UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Teoría geométrica de la medida

Realizado por:

Inmaculada Cabero Morán

Tutelado por:

Francisco Javier Pérez Lázaro

Logroño, 24 de mayo de 2018

Índice general

Capítulo 1

Medidas de Haussdorf

1.1. Preliminares de teoría de la medida

En esta sección comenzaremos por definir conceptos básicos de teoría de la medida,que podemos encontrar también en [1, 3].

Definición 1.1. Sea X un conjunto arbitrario. Llamaremos semianillo a una colección no vacía $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ que cumple:

- Si $A, B \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_0$
- Si $A, B \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow \exists A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}_0$ disjuntos y tales que $A - B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$

Definición 1.2. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}_0$ un semianillo de subconjuntos de X. Diremos que una aplicación $\mu : \mathcal{A}_0 \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida si cumple:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- es numerablemente aditiva, es decir, dados $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$ disjuntos y cuya unión esté en $\mathcal{A}_0$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ejemplo 1.1. El conjunto de intervalos semiabiertos $\mathcal{A}_0 := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ es un semianillo en $\mathbb{R}$. Se puede ver que $\mu((a, b]) = b - a$ es una medida en $\mathcal{A}_0$.

Así tenemos definida una medida sobre una clase reducida de conjuntos, por lo que queremos extenderla a una clase más amplia. Para ello damos la siguiente definición.

Definición 1.3. Una medida exterior en X es una función

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

verificando que:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B \subset X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- Si B_n es una sucesión de subconjuntos de X entonces

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

Las medidas exteriores no cumplen la aditividad, sino únicamente la subaditividad, lo que implica que puede ocurrir que exista un conjunto que al partirlo en dos, la suma de sus medidas exteriores sea mayor que la medida exterior del conjunto original.

A continuación, mediante la siguiente proposición, construimos una gran cantidad de medidas exteriores.

Proposición 1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X y $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$ una función cualquiera, tales que $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Para cada $B \subset \Omega$,*

$$\mu^*(B) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{C}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

define una medida exterior (medida exterior generada por μ), para la que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, para $A \in \mathcal{C}$. Además si $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0$ es un semianillo y μ una medida, μ^* coincide con μ sobre $\mathcal{A}_0$.

Ejemplo 1.2 (Medida exterior de Lebesgue). En $\mathbb{R}$, sea $\mathcal{C} = \{(a, b] : a \leq b \in \mathbb{R}\}$ y $\mu(a, b] = b - a$, entonces, por la proposición 1.1, para $A \subset \mathbb{R}$, la medida exterior de Lebesgue viene definida como:

$$m^*(A) = \text{ínf} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n \leq b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\}$$

y además, $m^*((a, b]) = \mu((a, b]) = b - a$.

Definición 1.4. Sea X un conjunto arbitrario. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$) es una $\sigma-$ álgebra si:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

• Para cada sucesión numerable $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, el conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Al par $(X, \mathcal{A})$ se le denomina espacio medible.

Definición 1.5. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, con $\mathcal{A}$ una $\sigma-$ álgebra. Entenderemos por medida sobre la $\sigma-$ álgebra, una función no negativa

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

que satisface:

• $\mu(\emptyset) = 0$

• Es numerablemente aditiva, es decir, dados $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Acabamos de ver que es numerablemente aditiva. Nuestro propósito es localizar la $\sigma-$ álgebra donde las medidas sean numerablemente aditivas.

Definición 1.6. Sea μ^* una medida exterior en X. Diremos que $A \subset X$ es μ^*- medible si

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \qquad \forall E \subset X$$

Denotaremos con $\mathcal{M}_{\mu^*}$ la familia de los conjuntos μ^*- medibles.

Teorema 1.1 (Teorema de Caratheodory)**.** *Sea X un conjunto, μ^* una medida exterior en X. Entonces:*

• *$\mathcal{M}_{\mu^*}$ es un $\sigma-$ álgebra.*

• *La restricción de μ^* a los μ^*- medibles $(\mathcal{M}_{\mu^*})$ es una medida.*

• *Si además μ^* era la media exterior generada por la medida μ de un semianillo A_0, entonces $A_0 \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.*

Los dos teoremas anteriores nos permiten construir una amplia clase de medidas en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Centrémonos ahora en la medida de Lebesgue.

Hemos construido una medida exterior m^*. Ahora, por el teorema de Caratheodory, tenemos que la resticción de μ^* a los medibles es una medida, y además, como está generada por la medida del semianillo de los intervalos semiabiertos, $\mathcal{A}_0$, entonces $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}_{m^*}$. Por lo tanto, tiene que contener a la menor $\sigma-$ álgebra que contiene a los intervalos semiabiertos, la de los borelianos.

En $\mathbb{R}$ cubríamos por intervalos de la forma $(a, b]$. Si lo extendemos a $\mathbb{R}^d$, podemos cubrir con rectángulos I de la forma $I = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d]$. Definimos

$m_d(I)$ como el producto $\prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$. Así, podemos definir la medida exterior de Lebesgue más general en $\mathbb{R}^d$ como:

Definición 1.7. Sea $A \subset \mathbb{R}^d$. Se define la medida exterior de Lebesgue del conjunto A como

$$m_d^*(A) := \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m_d(I_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \text{ rectángulo semiabierto en } \mathbb{R}^d\right\},$$

donde el ínfimo se toma en todos los cubrimientos de A por uniones numerables de rectángulos semiabiertos en $\mathbb{R}^d$ definidos anteriormente.

Siguiendo el mismo argumento que en $\mathbb{R}$, obtendríamos para $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la medida de Lebesgue m_d. Notemos que si intentamos calcular el área de una superficie de $\mathbb{R}^3$ con la medida de Lebesgue, no somos capaces, por lo que necesitamos otra medida capaz de ello. Veamos ahora las medidas de Hausdorff.

1.2. Medida de Haussdorf

En esta sección nos centraremos en la distancia euclídea, pero los siguientes resultados se pueden aplicar a cualquier espacio métrico, obteniendo resultados diferentes.

Las medidas de Hausdorff permiten medir los conjuntos de dimensión p en un espacio métrico, como por ejemplo las superficies en $\mathbb{R}^3$ o las longitudes de las curvas.

Veamos cómo se construye la medida exterior de Hausdorff.

Definición 1.8. Llamamos diámetro de un B $\subset \mathbb{R}^d$ al valor

$$diam(B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in B\},$$

donde d es la distancia.

Ahora para cada $p > 0$ y $\delta > 0$ definimos la función de conjunto que para cada $A \subset X$ vale

$$H_{p,\delta}(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n diam(B_n)^p : A \subset \bigcup B_n, diam(B_n) \leq \delta\right\},$$

donde

$$\gamma_n = \frac{m_n^*(B)}{2^n} = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(1 + (n/2))} \quad [1]$$

[1] En el libro [1] podemos comprobar que esta constante γ_n es la anteriormente mencionada.

y las cuales, por la proposición 1.1, son medidas exteriores que verifican que

$$\delta \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad H_{p,\delta}(A) \geq H_{p,\varepsilon}(A), \qquad [2]$$

y por tanto existe el límite, que también es medida exterior

$$H_p(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A),$$

y que llamamos la medida exterior p-dimensional de Hausdorff.

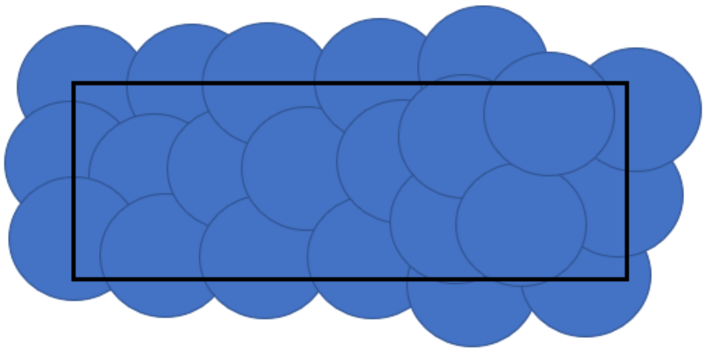


Figura 1.1: Ejemplo de un posible cubrimiento por bolas de un rectángulo.

Definición 1.9. Diremos que una medida exterior μ^* en $\mathbb{R}^d$ con la distancia euclídea es métrica si dados $A, B \subset X$ tales que $d(A,B) > 0$,

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Proposición 1.2. *Si μ^* es una medida exterior métrica en $\mathbb{R}^d$, entonces $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.*

Teorema 1.2. $H_p : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ *es una medida exterior métrica.*

Como hemos visto en el teorema anterior que $H_p(A)$ es una medida exterior métrica en $\mathbb{R}^d$, entonces, por la proposición 1.2, $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{M}_{H_p}$.

Definición 1.10. Llamamos medida de Hausdorff p-dimensional a la restricción de H_p a los borelianos $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

[2]Esto es aplicado de forma general, pero, para entenderlo, podemos ver un ejemplo finito y extenderlo: Si tomamos $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b,c,d,e,f\}$, entonces es obvio que $A \leq B$. Como la función H mide el ínfimo, entonces tendríamos que $H(A) = \inf\{a,b,c\}$, que podría ser a, b o c. Sin embargo $H(B) = \inf\{a,b,c,d,e,f\}$ que podría ser a, b o c, es decir, $H(A)$, o podría ser d, e o f. Por lo tanto, $H(B) \leq H(A)$.

Estudiemos ahora la medida exterior de Hausdorff dependiendo de su dimensión. Veremos que:

- Si es 0-dimensional, entonces corresponde con al medida de contar.
- Si es 1-dimensional corresponde con la longitud de la curva.
- Si es d-dimensional, con d $\in \mathbb{N}$, entonces corresponde con la medida de Lebesgue .

Definición 1.11. Sea X un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$. Definimos $\mu(A)$ como el número de elementos de A. Si A tiene n $\in \mathbb{N}$ elementos, entonces $\mu(A) = n$, y si A es un conjunto de infinitos elementos, entonces $\mu(A) = \infty$. A esto es lo que denominamos la medida de contar.

Teorema 1.3. *H_0 corresponde con la medida de contar.*[3]

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} H_{0,\delta}(A) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_0\, diam\,(B_n)^0 : A \subset \bigcup B_n, diam\,(B_n) \leq \delta\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} 1 : A \subset \bigcup B_n, diam\,(B_n) \leq \delta\right\} \end{aligned}$$

Dado un conjunto de n elementos, tomamos bolas de radio menor que $\frac{1}{2}$ y menor que δ. Veamos que $H(A) \leq n$. Para un conjunto de n elementos, tomamos δ menor que la mitad de la distancia que separa cada par de puntos. Nótese que $H_{0,\delta}(A) \leq n$, y por tanto, tomando límite cuando δ tiende a 0, tenemos que $H_0 \leq n$.

Nótese que si quiero cubrir un conjunto de n elementos con diámetro menor que delta necesito al menos n conjuntos no vacíos, ya que ningún conjunto puede cubrir dos puntos. Por tanto, se tiene que $H_0 \geq n$.

□

Definición 1.12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de extremos a, b, abierto o cerrado, $I = (a, b)$ o $I = [a, b]$ y $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua. Dado $T \subset I$ un subconjunto finito y ordenado $(t_1 < t_2 < \ldots)$, denotaremos la longitud de la poligonal correspondiente con

$$p(T) = \sum_{i=1}^{m} \| \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) \|_2$$

[3] Se tomará como convenio que $diam\,(\emptyset)^0 = 0$, $diam\,(A)^0 = 1$, con $A \neq \emptyset$, en particular debemos entender que $diam\,(\{x\})^0 = 1$

y definimos la longitud de σ como

$$L(\sigma) := \sup \{p(T) : T \subset I finito\}.$$

Teorema 1.4. *Siempre se tiene que $L(\sigma) \geq H_1(\sigma(I))$, y si σ es inyectiva (salvo en un número finito de puntos), entonces $L(\sigma) = H_1(\sigma(I))$.*

Demostración. La demostración no la haremos, pero se puede consultar en [1, pág 51]. □

Lema 1.5. *Sea $B = B(0,1)$ la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^n$, m_n^* la medida de Lebesgue y $Q = [0,1]^n$ el cubo unidad, entonces*

$$\frac{\gamma_n}{m_n^*(B)} \leq H_n \leq \gamma_n \left(\sqrt{n}\right)^n.$$

Demostración. Veamos que $\frac{\gamma_n}{m_n^*(B)} \leq H_n$.

Sea $\delta > 0$, $Q \subset \bigcup A_i$ y $diam(A_i) < \delta$.

Para cada i elegimos un $x_i \in A_i, r_i = diam(A_i)$ y la bola $B_i = B(x_i, r_i)$. Por tanto, $A_i \subset B_i$ y así se tiene entonces que $Q \subset \bigcup A_i \subset \bigcup B_i$. Tomando medidas de Lebesgue [4], se tiene que

$$1 = m_n^*(Q) \leq m_n^*\left(\bigcup B_i\right) \leq \sum m_n^*(B_i) = \sum r_i^n m_n^*(B)$$

Tomando el ínfimo sobre todos los posibles cubrimientos tenemos

$$\frac{\gamma_n}{m_n^*(B)} \leq \gamma_n \inf\left\{\sum r_i^n : Q \subset \bigcup A_i, diam(A_i) < \delta, r_i = diam(A_i)\right\} = H_{n,\delta}(Q) \leq H_n(Q)$$

Veamos ahora que $H_n(Q) \leq \gamma_n (\sqrt{n})^n$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\delta_m = \frac{2\sqrt{n}}{m}$. Ahora dividimos $[0,1]$ en m intervalos de la siguiente manera:

$$\left[0, \frac{1}{m}\right], \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right], \ldots, \left[\frac{m-1}{m}, 1\right]$$

Entonces, $Q = \bigcup Q_i$, donde Q_i son los m^n cubos formados por todos los productos $n-$ dimensionales de los intervalos anteriores. Además, dados $x, y \in [0,r]^n$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{nr^2} = r\sqrt{n}$$ [5]

---

[4]Notemos que $m_n^*(B_i) = m_n^*(B(x_i, r_i)) = m_n^*(x_i + r_i B(0,1)) = m_n^*(r_i B(0,1)) = r_i^n m_n^*(B(0,1))$

[5]La igualdad se alcanza cuando $x = (0, \ldots, 0)$ e $y = (r, \ldots, r)$

Entonces tendremos que $diam\,(Q_i) = \frac{\sqrt{n}}{m} < \delta_m$ y $H_{n,\delta_m}\,(Q) \leq \gamma_n \sum_{i=1}^{m^n} diam\,(Q_i)^n =$
$= \gamma_n m_n \frac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{m^n} = \gamma_n \left(\sqrt{n}\right)^n$.
Tomando límite cuando $m \longrightarrow \infty$, entonces $\delta_m \longrightarrow 0$, y se tiene que $H_n\,(Q) \leq \gamma_n \left(\sqrt{n}\right)^n$. □

Lema 1.6. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Entonces, si $\epsilon > 0$, existen bolas cerradas y disjuntos $B_n \subset a$ con $0 < diam(B_n) < \epsilon$ tales que*

$$m_n^*(A) \leq \sum m_n^*(B_n)$$

Teorema 1.7 (Desigualdad isiodiamétrica)**.** *Dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,*

$$m_n^*(A) \leq m_n^*(B(0, diam(A)/2)).$$

Demostración. Este teorema se puede demostra de varias maneras. Una demostración se puede ver en [1, pág 232, Teorema 5.6.3] □

Teorema 1.8. *H_d es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Nótese que la medida de Haussdorf es invariante por traslaciones, ya que el diámetro de un conjunto lo es. Esto es un resultado conocido de teoría de la medida [1, pág 38, Teorema 1.5.19], que las únicas medidas sobre $\mathcal{B}\,(\mathbb{R}^n)$ invariante por traslaciones en las que el cubo unidad tiene medida finita son múltiplos de la medida de Lebesgue. Veamos ahora que este múltiplo es 1, lo que equivale a probar que

$$\gamma_n = m_n^*(B(0, 1/2)) = \frac{m_n^*(B(0, 1))}{2^n} = \frac{\pi^{n/2}}{2^n\Gamma(1 + \frac{n}{2})}.$$

Veamos que $\gamma_n = m_n^*(B(0, 1/2))$, lo que equivale a probar que $H_n(B(0, 1/2)) = \gamma_n$. Veamos primero que $\gamma_n \leq m_n^*(B(0, 1/2))$.

Sea $C = [0, 1]^n$ y sean B_i tales que $diam(B_i) < \epsilon$, con $\epsilon > 0$, tales que $C \subset \cup B_i$. Se tiene que, aplicando medidas de Lebesgue y aplicando el teorema 1.7,

$$1 = m_n^*(C) \leq \sum_i m_n^*(B_i) \leq \sum_i m_n^*(B(0, diam(B_i)/2)) = m_n^*(B(0, 1/2)) \sum_i diam(B_i)^n.$$

Por tanto, se tiene que

$$1 \leq m_n^*(B(0, 1/2)) \sum_i diam(B_i)^n.$$

Multiplicando a ambos lados de la desigualdad anterior por γ_n se tiene que

$$\gamma_n \leq m_n^*(B(0,1/2)) \sum_i \gamma_n diam(B_i)^n.$$

Por tanto, $\gamma_n \leq m_n^*(B(0,1/2))$, y así $H_n(B(0,1/2)) \leq m_n^*(B(0,1/2))$.

Veamos ahora la otra desigualdad.

Consideremos el cubo unidad abierto $A = (0,1)^n$. Sea $\epsilon > 0$. Por el lema 1.6 se tiene que existen bolas cerradas y disjuntas $B_i \subset A$ con $0 \leq diam(B_i) < \epsilon$ tales que

$$1 = m_n^*(A) = \sum_i m_n^*(B_i).$$

Como además el radio de cada B_i es $diam(B_i)/2$, se tiene que

$$H_{n,\delta} \leq H_{n,\delta}(\cup B_i) \leq \gamma_n \sum diam(B_i)^n = \gamma_n \sum \frac{m_n^*(B(0, diam(B_i)/2))}{m_n^*(B(0,1/2))} = \frac{\gamma_n}{m_n^*(B(0,1/2))}.$$

Por tanto,

$$H_{n,\delta}(A) m_n^*(B(0,1/2)) \leq \gamma_n \Rightarrow m_n^*(B(0,1/2)) \leq \gamma_n.$$

Así tenemos que $\gamma_n = m_n^*(B(0,1/2))$. Esta γ_n se puede comprobar que es igual a $\frac{\pi^{n/2}}{2^n\Gamma(1+\frac{n}{2})}$ probando que $m_n^*(B(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$, lo cual podemos ver, por ejemplo, en [1, pág 224, Ejemplo 5.5.18]. $\square$

Capítulo 2

Fórmula del área

[2] En este capítulo y en el siguiente se verán la fórmula del área y coarea. Estudiaremos las funciones Lipschitz continuas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Hay dos casos diferentes dependiendo del tamaño de m y n:

• Si $m \geq n$, la fórmula de área afirma que la medida $n-$ dimensional de $f(A)$, teniendo en cuenta la multiplicidad, se puede calcular integrando el Jacobiano apropiado de f sobre A.

• Si $m \leq n$, la fórmula de la coarea establece que la integral de la $n - m$ medida dimensional de los conjuntos de niveles de f se puede calcular integrando el Jacobiano. Esta afirmación es una generalización a largo alcance del teorema de Fubini.

Comenzaremos con un estudio detallado de las propiedades de diferenciabilidad de las funciones Lipschitz continuas y enunciaremos el teorema de Rademacher. Luego discutiremos las aplicaciones lineales e introduciremos los Jacobianos.

2.1. Preliminares

Nota 2.1. A lo largo de lo que queda de trabajo, utilizaremos $|\cdot|$ para indicar la norma euclídea. No confundir con módulo.

Definición 2.1. (i) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$ para alguna constante c , $\forall x, y \in A$. A la función f anterior se le denomina función Lipschitz.

(ii) La constante más pequeña que cumple que $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y| \; \forall x, y$ se denota como

$$Lip(f) := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} : x, y \in A, x \neq y \right\}$$

Así, $|f(x) - f(y)| \leq Lip(f)|x-y| \;\; x, y \in A.$

(iii) La función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple que si para cada compacto $K \subseteq A$ existe una constante c_k tal que $|f(x) - f(y)| \leq c_k|x-y| \;\; \forall x, y \in K$ se denomina localmente Lipschitz.

Teorema 2.1 (Extensión de aplicaciones de Lipschitz)**.** *Asumimos $A \subset \mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz continua. Entonces existe una función Lipschitz continua $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

(i) $\tilde{f} = f$ *en* A.

(ii) $Lip\left(\tilde{f}\right) \leq \sqrt{m}\, Lip(f)$.

Definición 2.2. La función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in \mathbb{R}^n$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y) - L(y-x)|}{|x-y|} = 0$$

o equivalentemente,

$$f(y) = f(x) + L(y-x) + O(|y-x|) \quad y \to x$$

Nota 2.2. Si L existe, es único, y escribimos $Df(x)$ como la derivada de f sobre x.

A continuación enunciaremos el teorema de Rademacher, un teorema que de suma importancia, ya que a partir de una función Lipschitz podemos asegurar que dicha función es localmente diferenciable, lo cual es sorprendente, ya que ya que la desigualdad $|f(x) - f(y)| \leq Lip(f)|x-y|$ aparentemente no dice nada sobre la posibilidad de diferenciabilidad local.

Teorema 2.2 (Teorema de Rademacher)**.** *Asumimos que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función localmente Lipschitz continua. Entonces f es m_n^*- c.t.p. diferenciable.*

Demostración. La demostración la podemos encontrar en [2, pág.103] □

Teorema 2.3 (Diferenciabilidad en conjuntos de niveles)**.** *(i) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función localmente Lipschitz continua, y $Z := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$. Entonces $Df(x) = 0$ para m_n^*- c.t.p. $\quad x \in Z$.*

(ii) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *funciones localmente Lipschitz continuas, y* $Y := \{x \in \mathbb{R}^n | g(f(x)) = x\}$. *Entonces* $Dg(f(x)) Df(x) = I$ *para* m_n^*- *c.t.p.* $x \in Y$.

Definición 2.3. (i) Una aplicación lineal $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es ortogonal si

$$(Ox) \cdot (Oy) = x \cdot y \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(ii) Una aplicación lineal $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es simétrico si

$$x \cdot (Sy) = (Sx) \cdot y \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(iii) Una aplicación lineal $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diagonal si exixten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$Dx = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

(iv) Sea $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal. El adjunto de A es una aplicación lineal $A^* : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$x \cdot (A^* y) = (A^* x) \cdot y \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

Teorema 2.4 (Álgebra lineal)**.**

(i) $A^{**} = A$

(ii) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$

(iii) $O^* = O^{-1}$ *si* $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es ortogonal.*

(iv) $S^* = S$ *si* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es simétrico.*

(v) Si $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es simétrico, entonces existe una aplicación ortogonal* $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y una aplicación diagonal* $D : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $S = O \circ D \circ O^{-1}$

(vi) Si $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es ortogonal, entonces* $n \leq m$ *y* $O^* \circ O = I$ *en* $\mathbb{R}^n$
$O \circ O^* = I$ *en* $O(\mathbb{R}^m)$

Nota 2.3. A continuación usaremos notación matricial, en algunos ejemplos, como sigue:

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & A\overrightarrow{x} \end{array}$$

donde $\overrightarrow{x}$ es una vector columna de $\mathbb{R}^n$ y A es una matriz $m \times n$. Al hacer $A\overrightarrow{x}$ obtendría un vector columna de $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 2.1 (Ejemplos de distintas aplicaciones).

<u>Aplicación ortogonal:</u> Sea

$$\begin{array}{rccc} O: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & A\overrightarrow{x} \end{array}$$

donde $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se cumple que $O^* \circ O = I$ en $\mathbb{R}^2$ y que $O \circ O^* = I$ en $O(\mathbb{R}^3)$, donde O^* es el adjunto de O. Se puede comprobar que $A^* \circ A = I$ en $\mathbb{R}^2$ y $A \circ A^* = I$ en $O(\mathbb{R}^3)$

<u>Aplicación simétrica:</u> Sea

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & A\overrightarrow{x} \end{array}$$

donde $A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Se cumple que $S^* = S$.

Teorema 2.5 (Descomposición polar)**.** *Sea* $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una aplicación lineal.*

(i) Si $n \leq m$, $\exists$ *una aplicación simétrica* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y una aplicación ortogonal*

$O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tal que* $L = O \circ S$.

(ii) Si $m \leq n$, $\exists$ *una aplicación simétrica* $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *y una aplicación ortogonal*

$O : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $L = S \circ O^*$

Definición 2.4. Asumimos $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal.

(i) Si $n \leq m$, escribimos $L = O{\circ}S^*$ como anteriormente, y definimos el Jacobiano de L como $[[L]] = |det\,(S)\,|$.

(ii) Si $m \leq n$, escribimos $L = S{\circ}O^*$ como anteriormente, y definimos el Jacobiano de L como $[[L]] = |det\,(S)\,|$.

Ejemplo 2.2 (Ejemplo de descomposición polar). Sea

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (1,0) & \mapsto & (5,-1) \\ & (0,1) & \mapsto & (7,-1) \end{array}$$

una aplicación lineal. Podemos descomponer L en una aplicación simétrica S y una ortogonal O, como por ejemplo pueden ser:

$$\begin{array}{rccc} O: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (1,0) & \mapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ & (0,1) & \mapsto & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (1,0) & \mapsto & \left(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right) \\ & (0,1) & \mapsto & \left(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \end{array}$$

Matricialmente lo podríamos expresar como:

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{x} & \mapsto & A\overrightarrow{x} \end{array}, \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rccc} O: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{x} & \mapsto & E\overrightarrow{x} \end{array}, \qquad \text{donde } E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{x} & \mapsto & U\overrightarrow{x} \end{array}, \qquad \text{donde } U = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces se tiene que $O \circ S^* = A$.

Nota 2.4. $[[L]] = [[L^*]]$.

Teorema 2.6 (Jacobianos y adjuntos)**.** *(i) Si $n \leq m$, $[[L]]^2 = det\,(L^* \circ L)$.*

(ii) Si $m \leq n$, $[[L]]^2 = det\,(L \circ L^*)\,$.

Definición 2.5. (i) Si $n \leq m$, definimos

$$\Lambda\,(m,n) = \{\lambda : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,m\}\,|\lambda \text{ } \textit{está aumentando}\}$$

(ii) Para cada $\lambda \in \Lambda(m,n)$, definimos $P_\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$P_\lambda(x_1,\ldots,x_m) := \left(x_{\lambda(1)},\ldots,x_{\lambda(n)}\right)$$

(iii) Para cada $\lambda \in \Lambda(m,n)$, definimos el subespacio $n-$ dimensional

$$S_\lambda := span\left\{e_{\lambda(1)},\ldots,e_{\lambda(n)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Entonces, P_λ es la proyección en $\mathbb{R}^n$ sobre S_λ.

Teorema 2.7 (Fórmula de Binet-Cauchy)**.** *Asumimos que $n \leq m$ y $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal. Entonces*

$$[[L]]^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} \left(det\left(P_\lambda \circ L\right)\right)^2$$

Nota 2.5. Para hallar $[[L]]^2$ calculamos las sumas de los cuadrados de los determinantes de cada $(n \times n)$ submatriz de la matriz $(m \times n)$ que representa L.

Nota 2.6. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f^1,\ldots,f^m)$, escribimos la matriz gradiente como

$$Df = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \ldots & f^1_{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f^m_{x_1} & \ldots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

en cada punto donde Df existe.

Definición 2.6. Para un punto x de m_n^*- c.t.p., definimos el Jacobinao de f como

$$Jf(x) := [[Df(x)]]$$

2.2. Fórmula del área

Lema 2.8. *Suponemos $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal, $n \leq m$. Entonces*

$$H_n(L(A)) = [[L]]\, m_n^*(A)\,.$$

Lema 2.9. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto m_n^*- medible. Entonces*

(i) $f(A)$ *es* H_n- *medible.*

(ii) *La aplicación* $y \longmapsto H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)$ *es* H_n- *medible en* $\mathbb{R}^n$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_n \leq (Lip(f))^n\, m_n^*(A)\,.$

Definición 2.7. La aplicación $y \longmapsto H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)$ se denomina función de multiplicidad.

Lema 2.10. *Sea $t > 1$ y sea $B := \{x | Df(x) \text{ existe}, Jf(x) > 0\}$. Entonces hay una colección contable $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n$ tal que*

(i) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

(ii) $f|_{E_k}$ *es uno a uno* $(k = 1, 2, \ldots)$

(iii) Para cada $k = 1, 2, \ldots$ existe un automorfismo simétrico $T_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$Lip\left((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}\right) \leq t$$

$$Lip\left(T_k \circ (f|_{E_k})\right)^{-1} \leq t$$

$$t^{-n}|det\,(T_k)| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n |det\,(T_k)|$$

Teorema 2.11 (Fórmula de área)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua, $n \leq m$. Para cada subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ m_n^*- medible,*

$$\int_A Jf\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)\,dH_n$$

Teorema 2.12 (Cambio de variable)**.** *Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función lipschitz continua, $n \leq m$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x)\right] dH_n(y)$$

Demostración. <u>Caso 1:</u> Tomamos g como la suma de funciones simples positivas de la siguiente manera: $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i}$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\,dx$$

Por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_{A_i} Jf\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\,dx$$

Por la fórmula del área

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} H_0 \left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} H_0 \left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \mathcal{X}_{A_i}\, dH_n(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i}\, dH_n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] dH_n(y)$$

<u>Caso 2:</u> Descomponemos g como $g = g^+ - g^-$ y aplicamos el caso anterior. □

2.3. Aplicaciones

2.3.1. Longitud de una curva paramétrica

Veamos que se tiene que $H_1 =$ longitud de la curva $= \int_a^b Jf\, dx$.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua e inyectiva, $f = (f^1, \ldots, f^m)$. Se tiene que $Df = (f_x^1, \ldots, f_x^m)$ y $(Jf)^2 = [[Df]]^2 = det\,(Df^* \circ Df) = (f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2$. Por lo tanto,

$$Jf = \sqrt{(f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2}.$$

Sean ahora $a, b \in (-\infty, +\infty)$, con $a < b$. Definimos la curva $C := f\,([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$. Entonces, por lo estudiado a lo largo de la carrera, sabemos que la longitud de la curva viene dada como:

$$\text{longitud de C} = \int_a^b Jf\, dx = \int_a^b \sqrt{(f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2}\, dx$$

Esto no nos lo habían demostrado anteriormente, ya que es bastante complejo, pero ahora podemos demostrarlo de manera sencilla y directa gracias a la fórmula del área. Por tanto, veamos ahora que $H_1 = \int_a^b \sqrt{(f_x^1)^2 + \ldots + (f_x^m)^2}\, dx$.

Sea $A = [a, b]$, por el teorema de la fórmula del área, tenemos que

$$\int_a^b Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0 \left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_1(y)$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\} \in A \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} \notin A \end{cases}$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)\, dH_1(y) = \int_C 1\, dH_1(y) + \int_{\mathbb{R}^m - C} 0\, dH_1(y) = H_1(C)$$

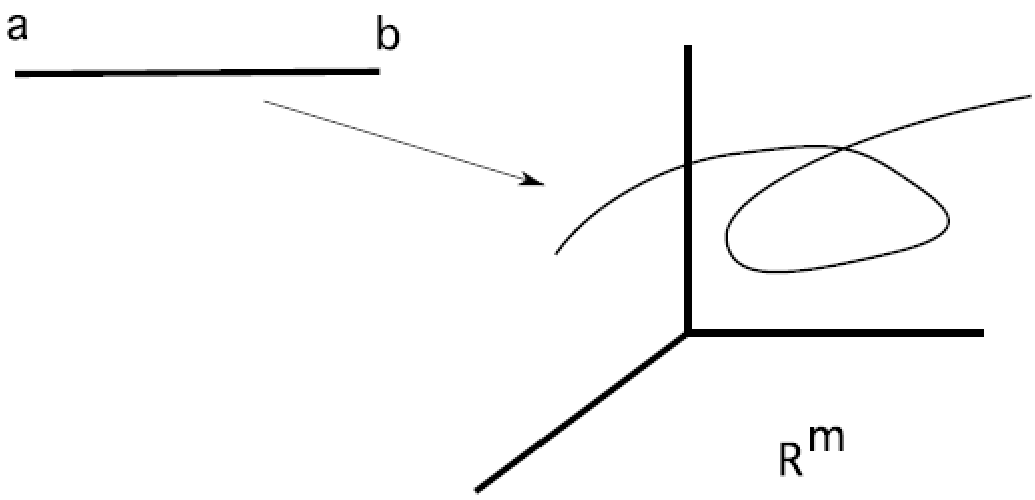


Figura 2.1: Parametrización de una curva en $\mathbb{R}^m$.

2.3.2. Área de un gráfico ($n \geq 1$, $m = n+1$)

Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lipschitz continua. Definimos $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ como

$f(x) := (x, g(x))$. Entonces

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \\ g_{x_1} & \dots & g_{x_n} \end{pmatrix}$$

Como consecuencia, por la nota 2.5,

$(Jf)^2 =$ suma de los cuadrados de los n x n subdeterminantes $= 1 + |Dg|^2$.

Para cada $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, definimos el gráfico de g sobre U como

$$G = G(g; U) := \{(x, g(x)) | x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Entonces,

$$H_n(G) = \text{superficie del gráfico G} = \int_U \left(1 + |Dg|^2\right)^{1/2} dx$$

Demostrar esto en cursos pasados es complejo, pero gracias a la fórmula del área vista anteriormente podemos demostrarlo de una manera directa y sencilla. Veámoslo.

La segunda igualdad es conocida, ya que se ha estudiado en cursos anteriores de análisis. Veamos entonces que

$$H_n(G) = \int_U \left(1 + |Dg|^2\right)^{1/2} dx$$

Tenemos que $(Jf)^2 = 1 + |Dg|^2$. Entonces, por la fórmula del área se tiene que

$$\int_U Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y)$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\} \in U \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} \notin U \end{cases}$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y) = \int_G 1\, dH_n(y) + \int_{\mathbb{R}^m - G} 0\, dH_n(y) = H_n(G)$$

2.3.3. Área de una hipersuperficie paramétrica ($n \geq 1$, $m = n+1$)

Nótese que este caso engloba el caso anterior, ya que siempre se da que el área de un gráfico se puede ver como el área de una hipersuperficie paramétrica, pero el recíproco no siempre es cierto.

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una función Lipschitz continua e inyectiva, $f = (f^1, \ldots, f^{n+1})$. Se tiene entonces que

$$Df = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \dots & f^1_{x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f^{n+1}_{x_1} & \dots & f^{n+1}_{x_n} \end{pmatrix}$$

Ahora, si denotamos $\widehat{f^k} = (f^1, f^2, \dots, f^{k-1}, f^{k+1}, \dots, f^{n+1})$, entonces se tiene que

$$(Jf)^2 = det(Df^* \circ Df) = \sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2$$

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $S := f(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces

$$H_n(S) = \text{área n-dimensional de S} = \int_U \left(\sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2 \right)^{1/2} dx$$

Si nos ponemos a demostrar esta fórmula con los conocimientos de cursos anteriores, nos sería muy complejo, pero una vez vista en este trabajo la fórmula del área, su demostración es prácticamente directa. Veámoslo.

La segunda igualdad es conocida, ya que se ha estudiado en cursos anteriores de análisis. Veamos entonces que

$$H_n(S) = \int_U \left(\sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2 \right)^{1/2} dx$$

Tenemos que $(Jf)^2 = \displaystyle\int_U \sum_{k=1}^{n+1} |D\widehat{f^k}|^2$. Entonces, por la fórmula del área se tiene que

$$\int_U Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y)$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\} \in U \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} \notin U \end{cases}$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} H_0\left(U \cap f^{-1}\{y\}\right) dH_n(y) = \int_S 1\, dH_n(y) + \int_{\mathbb{R}^{n+1}-S} 0\, dH_n(y) = H_n(S)$$

Ejemplo 2.3 ($n = 2, m = 3$). Sea $f : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \sin(x_1 x_2))$ donde $x = (x_1, x_2)$. Entonces

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix} \qquad Df^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_2\cos(x_1x_2) \\ 0 & 1 & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene que

$$Jf = det(Df^{*} \circ Df) = det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_2\cos(x_1x_2) \\ 0 & 1 & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}\right)$$

$$det\left(\begin{pmatrix} 2+x_2^2\cos^2(x_1x_2) & 1+x_1x_2\cos^2(x_1x_2) \\ 1+x_1x_2\cos^2(x_1x_2) & 1+x_1^2\cos^2(x_1x_2) \end{pmatrix}\right) = 1+2x_1^2\cos^2(x_1x_2)$$

$$-2x_1x_2\cos^2(x_1x_2)+x_2^2\cos^2(x_1x_2)$$

Por otra parte, sean $\widehat{f}^1 = (x_1+x_2, \sin(x_1x_2))$, $\widehat{f}^2 = (x_1, \sin(x_1x_2))$ y $\widehat{f}^3 = (x_1, x_1+x_2)$. Se tiene entonces que

$$D\widehat{f}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}$$

$$D\widehat{f}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) \end{pmatrix} \quad D\widehat{f}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se tiene también que

$$Jf = \sum_{k=1}^{3} |D\widehat{f^k}|^2 = (x_1\cos(x_1x_2) - x_2\cos(x_1x_2))^2 + x_1^2\cos^2(x_1x_2) + 1 =$$

$$= 1 + (2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)\cos^2(x_1x_2).$$

Así, se tiene que, para $U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, si $S := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces

$$H_2(S) = \text{área 2-dimensional de S} = \int_U \sqrt{1 + (2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)\cos^2(x_1x_2)}\, dx \approx 85{,}3121$$

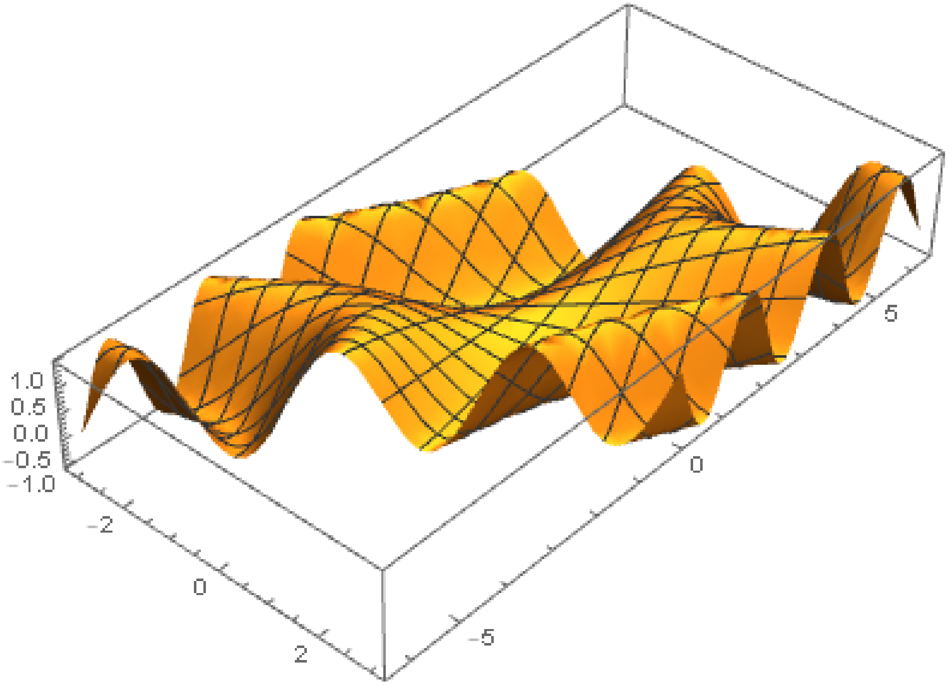


Figura 2.2: Representación de la función $f(x)$.

2.3.4. Subvariedades

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^m$ Lipschitz continuo, subvariedad n-dimensional. Supongamos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : U \longrightarrow M$ el gráfico de M. Sea un conjunto $A \subseteq f(U)$, donde A es Borel, y sea $B := f^{-1}(A)$. Definimos

$$g_{ij} := f_{x_i} \cdot f_{x_j} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Entonces

$$(Df)^* \circ Df = ((g_{ij}))$$

y así

$$Jf = g^{\frac{1}{2}} \quad \text{para } g := det((g_{ij})).$$

Por lo tanto,

$$H_n(A) = \text{volumen de A en M} = \int_B g^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

La segunda igualdad es conocida, ya que se ha dado en cursos pasados de análisis, pero no se nos ha probado. Tenemos que probar que $H_n(A) = \int_B g^{\frac{1}{2}}\, dx$, lo cual no resulta difícil gracias a la fórmula del área. Veámoslo.

Tenemos que $Jf = g^{\frac{1}{2}}$. Ahora, por la fórmula del área, se tiene que

$$\int_B Jf\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(B \cap f^{-1}\{y\}\right)\,dH_n(y)$$

Como H_0 es la medida de contar, entonces $H_0\left(B \cap f^{-1}\{y\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\{y\} \in B \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} \notin B \end{cases}$

Por tanto, como $B = f^{-1}(A)$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} H_0\left(B \cap f^{-1}\{y\}\right)\,dH_n(y) = \int_A 1\,dH_n(y) + \int_{\mathbb{R}^m - A} 0\,dH_n(y) = H_n(A)$$

2.3.5. Cambio de variable

Sea $u : U \longrightarrow V$ un difeomorfismo. Sea $E \subseteq V$ un conjunto Lebesgue medible. Sea
$f : E \longrightarrow [0, \infty]$ medible. Entonces $f \circ u \cdot Ju$ es medible, $u^{-1}(E)$ es Lebesgue medible, y

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(E)} f(t)Ju(t)\,dt$$

Para probar esto, basta con utilizar el teorema de cambio de variable (teorema 2.12), se tiene que

$$\int_{u^{-1}(E)} f(t)Ju(t)\,dt = \int_E \left[\sum_{x \in u^{-1}\{y\}} f(t)\right] dH_n(y)$$

Como, por el teorema 1.8 H_n es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, entonces queda probado el cambio de variable.

Capítulo 3

Fórmula de la coarea

Como ya adelantamos en el capítulo anterior, si $m \leq n$, la fórmula de la coarea establece que la integral de la $n-m$ medida dimensional de los conjuntos de niveles de f se puede calcular integrando el Jacobiano. Esta afirmación es una generalización a largo alcance del teorema de Fubini. Definamos entonces la fórmula de la coarea.

Teorema 3.1 (Fórmula de la coarea)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz continua, $n \geq m$. Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ m_n^*-medible, se tiene que*

$$\int_A Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} H_{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy.$$

Nota 3.1. Se puede observar que la fórmula de la coarea es una especie de generalización del teorema de Fubini.

Teorema 3.2 (Integración sobre conjuntos de niveles)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz , $n \geq m$. Para cada función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ m_n^*-integrable, se tiene que*

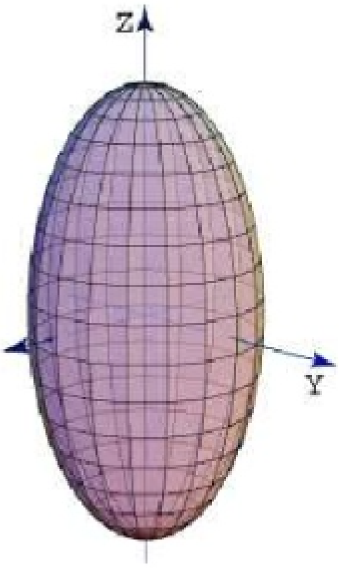
(i) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ es m_{n-m}^*-integrable para $m_m^* - c.t.p.$

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g\, dH_{n-m}\right] dy.$$

3.1. Aplicaciones

Nuestro objetivo es hallar la superficie, volumen, de figuras en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si tuviésemos la siguiente figura, un elipsoide macizo en $\mathbb{R}^3$,



podríamos calcular su volumen aplicando Fubini (secciones). Esto sería sencillo en ciertos casos.

Asimismo, para hallar el volumen de un elipsoide E, podemos sumar el área de cada elipse E_t, entonces se tendría que

$$\text{Volumen del elipsoide} = H_3(E) = \int_a^b H_2(E_t)\, dt$$

donde $[a, b]$ es el recorrido del elipsoide.

Probemos que esto es cierto.

Por un lado se tiene que, por la fórmula de la coarea,

$$\int_A Jf\, dx = \int_{\mathbb{R}} H_2(A \cap f^{-1}\{t\})\, dt = \int_a^b H_2(E_t)\, dt.$$

Por tanto falta ver que $\displaystyle\int_A Jf\, dx = H_3(E)$. Para ello, definimos una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que a partir de una elipse nos cree el elipsoide. Así, aplicando lo visto en las aplicaciones de la fórmula del área, tenemos que $\displaystyle\int_A Jf\, dx = H_3(E)$.

Otro problema a tratar sería calcular el área y volumen de por ejemplo, una esfera. para calcular el área, procediendo de manera similar, podríamos intuir que

$$H_2(M) = \int_a^b H_1(M_t)\, dt,$$

es decir, que el área de nuestra figura sería la suma de las longitudes de todas las secciones de ella, es decir, circunferencias. Pero esto no es cierto. Veámoslo primero tomando una esfera concreta y luego de forma general para una figura cualquiera.

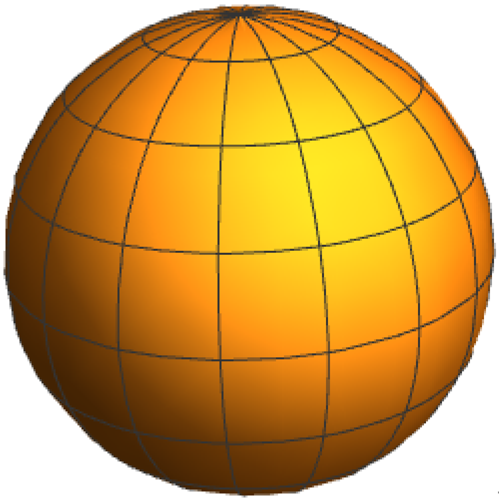


Figura 3.1: Imagen de una esfera en 3D

Suponemos una esfera M en $\mathbb{R}^3$ de radio 1. El área de esta esfera es conocido (4π), y la longitud de una circunferencia es $2\pi r$. Las circunferencias que obtenemos seccionando nuestra esfera tienen longitud $2\pi\sqrt{1-z^2}$. Por tanto, si se cumple que

$$H_2(M) = \int_{-1}^1 H_1(M_t)\, dt,$$

se tendría que cumplir que $\int_{-1}^1 2\pi\sqrt{1-z^2}\, dz = 4\pi$, pero $\int_{-1}^1 2\pi\sqrt{1-z^2}\, dz = \pi^2$.

Probémoslo ahora para una función f cualquiera.

Sea

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & z = f(x,y) \end{array}$$

Por la fórmula de la coarea, se tendría que

$$\int_U Jf\,dx = \int_{\text{altura mínima}}^{\text{altura máxima}} H_1(\text{curvas de nivel de altura z})\,dz$$

y tenemos que

$$\int_U Jf\,dx = \int_U \sqrt{f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$$

Ahora, por las aplicaciones de la fórmula del área, para la misma f

$$\begin{array}{rccc} f: & U \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

se tiene que

$$\text{Área(U)} = \int_U Jf\,dx = \int_U (1+|Df|^2)^{\frac{1}{2}} = \int_U \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy.$$

Por lo tanto, hemos visto que las integrales del jacobiano de f no coinciden. Por tanto, no se cumple que

$$H_2 = \int_{\text{altura mínima}}^{\text{altura máxima}} H_1(\text{curvas de nivel de altura z})\,dz.$$

Siguiendo con el ejemplo, para hallar su volumen podemos ir descomponiendo la esfera en esferas centradas en el mismo punto pero de radio algo menor que el de la esfera original, procediendo recursivamente hasta llegar al centro de la esfera, lo que equivaldría a que

$$H_3(S) = \int_a^b H_2(S_t)\,dt,$$

es decir, calcular el área de todas estas sub-esferas y sumarlas todas. Esto se cumple, ya que su demostración es equivalente a la demostración anterior del volumen del elipsoide.

Pero, ¿realmente utilizando la fórmula de la coarea es el único modo de hallar su volumen? La respuesta es no, ya que podemos utilizar una parametrización de la esfera e integrarla hasta conseguir hallar el volumen, como se ha visto en cursos pasados. Por tanto, utilizando coordenadas esféricas conseguimos hallar el volumen.

En el ejemplo anterior estábamos ante una esfera en $\mathbb{R}^3$, pero si estamos ante una esfera más general en $\mathbb{R}^n$, ¿resulta igual de sencillo hallar su volumen utilizando una parametrización? Obviamente no, ya que a medida que aumentamos la dimensión, la parametrización de la esfera se vuelve más compleja, y por tanto las integrales a resolver son más complicadas.

Para simplificar estos cálculos, definamos el siguiente teorema sobre coordenadas polares como aplicación a la fórmula de la coarea.

Teorema 3.3 (Coordenadas polares)**.** *Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función m_n^*-integrable. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(r)} g\, dH_{n-1} \right) dr.$$

En particular,

$$\frac{d}{dr}\left(\int_{B(r)} g\, dx \right) = \int_{\partial B(r)} g\, dH_{n-1}$$

para $m_1^* -$ c.t.p. y $r > 0$.

Demostración. Sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz tal que $Jf(x) = 1$. Entonces, por el teorema 3.2 se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g\, dH_{n-1} \right) dy$$

Al hacer el cambio a coordenadas polares, se obtiene lo que queríamos probar. □

Otra aplicación a destacar son los conjuntos de niveles de funciones de distancia. La idea base de ello consiste en, dado un conjunto, hallar el área de la superficie comprendida entre todos los puntos que estén entre una distancia a y una distancia b de dicho conjunto, con $a < b$.

Teorema 3.4 (Conjuntos de niveles de funciones de distancia)**.** *Asumimos $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y compacto. Escribimos*

$$d(x) := dist(x, K) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Entonces, para cada $0 < a < b$ tenemos que

$$\int_a^b H_{n-1}(\{d = t\})\, dt = m_n^*(\{a \leq d \leq b\}).$$

Un caso particular de esto sería hallar el área de una esfera en $\mathbb{R}^2$. En este caso queremos hallar la superficie comprendida entre una distancia r del centro de la esfera, donde r es el radio de ésta, y una distancia 0. El ejemplo en $\mathbb{R}^2$ se puede ampliar a $\mathbb{R}^n$.

Bibliografía

[1] DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA, *Apuntes de Teoría de la Medida*, volumen 2, Badajoz, 22 de enero de 2018, `http://matematicas.unex.es/~ricarfr/librotmed.pdf`

[2] LAWRENCE C. EVANS y RONALD F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, CRC Press, 2015.

[3] C.SWARTZ, *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, 1994.