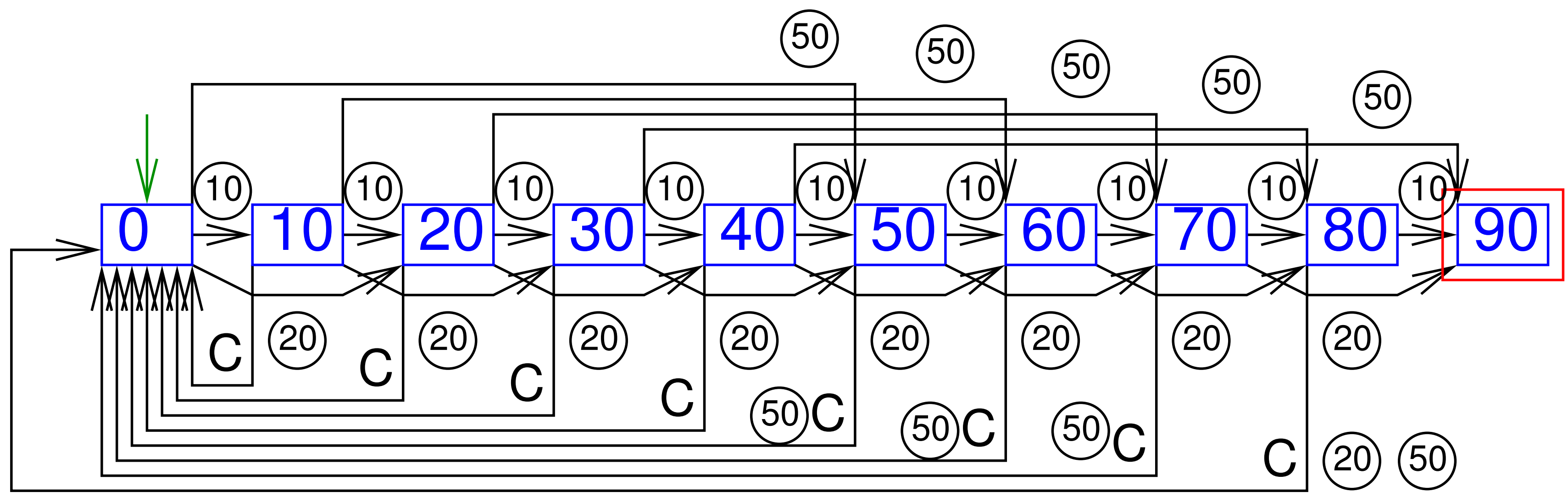
- Q, крайно множество от състояния;
- Σ, крайно множество от символи, (азбука);
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние;
- $F \subseteq Q$, крайно множество от заключителни състояния.



Пример: билетен автомат

- Стандартна цена на билет 90 цента
- Приемат се монети от: 10, 20 и 50
- Стоп с бутон C или по-голяма сума монети
- 90 цента са пуснати $\rightsquigarrow$ ready

$$(\{10, 20, 50, C\}, \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}, \delta, 0, \{90\})$$



Граматики

Граматика $G = (V, \Sigma, P, S)$

- V, променливи
- Σ, азбука (терминали) $(V \cap \Sigma = \emptyset)$
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$, правила, $|P| < \infty$
  На всяко правило, лявата част съдържа поне една променлива
- S, начална променлива

Граматики

Йерахия на Чомски: класификация в зависимост от вида на правилата.
В частност: контекстно-свободни езици

$$A \to \alpha, A \in V, \alpha \in (V \cup \Sigma)^*$$

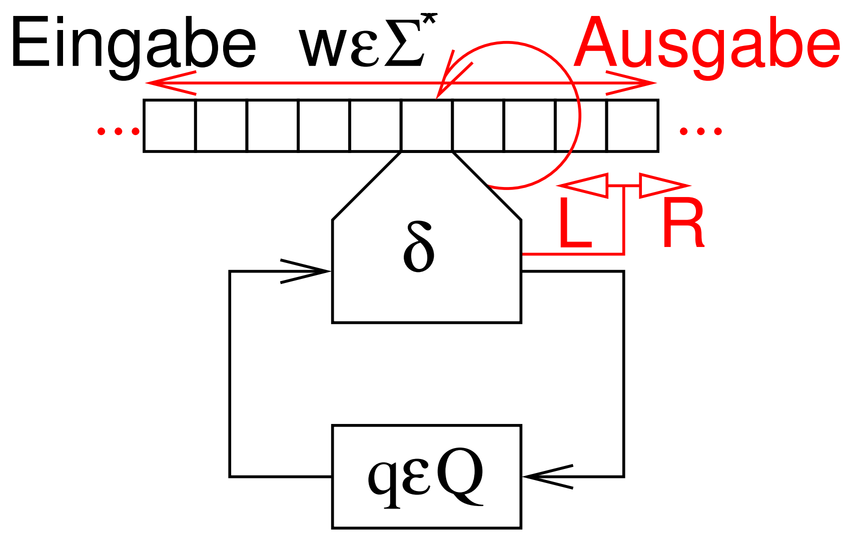
- Спецификация на синтаксиса на програмните езици.
- Контекстно-свободните езици са разрешими.
- Кои езици се рапознават за линейно време?

Пример: Аритметични изрази

$G = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (,)\}, P, E)$, където

$$
\begin{aligned}
P = \{E &\to T, \\
E &\to E + T, \\
T &\to F, \\
T &\to T * F, \\
F &\to a, \\
F &\to (E)\}
\end{aligned}
$$

Машини на Тюринг и изчислимост



- Машините на Тюринг решават не повече и не по-малко задачи, отколкото другите достатъчно мощни машинни модели
- Може ли да разрешим всеки проблем с машина на Тюринг?

Теория на сложността: Кои задачи можем да пресметнем ефективно?

- Пак се базираме на машини на Тюринг. Естествено е да искаме алгоритмите да са ефективни, т.е. времето за изпълнение или ресурсите да са малки (като функция на големината на входа).

$$n \approx n^2 \approx \cdots n^{42} \approx \cdots \ll 2^{0.134n}$$

- Знеаем много малко за долната граница на времето за изчисление
- Но има големи класове от задачи, които макар и не полиномиални, за всички други по-трудоемки задачи изглеждат прекрасно.