高级中学课本

（试　用）

代　　数

第一册

（甲种本）

人民教育出版社中小学数学编辑室编

*

人民教育出版社出版

北京出版社重印

北京市新华书店发行

北京新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 7.25　字数 122,00

1983 年 10 月第 1 版　　1991 年 6 月第 6 次印

印数 176,001—183,900

ISBN 7-107-00312-7

G・515　（课）　定价 0.68 元

说　明

一、本书供六年制中学高中一年级选用，每周授课3课时.

二、本书内容包括：幂函数、指数函数和对数函数，三角函数，两角和与差的三角函数. 此外，计划安排在初中教学的近似计算法则和换底公式这两项内容，作为本书附录，可以安排在有关章节中~~进行教学~~.

三、本书的习题共分三类：练习，习题，复习参考题.

1. 练习　主要供课堂练习用.

2. 习题　主要供课内课外作业用.

3. 复习参考题　在每章之后配备A，B两组复习参考题. A组题主要供复习本章知识时使用；B组题综合性、灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用.

为了因材施教，使教学更有针对性和灵活性，本书配备的习题和复习参考题A组数量较多，便于教学时根据实际情况选用.

四、本书在编写过程中，曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本（试用本）《数学》第一册，大部分章、节是以该书为基础编写的. 初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校和中学教师征求意见，有的省、市还进行了试教，他们都提出了宝贵的意见.

五、本书由人民教育出版社中小学数学编辑室编写．参加编写工作的有贾云山、蔡上鹤、饶汉昌、李琳等．全书由吕学礼校订。

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　集合

1.1　集合

考察下面几组对象:

(1) 1, 2, 3, 4, 5;

(2) 与一个角的两边距离相等的所有的点;

(3) 所有的直角三角形;

(4) $x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2$;

(5) 某农场所有的拖拉机.

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体组成的. 我们说,每一组对象的全体形成一个**集合**(有时也简称**集**). 集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**. 例如,(1) 是由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合，其中的对象 1, 2, 3, 4, 5 都是这个集合的元素.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，上面(1),(4),(5)这三个集合都是有限集; 含有无限个元素的集合叫做**无限集**,上面(2),(3)这两个集合都是无限集.

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的. 这就是说,任何一个对象或者是这个给定集合的元素,或者不是它的元素. 例如,对于由所有的直角三角形组成的集合,内角分别

为 30°, 60°, 90° 的三角形，是这个集合的元素，而内角分别为 50°, 60°, 70° 的三角形，就不是这个集合的元素。

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的．这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素．因此，集合中的元素是没有重复现象的．

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法．

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**．

例如，由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合，可以表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

又如，由整式 $x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2$ 组成的集合，可以表示为

$$\{x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2\}.$$

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序．例如由四个元素 $-3, 0, 2, 5$ 组成的集合，可以表示为 $\{-3, 0, 2, 5\}$，也可以表示为 $\{0, 2, -3, 5\}$，等等．

应该注意，a 与 $\{a\}$ 是不同的：a 表示一个元素；$\{a\}$ 表示一个集合，这个集合只有一个元素 a．

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**．这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性．

例如：

由不等式 $x-3>2$ 的所有的解组成的集合（即 $x-3>2$

的解集），可以表示为

$$\{x \mid x-3>2\};❶$$

由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点的坐标组成的集合，可以表示为

$$\{(x, y) \mid y=x^2+1\}.$$

在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边的部分．例如，由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为

{直角三角形}；

由所有的小于 6 的正整数组成的集合，可以表示为

{小于 6 的正整数}．

集合通常用大写的拉丁字母表示，集合的元素用小写的拉丁字母表示．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a **属于**集合 A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a **不属于** A，记作 $a \notin A$（或 $a \overline{\in} A$）．例如，设 B 表示集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则

$$5 \in B, \qquad \frac{3}{2} \notin B.$$

全体自然数的集合通常简称**自然数集**，记作 N；

全体整数的集合通常简称**整数集**，记作 Z；

全体有理数的集合通常简称**有理数集**，记作 Q；

全体实数的集合通常简称**实数集**，记作 R．

为了方便起见，有时我们还用 Q^+ 表示正有理数集，用 R^- 表示负实数集，等等．

---

❶ 有的书上用冒号或分号代替竖线，如 $\{x: x-3>2\}$ 或 $\{x; x-3>2\}$．

练 习

(口答)下面集合里的元素是什么(第 1～5 题)?

1. {大于 3 小于 11 的偶数}.
2. {平方后等于 1 的数}.
3. {平方后仍等于原数的数}.
4. {比 2 大 3 的数}.
5. {一年中有 31 天的月份}.

在下列各题中,分别指出了一个集合的所有元素,用适当的方法把这个集合表示出来,然后说出它是有限集还是无限集(第 6～10 题):

6. 水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星.
7. 周长等于 20 厘米的三角形.
8. 长江、黄河、珠江、黑龙江.
9. 不等式 $x^2+5x+6>0$ 的解.
10. 大于 0 的偶数.

把下列集合用另一种方法表示出来(第 11～13 题):

11. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.
12. {目前世界乒乓球锦标赛的七个比赛项目}.
13. {中国古代四大发明}.
14. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

1_N, 0_N, -3_N, 0.5_N, $\sqrt{2}\_N$;

1_Z, 0_Z, -3_Z, 0.5_Z, $\sqrt{2}\_Z$;

1_Q, 0_Q, -3_Q, 0.5_Q, $\sqrt{2}\_Q$;

1_R, 0_R, -3_R, 0.5_R, $\sqrt{2}\_R$.

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集

我们知道，任何一个自然数都是一个整数，就是说，自然数集 N 的任何一个元素都是整数集 Z 的一个元素. 同样，自然数集 N 的任何一个元素都是有理数集 Q 的一个元素.

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B(\text{或 } B\supseteq A),$$

读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A"). 例如

$$N\subseteq Z,\ N\subseteq Q,\ R\supseteq Z,\ R\supseteq Q.$$

当 A 不是 B 的子集时，我们可以记作

$$A\nsubseteq B\ (\text{或 } B\nsupseteq A),$$

读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以

$$A\subseteq A,$$

也就是说，**任何一个集合是它本身的子集**.

为了方便起见，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$. 例如：

$$\{x\,|\,x+1=x+3\}=\varnothing,$$

$$\{\text{小于零的正整数}\}=\varnothing,$$

$$\{\text{两边之和小于第三边的三角形}\}=\varnothing.$$

我们规定**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任何集合 A，有

$$\varnothing\subseteq A.$$

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subset B(\text{或 } B\supset A).$$

当 A 不是 B 的真子集时，我们可以记作

$$A\not\subset B(\text{或 } B\not\supset A).$$

例如，自然数集 N 是 N 的子集，但不是 N 的真子集，所以 $N\subseteq N$，但 $N\not\subset N$；N 是实数集 R 的子集，也是 R 的真子集，所以 $N\subset R$.

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系，可以用图 1-1 中 B 同 A 的关系来说明，其中 A，B 两个圈的内部分别表示集合 A，B.

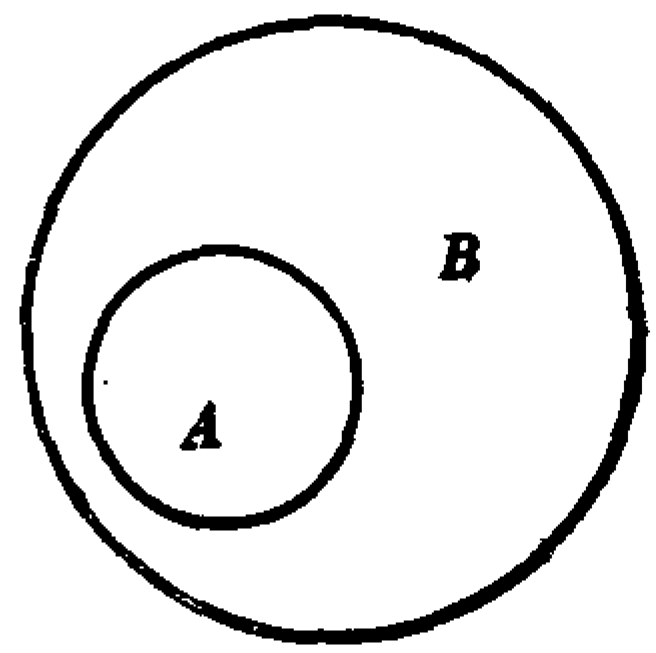


图 1-1

显然，空集是任何非空集合的真子集.

容易知道，**对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.** 事实上，设 x 是集合 A 的任意一个元素，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$. 从而 $A\subseteq C$.

同样可知，**对于集合 A，B，C，如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$.**

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说这两个**集合相等**，记作

$$A=B,$$

读作"A 等于 B".

例如，$A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$，$B=\{-1,-2\}$，则

$$A=B.$$

例 1 写出集合 $\{a,b\}$ 的所有的子集及真子集.

解: 集合$\{a, b\}$的所有的子集是$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, 其中$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$是真子集.

例 2 写出不等式$x-3>2$的解集并进行化简(即化成直接表明未知数本身的取值范围的解集).

解: 不等式$x-3>2$的解集是

$$\{x \mid x-3>2\}=\{x \mid x>5\}.$$

2. 交集

已知 6 的正约数的集合为

$$A=\{1, 2, 3, 6\},$$

10 的正约数的集合为

$$B=\{1, 2, 5, 10\},$$

那么 6 与 10 的正公约数的集合为

$$\{1, 2\}.$$

容易看出, 集合$\{1, 2\}$是由所有属于A且属于B的元素(即A, B的公共元素)所组成的.

一般地, 由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合, 叫做A, B的 **交集**, 记作$A \cap B$(可读作"A交B"), 即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

这样, 6 与 10 的正公约数的集合, 可以从求 6 的正约数的集合与 10 的正约数的集合的交集而得到, 即

$$\{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 5, 10\}$$
$$=\{1, 2\}.$$

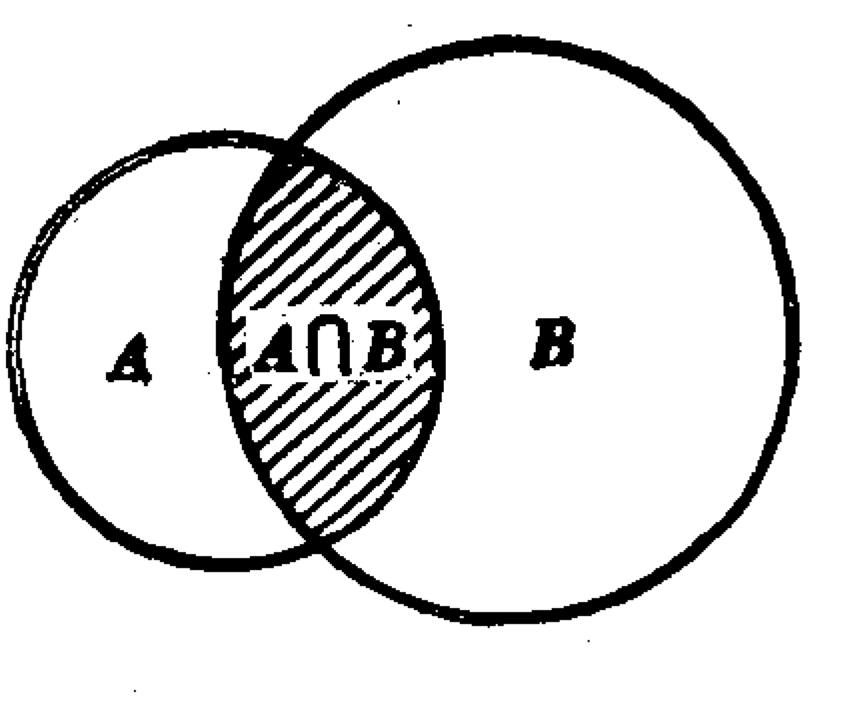


图 1-2

图 1-2 中的阴影部分，表示集合 A，B 的交集 $A\cap B$.

由交集定义容易推出，对于任何集合 A, B, 有

$$\boldsymbol{A\cap A=A},\ \boldsymbol{A\cap\varnothing=\varnothing},$$
$$\boldsymbol{A\cap B=B\cap A}.$$

例 3 设 $A=\{x|x>-2\}$, $B=\{x|x<3\}$, 求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{x|x>-2\}\cap\{x|x<3\}$

$=\{x|-2<x<3\}$.

例 4 设 $A=\{(x,\ y)|4x+y=6\}$, $B=\{(x,\ y)|3x+2y=7\}$, 求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{(x,y)|4x+y=6\}\cap\{(x,y)|3x+2y=7\}$

$$=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}4x+y=6,\\3x+2y=7\end{cases}\right.\right\}$$

$=\{(1,2)\}$.

例 5 设 $A=\{$等腰三角形$\}$, $B=\{$直角三角形$\}$, 求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{$等腰三角形$\}\cap\{$直角三角形$\}$

$=\{$有两边相等且有一个角是直角的三角形$\}$

$=\{$等腰直角三角形$\}$.

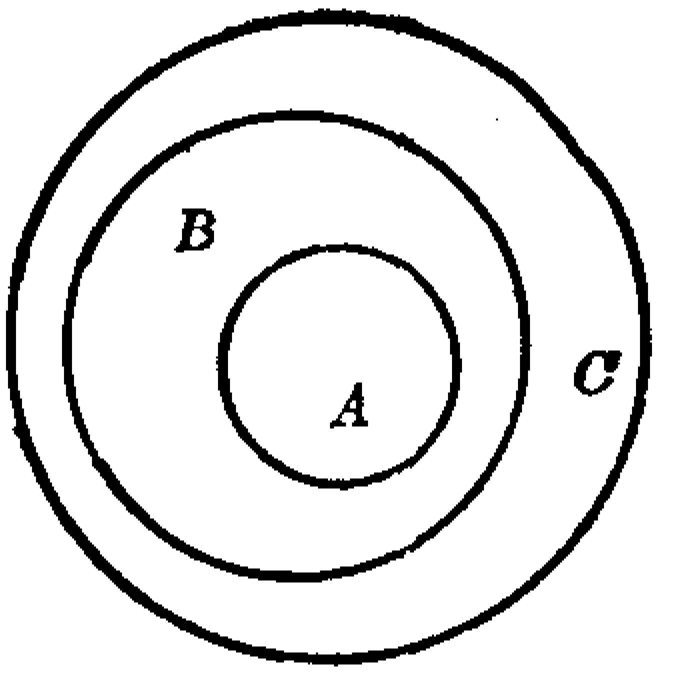
形如 $2n(n\in Z)$ 的整数叫做**偶数**，形如 $2n+1(n\in Z)$ 的整数叫做**奇数**. 全体奇数的集合简称**奇数集**，全体偶数的集合简称**偶数集**. 我们再看一个例子.

例 6 已知 A 为奇数集，B 为偶数集，Z 为整数集，求 $A\cap Z$, $B\cap Z$, $A\cap B$.

解: $A\cap Z=\{$奇数$\}\cap\{$整数$\}=\{$奇数$\}=A$,

$B\cap Z=\{$偶数$\}\cap\{$整数$\}=\{$偶数$\}=B$,

$$A \cap B = \{奇数\} \cap \{偶数\} = \varnothing.$$



（第 1 题）

练　习

1. 图中 A, B, C 表示集合，说明它们之间有什么包含关系.
2. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集及真子集.
3. 用适当的符号 ($\in$, $\notin$, $=$, $\supset$, $\subset$) 填空：

   (1) a __ $\{a\}$;　　(2) a __ $\{a, b, c\}$;

   (3) d __ $\{a, b, c\}$;　　(4) $\{a\}$ __ $\{a, b, c\}$;

   (5) $\{a, b\}$ __ $\{b, a\}$;　　(6) $\{3, 5\}$ __ $\{1, 3, 5, 7\}$;

   (7) $\{2, 4, 6, 8\}$ __ $\{2, 8\}$;　　(8) $\varnothing$ __ $\{1, 2, 3\}$.
4. 写出方程 $x+3=\frac{x}{2}-5$ 的解集并进行化简.
5. 写出方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x-2y=3 \end{cases}$$

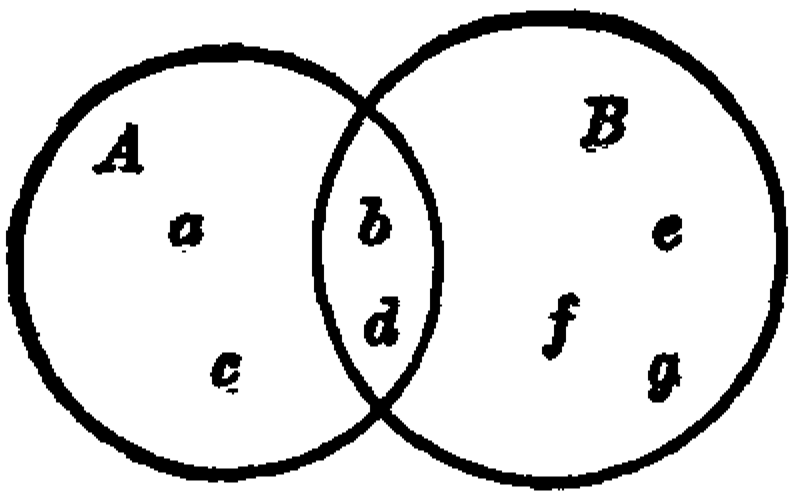
   的解集并进行化简.
6. 写出不等式 $3x+2<4x-1$ 的解集并进行化简.
7. 如图，设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{b, d, e, f, g\}$.

   (1) 求 $A \cap B$, $B \cap A$;

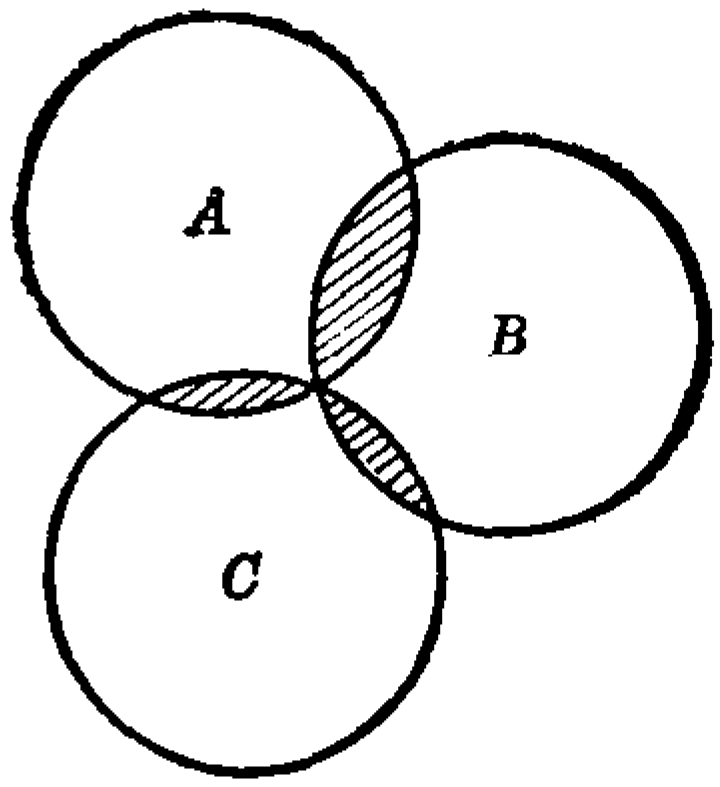
   (2) 用适当的符号 ($\supset$, $\subset$, $=$) 填空：

   $A \cap B$ __ A,　　$A \cap B$ __ $B \cap A$,

   B __ $A \cap B$,　　$\varnothing$ __ $B \cap A$.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 图中 A, B, C 表示集合，把各个阴影部分所表示的集合分别标出来，并用适当的符号表示它们同 A, B, C 之间的包含关系。

9. 设 $A=\{x \mid x<5\}, B=\{x \mid x \geqslant 0\}$，求 $A \cap B$.

10. 设 $A=\{(x, y) \mid 3x+2y=1\}$，$B=\{(x, y) \mid x-y=2\}$，$C=\{(x, y) \mid 2x-2y=3\}$，$D=\{(x, y) \mid 6x+4y=2\}$，求 $A \cap B, B \cap C, A \cap D$.

11. 设 $A=\{$锐角三角形$\}, B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A \cap B$.

12. 设 $A=\{x \mid x=2k, \quad k \in Z\}$，$B=\{x \mid x=2k+1, \quad k \in Z\}$，$C=\{x \mid x=2(k+1), \quad k \in Z\}$，$D=\{x \mid x=2k-1, \quad k \in Z\}$。问 A, B, C, D 中哪些集合相等，哪些集合的交集是空集.

3. 并集

已知方程 $x^2-4=0$ 的解集为

$$A=\{2, -2\},$$

方程 $x^2-1=0$ 的解集为

$$B=\{1, -1\},$$

那么方程

$$(x^2-4)(x^2-1)=0$$

的解集为

$$\{1, -1, 2, -2\}.$$

容易看出，集合 $\{1, -1, 2, -2\}$ 是由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的.

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A, B 的**并集**，记作 $A\cup B$(可读作"A 并 B")，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\ 或\ x\in B\}.$$

这样，方程 $(x^2-4)(x^2-1)=0$ 的解集，可以从求方程 $x^2-4=0$ 的解集与方程 $x^2-1=0$ 的解集的并集而得到，即

$$\{2, -2\}\cup\{1, -1\}=\{1, -1, 2, -2\}.$$

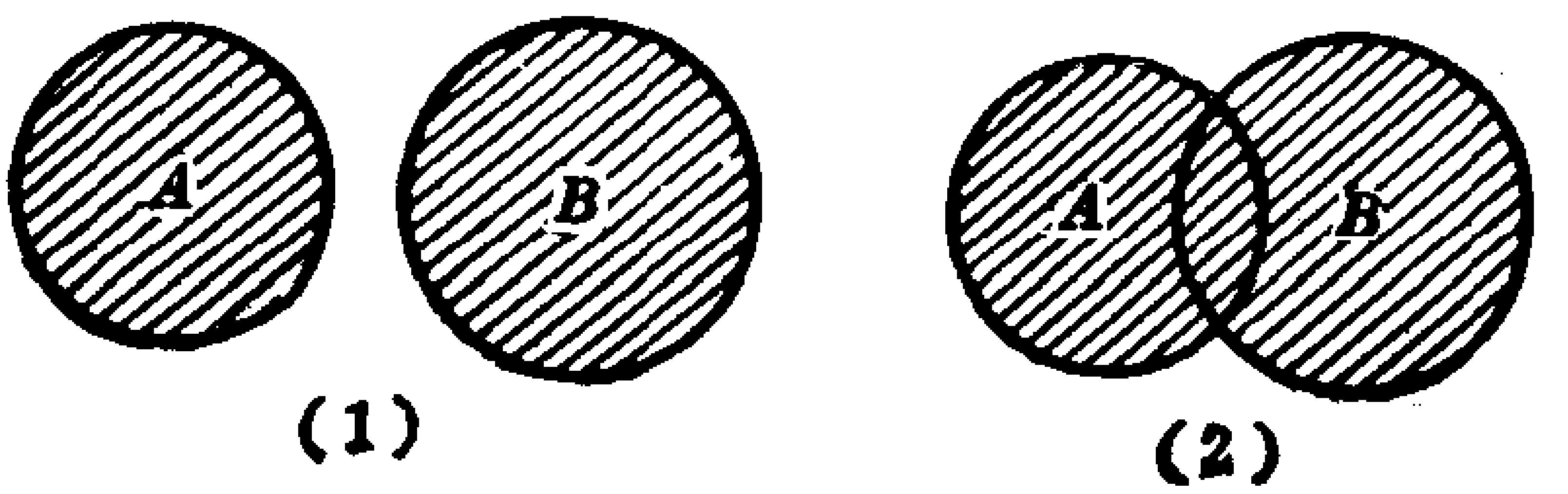


图 1-3

图 1-3 中的阴影部分，表示集合 A, B 的并集 $A\cup B$.

注意：我们已经知道，集合中的元素是没有重复现象的. 因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次. 例如，设 $A=\{3, 5, 6, 8\}$，$B=\{4, 5, 7, 8\}$，则 $A\cup B$ 应是 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，而不是 $\{3, 5, 6, 8, 4, 5, 7, 8\}$.

由并集定义容易知道，对于任何集合 A, B，有

$$\boldsymbol{A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,}$$

$$\boldsymbol{A\cup B=B\cup A.}$$

例 7　设 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，　$B=\{x\mid 1<x<3\}$，求 $A\cup B$。

解：$A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1<x<3\}$

$=\{x\mid -1<x<3\}$.

例 8　设　$A=$\{锐角三角形\}，$B=$\{钝角三角形\}，求 $A\cup B$.

解：$A\cup B=$\{锐角三角形\}$\cup$\{钝角三角形\}

$=$\{锐角三角形，或钝角三角形\}

$=$\{斜三角形\}.

例 9　写出不等式 $x^2+x-6\geqslant 0$ 的解集并进行化简.

解：不等式 $x^2+x-6\geqslant 0$ 的解集是

$$\{x\mid x^2+x-6\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant -3\}\cup\{x\mid x\geqslant 2\}$$

$$=\{x\mid x\leqslant -3,\text{ 或 } x\geqslant 2\}.$$

例 10　设 $A=\left\{x\middle| -4<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$，　$B=\{x\mid x\leqslant -4\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解：$A\cup B=\left\{x\middle| -4<x<-\dfrac{1}{2}\right\}\cup\{x\mid x\leqslant -4\}$

$=\left\{x\middle| x<-\dfrac{1}{2}\right\}$，

$A\cap B=\left\{x\middle| -4<x<-\dfrac{1}{2}\right\}\cap\{x\mid x\leqslant -4\}$

$=\varnothing$.

例 11　已知 Q 为有理数集，Z 为整数集，求 $Q\cup Z$，$Q\cap Z$.

解：$Q\cup Z=$\{有理数\}$\cup$\{整数\}$=$\{有理数\}$=Q$，

$$Q\cap Z=\{有理数\}\cap\{整数\}=\{整数\}=Z.$$

4. 补集

在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个**全集**，用符号 I 表示．也就是说，全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素．

例如，在研究数集时，常常把实数集 R 作为全集；在研究图形的集合时，常常把所有的空间图形组成的集合作为全集．

已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的**补集**，记作 $\bar{A}$(可读作"A 补")，即

$$\bar{A}=\{x\mid x\in I,\ 且\ x\notin A\}.$$

图 1-4 中的长方形内表示全集 I，圆内表示集合 A，阴影部分表示集合 A 在集合 I 中的补集 $\bar{A}$.

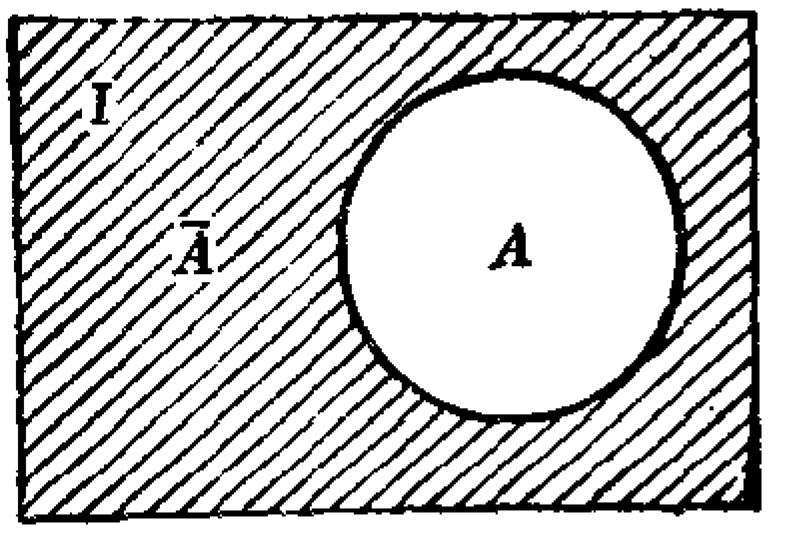


图 1-4

由补集定义容易知道，对于任何集合 A，有

$$A\cup\bar{A}=I,\ A\cap\bar{A}=\varnothing,\ \bar{\bar{A}}=A,$$

其中 $\bar{\bar{A}}$ 表示 $\bar{A}$ 在 I 中的补集．

例如，如果 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，那么

$$\bar{A}=\{2,4,6\}.$$

容易看出

$$\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}=I,$$

$$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing,$$

$$\bar{\bar{A}}=\{1,3,5\}=A.$$

例 12 已知 $I=R=\{$实数$\}$，$Q=\{$有理数$\}$，求 $\overline{Q}$.

解: 有理数集在实数集中的补集是全体无理数的集合，所以

$$\overline{Q}=\{\text{无理数}\}.$$

以后我们就把全体无理数的集合简称**无理数集**，记作 $\overline{Q}$.

例 13 设 $I=\{$梯形$\}$，$A=\{$等腰梯形$\}$，求 $\overline{A}$.

解: $\overline{A}=\{$不等腰梯形$\}$.

例 14 已知 $I=R=\{$实数$\}$，$A=\{x\mid x^2+3x+2<0\}$，求 $\overline{A}$.

解: $\because\quad A=\{x\mid x^2+3x+2<0\}=\{x\mid -2<x<-1\}$，

$\therefore\quad \overline{A}=\{x\mid x\leqslant -2\}\cup\{x\mid x\geqslant -1\}$

$\qquad=\{x\mid x\leqslant -2,\ \text{或}\ x\geqslant -1\}$.

例 15 设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{4,7,8\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$.

解: $\overline{A}=\{1,2,6,7,8\}$，$\overline{B}=\{1,2,3,5,6\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,2,6\}$，

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.

练　习

1. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9\}$.

(1) 求 $A\cap B$，$A\cup B$.

(2) 用适当的符号($\supset$，$\subset$)填空:

$A\cup B$__A，$A\cup B$__B，$A\cap B$__$A\cup B$.

2. 设 $A=\{x\mid -2<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，求 $A\cup B$.

3. 设 $A=\{x\mid x>-2\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 3\}$，求 $A\cup B$.

4. 写出不等式 $|a+3|>1$ 的解集并进行化简（提示：$|a+3|>1 \Longleftrightarrow a+3>1$，或 $a+3<-1$）.

5. 写出不等式 $x^2-x-2<0$ 的解集并进行化简.

6. 设 $A=\{$直角三角形$\}$, $B=\{$斜三角形$\}$, 求 $A\cup B$.

7. 已知N为自然数集.

(1) 如果 I 为整数集 Z, 求 $\bar{N}$;

(2) 如果 I 为非负整数集, 求 $\bar{N}$.

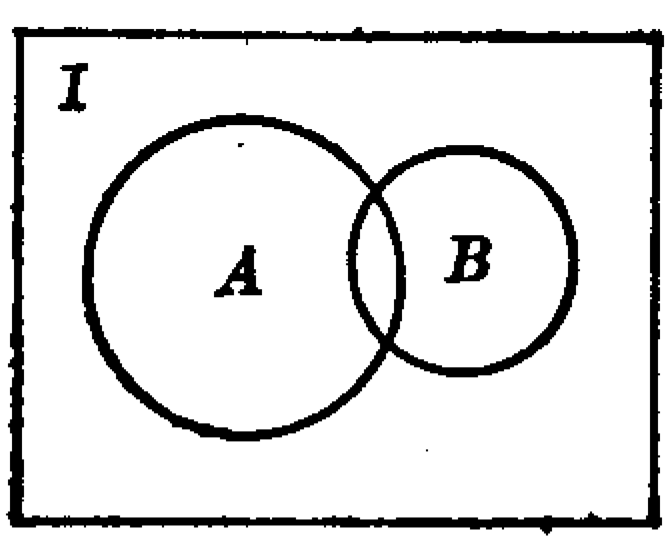
8. 已知 $I=R=\{$实数$\}$, $\bar{Q}=\{$无理数$\}$, 求 $\bar{Q}$ 的补集 $\bar{\bar{Q}}$.

9. 设 $I=\{$四边形$\}$, $A=\{$至少有一组对边平行的四边形$\}$, 求 $\bar{A}$.

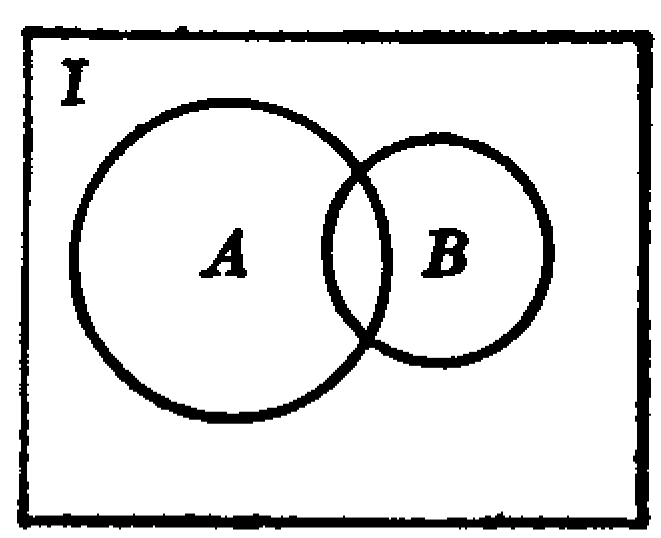
10. 设 $I=\{$小于 9 的正整数$\}$, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, 求 $\bar{A}, \bar{B}, A\cap B, \overline{A\cap B}$.

11. 图中 I 是全集, A, B 是 I 的两个子集, 用阴影表示:

(1) $\bar{A}\cup\bar{B}$;　　　　(2) $\bar{A}\cap\bar{B}$.



(1)



(2)

（第 11 题）

12. 设 $A=\{x\,|\,x=2k, k\in Z\}$, $B=\{x\,|\,x=2k+1, k\in Z\}$, $I=Z$, 求 $\bar{A}, \bar{B}$.

习题一

1. 在下列各题中分别指出了一个集合的所有元素，用适当

的方法把这个集合表示出来：

(1) 组成中国国旗图案的颜色；

(2) 世界上最高的山峰；

(3) 由 1, 2, 3 这三个数字中抽出一部分或全部数字(没有重复)所排成的一切自然数；

(4) 直角坐标系第一象限内所有的点的坐标。

2. 写出方程 $x^2+x-1=0$ 的解集并进行化简。

3. 写出方程组

$$\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=4, \\ z+x=5 \end{cases}$$

的解集并进行化简。

4. 在下列各题中，指出关系式 $A\subseteq B$, $A\supseteq B$, $A\subset B$, $A\supset B$, $A=B$ 中哪些成立：

(1) $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{3, 5, 7\}$；

(2) $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{x|x$ 是 8 的正约数$\}$。

5. 判断下列各式是否正确，并说明理由：

(1) $2\subset\{x|x\leqslant 10\}$；　　(2) $2\in\{x|x\leqslant 10\}$；

(3) $\{2\}\subset\{x|x\leqslant 10\}$；　　(4) $\varnothing\in\{x|x\leqslant 10\}$；

(5) $\varnothing\not\subset\{x|x\leqslant 10\}$；　　(6) $\varnothing\subset\{x|x\leqslant 10\}$；

(7) $\{4, 5, 6, 7\}\not\subset\{2, 3, 5, 7, 11\}$；

(8) $\{4, 5, 6, 7\}\not\supset\{2, 3, 5, 7, 11\}$.

6. 学校里开运动会，设 $A=\{$参加百米赛跑的同学$\}$，$B=\{$参加跳高比赛的同学$\}$，求 $A\cap B$.

7. 用适当的集合填空：

$\cap$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	___	___	___
A	___	___	___
B	___	$A\cap B$	___

8. 设 $A=\{$红星农场的汽车$\}$, $B=\{$红星农场的拖拉机$\}$, 求 $A\cup B$.

9. 用适当的集合填空:

$\cup$	$\varnothing$	A	B
$\varnothing$	___	___	___
A	A	___	___
B	___	___	___

10. 写出下列不等式的解集并进行化简:

(1) $x^2+2x-8\leqslant 0$;　　(2) $x^2+8x+15>0$.

11. 设 $S=\{x\,|\,x\leqslant 3\}$, $T=\{x\,|\,x<1\}$, 求 $S\cap T$ 及 $S\cup T$, 并在数轴上表示出来.

12. 写出不等式 $|3x-5|>2$ 的解集并进行化简.

13. 用适当的集合填空:

$\cap$	$\varnothing$	A	$\bar{A}$
$\varnothing$	___	___	___
A	___	___	___
$\bar{A}$	___	___	___

$\cup$	$\varnothing$	A	$\bar{A}$
$\varnothing$	___	___	___
A	___	___	___
$\bar{A}$	___	___	___

14. 设 $I=\{x\,|\,x\in N$, 且$x\leqslant 10\}$, $A=\{1, 2, 4, 5, 9\}$, $B=\{4, 6, 7, 8, 10\}$, $C=\{3, 5, 7\}$, 求 $A\cap B$, $A\cup B$, $\bar{A}\cap\bar{B}$, $\bar{A}\cup\bar{B}$,

$(A\cap B)\cap C$, $(A\cup B)\cup C$.

15. 设 $I=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A=\{a, c, d\}$, $B=\{b, d, e\}$, 求 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}\cap\bar{B}$, $\bar{A}\cup\bar{B}$, $\overline{A\cap B}$, $\overline{A\cup B}$. 看看求出的后四个集合中有没有相等的集合.

16. 设 $A=\{x|x^2-16<0\}$, $B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}$, $I=R$, 求:

(1) $A\cap B$; (2) $A\cup B$;

(3) $\overline{A\cap B}$; (4) $\bar{A}\cup\bar{B}$.

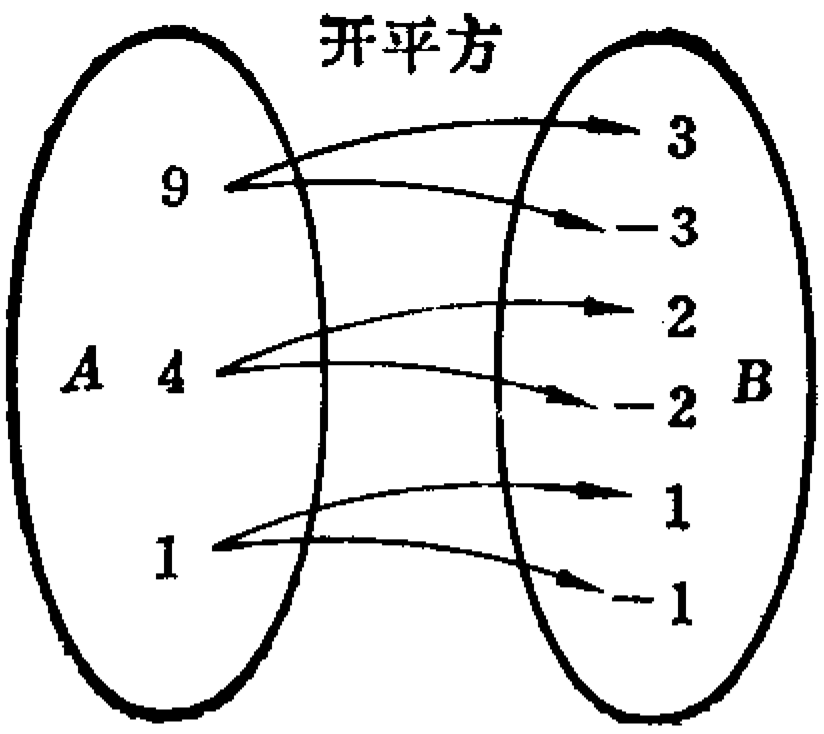
二 映射与函数

1.3 映射

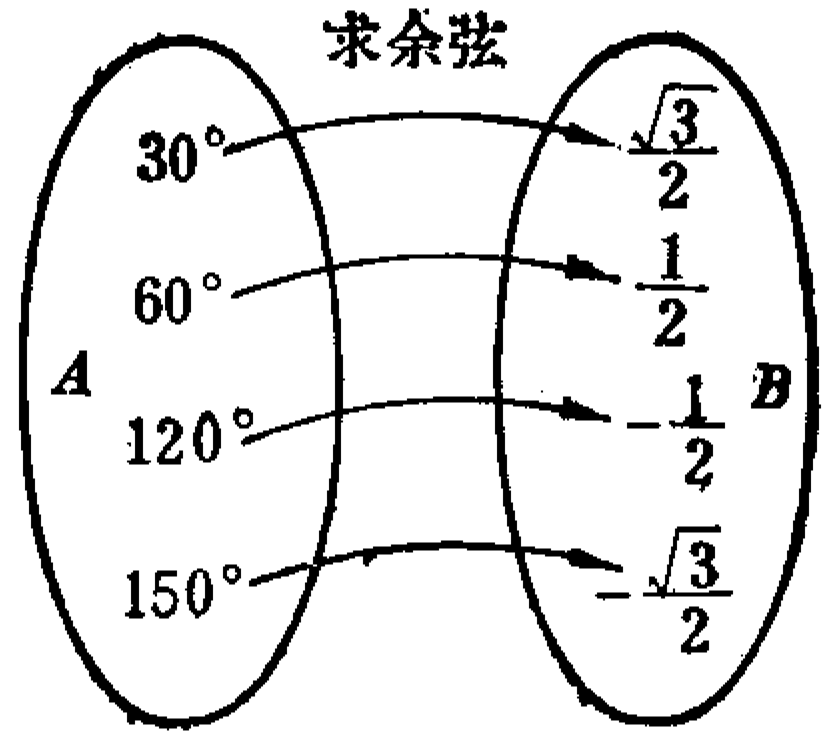
在初中我们已学习过对应的例子. 例如, 对于任何一个实数 a, 数轴上都有唯一的一点 A 和它对应; 坐标平面内的任何一个点 P, 都有唯一的有序实数对 (x, y) 和它对应. 现在我们学习一种特殊的对应——映射.

先看两个集合 A, B 的元素之间的一些对应的例子(图 1-5). 为简单起见, 这里的 A, B 都是有限集.

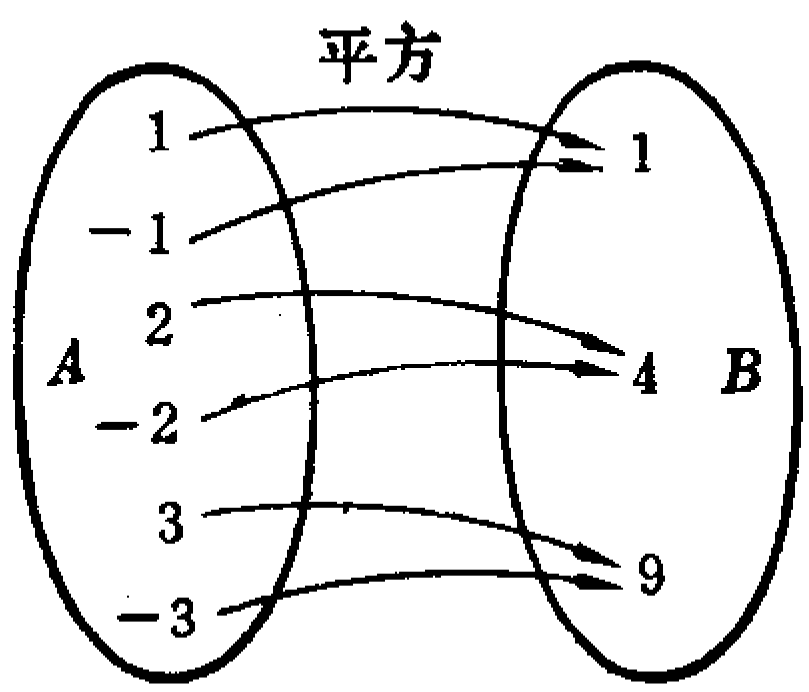
在(1)中, 对应法则是"开平方", 即对于集合 A 中的每一个正数 x(如 $x=9$), 集合 B 中有两个平方根 $\pm\sqrt{x}$ (即 3 与 -3) 和它对应; 在(2)中, 对应法则是"求余弦", 即对于集合 A 中的每一个角 α(如 $\alpha=120°$), 集合 B 中有一个余弦值 $\cos\alpha$ $\left(\text{即} -\frac{1}{2}\right)$ 和它对应; 在(3)中, 对应法则是"平方", 即对于集合 A 中的每两个非零整数 $\pm m$(如 2 与 -2), 集合 B 中有一个平



(1)



(2)



(3)

图 1-5

方数 m^2(即 4)和它们对应.

一般地,对于一个集合中的一个或几个元素,可以按照某种对应法则,使另一个集合(也可以是原集合)中有一个或几个元素和它对应.

图 1-5 中(2)与(3)这两个对应都有这样的特点:对于第一个集合(即 A)中的任何一个元素,第二个集合(即 B)中都有唯一的元素和它对应.

一般地,设 A, B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,

对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应(包括集合 A, B 及从 A 到 B 的对应法则 f)叫做从集合 A 到集合 B 的**映射**，记作

$$f: A \to B.$$

这样，图 1-5 中(2)与(3)这两个对应，都是从集合 A 到集合 B 的映射. 又如，设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，集合 A 的元素 x 按对应法则"乘 2 加 1"和集合 B 的元素 $2x+1$ 对应，这个对应也是从集合 A 到集合 B 的映射.

对于图 1-5 中(1)这个对应，由于集合 B 中有两个元素 3 与 -3 和集合 A 中的一个元素 9 对应，所以它不是从集合 A 到集合 B 的映射.

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的**象**，a 叫做 b 的**原象**. 例如图 1-5 中(2)这个映射，B 中的元素 $\frac{1}{2}$ 和 A 中的元素 $60°$ 对应，这里 $\frac{1}{2}$ 是 $60°$ 的象，$60°$ 是 $\frac{1}{2}$ 的原象. A 的元素的象的集合是 $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}(\subseteq B)$.

练 习

1. 画图表示从集合 A 到集合 B 的对应(集合 A 各取四个元素)，已知：

(1) $A=N, B=N$，对应法则是"加倍"(即"乘 2")；

(2) $A=R, B=R^+$，对应法则是"取绝对值"；

(3) $A=\{x \mid x \in R, 且 x \neq 0\}, B=R$，对应法则是"取倒数"；

(4) $A=\{x|x\in R$, 且 $x<1\}$, $B=\{\alpha|0°<\alpha<180°\}$, 对应法则是"求正弦值为 x 的三角形内角 α".

2. (口答)图 1-5(1)中, 对于正数 4, 有几个平方根和它对应?(2)中,对于 150° 角,有几个余弦值和它对应?(3)中,对于整数 -1,有几个平方数和它对应?

3. (口答)在第 1 题的四个对应中, 哪些对应是从集合 A 到集合 B 的映射?

4. 在图 1-5(2)中, 元素 30° 的象是什么? 元素 $\frac{1}{2}$ 的原象是什么?

1.4 函数

我们在初中已经学过函数, 知道: 如果在某变化过程中有两个变量 x, y, 并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值, 按照某个对应法则, y 都有唯一确定的值和它对应, 那么 y 就是 x 的**函数**, x 叫做**自变量**, x 的取值范围叫做函数的**定义域**, 和 x 的值对应的 y 的值叫做**函数值**, 函数值的集合叫做函数的**值域**.

从映射的概念可以知道, 映射 $f: A\to B$ 包括三个部分: 原象集合 A、象所在的集合 B 以及从 A 到 B 的对应法则 f. 当集合 A, B 都是非空的数的集合, 且 B 的每一个元素都有原象时, 这样的映射 $f: A\to B$ 就是定义域 A 到值域 B 上的函数. 所以函数是由**定义域**、**值域**以及定义域到值域上的**对应法则**三部分组成的一类特殊的映射.

例如, 对于一次函数 $y=3x+2$, 函数的定义域是实数集

R，值域也是 R，对应法则是"乘 3 加 2"，这个函数是一个 R 到 R 上的映射.

又如，对于二次函数 $y=2x^2+2$，函数的定义域是 R，值域是 $\{y|y\geqslant 2\}$，对应法则是"平方乘 2 加 2"，这个函数是一个 R 到 $\{y|y\geqslant 2\}$ 上的映射.

在本书中，将把这类定义域 A 到值域 B 上的特殊的映射 $f:A\to B$ 都叫做函数，并记作

$$y=f(x).$$

x 在定义域 A 内取一个确定的值 a 时，对应的函数值记作 $f(a)$.

例如，二次函数 $f(x)=x^2+2x-1$ 在 $x=0, x=1, x=2$ 时的函数值分别为 $f(0)=-1, f(1)=2, f(2)=7$.

在同时研究两个或多个函数时，要用不同的符号来表示它们，除 $f(x)$ 外还常用 $F(x), G(x), g(x)$ 等符号.

在研究函数时常常用到区间的概念.

设 a, b 是两个实数，而且 $a<b$. 我们把满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**闭区间**，表示为 $[a, b]$；把满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做**开区间**，表示为 (a, b)；把满足 $a\leqslant x<b$，$a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合，都叫做**半开半闭区间**，分别表示为 $[a, b)$，$(a, b]$. 这里的实数 a 与 b 都叫做相应区间的**端点**.

实数集 R 也可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$，"∞"读作"无穷大"，"$-\infty$"读作"负无穷大"，"$+\infty$"读作"正无穷大". 我们还把满足 $x\geqslant a, x>a, x\leqslant b, x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$.

我们知道，正比例函数和一次函数的图象都是一条直线，

二次函数的图象是一条平滑的曲线(抛物线)，反比例函数的图象是两支平滑的曲线(双曲线). 此外，函数的图象也可以是一些点或几条线段等.

例 1 某种茶杯，每个 0.5 元，买 x 个茶杯的钱数(元)

$$f(x)=0.5x,\ x\in\bar{Z}^{-}.$$

画出这个函数的图象.

解: 这个函数的图象由一些点组成，如图 1-6 所示.

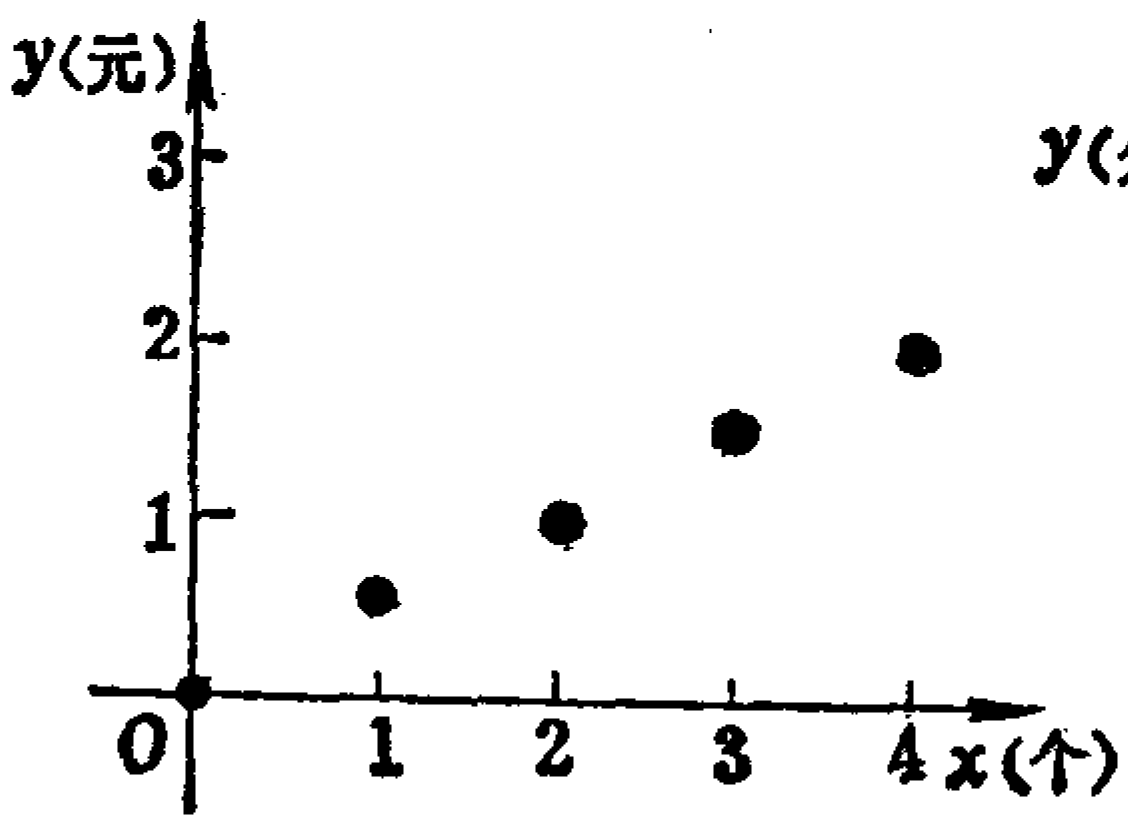


图 1-6

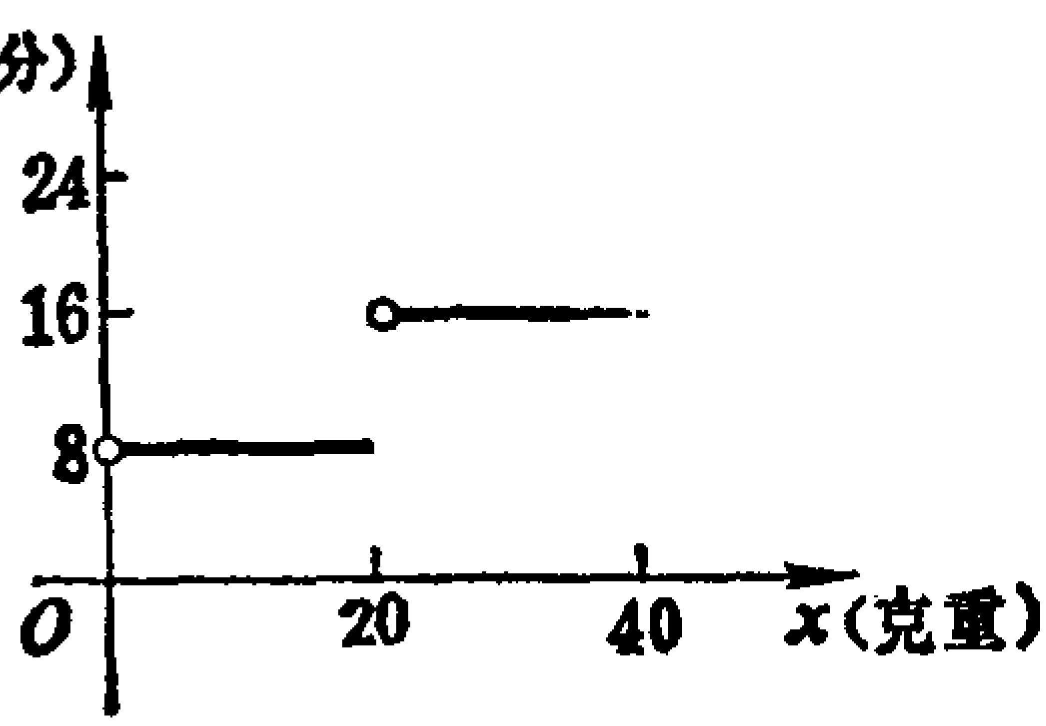


图 1-7

例 2 在国内投寄外埠平信，每封信不超过 20 克重付邮资 8 分，超过 20 克重而不超过 40 克重付邮资 1 角 6 分. 那么，每封 $x(0<x\leqslant 40)$克重的信应付邮资(分)

$$f(x)=\begin{cases}8, & x\in(0,20],\\ 16, & x\in(20,40].\end{cases}$$

画出这个函数的图象.

解: 这个函数的图象是两条线段，如图 1-7 所示.

当我们所研究的函数 $y=f(x)$ 是用一个式子表示时，如果不加说明，**函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的集合.**

例 3 求函数 $f(x)=\frac{1}{x-2}$的定义域.

解: 因为 $x-2=0$ 即 $x=2$ 时, $\frac{1}{x-2}$没有意义, 而$x\neq2$时, $\frac{1}{x-2}$都有意义, 所以这个函数的定义域是$\{x \mid x\in R,\ 且\ x\neq2\}$.

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{3x+2}$的定义域.

解: 因为 $3x+2\geqslant0$ 即 $x\geqslant-\frac{2}{3}$时, $\sqrt{3x+2}$ 有意义, 而 $x<-\frac{2}{3}$时, $\sqrt{3x+2}$没有意义, 所以这个函数的定义域是 $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

例 5 求函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}+2$ 的定义域.

解: 使$\sqrt{x+1}$有意义的实数 x 的集合是$[-1,+\infty)$, 使$\sqrt{1-x}$有意义的实数 x 的集合是$(-\infty,1]$, 所以这个函数的定义域是

$$[-1,+\infty)\cap(-\infty,1]=[-1,1].$$

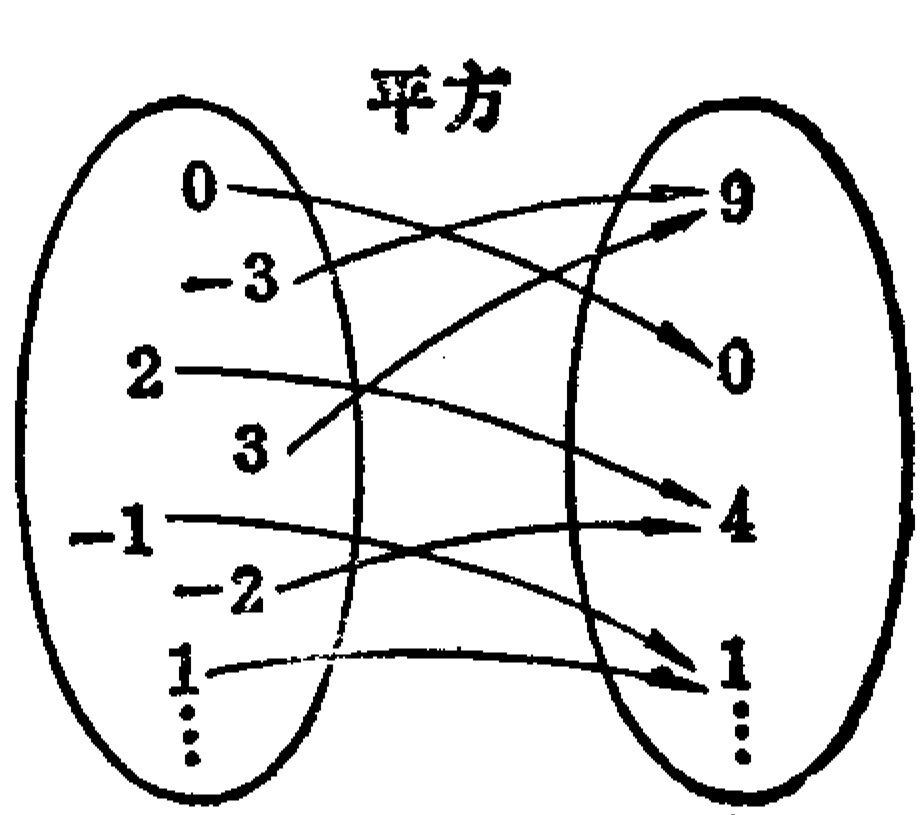
练 习

1. (口答)如图, 已知函数$y=x^2$, 圈内的数都是整数, 求:

(1) 函数的定义域、值域;

(2) 和 $x=-2$ 对应的象;

(3) $y=9$ 和什么原象对应.



(第 1 题)

2. 已知函数 $f(x)=2x-3$, $x\in\{0,1,2,3,5\}$, 求$f(0)$,

$f(2), f(5)$以及函数的值域。

3. 画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=2x, x\in Z$，且 $|x|\leqslant 2$；

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0, +\infty), \\ -1, & x\in(-\infty, 0].\end{cases}$

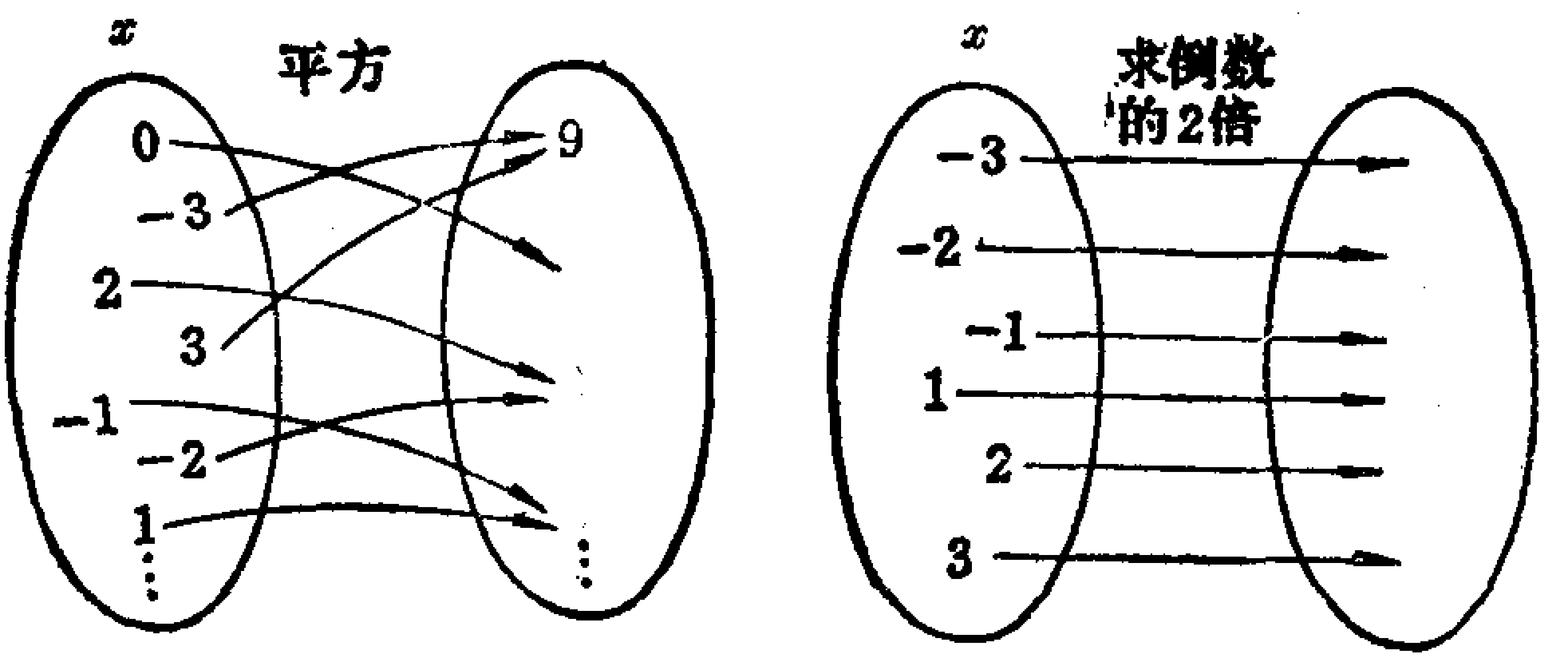
4. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4x+7}$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}-1$。

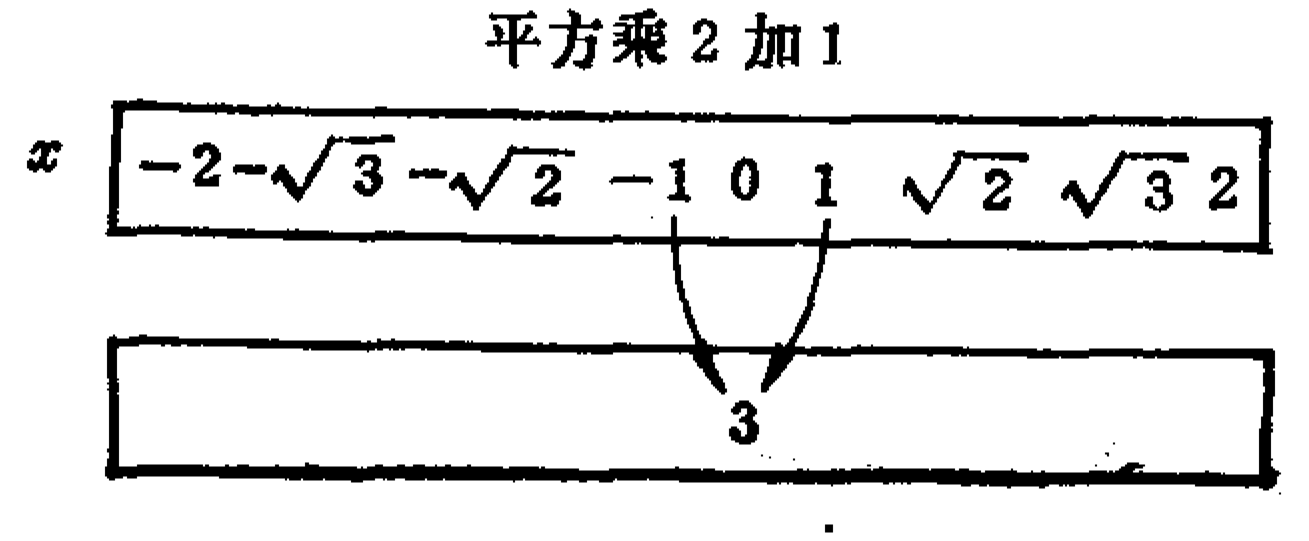
习题二

1. 根据给定的对应法则，写出和 x 对应的数值：



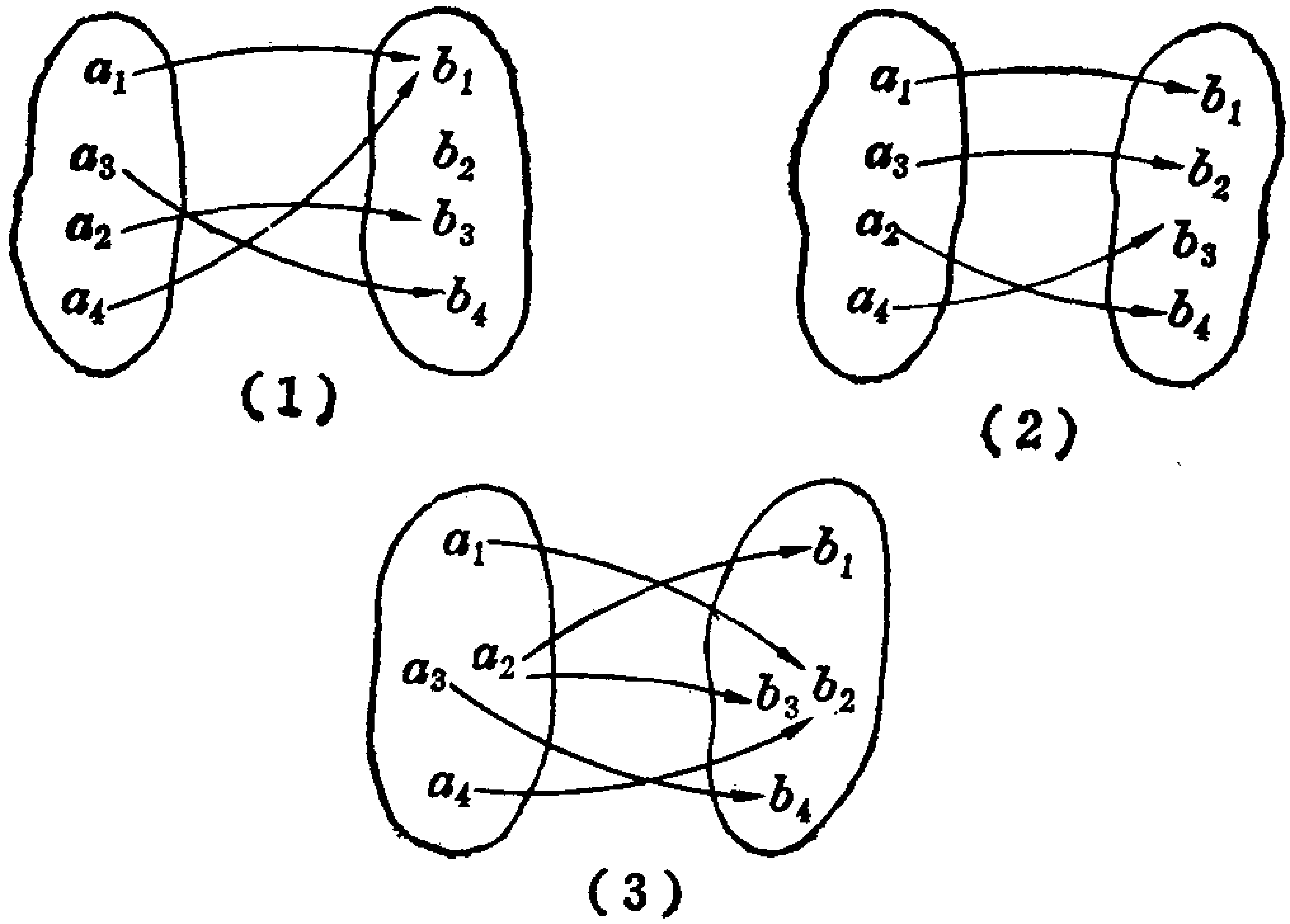
(第 1 题)

2. 根据给定的对应法则，写出和 x 对应的数值：



(第 2 题)

3. 下列各图表示的对应是不是从第一个集合到第二个集合的映射，为什么？



（第 3 题）

4. 下列对应是不是从 A 到 B 的映射，为什么？

(1) $A=R^+$, $B=R$，对应法则是“求常用对数”；

(2) $A=\{$平面 M 内的点$\}$, $B=\{$平面 M 内的圆$\}$，对应法则是“以点 P 为圆心画圆”；

(3) $A=\{\alpha \mid 0°\leqslant\alpha\leqslant180°\}$, $B=[0, 1]$，对应法则是“求余弦”；

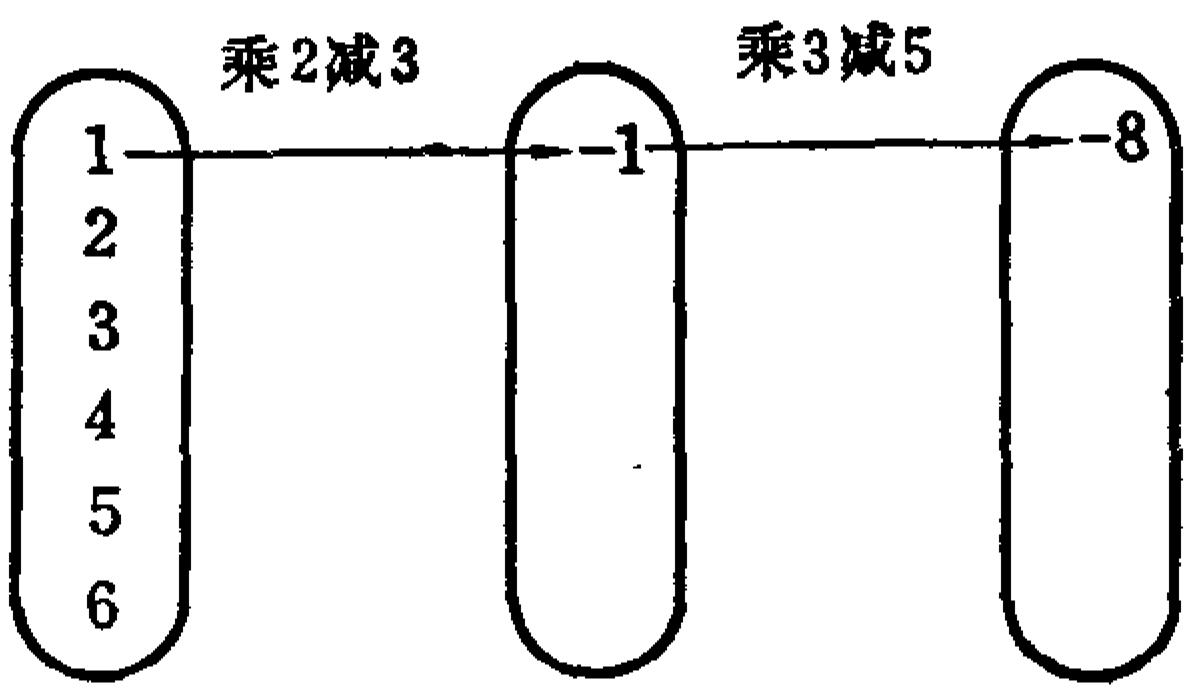
(4) $A=\{$平面 M 内的三角形$\}$, $B=\{$平面 M 内的圆$\}$，对应法则是“画三角形的外接圆”。

5. 在从集合 A 到集合 B 的映射中，

(1) 对于集合 A 中的任意一个元素 a，在集合 B 中是不是有象？是不是只有一个象？

(2) 对于集合 B 中的任意一个元素 b，在集合 A 中是不是有原象？是不是只有一个原象？

6. 如图，已知从集合 A 到集合 B 的对应法则是"乘 2 减 3"，从集合 B 到集合 C 的对应法则是"乘 3 减 5"。按对应法则写出集合 B, C 中的对应元素.



(第 6 题)

7. 已知函数 $f(x)=3x+5, x\in R$，求 $f(-3), f(-2), f(0), f(1), f(2)$ 以及函数的值域.

8. 画出下列函数的图象，并说出函数的定义域、值域：

(1) 正比例函数 $y=3x$；

(2) 反比例函数 $y=\dfrac{8}{x}$；

(3) 一次函数 $y=-4x+5$；

(4) 二次函数 $y=x^2-6x+7$.

9. 画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=x+2, x\in Z$，且 $|x|\leqslant 3$；

(2) $f(x)=3x-5, x\in(2, 4]$；

(3) $f(x)=-\sqrt{x}, x\in[0, +\infty)$；

(4) $f(x)=2x^2-3x-2,\ x\in\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

10. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{6}{x^2-3x+2}$;

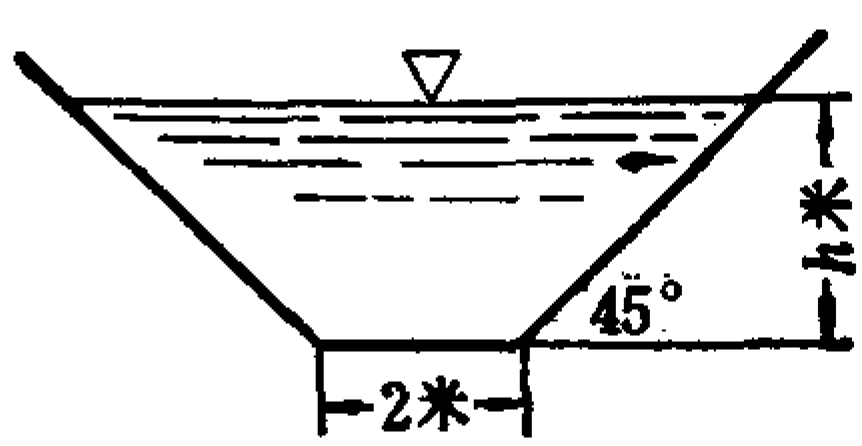
(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}}$;

(3) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+4$;

(4) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

11. 建筑一个容积为 8000 米^3，深为 6 米的长方体蓄水池，池壁每米^{2}的造价为 a 元，池底每米^{2}的造价为 $2a$ 元. 把总造价 y 元表示为底的一边长 x 米的函数，并指出函数的定义域.

12. 如图，灌溉渠的横断面是等腰梯形，底宽 2 米，边坡的倾角为 45°，水深 h 米. 求横断面中有水面积 A 米^2 与水深 h 米的函数关系式.



(第 12 题)

13. 投寄本埠平信，每 20 克重应贴邮票 4 分，不足 20 克重的以 20 克重计算. 写出邮资(分)与信件重量(在 60 克重以内)的函数关系式，并画出函数的图象. 如果要寄挂号信，则每封信另加挂号费 1 角 2 分. 写出邮资(分)与挂号信件重量(在 60 克重以内)的函数关系式，并画出函数的图象.

三　幂函数

1.5　幂函数

我们已经学过函数 $y=x$，$y=x^2$ 及 $y=x^{-1}$，这些函数都是幂函数.

一般地，函数 $y=x^\alpha$ 叫做**幂函数**，其中 x 是自变量，α 是常数(这里我们只讨论 α 是有理数 n 的情况).

我们知道，当 $n=0$ 时，$x^n=x^0=1\,(x\neq0)$，函数 $y=x^0$ 成为常数函数 $y=1\,(x\neq0)$，它的图象是平行于 x 轴并在 x 轴上方 1 个单位的一条直线(除去点 $(0, 1)$).

当 $n=1$ 时，函数 $y=x^n$ 就是 $y=x$. n 是其他正整数时，x^n 的意义是 $x^n=x\cdot x\cdot\cdots\cdot x$(共 n 个 x 相乘). 函数的定义域是实数集 R.

n 是一个正分数时，我们只研究 n 是一个既约分数 $\frac{p}{q}$ 的情况(p, q 是正整数，$q>1$). 这时，x^n 的意义是 $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$，函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域是使 $\sqrt[q]{x^p}$ 有意义的实数 x 的集合.

n 是一个负整数或负分数时，例如，$n=-p$(p 是正整数)或 $n=-\frac{p}{q}$(p, q 是互质的正整数，$q>1$)时，x^n 的意义分别是 $x^n=x^{-p}=\frac{1}{x^p}$，$x^n=x^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$，函数的定义域是使 $\frac{1}{x^p}$ 或 $\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$ 有意义的实数 x 的集合.

例 1　求下列幂函数的定义域:

$$y=x^3,\ y=x^{\frac{1}{3}},\ y=x^{\frac{1}{2}},\ y=x^{-2},\ y=x^{-\frac{1}{2}}.$$

解: $y=x^3$ 的定义域是 R,

$y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$的定义域是 R,

$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$,

$y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$的定义域是$\{x\mid x\in R, 且x\neq 0\}$,

$y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$的定义域是$(0,+\infty)$.

现在我们分 $n>0$ 及 $n<0$ 两种情况来研究幂函数的图象和性质.

1. $n>0$.

我们知道,$y=x$ 的图象是直线(图 1-8),$y=x^2$ 的图象是抛物线(图 1-9).

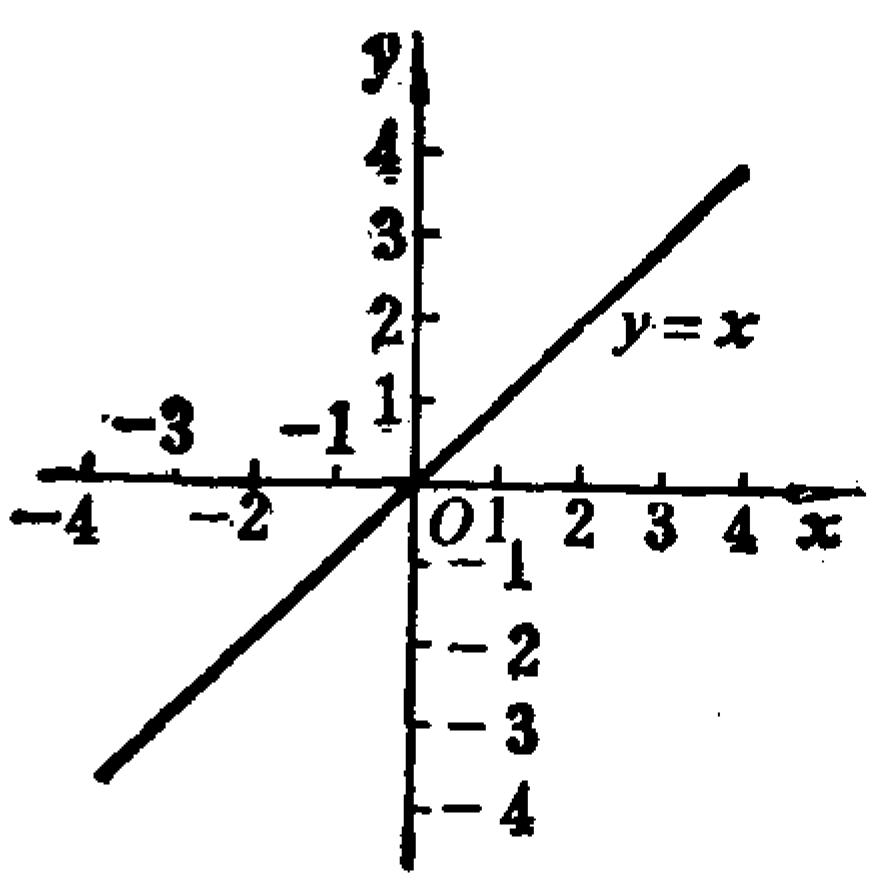


图 1-8

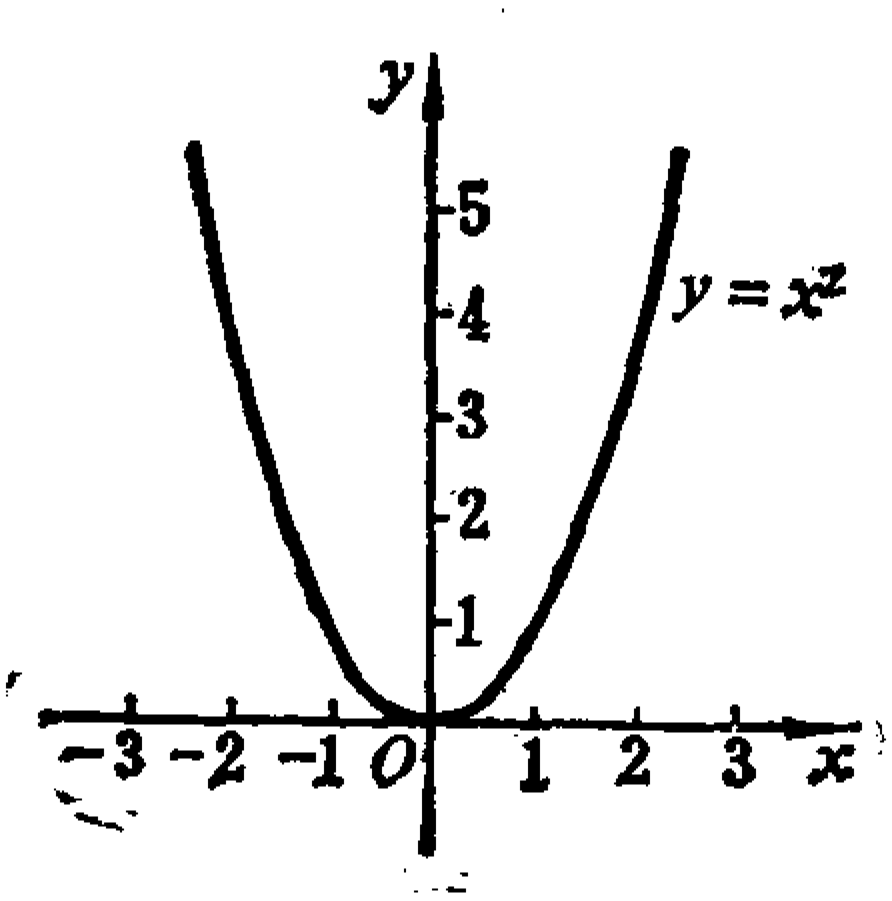


图 1-9

现在画函数 $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 及 $y=x^{\frac{1}{3}}$的图象.

分别列出 x,y 的对应值表,用描点的方法,画出这三个函数的图象(图 1-10,图 1-11 及图 1-12).

$y=x^3$

x	…	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	…
$y=x^3$	…	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	…

$y=x^{\frac{1}{2}}$

x	0	0.5	1	2	3	4	6	…
$y=x^{\frac{1}{2}}$	0	0.71	1	1.41	1.73	2	2.45	…

$y=x^{\frac{1}{3}}$

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^{\frac{1}{3}}$	…	-1.44	-1.26	-1	0	1	1.26	1.44	…

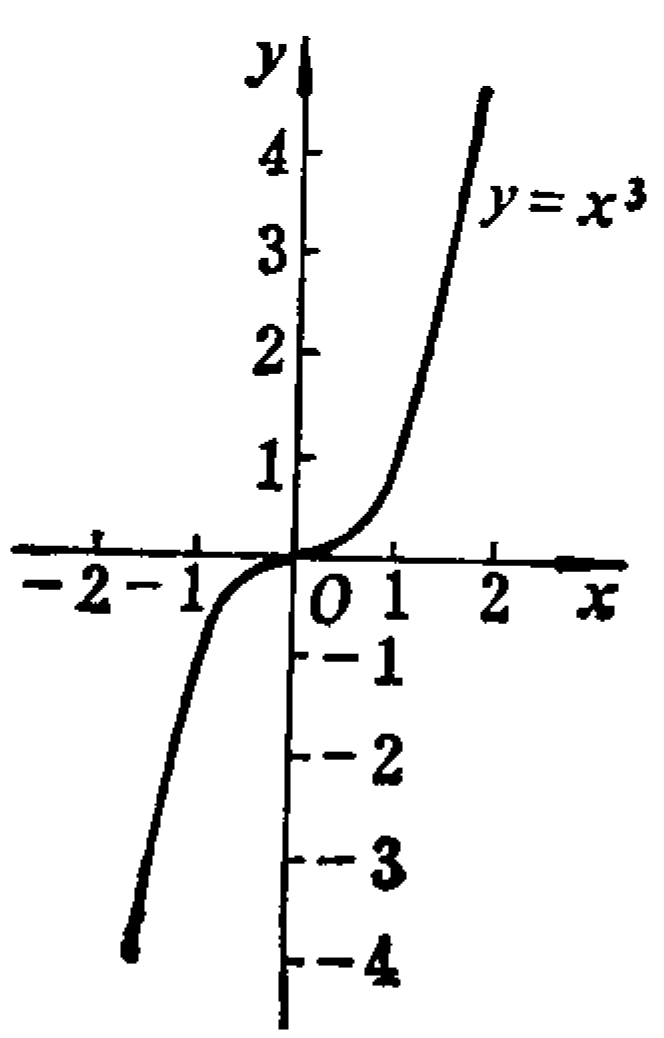


图 1-10

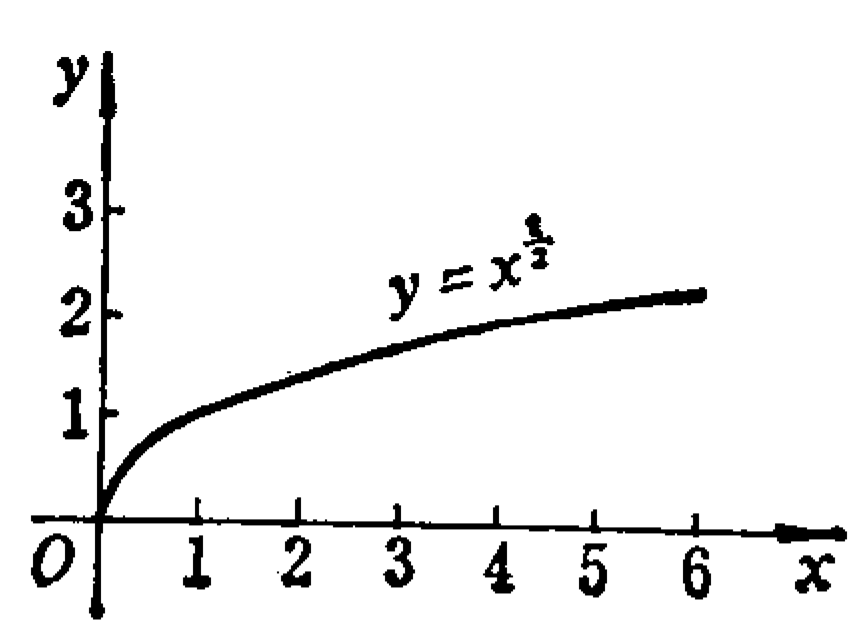


图 1-11

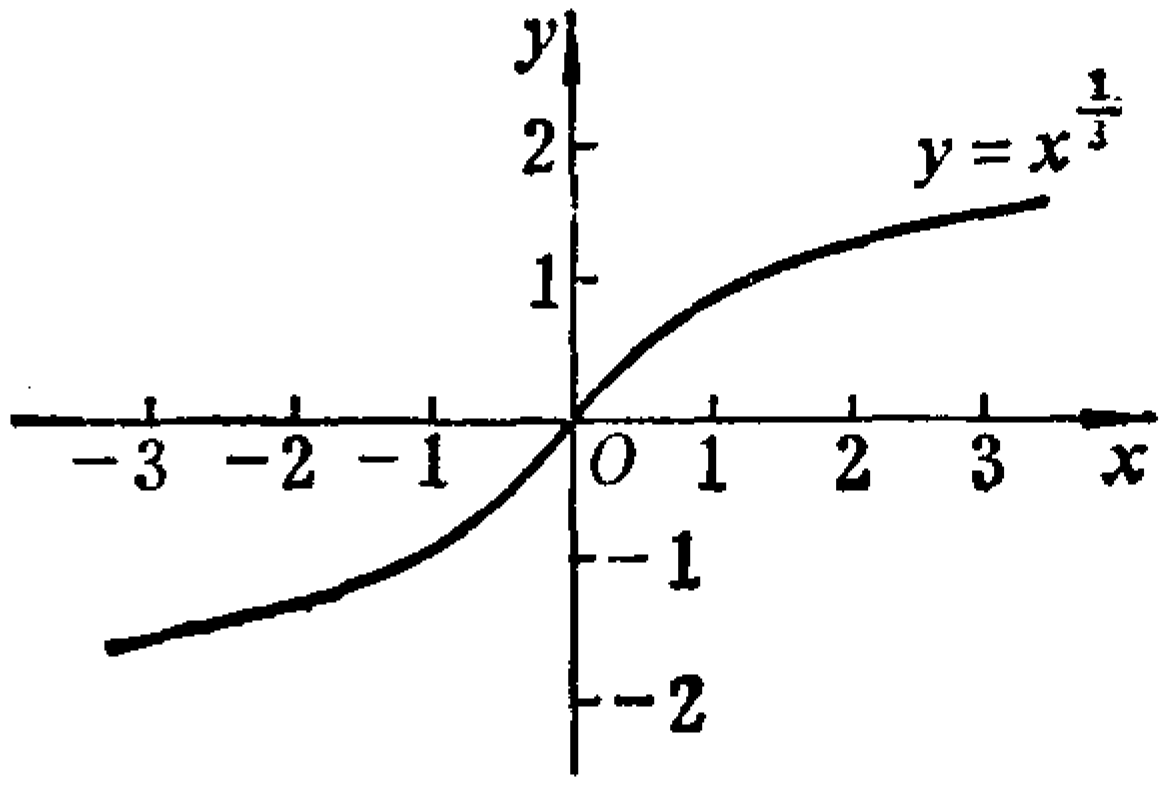


图 1-12

进一步研究可以看出：幂函数 $y=x^4$, $y=x^6$, …的图象类似于 $y=x^2$ 的图象；$y=x^5$, $y=x^7$, …的图象类似于 $y=x^3$ 的图象；$y=x^{\frac{1}{4}}$，$y=x^{\frac{1}{6}}$，…的图象类似于 $y=x^{\frac{1}{2}}$的图象；$y=x^{\frac{1}{5}}$，$y=x^{\frac{1}{7}}$, …的图象类似于 $y=x^{\frac{1}{3}}$的图象.

下面在同一坐标系内画出幂函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$的图象(图 1-13)，我们可以看出，**当 $n>0$ 时，**

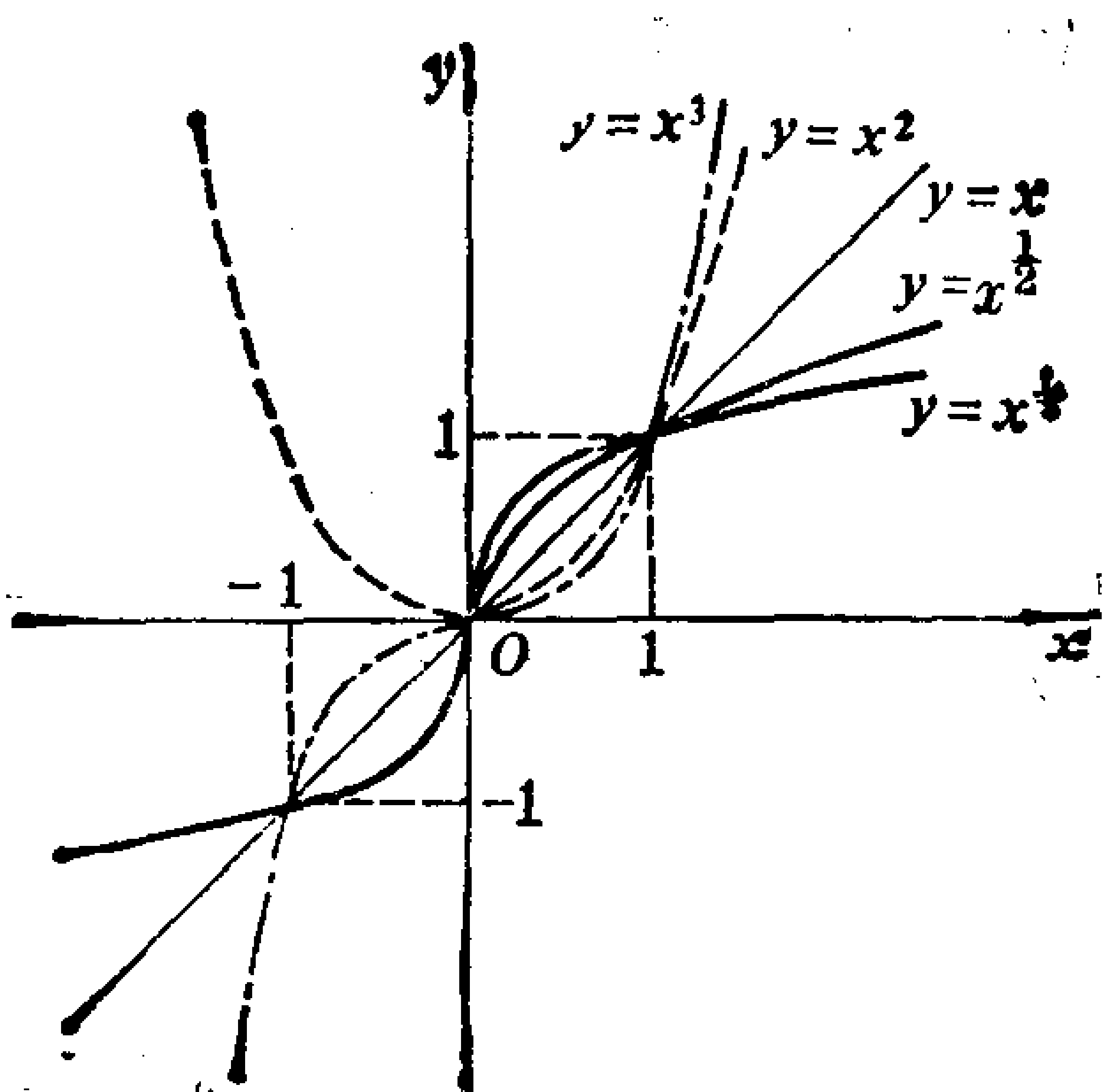


图 1-13

幂函数 $y=x^n$ 有下列性质:

(1) 图象都通过点 (0, 0), (1, 1);

(2) 在第一象限内, 函数值随 x 的增大而增大.

例 2 比较下列各题中两个值的大小:

(1) $1.5^{\frac{3}{5}}$, $1.7^{\frac{3}{5}}$; (2) $0.7^{1.5}$, $0.6^{1.5}$.

解: (1) 各题中两个值都是幂运算的结果, 且指数相同, 因此, 可以利用幂函数的性质来判断它们的大小. 考察幂函数 $y=x^{\frac{3}{5}}$, 在第一象限内, y 的值随 x 的增大而增大.

$\because$ $1.5<1.7$,

$\therefore$ $1.5^{\frac{3}{5}}<1.7^{\frac{3}{5}}$.

(2) 考察幂函数 $y=x^{1.5}$, 同理,

$\because$ $0.7>0.6$,

$\therefore$ $0.7^{1.5}>0.6^{1.5}$.

2. $n<0$.

我们知道, 幂函数 $y=x^{-1}$ 的图象, 即反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象, 是两支曲线(图 1-14).

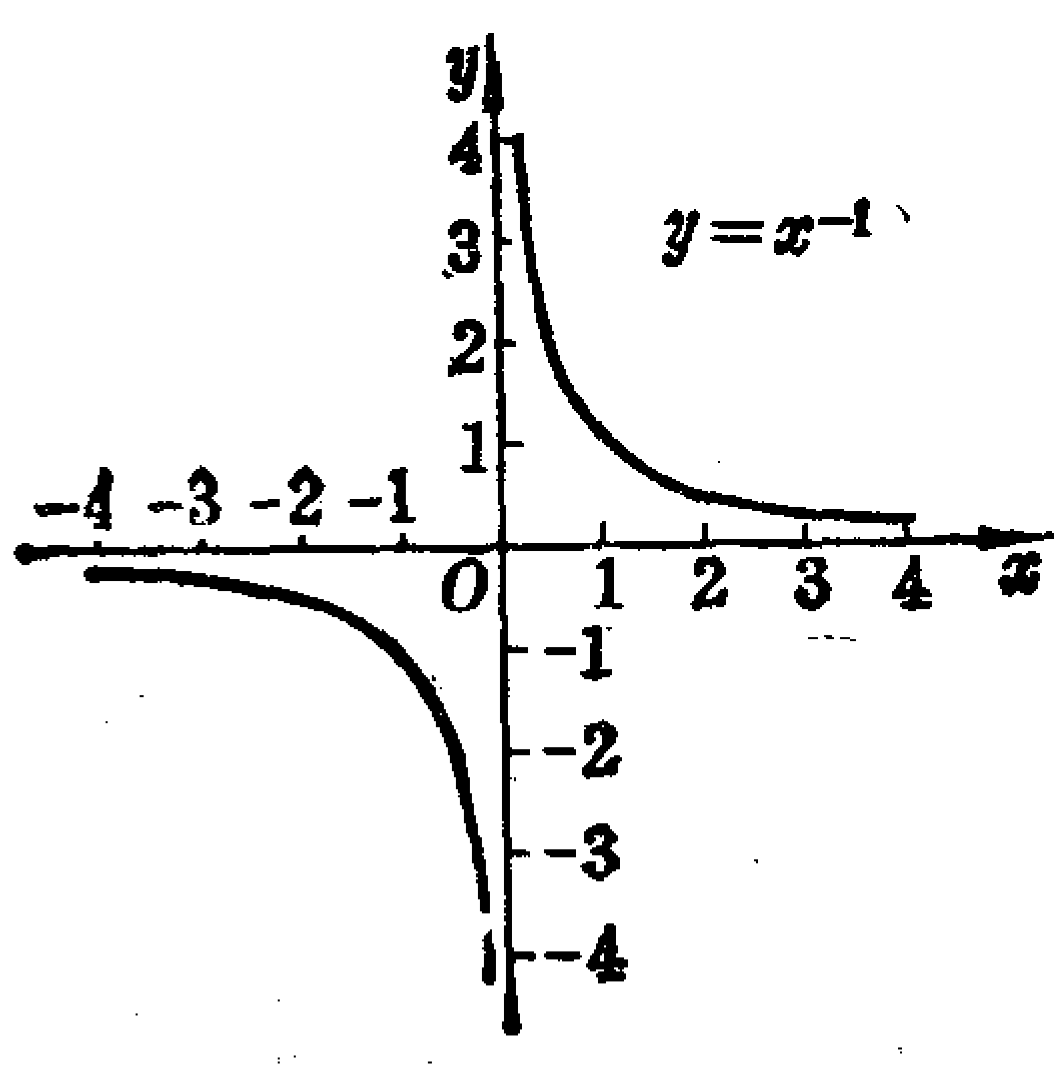


图 1-14

现在画函数 $y=x^{-2}$, $y=x^{-\frac{1}{2}}$的图象.

分别列出 x, y 的对应值表，用描点的方法画出这两个函数的图象(图 1-15, 图 1-16)。

$$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

x	…	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
$y=x^{-2}$	…	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	…

$$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

x	…	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	…
$y=x^{-\frac{1}{2}}$	…	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	…

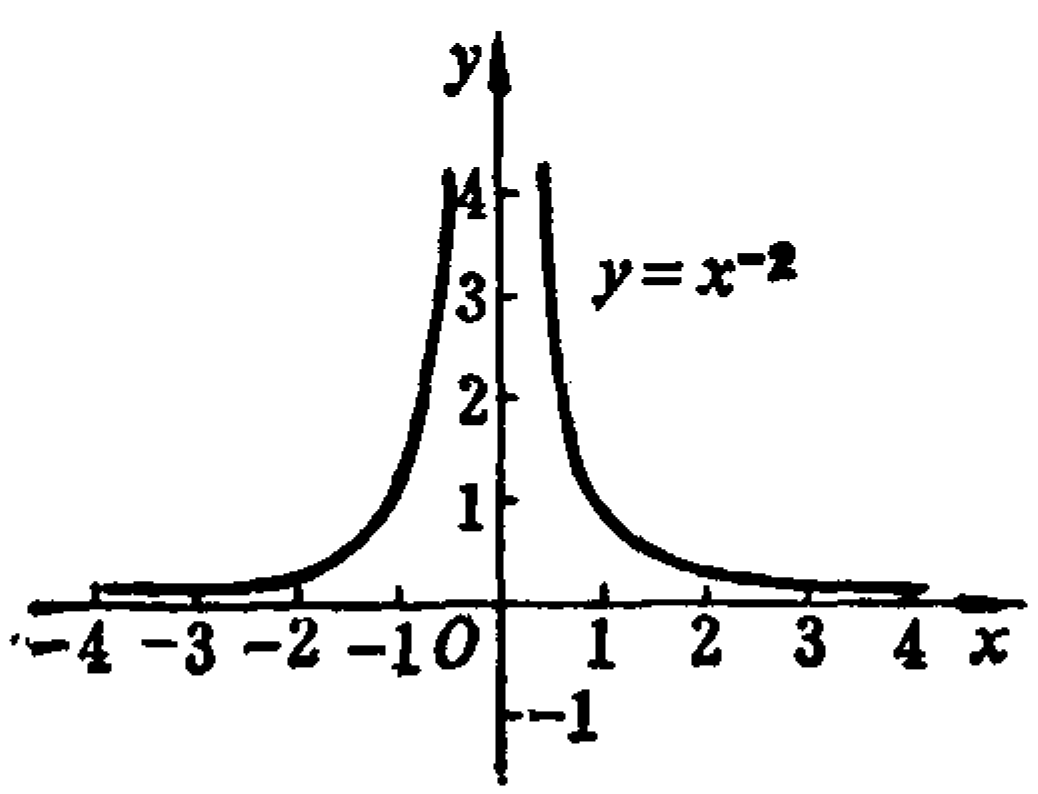


图 1-15

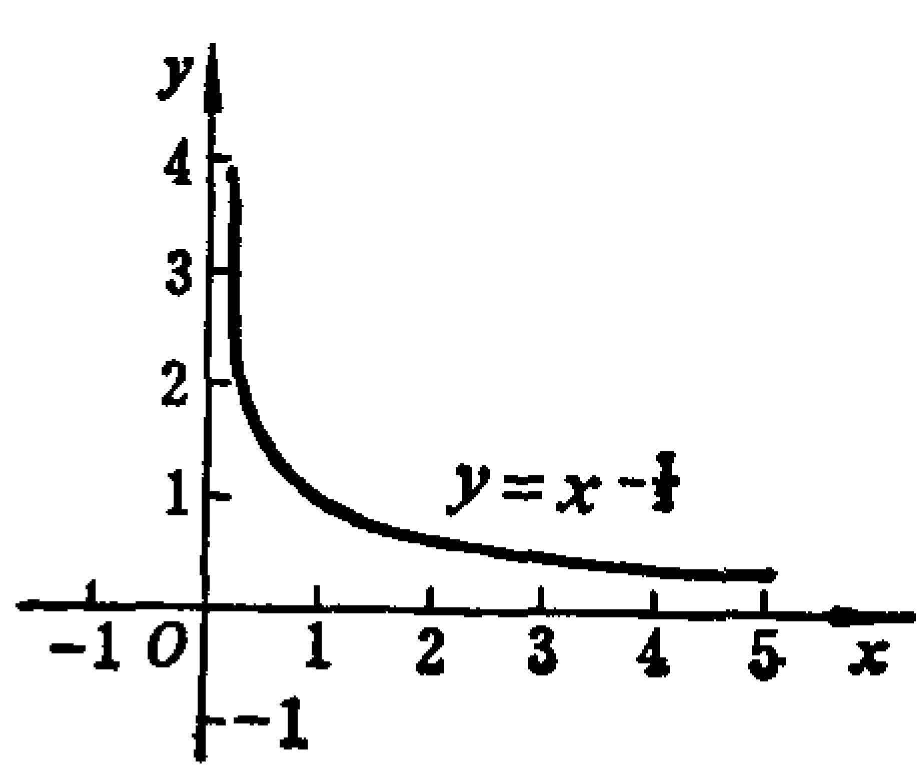


图 1-16

在同一坐标系内画出 $y=x^{-1}$, $y=x^{-2}$, $y=x^{-\frac{1}{2}}$的图象(图 1-17)，我们可以看出，**当 $n<0$ 时，幂函数 $y=x^n$ 有下列性质:**

(1) 图象都通过点$(1, 1)$;

(2) 在第一象限内, 函数值随着 x 的增大而减小;

(3) 在第一象限内, 图象向上与 y 轴无限地接近, 向右与 x 轴无限地接近.

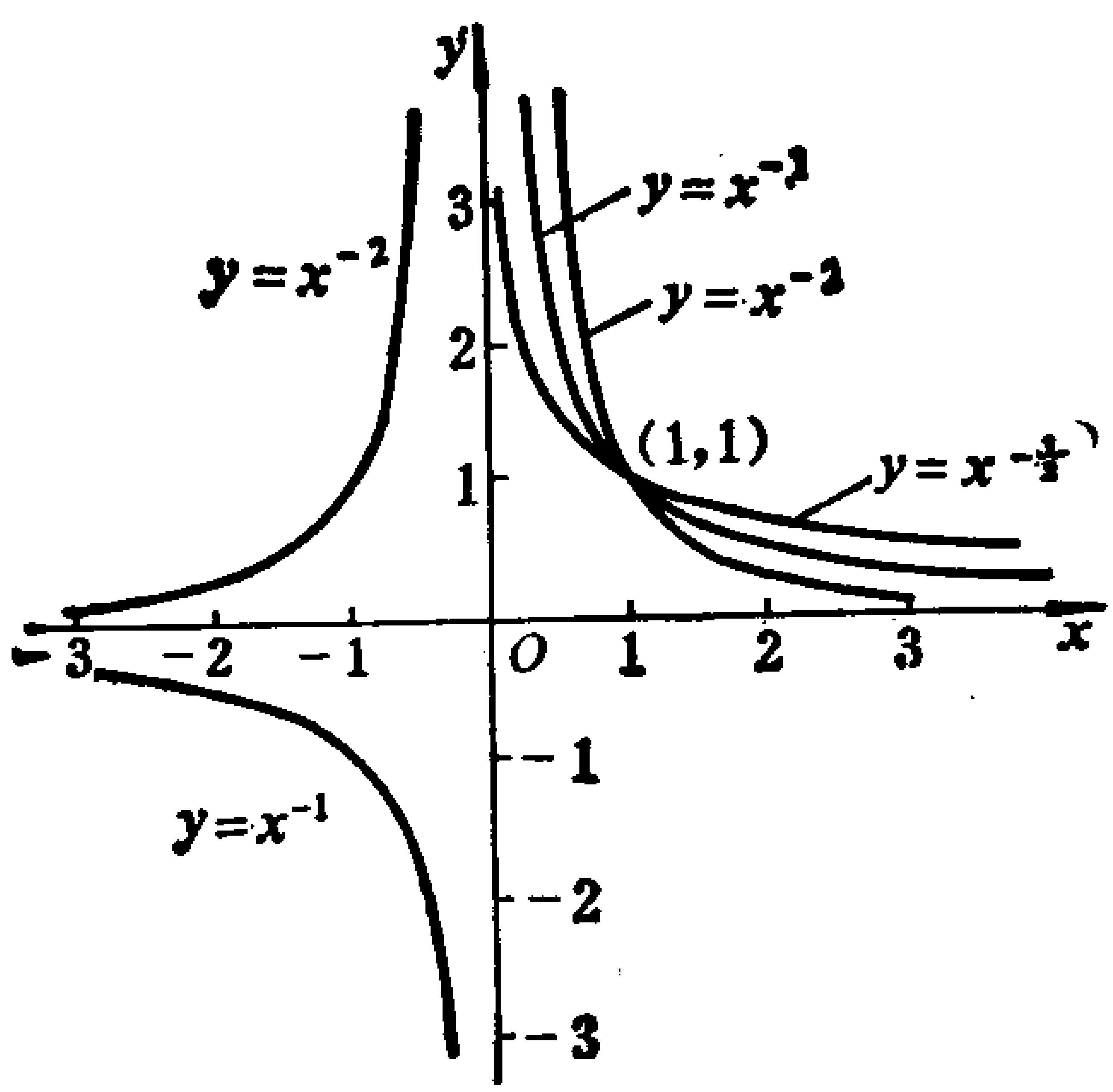


图 1-17

例 3 比较下列各题中两个值的大小:

(1) $2.2^{-\frac{2}{3}}$, $1.8^{-\frac{2}{3}}$; (2) $0.15^{-1.2}$, $0.17^{-1.2}$.

解: (1) 考察幂函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$, 在第一象限内, y 的值随 x 的增大而减小.

$\because$ $2.2>1.8$,

$\therefore$ $2.2^{-\frac{2}{3}}<1.8^{-\frac{2}{3}}$.

(2) 考察幂函数 $y=x^{-1.2}$, 同理,

$\because$ $0.15<0.17$,

$\therefore$ $0.15^{-1.2}>0.17^{-1.2}$.

练 习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{-4}$;　　(2) $y=x^{\frac{1}{5}}$;

(3) $y=x^{-\frac{3}{2}}$;　　(4) $y=x^{\frac{2}{3}}$;

(5) $y=x^{\frac{3}{2}}$;　　(6) $y=x^{-\frac{4}{5}}$.

2. 画出函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的图象.

3. 在同一坐标系内画出下列各题中两个函数的图象，并加以比较：

(1) $y=x^3, y=x^4$;　　(2) $y=x^{-3}, y=x^{-4}$.

4. 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $1.3^{\frac{3}{4}}, 1.5^{\frac{3}{4}}$;　　(2) $0.21^{\frac{2}{5}}, 0.27^{\frac{2}{5}}$.

5. 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $3^{-\frac{5}{2}}, 3.1^{-\frac{5}{2}}$;　　(2) $1.1^{-\frac{1}{2}}, 0.9^{-\frac{1}{2}}$.

1.6 函数的单调性

我们在研究一次函数、二次函数和幂函数时，根据函数的图象研究了函数在某个区间上增大或减小的性质.

一般地，对于给定区间上的函数 $f(x)$:

1. 如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**增函数**(图 1-18(1))；

2. 如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$在这个区

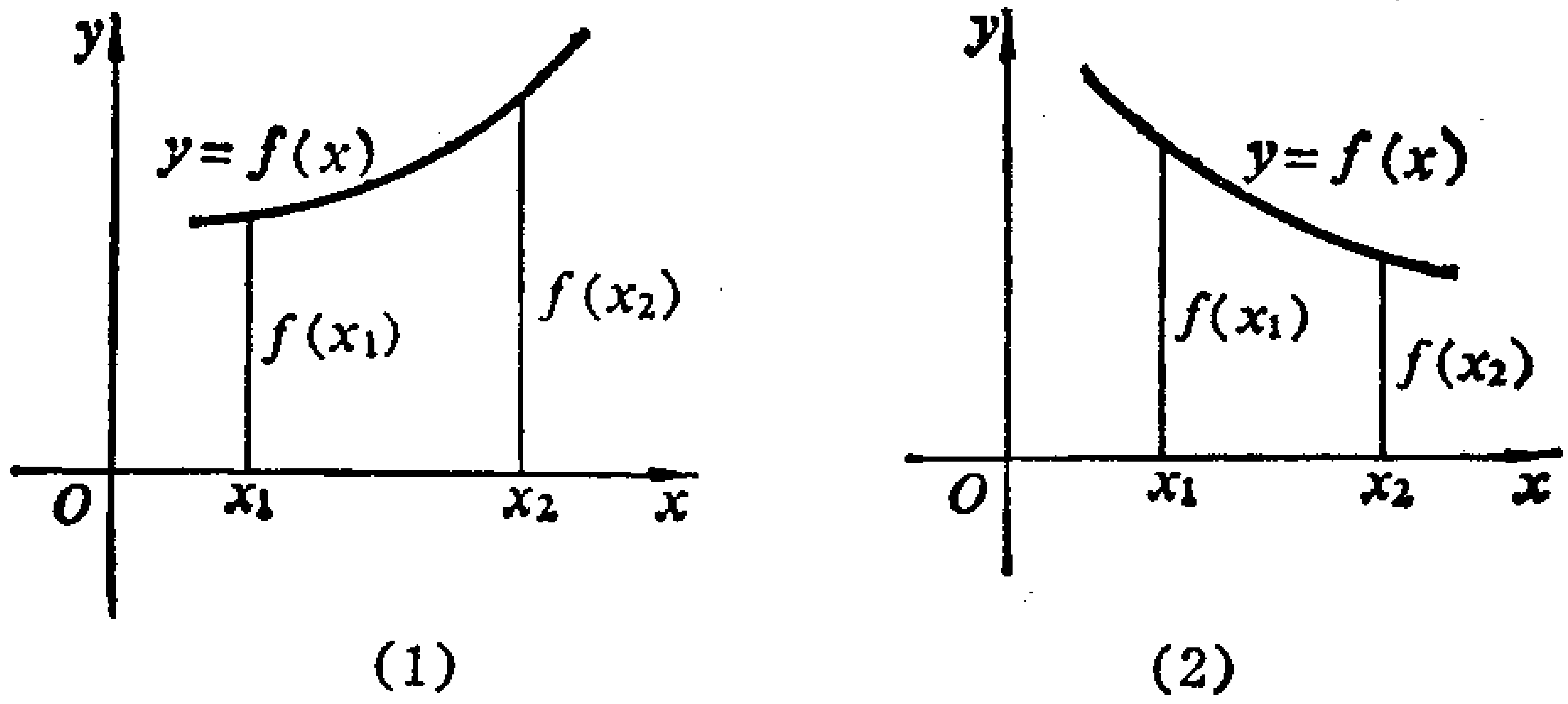


图 1-18

间上是**减函数**(图 1-18(2)).

如果函数$y=f(x)$在某个区间上是增函数或减函数，就说$f(x)$在这一区间上具有(严格的)**单调性**，这一区间叫做 $f(x)$ 的**单调区间**.

例 1 图 1-19 是定义在闭区间$[-5,5]$上的函数 $f(x)$的图象. 根据图象说出 $f(x)$ 的单调区间，以及在每一单调区间上，$f(x)$是增函数还是减函数.

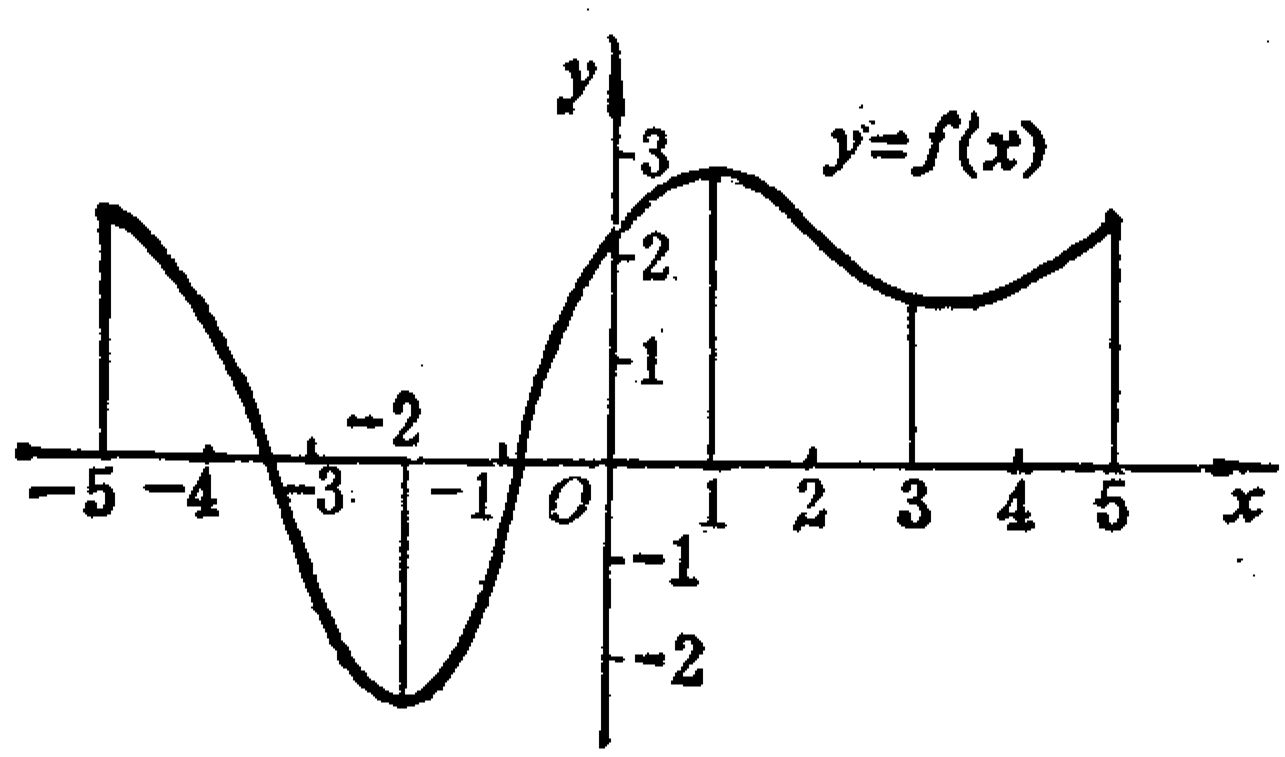


图 1-19

解: 函数 $f(x)$的单调区间有$[-5,-2]$, $[-2,1]$, $[1,3]$, $[3,5]$. 其中，$f(x)$在区间$[-5,-2]$, $[1,3]$上是减函数，在区间$[-2,1]$, $[3,5]$上是增函数.

例 2 证明函数 $f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函

数。

证明: 设 x_1, x_2 是任意两个实数, 且 $x_1<x_2$, 则

$$f(x_1)=3x_1+2, \qquad f(x_2)=3x_2+2.$$

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1)&=(3x_2+2)-(3x_1+2)\\ &=3(x_2-x_1). \end{aligned}$$

$\because \quad x_2>x_1, \qquad x_2-x_1>0,$

$\therefore \quad f(x_2)-f(x_1)>0, \quad f(x_2)>f(x_1).$

所以 $f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

例 3 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数。

证明: 设 $x_1>0, x_2>0$, 且 $x_1<x_2$, 则

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}, \qquad f(x_2)=\frac{1}{x_2},$$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}.$$

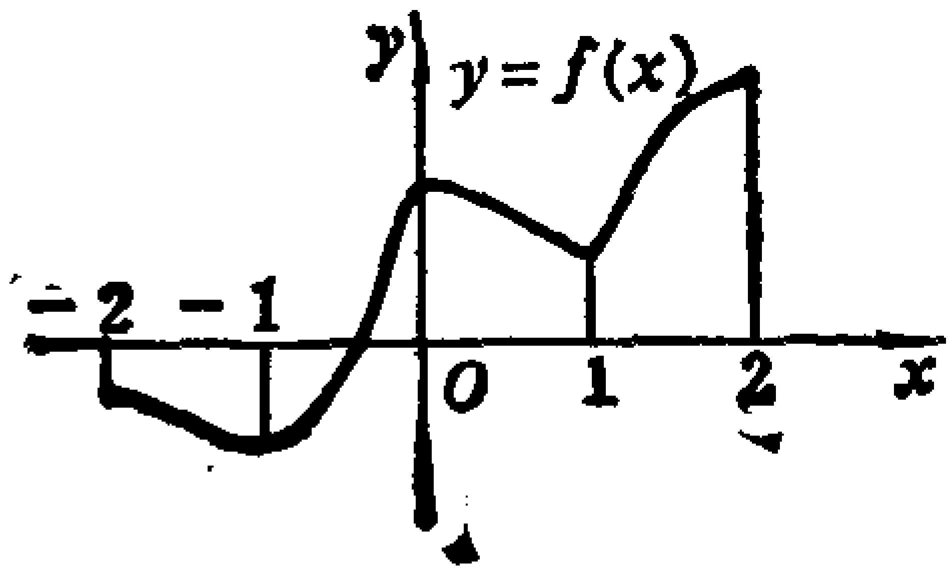
由 $x_1>0, x_2>0$, 得 $x_1x_2>0$; 又由 $x_1<x_2$, 得 $x_1-x_2<0$. 于是

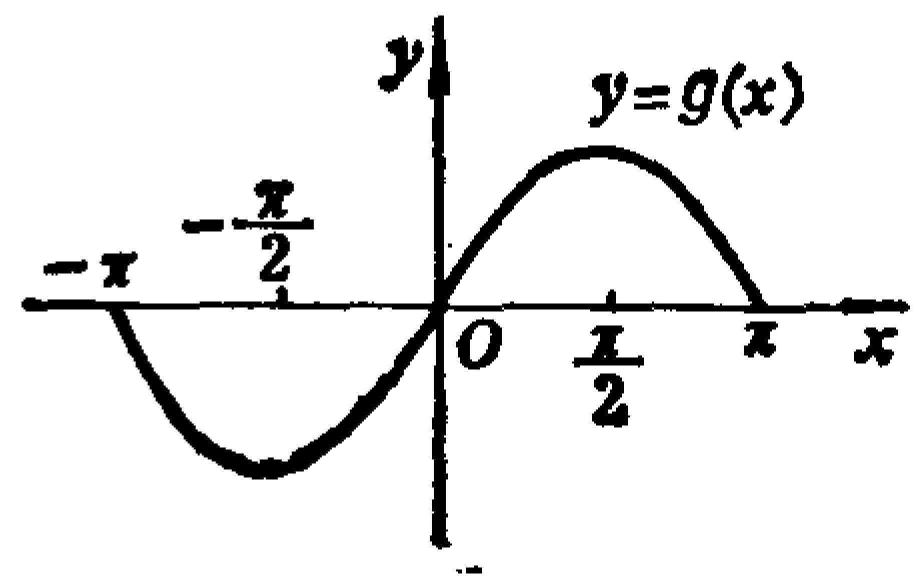
$$f(x_2)-f(x_1)<0, \quad f(x_2)<f(x_1).$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

练　习

1. 如图, 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象(包括端点), 根据图象说出函数的单调区间, 以及在每一单调区间上, 函数是增函数还是减函数.
2. 证明函数 $f(x)=-2x+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。





（第 1 题）

3. 证明函数$f(x)=\frac{3}{x}$在$(-\infty, 0)$上是减函数。

4. 证明函数 $f(x)=x^2+1$ 在$(0, +\infty)$上是增函数。

1.7 函数的奇偶性

对于函数$f(x)=3x$，有 $f(-x)=-3x$，即 $f(-x)=-f(x)$；而对于函数$f(x)=x^2$，有$f(-x)=(-x)^2=x^2$，即$f(-x)=f(x)$。

一般地，对于函数$f(x)$：

1. 如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做**奇函数**；

2. 如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做**偶函数**.

例 1 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=x^3$；　　(2) $f(x)=2x^4+3x^2$；

(3) $f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$；　　(4) $f(x)=x+1$.

解： (1) $f(-x)=(-x)^3=-x^3$，即

$$f(-x)=-f(x),$$

所以$f(x)=x^3$是奇函数.

(2) $f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2=2x^4+3x^2$, 即

$$f(-x)=f(x),$$

所以 $f(x)=2x^4+3x^2$ 是偶函数.

(3) $f(-x)=(-x)^3+(-x)^{-\frac{1}{3}}=-x^3-x^{-\frac{1}{3}}$

$$=-(x^3+x^{-\frac{1}{3}}),$$

即

$$f(-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$ 是奇函数.

(4) $f(-x)=-x+1$, $-x+1\neq -f(x)$, 而且 $-x+1\neq f(x)$, 所以 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

例 2 已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数?

解: 设 $x_1<0$, $x_2<0$, 而且 $x_1<x_2$.

$\because$ $f(x)$ 是奇函数,

$\therefore$ $f(-x_1)=-f(x_1)$, $f(-x_2)=-f(x_2)$. (1)

由假设可知 $-x_1>0$, $-x_2>0$, 而且 $-x_1>-x_2$. 又已知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 于是有

$$f(-x_1)>f(-x_2). \tag{2}$$

把(1)代入(2), 得 $-f(x_1)>-f(x_2)$, 从而

$$f(x_1)<f(x_2).$$

由此可知, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数.

关于奇函数、偶函数的图象, 有下面的定理.

定理 1 奇函数的图象关于原点成中心对称图形; 反过来, 如果一个函数的图象关于原点成中心对称图形, 那么这个

函数是奇函数.

证明: 设函数 $f(x)$ 是奇函数，则有 $f(-x)=-f(x)$. 如图 1-20, 在 $f(x)$ 的图象上任取一点 $P(a, f(a))$，那么 P 关于原点的对称点是点 $P'(-a, -f(a))$, 即 $P'(-a, f(-a))$. 而点 $P'(-a, f(-a))$ 是 $f(x)$ 的图象上的点. 这就是说，函数 $f(x)$ 图象上任意一点关于原点的对称点都在 $f(x)$ 的图象上, 所以 $f(x)$ 的图象关于原点成中心对称图形.

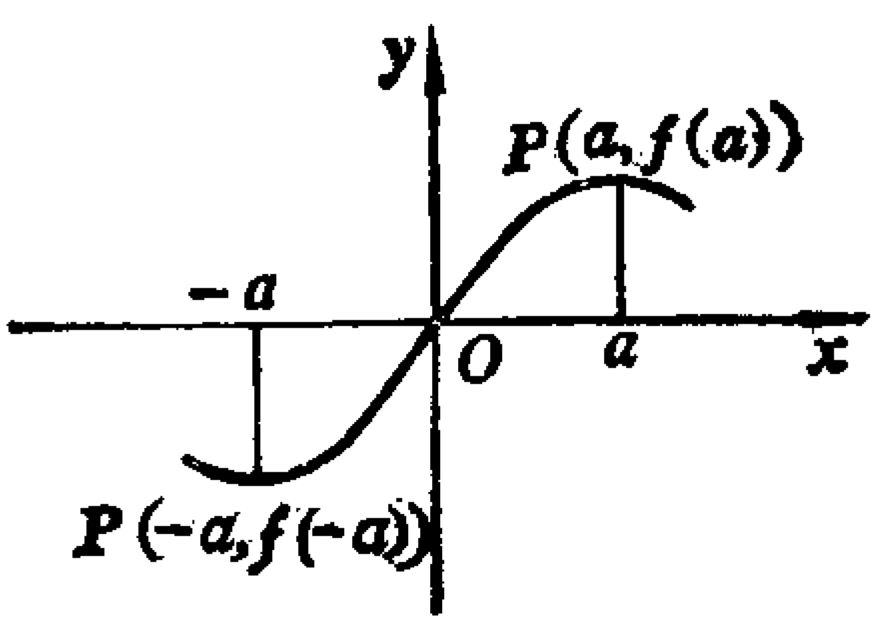


图 1-20

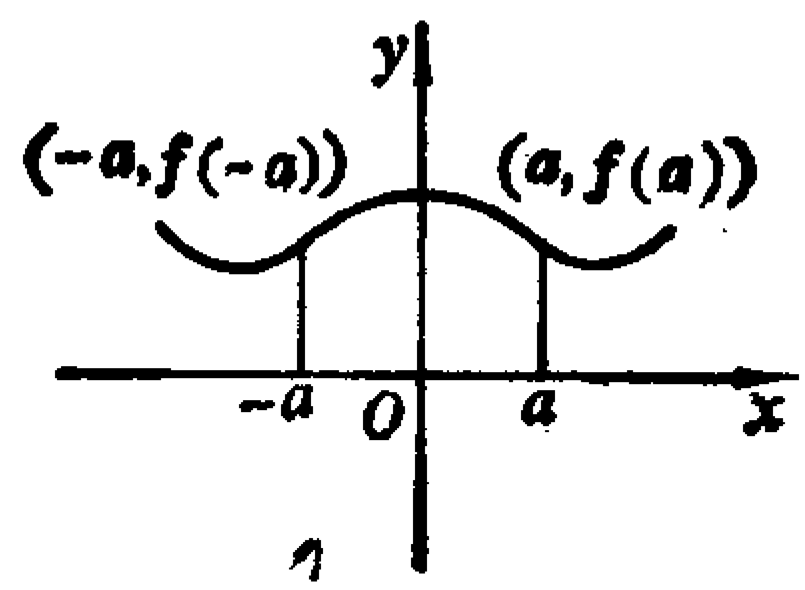


图 1-21

反过来，如果 $f(x)$ 的图象关于原点成中心对称图形, 在 $f(x)$ 的图象上任取一点 $P(a, f(a))$，那么点 P 关于原点的对称点 $P'(-a, -f(a))$ 也在 $f(x)$ 的图象上. 因为 $x=-a$ 时, $f(x)=f(-a)$，而函数值是唯一的 (即每一个原象只有一个象), 即有 $f(-a)=-f(a)$. 但 x 取值是任意的, 于是在 $f(x)$ 的整个定义域内都有 $f(-x)=-f(x)$. 从而 $f(x)$ 是奇函数.

定理 2　偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形; 反过来, 如果一个函数的图象关于 y 轴成轴对称图形, 那么这个函数是偶函数.

请同学们自己证明(参看图 1-21).

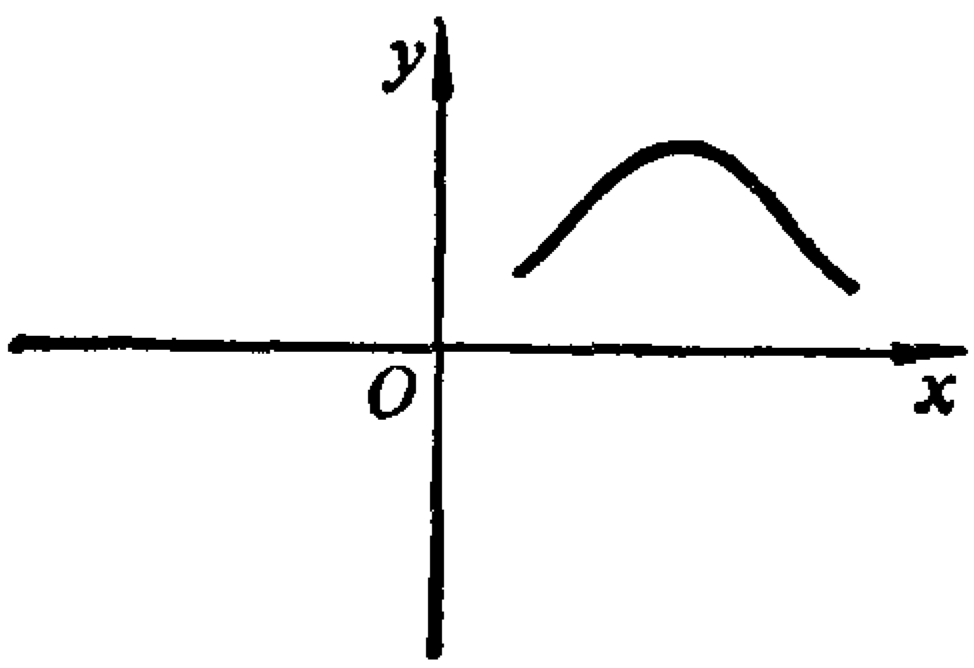
例 3　已知函数 $f(x)$ 是偶函数，它在 y 轴右边的图象如图 1-22(1)所示, 画出 $f(x)$ 在 y 轴左边的图象.

解: 因为偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形，所以画法如下:

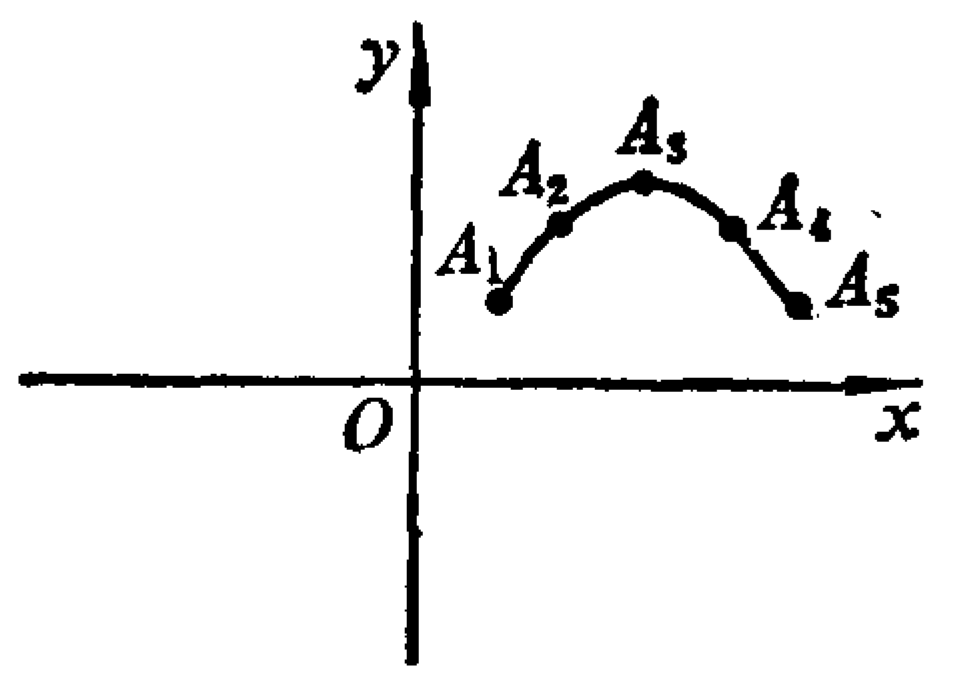
(1) 如图 1-22(2)，在 y 轴右边的图象上取几个点. 例如取点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5（这些点一般应该包括图象曲线的最低、最高点等“关键”点）.

(2) 画出这些点关于 y 轴的对称点. 例如点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 的对称点分别为 $A_1', A_2', A_3', A_4', A_5'$（图 1-22(3)）.

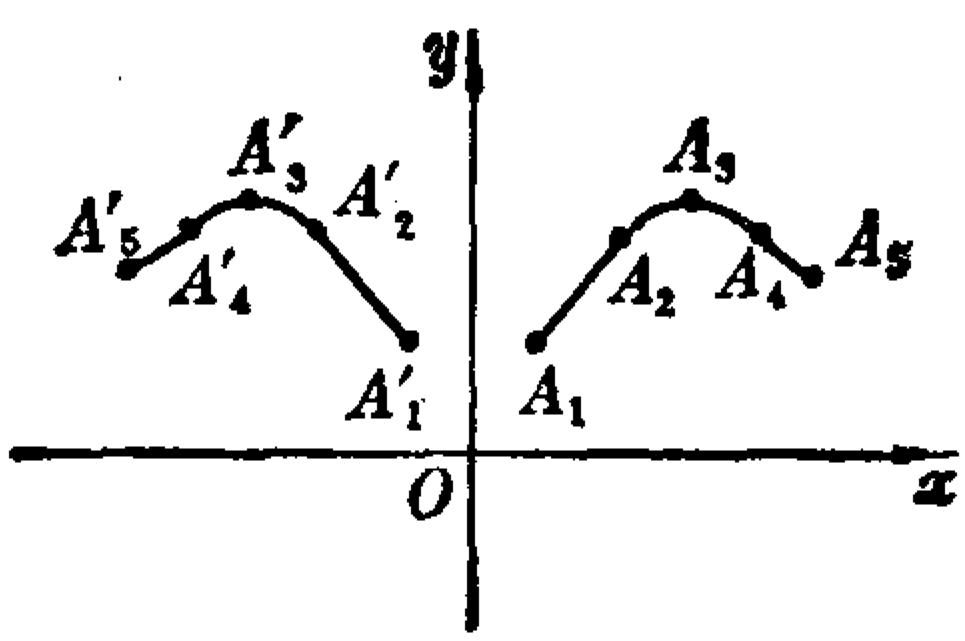
(3) 用一条平滑曲线把对称点连结起来. 例如用平滑曲线连结点 $A_1', A_2', A_3', A_4', A_5'$ 后，就得到 $f(x)$ 在 y 轴左边的图象（图 1-22(3)）.



(1)



(2)



(3)

图 1-22

练　习

1. 判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=x^{-2}$；　　(2) $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}$；

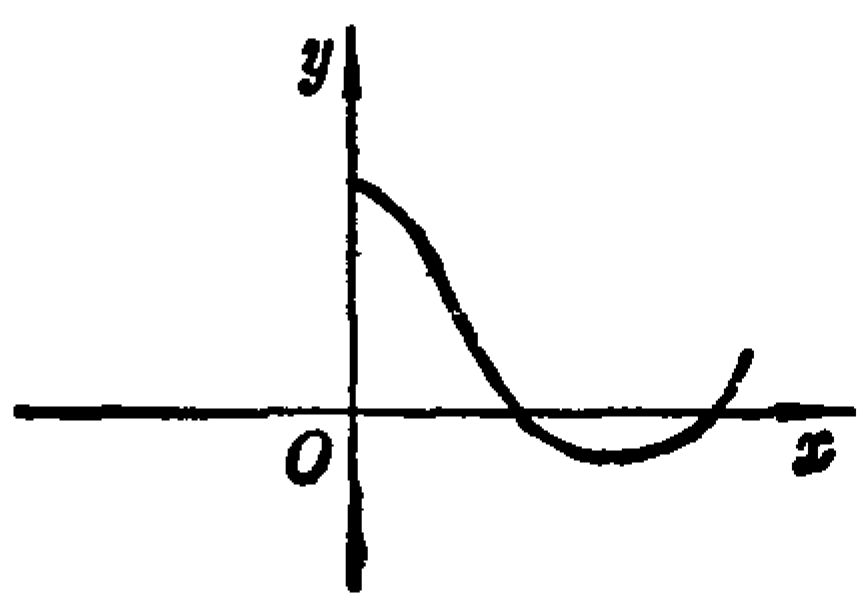
(3) $f(x)=2x+\sqrt[3]{x}$；　　(4) $f(x)=x+\frac{1}{x}$；

(5) $f(x)=2x^{-4}-x^{-2}$.

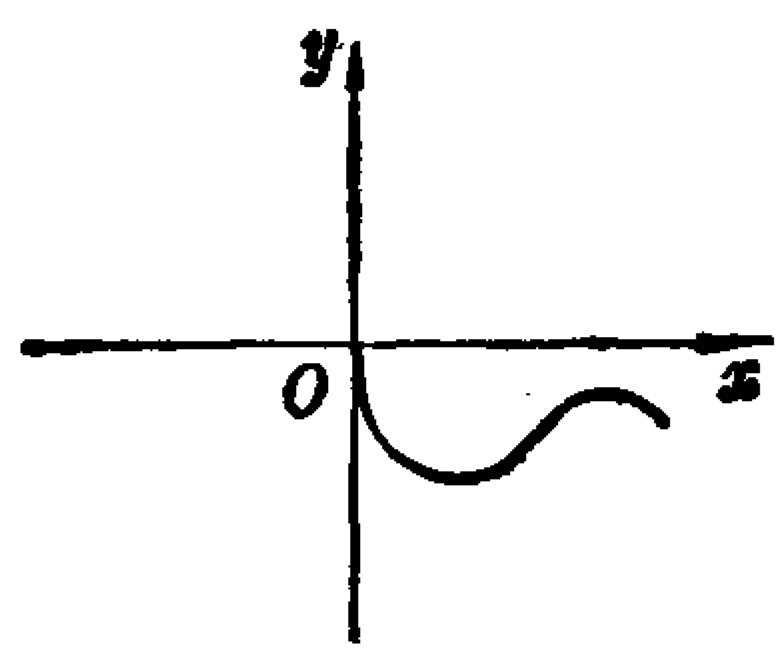
2. 证明函数 $y=x^n$ 当 n 为奇数时是奇函数，当 n 为偶数时是偶函数.

3. 已知函数 $f(x)$是偶函数，而且在$(-\infty, 0)$上是增函数. $f(x)$在$(0, +\infty)$上是增函数还是减函数？

4. 如图，已知偶函数 $f(x)$在 y 轴右边的一部分图象，根据偶函数的性质，画出它在 y 轴左边的图象。



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，已知奇函数 $f(x)$在 y 轴右边的一部分图象，根据奇函数的性质，画出它在 y 轴左边的图象。

习 题 三

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{-2}+x^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $y=\frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{(3-x)^{\frac{3}{4}}}$.

2. 在同一坐标系内画出下列各组中两个函数的图象，并加以比较：

(1) $y=x^{\frac{1}{3}}$, $y=x^{\frac{1}{4}}$; (2) $y=x^{-\frac{1}{2}}$, $y=x^{-\frac{1}{3}}$.

3. 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $5.1^{-2}, 5.09^{-2}$; (2) $1.79^{\frac{1}{3}}$, $1.81^{\frac{1}{3}}$;

(3) $0.48^{-1.6}, 0.49^{-1.6}$; (4) $16.3^{0.8}, 16.2^{0.8}$.

4. 研究幂函数 $y=x^{-3}, y=x^{-4}, y=x^{-\frac{1}{3}}, y=x^{-\frac{1}{4}}$ 的图象分别类似于图 1-17 中哪一个函数的图象.

5. 分下列情况说明函数 $y=mx+b$ 在$(-\infty, +\infty)$上是否具有单调性；如果有，是增函数还是减函数.

(1) $m>0$; (2) $m<0$.

6. 画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=x^2-2x-3$; (2) $f(x)=1-x^2$.

根据图象说出 $f(x)$的单调区间，以及在每一单调区间上，函数是增函数还是减函数；然后根据函数单调性的定义加以证明.

7. 证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty, 0)$上是减函数.

8. 下列函数哪些是奇函数或偶函数，哪些既不是奇函数也不是偶函数？

(1) $f(x)=5x+3$; (2) $f(x)=5x$;

(3) $f(x)=x^2+1$; (4) $f(x)=x^2+2x+1$;

(5) $f(x)=x^{-2}+x^4$; (6) $f(x)=x^{-3}+x$.

9. 分析上题中(1), (2), (3), (4), 回答：

(1) 一次函数 $f(x)=ax+b$ 在什么情况下是奇函数；

(2) 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在什么情况下是偶函数.

10. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，而且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数?

11. (1) $y=x^2$ 及 $y=x^3$ 各是奇函数还是偶函数?

(2) 它们的图象各有怎样的对称性?

(3) 它们在 $(0, +\infty)$ 上各是增函数还是减函数?

(4) 它们在 $(-\infty, 0)$ 上各是增函数还是减函数?

12. (1) $y=x^{-2}$ 及 $y=x^{-3}$ 各是奇函数还是偶函数?

(2) 它们的图象各有怎样的对称性?

(3) 根据第 35 页性质(2)说出它们在 $(-\infty, 0)$ 上各是增函数还是减函数.

1.8 一一映射

看下面从集合 A 到集合 B 的映射(图 1-23):

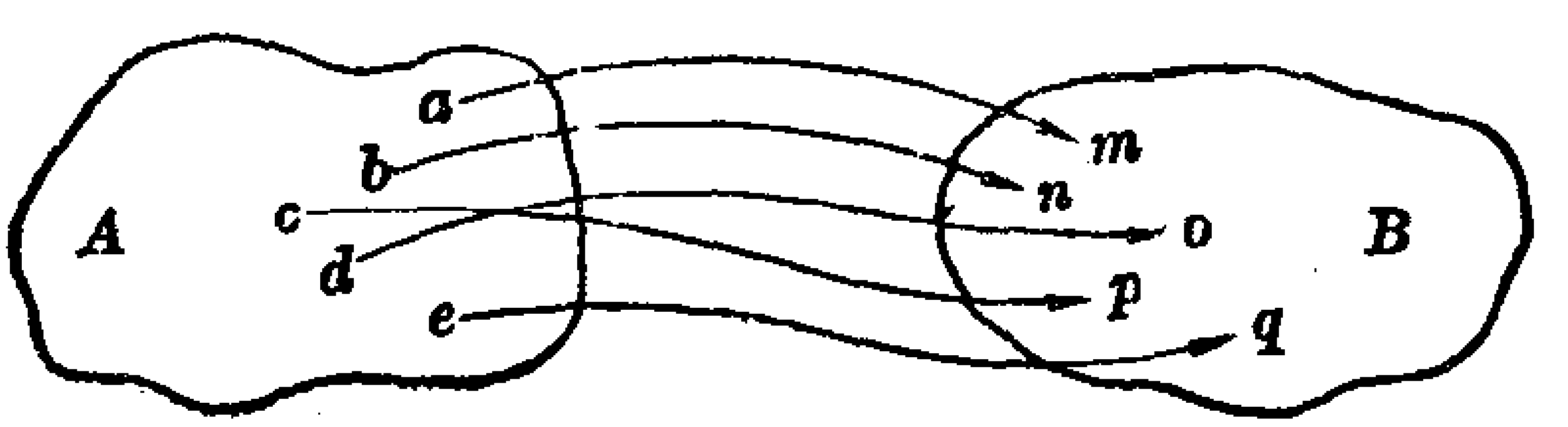


图 1-23

容易看出，这个映射有两个特点：第一，对于集合 A 的不同元素，在集合 B 中有不同的象；第二，集合 B 的每一个元素都是集合 A 的某个元素的象，也就是说集合 B 的每一个元素都有原象.

一般地，设 A, B 是两个集合，f: $A \to B$ 是从集合 A 到集

合B的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合A中的不同元素，在集合B中有不同的象，而且B中每一个元素都有原象，那么这个映射就叫做**A到B上的一一映射.**

例如，图 1-23 中的映射，就是A到B上的一一映射．又如：

(1) 设

$$X=\{1,2,3,4,5,\cdots\},$$
$$Y=\{3,5,7,9,11,\cdots\},$$

取映射f：$X\to Y$，使集合Y中的元素$y=2x+1$和集合X中的元素x对应．这个映射是X到Y上的一一映射．

(2) 把(1)中的Y改为$\{1,3,5,7,9,11,\cdots\}$，其他条件同(1)中一样，那么这样得到的映射f'：$X\to Y$不是X到Y上的一一映射，因为这时Y中的元素1没有原象．

(3) 对于实数集R，取映射f: $R\to \bar{R}^-$，使集合$\bar{R}^-$中的元素$y=x^2$和集合R中的元素x对应．这个映射不是R到$\bar{R}^-$上的一一映射，因为R中的不同元素2与-2在集合$\bar{R}^-$中有同一个象4．

(4) 对于(3)中的映射，如果改为映射f': $\bar{R}^-\to \bar{R}^-$，使象集合$\bar{R}^-$中的元素$y=x^2$和原象集合$\bar{R}^-$中的元素x对应，那么这个映射是$\bar{R}^-$到$\bar{R}^-$上的一一映射．

练　习

1. (1) 举出从集合A到集合B的映射的例子．
   (2) 举出集合A到集合B上的一一映射的例子．
   (3) 映射与一一映射有什么相同和不同的地方？

2. 习题二第 3 题的三个对应中，哪些是映射，哪些是一一映射？

3. 在集合 A 到集合 B 上的一一映射中，

(1) 对于集合 A 中的任意一个元素 a，在集合 B 中是不是有象？是不是只有一个象？

(2) 对于集合 B 中的任意一个元素 b，在集合 A 中是不是有原象？是不是只有一个原象？

4. 下列各表分别表示从集合 A(元素 a)到集合 B(元素 b)的一个映射，判断这些映射是不是 A 到 B 上的一一映射：

(1)

a	2	3	4
b	5	6	7

(2)

a	$0°$	$30°$	$60°$	$120°$	$150°$
b	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

(3)

a	$a\in Q$	$a\in \bar{Q}$
b	1	0

1.9 逆映射

先看图 1-24 所示的映射.

容易看出，这两个映射分别是集合 A 到集合 B 上、集合 B 到集合 A 上的一一映射. 在映射 $f: A\to B$ 作用下的象及原象，分别是在映射 $g: B\to A$ 作用下的原象及象.

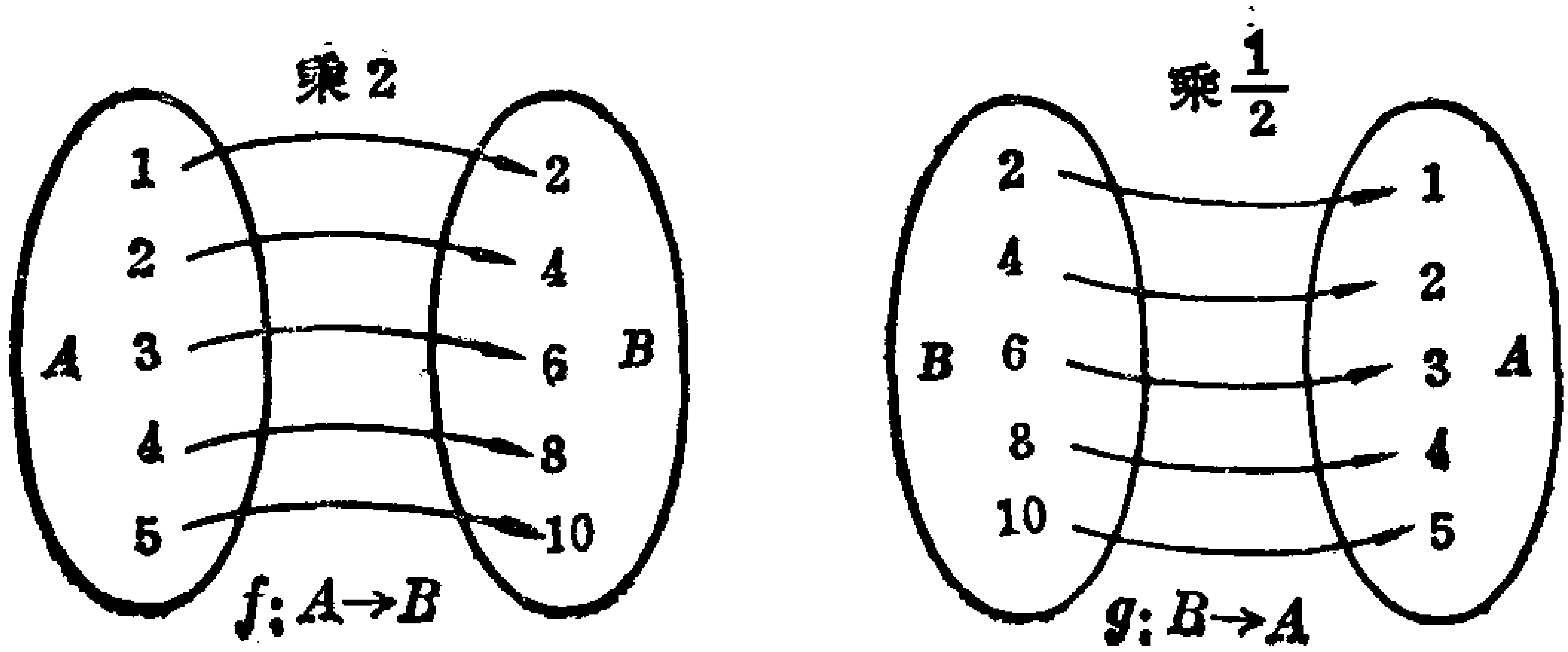


图 1-24

一般地，设 $f: A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样所得的映射叫做映射 $f: A\to B$ 的**逆映射**，记作

$$f^{-1}: B\to A.$$

从逆映射的定义可以知道，映射 $f: A\to B$ 也是映射 $f^{-1}: B\to A$ 的逆映射，而且 $f^{-1}: B\to A$ 也是一一映射(从 B 到 A 上的一一映射).

这样，图 1-24 中的映射 $g: B\to A$，就是 $f: A\to B$ 的逆映射.

现在我们来求第 1.8 节例子中的一一映射的逆映射.

在(1)中的一一映射 $f: X\to Y$ 是使 Y 中的元素 $y=2x+1$ 和 X 中的元素 x 对应. 由 $y=2x+1$，得 $x=\frac{y-1}{2}$. 于是逆映射 $f^{-1}: Y\to X$ 就使 X 中的元素 $x=\frac{y-1}{2}$ 和 Y 中的元素 y 对应.

在(4)中的一一映射 $f': \bar{R}^-\to\bar{R}^-$ 是使象集合 $\bar{R}^-$ 中的元

素 $y=x^2$ 和原象集合 $\bar{R}^-$ 中的元素 x 对应. 由 $y=x^2$, 得 $x=\sqrt{y}$ ($x=-\sqrt{y}\notin\bar{R}^-$, 舍去). 于是逆映射 $(f')^{-1}$: $\bar{R}^-\to\bar{R}^-$ 就使 f' 的原象集合 $\bar{R}^-$ 中的元素 $x=\sqrt{y}$ 和 f' 的象集合中的元素 y 对应.

应该注意: 只有对于一一映射, 我们才研究它的逆映射.

练　习

1. 求下列一一映射 f: $A\to B$ 的逆映射:

(1) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$, $B=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\}$, 一一映射 f: $A\to B$ 使 B 中的元素 $y=\frac{1}{x}$ 和 A 中的元素 x 对应;

(2) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$, $B=\{2, 5, 10, 17, 26, \cdots\}$, 一一映射 f: $A\to B$ 使 B 中的元素 $y=x^2+1$ 和 A 中的元素 x 对应;

(3) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$, $B=\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots\}$, 一一映射 f: $A\to B$ 使 B 中的元素 $y=\frac{x+1}{x}$ 和 A 中的元素 x 对应.

2. 为什么第 1.8 节例(2), (3)中的映射没有逆映射?
3. 举出集合 A 到集合 B 上的一一映射的例子, 并求出它的逆映射.

1.10　反函数

函数 $y=f(x)=2x+4$ ($x\in R$) 是由 $f(x)$ 的定义域 R 到值

域R上的一个一一映射$f: R\to R$确定的，这个一一映射使$f(x)$的值域R中的元素$y=2x+4$和定义域R中的元素x对应．那么，$f: A\to B$的逆映射$f^{-1}: B\to A$就确定了一个函数$x=\frac{1}{2}y-2(y\in R)$，它使$f(x)$的定义域R中的元素$x=\frac{1}{2}y-2$和$f(x)$的值域R中的元素y对应．

一般地，如果确定函数$y=f(x)$的映射$f: A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射$f^{-1}: B\to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的**反函数**．函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是函数$x=f^{-1}(y)$的值域、定义域．

这样，函数$x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y-2(y\in R)$就是函数$y=f(x)=2x+4(x\in R)$的反函数．

又如，第1.8节例(4)中的映射$f: \bar{R}^-\to\bar{R}^-$确定函数$y=f(x)=x^2(x\in\bar{R}^-)$，由第1.9节知道，这个映射的逆映射$f^{-1}: \bar{R}^-\to\bar{R}^-$确定函数$x=f^{-1}(y)=\sqrt{y}\,(y\in\bar{R}^-)$．函数$x=f^{-1}(y)=\sqrt{y}\,(y\in\bar{R}^-)$就是函数$y=f(x)=x^2(x\in\bar{R}^-)$的反函数．

在函数式$x=f^{-1}(y)$中，y表示自变量，x表示函数．但在习惯上，我们一般用x表示自变量，用y表示函数，为此我们常常对调函数式$x=f^{-1}(y)$中的字母x，y，把它改写成$y=f^{-1}(x)$(在本书中，今后凡不特别说明，函数的反函数都是指这种经过改写的反函数)．

例 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1(x\in R)$；　　(2) $y=x^3+1(x\in R)$；

(3) $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$；

(4) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\in R$, 且 $x\neq 1)$。

解: (1)由 $y=3x-1$, 可得 $x=\dfrac{y+1}{3}$,

∴ 函数 $y=3x-1(x\in R)$的反函数是 $y=\dfrac{x+1}{3}(x\in R)$;

(2) 由 $y=x^3+1$, 可得 $x=\sqrt[3]{y-1}$,

∴ 函数 $y=x^3+1$ $(x\in R)$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{x-1}$ $(x\in R)$;

(3) 由 $y=\sqrt{x}+1$, 可得 $x=(y-1)^2$,

∴ 函数 $y=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$ 的反函数是 $y=(x-1)^2$ $(x\geqslant 1)$;

(4) 由 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$, 可得 $x=\dfrac{y+3}{y-2}$,

∴ 函数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\in R$, 且 $x\neq 1)$的反函数是 $y=\dfrac{x+3}{x-2}$ $(x\in R$, 且 $x\neq 2)$。

求反函数时，由于确定函数 $y=f(x)$的映射 f: $A\to B$ 是 f 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射，我们可以先把函数式 $y=f(x)$看作以 x 为未知数的方程，从中解出 $x=f^{-1}(y)$，再改写为 $y=f^{-1}(x)$。

如果函数 $y=f(x)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，那么显然函数 $y=f^{-1}(x)$的反函数就是 $y=f(x)$。

练　习

1. 已知函数 $y=f(x)$, 求它的反函数 $y=f^{-1}(x)$:

(1) $y=-2x+3(x\in R)$;

(2) $y=-\frac{2}{x}(x\in R$, 且 $x\neq 0)$;

(3) $y=x^4(x\geqslant 0)$;

(4) $y=\frac{x}{3x+5}(x\in R$, 且 $x\neq -\frac{5}{3})$.

(1) 函数 $y=2x^2-3(x\in R)$ 有没有反函数?为什么?

(2) 怎样改变定义域,才能使它有反函数?

1.11 互为反函数的函数图象间的关系

看下面的例题:

例 1 求函数 $y=3x-2(x\in R)$ 的反函数,并且画出原来的函数和它的反函数的图象.

解: 从 $y=3x-2$,得 $x=\frac{y+2}{3}$, 因此, 函数 $y=3x-2$ $(x\in R)$ 的反函数是 $y=\frac{x+2}{3}(x\in R)$.

函数 $y=3x-2(x\in R)$ 和它的反函数 $y=\frac{x+2}{3}(x\in R)$ 的图象如图 1-25 中所示.

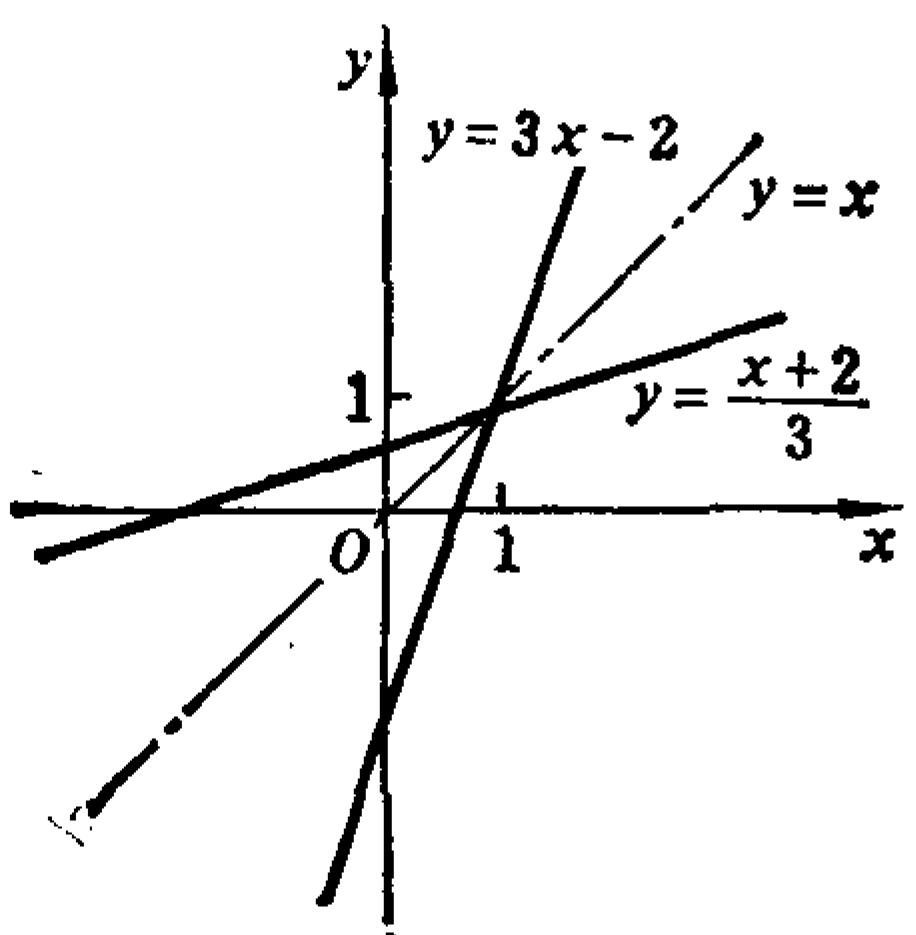


图 1-25

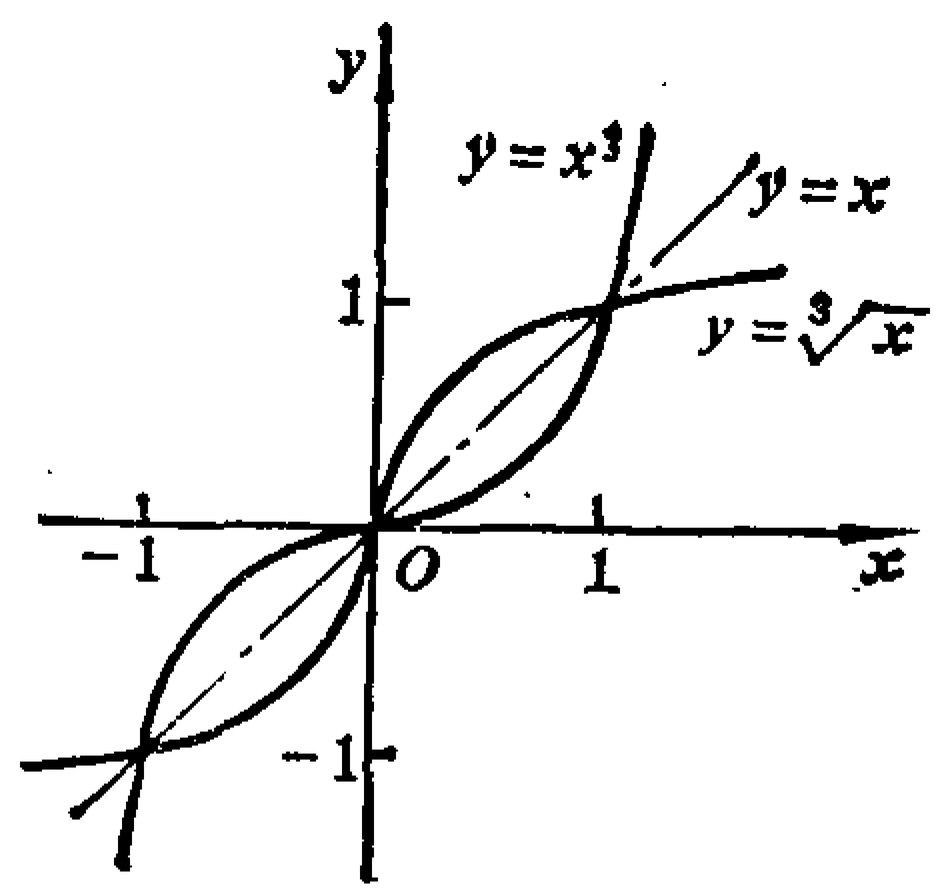


图 1-26

例 2 求函数 $y=x^3(x\in R)$的反函数，并且画出原来的函数和它的反函数的图象.

解： 从 $y=x^3$，得 $x=\sqrt[3]{y}$. 因此，函数 $y=x^3(x\in R)$的反函数是$y=\sqrt[3]{x}\ (x\in R)$.

函数 $y=x^3$ 和它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\in R)$ 的图象如图 1-26 中所示.

从图 1-25 可以看出，函数 $y=3x-2$ 和它的反函数 $y=\frac{x+2}{3}(x\in R)$的图象是以直线$y=x$为对称轴的对称图形(以后简称**关于直线 $y=x$ 对称**；同样，以原点为对称中心的对称图形也简称**关于原点对称**). 从图 1-26 也可以看出，函数 $y=x^3(x\in R)$和它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\in R)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

现在我们来证明下面的定理:

定理　函数 $y=f(x)$的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

证明： 设 $M(a, b)$是 $y=f(x)$的图象上的任意一点，那么 $x=a$ 时，$f(x)$有唯一的值 $f(a)=b$. 因为 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，所以 $x=b$ 时，$f^{-1}(x)$有唯一的值 $f^{-1}(b)=a$，即点 $M'(b, a)$在反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象上.

如果 $a=b$，那么 M，M' 是直线 $y=x$ 上的同一个点，因此它们关于直线 $y=x$ 对称.

现设 $a\neq b$. 如图 1-27，在直线 $y=x$ 上任取一点 $P(c, c)$，连结 PM，PM' 及 MM'. 由两点间距离公式，

$$PM=\sqrt{(a-c)^2+(b-c)^2},$$

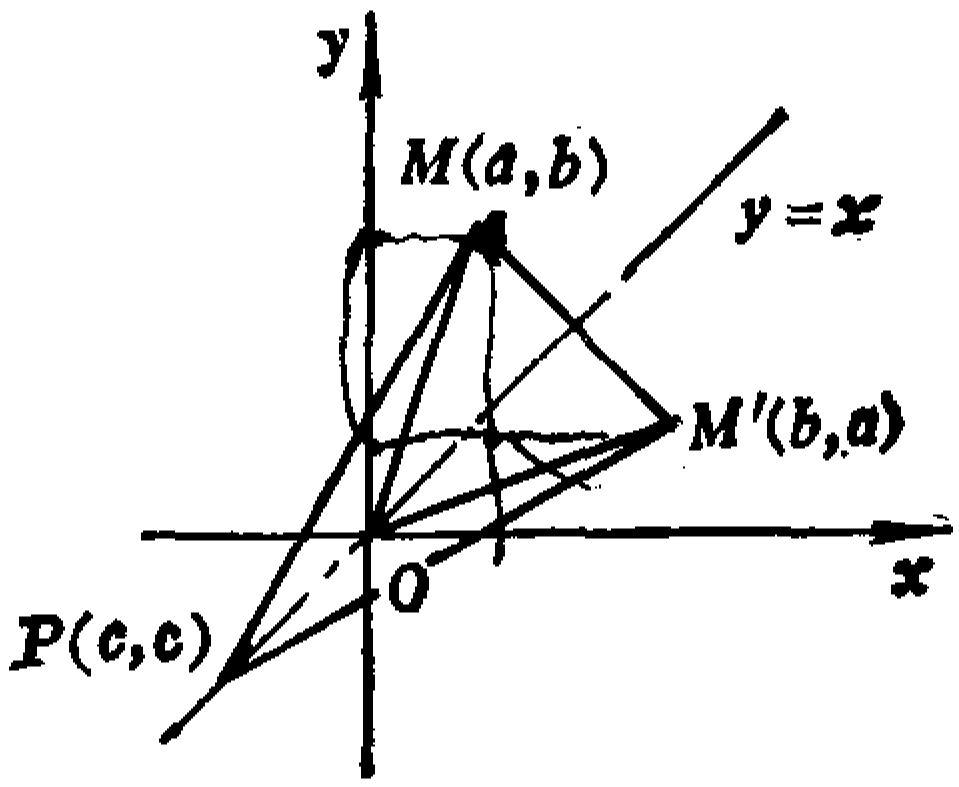


图 1-27

$$PM'=\sqrt{(b-c)^2+(a-c)^2},$$

$$\therefore \qquad PM=PM'.$$

由此可知，直线 $y=x$ 上任意一点到两个定点 M, M' 的距离相等，因此直线 $y=x$ 是线段 MM' 的垂直平分线，从而点 M, M' 关于直线 $y=x$ 对称.

因为点 M 是 $y=f(x)$ 的图象上的任意一点，所以 $y=f(x)$ 图象上任意一点关于直线 $y=x$ 的对称点都在它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上. 由 f, f^{-1} 的互逆性可知，函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象上任意一点关于直线 $y=x$ 的对称点也都在它的反函数 $y=f(x)$ 的图象上. 这就是说，$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

练　习

1. (1) 在直角坐标系内，画出直线 $y=x$，然后找出下面这些点关于直线 $y=x$ 的对称点，并写出它们的坐标（不必说明理由）：

$$A(2, 3), B(1, 0), C(-2, -1), D(0, -1).$$

(2) 上面所求得的各对称点的坐标同原来的点的坐标有

什么关系？

(3) 求出点$P(x_0, y_0)$关于直线 $y=x$ 的对称点Q的坐标。

2. 设 $a\neq0, b\neq0$, 求证下列各题中的两个点关于直线 $y=x$ 对称：

(1) $M(a, 0), M'(0, a)$; (2) $M(a, a), M'(a, a)$;

(3) $M(a, b), M'(b, a)$.

3. 求下列函数的反函数，并画出函数及其反函数的图象：

(1) $y=4x-\frac{1}{2}(x\in R)$;

(2) $y=\frac{1}{x+3}(x\in R$, 且$x\neq-3)$.

4. 画出函数 $y=x^2(x\in[0, +\infty))$的图象，再利用对称关系画出它的反函数的图象。

习题四

1. 下列各表分别表示从集合A(元素a)到集合B(元素b)的一个映射，判断这些映射是不是A到B上的一一映射：

(1)

a	1	2	3	4
b	-1	-1	-1	-1

(2)

a	1	2	3	4
b	3	6	9	12

(3)

a	3	4	5	6
b	2	3	2	4

(4)

a	3	4	5	6	
b	2	3	4	5	6

2. 设 $X=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, 对应法则是把X中的元素“取绝对值”. 这个对应是不是从X到Y的映射?是不是X到Y上的一一映射?

3. 求下列一一映射 $f: A\to B$ 的逆映射:

   (1) $A=\{x|x\geqslant 1\}$, $B=\{y|y\geqslant 0\}$, 一一映射 $f: A\to B$ 使 B 中的元素 $y=\sqrt{x-1}$ 和 A 中的元素 x 对应;

   (2) $A=\{x|x\neq 0\}$, $B=\{y|y\neq 1\}$, 一一映射 $f: A\to B$ 使 B 中的元素 $y=1-\dfrac{1}{x}$ 和 A 中的元素 x 对应.

4. 下列各映射有没有逆映射? 如果有, 写出逆映射; 如果没有, 说明为什么.

   (1) $A=\{x|x\in Q\}$, $B=\{y|y\in R\}$, 映射 $f: A\to B$ 使 B 中的元素 $y=2x$ 和 A 中的元素 x 对应;

   (2) $A=\{x|x\in Z\}$, $B=\{y|y\in Z\}$, 映射 $f: A\to B$ 使 B 中的元素 $y=3x$ 和 A 中的元素 x 对应;

   (3) 映射 $f: R\to R$ 使象集合中的元素 $y=x^3$ 和原象集合中的元素 x 对应;

   (4) 设 $A=\{\alpha|0°\leqslant\alpha\leqslant 180°\}$, $B=[0, 1]$, 映射 $f: A\to B$ 使 B 中的元素 $y=\sin\alpha$ 和 A 中的元素 α 对应.

5. x 取什么值, 函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x\in \overline{R}^-)$ 的值等于下列各数?

   (1) $\dfrac{1}{2}$;　　(2) 0.1;　　(3) 1;　　(4) $\dfrac{1}{17}$.

6. 下列函数中哪些互为反函数?

$y=x^3$, $y=5+x$, $y=2x$,

$y=-4x$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x-5$,

$y=\frac{x}{2}$, $y=-\frac{1}{4}x$.

7. 求下列函数的反函数:

(1) $y=-\frac{1}{x}+3(x\neq 0)$; (2) $y=x^5+1(x\in R)$;

(3) $y=\sqrt{x+5}(x\geqslant -5)$; (4) $y=\sqrt{2x-4}(x\geqslant 2)$;

(5) $y=x^{\frac{3}{5}}-2(x\in R)$; (6) $y=\frac{2x}{5x+1}\left(x\neq -\frac{1}{5}\right)$.

8. 已知函数 $y=\sqrt{25-4x^2}$.

(1) 当 $x\in\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$时,这个函数是否有反函数?如果有反函数,将它写出来,并指出反函数的定义域.

(2) 就 $x\in\left[0, \frac{5}{2}\right]$的情况重新回答第(1)题中的问题.

9. 求下列函数的反函数,并写出原来的函数及其反函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{x-1}$; (2) $y=x^3+1$.

10. 求下列函数的值域:

(1) $y=\frac{7}{x+2}(x\neq -2)$; (2) $y=\frac{x}{x+1}(x\neq -1)$;

(3) $y=\sqrt{16-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 4)$;

(4) $y=\sqrt{x^2-49}(x\leqslant -7)$.

11. 已知函数 $y=2|x|$.

(1) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，这个函数是否有反函数？如果有反函数，将它写出来，并指出反函数的定义域。$x\in(-\infty,+\infty)$ 时呢？

(2) 如果有反函数，在同一坐标系内画出函数 $y=2|x|$ 及其反函数的图象。

12. 求证函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq-1)$ 的反函数就是它本身。然后说明这个函数的图象关于直线 $y=x$ 具有什么特点，并利用这特点画出函数的简图(用描点法)。

四　指数函数和对数函数

1.12　指数函数

我们来研究下面的问题：

某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，……．一个这样的细胞分裂 x 次后，得到的细胞的个数 y 与 x 的函数关系式是

$$y=2^x.$$

在这个函数里，自变量 x 出现在指数的位置上，而底数 2 是一个大于零且不等于 1 的常量．

一般地，函数 $y=a^x$ 叫做**指数函数**，其中 a 是一个大于零且不等于 1 的常量．函数的定义域是实数集 R．❶

现在研究指数函数 $y=a^x$ 的图象和性质．先画出一些指

❶ $a>0$, x 是一个无理数时，a^x 是一个确定的实数．对于无理数指数幂，过去学过的有理数指数幂的性质和运算法则都适用．有关概念和定理证明在本书中从略．

数函数的图象，例如，画出 $y=2^x$，$y=10^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.

列出 x，y 的对应值表，用描点法画出图象(图 1-28)：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

x	…	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	…
$y=10^x$	…	0.1	0.32	1	3.16	10	…

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

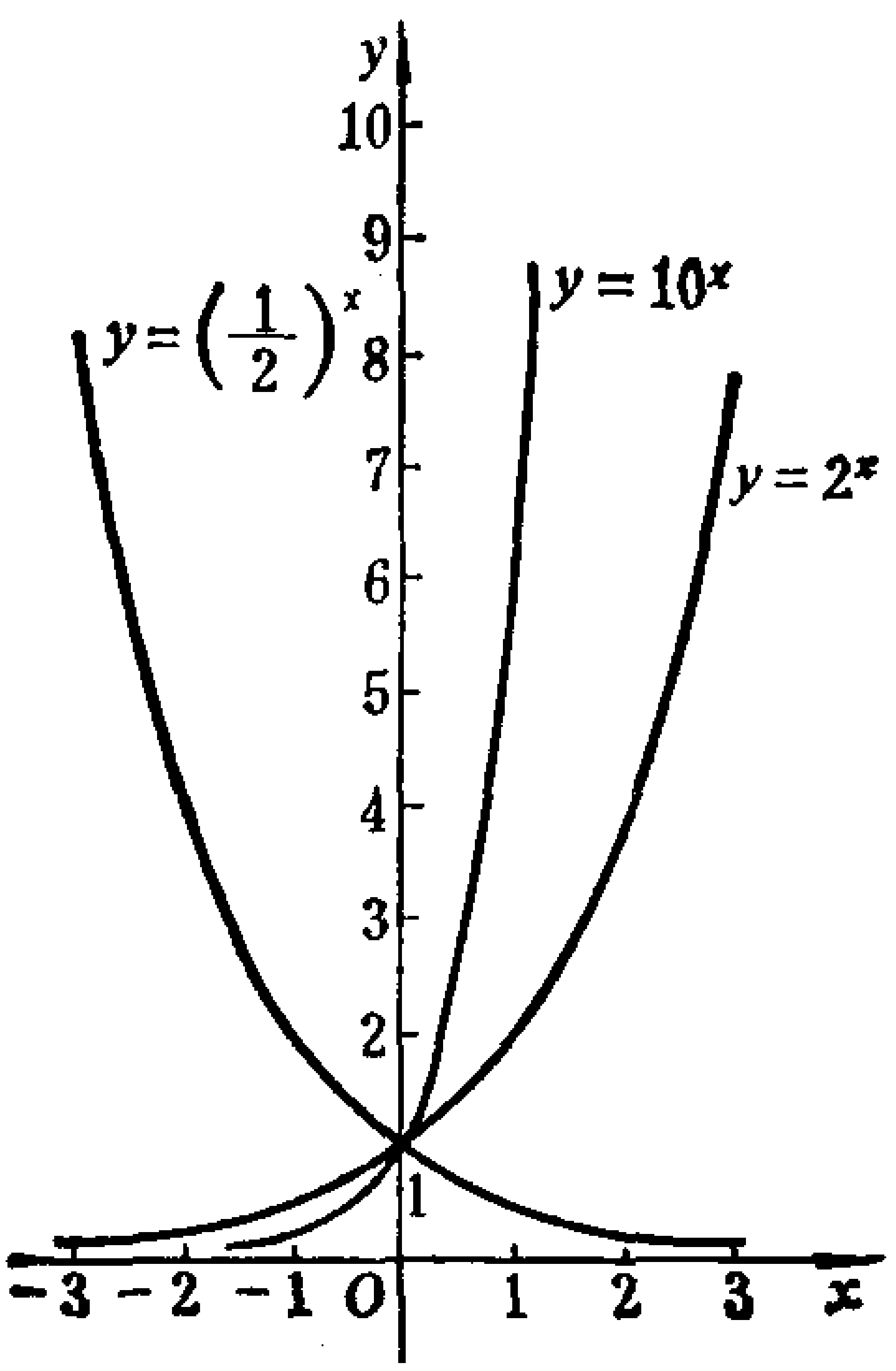
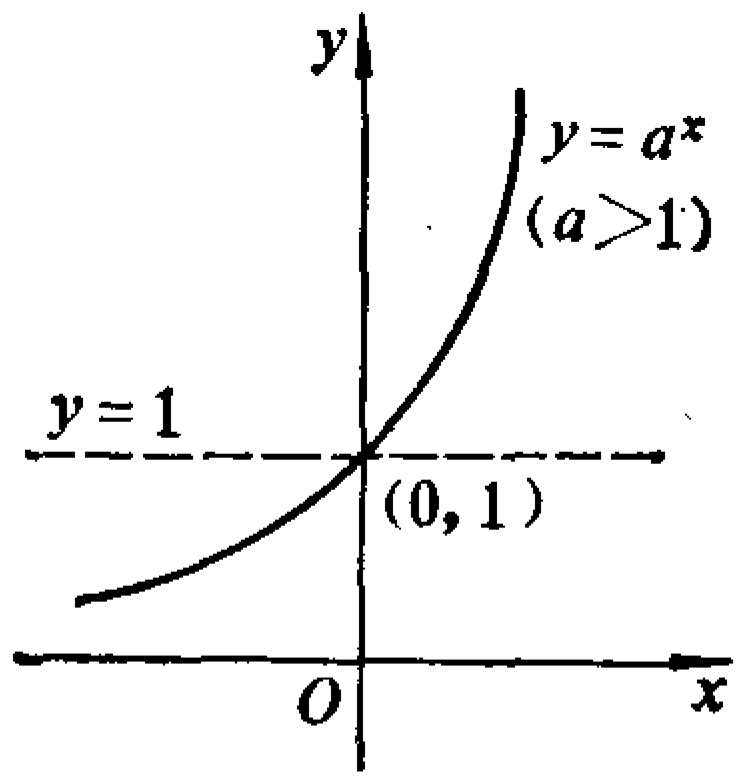
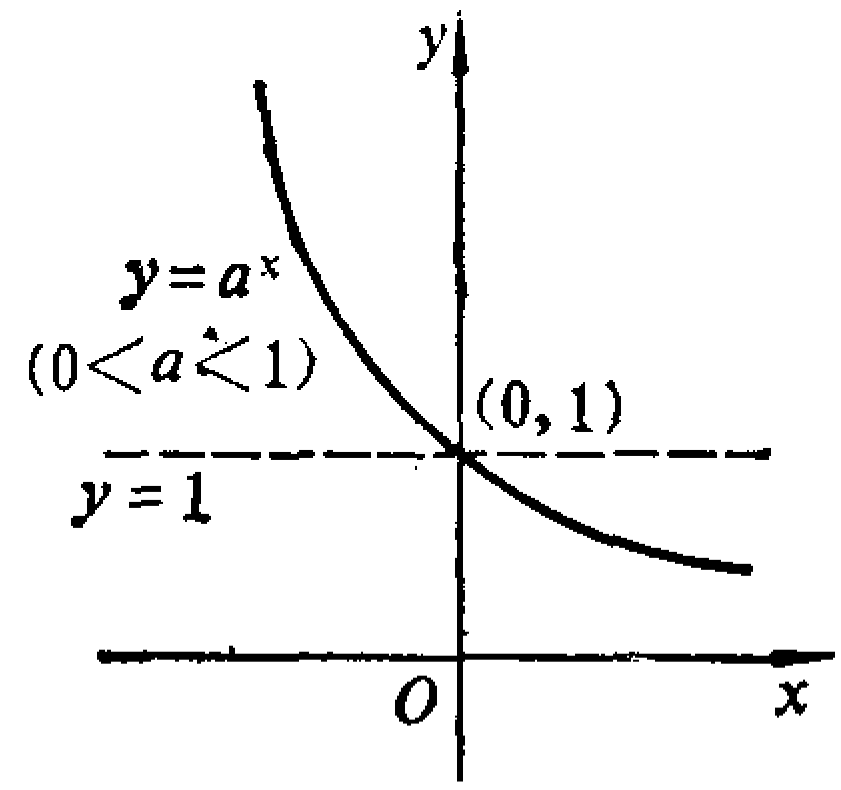


图 1-28

一般地，指数函数 $y=a^x$ 在其底数 $a>1$ 及 $0 < a < 1$ 这两种情况下的图象和性质如下表所示：

<table>
<tr><td rowspan="2">图象</td><td>$a>1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">(1) $y>0$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) 当$x=0$时 $y=1$;</td></tr>
<tr><td>(3) 当$x>0$时，$y>1$,
$x < 0$时，$0 < y < 1$;</td><td>(3) 当$x>0$时，$0 < y < 1$,
$x < 0$时，$y>1$;</td></tr>
<tr><td>(4) 在$(-\infty, +\infty)$上是增函数.</td><td>(4) 在$(-\infty, +\infty)$上是减函数.</td></tr>
</table>

例 1 一种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年剩留的质量约是原来的84%. 画出这种物质的剩留量随时间变化的图象，并从图象上求出约经过多少年，剩留量是原来的一半(结果保留一个有效数字).

解: 设最初的质量是 1，经过 x 年，剩留量是 y. 则经过1年，$y=1\times 84\%=0.84^1$; 经过 2 年，$y=0.84\times 0.84=0.84^2$. 一般地，经过 x 年则 $y=0.84^x$. 这就是所求的函数关系式. 据此可以列出下表:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	0.84	0.71	0.59	0.50	0.42	0.35

画出指数函数 $y=0.84^x$ 的图象（图 1-29）．从图上看出 $y=0.5$ 必须并且只需 $x\approx4$.

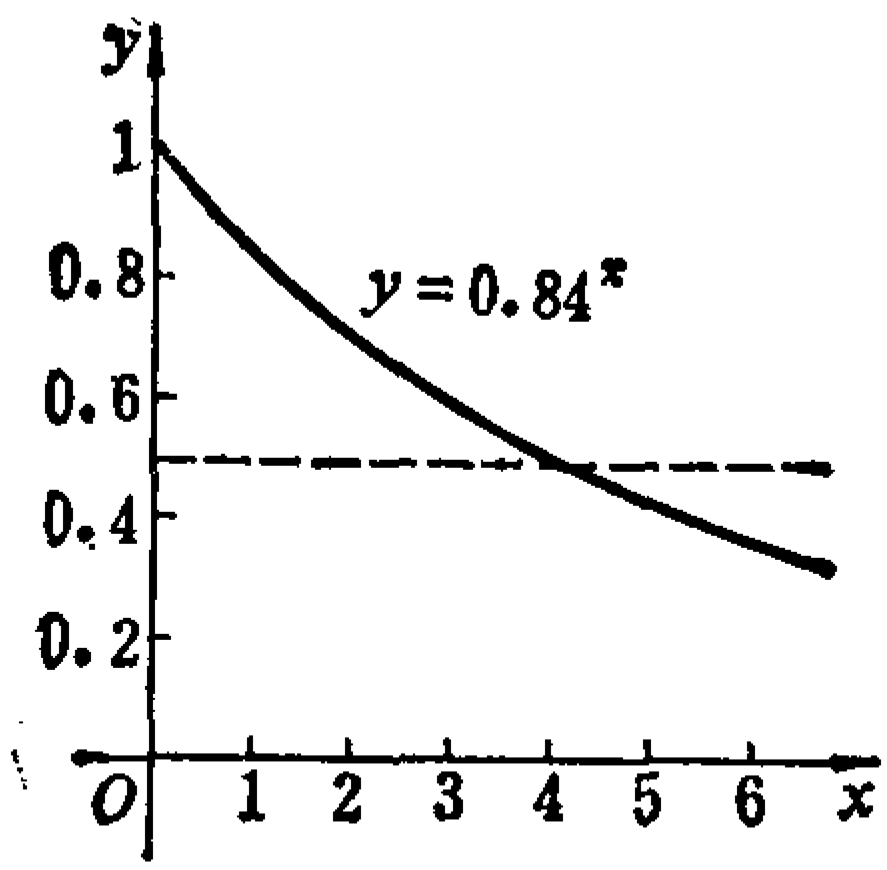


图 1-29

答：约经过 4 年，剩留量是原来的一半.

例 2 比较下列各题中两个值的大小：

(1) $1.7^{2.5}$, 1.7^3;　　(2) $0.8^{-0.1}$, $0.8^{-0.2}$.

解： 分别考察指数函数 $y=1.7^x$ 与 $y=0.8^x$，根据指数函数的性质知道：

(1) $\because$ $1.7>1$, $2.5<3$,

$\therefore$ $1.7^{2.5}<1.7^3$;

(2) $\because$ $0.8<1$, $-0.1>-0.2$.

$\therefore$ $0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$.

练　习

1. 在同一坐标系内，画出下列函数的图象：

(1) $y=3^x$;　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. 一片树林中现有木材 30000 米^3，如果每年增长 5%，经过 x 年，树林中有木材 y 米^3，写出 x, y 间的函数关系式，并且利用图象求约经过多少年，木材可以增加到 40000 米^3(结果保留一个有效数字).

3. 比较下面各题中两个值的大小:

(1) $3^{0.8}, 3^{0.7}$;　　(2) $0.75^{-0.1}, 0.75^{0.1}$;

(3) $1.01^2, 1.01^{3.5}$;　　(4) $0.99^3, 0.99^{4.5}$.

1.13 对数函数

前面我们讲过细胞分裂问题，知道有的细胞分裂时，得到的细胞的个数 y 是分裂次数 x 的函数，这个函数可以用指数函数 $y=2^x$ 表示. 现在我们来研究相反的问题，例如，如果目的是求一个这样的细胞经过多少次分裂，大约可以得到 1 万个，10 万个，……细胞，那么分裂次数 x 就是得到的细胞的个数 y 的函数，这个函数写成对数的形式就是

$$x=\log_2 y.$$

按照习惯，如果用 x 表示自变量，用 y 表示函数，那么这个函数就是

$$y=\log_2 x.$$

由指数的概念知道，确定函数 $y=f(x)=2^x$ 的映射 $f:R\to R^+$ 是 $f(x)$ 的定义域 R 到值域 R^+ 上的一一映射. 由对数的概念知道，这一映射的逆映射 f^{-1}: $R^+\to R$ 所确定的函数是 $x=f^{-1}(y)=\log_2 y$. 所以由反函数的概念可知，函数 $y=\log_2 x$

是指数函数 $y=2^x$ 的反函数.

从第 1.12 节可知，指数函数 $y=2^x$ 的变量 x,y 的对应值表是:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

那么只要把两行的数值对调，就得到函数 $y=\log_2 x$ 的变量对应值表:

x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
y	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

一般地，对数函数$y=\log_a x$(这里底数 a 是一个大于零且不等于 1 的常量)就是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 因为 $y=a^x$ 的值域是$(0,+\infty)$(即 R^+)，所以函数 $y=\log_a x$ 的定义域是$(0,+\infty)$.

函数 $y=\log_a x$ 叫做**对数函数.**

现在研究对数函数 $y=\log_a x$ 的图象和性质.

因为对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，所以$y=\log_a x$的图象和 $y=a^x$的图象关于直线$y=x$对称. 因此，我们只要画出和 $y=a^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的曲线，就可以得到 $y=\log_a x$ 的图象. 例如，画出和第 1.12 节中三个函数 $y=2^x$, $y=10^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的曲线，就可得到$y=\log_2 x$, $y=\log_{10} x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$的图象(图1-30).

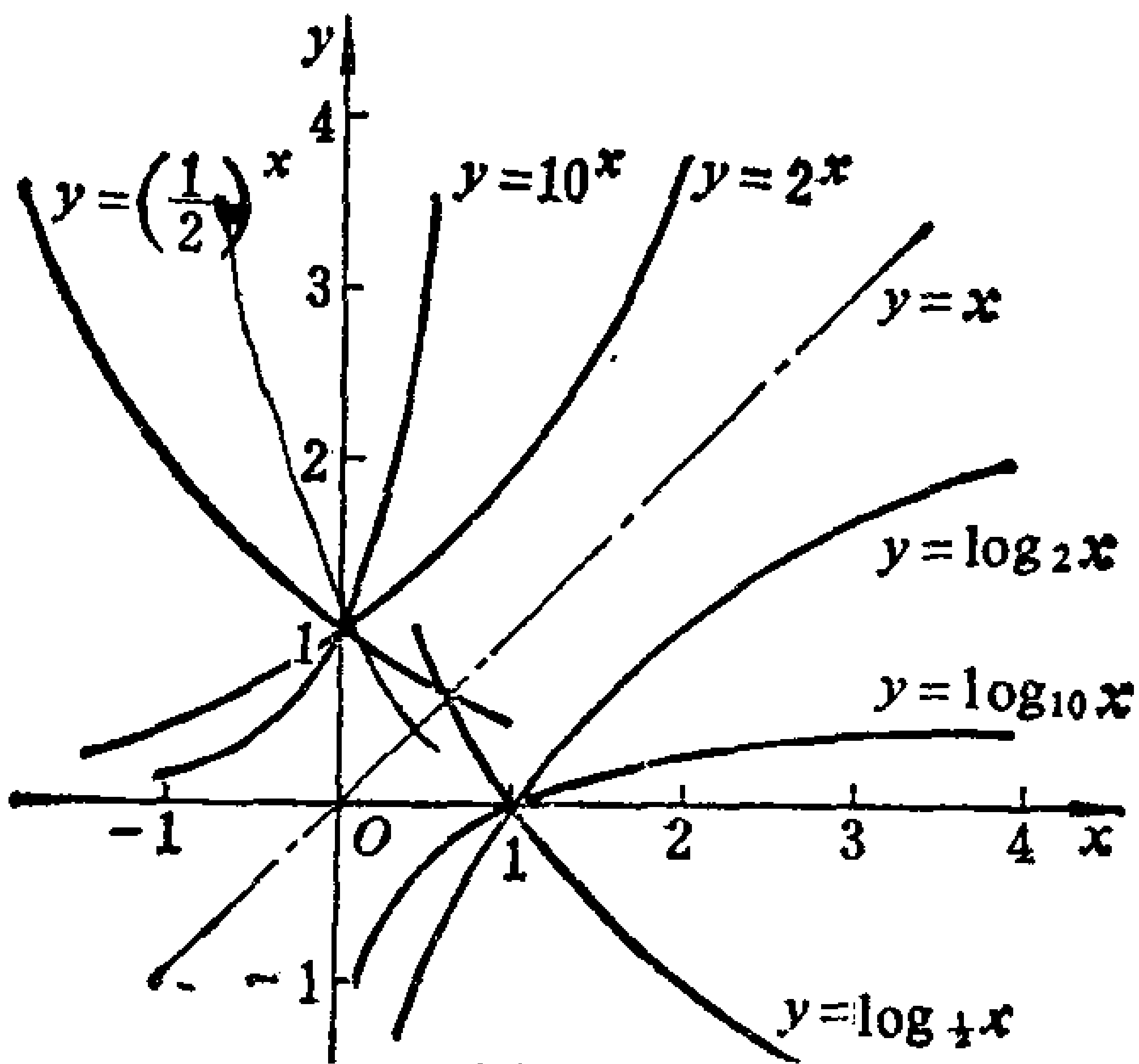
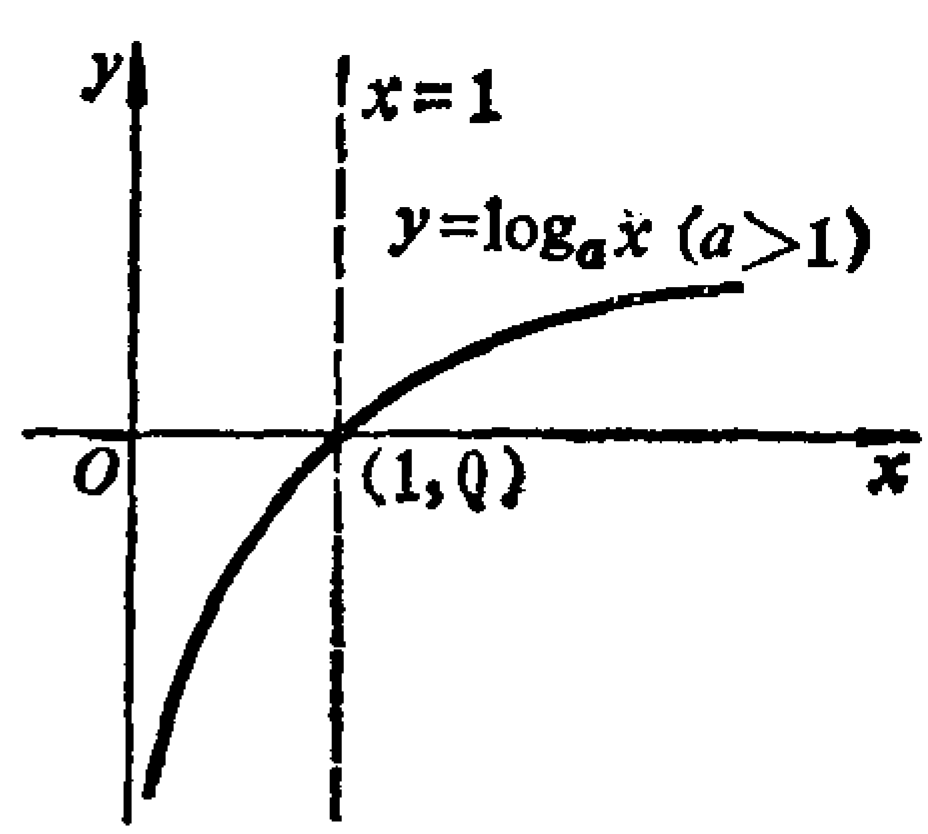
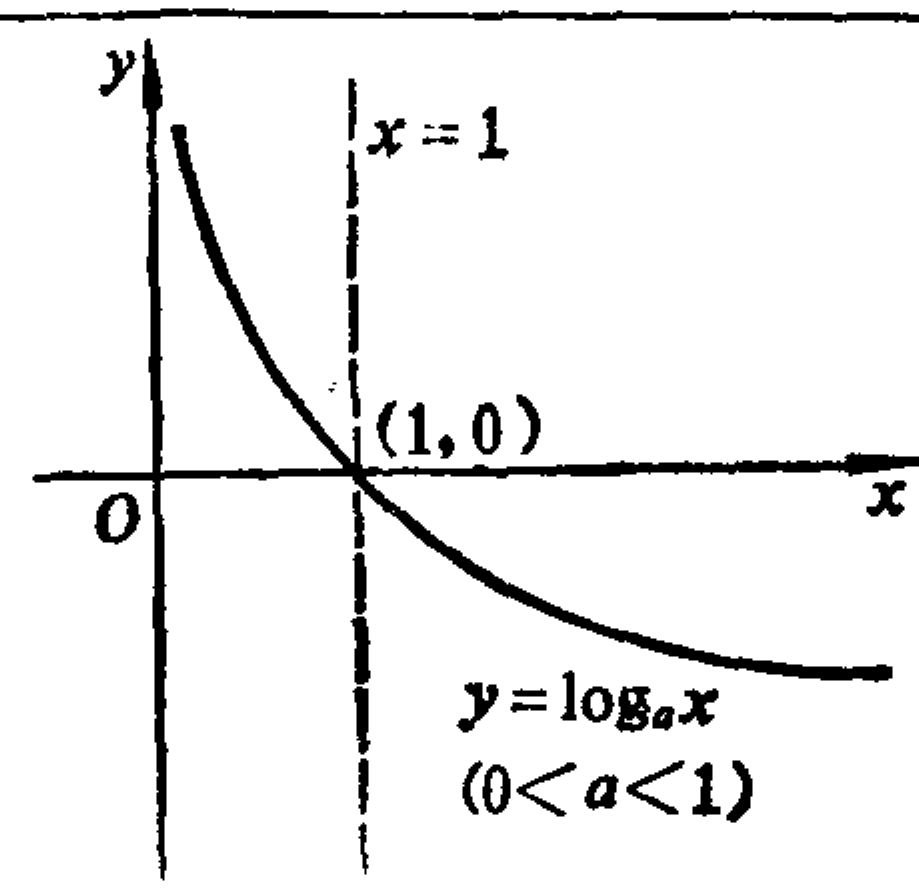


图 1-30

一般地，对数函数 $y=\log_a x$ 在其底数 $a>1$ 及 $0<a<1$ 这两种情况下的图象和性质如下表所示：

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(1) $x>0$;	
	(2) 当 $x=1$ 时，$y=0$;	
	(3) 当 $x>1$ 时，$y>0$， $0<x<1$ 时，$y<0$;	(3) 当 $x>1$ 时，$y<0$， $0<x<1$ 时，$y>0$;
	(4) 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.	**(4) 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.**

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_a(x^2)$;

(2) $y=\log_a(4-x)$.

解: (1)因为 $x^2>0$, 即 $x\neq 0$, 所以函数 $y=\log_a(x^2)$ 的定义域是$\{x|x\in R$, 且 $x\neq 0\}$.

(2) 因为 $4-x>0$, 即 $x<4$, 所以函数 $y=\log_a(4-x)$的定义域是$(-\infty, 4)$.

例 2 比较下列各组中两个值的大小:

(1) $\log_2 3$, $\log_2 3.5$;

(2) $\log_{0.7}1.6$, $\log_{0.7}1.8$.

解: 分别考察对数函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{0.7}x$, 根据对数函数的性质知道:

(1) $\because\ 2>1,\quad 3<3.5$,

$\therefore\ \log_2 3<\log_2 3.5$;

(2) $\because\ 0.7<1,\quad 1.6<1.8$,

$\therefore\ \log_{0.7}1.6>\log_{0.7}1.8$.

练 习

1. 画出函数 $y=\log_3 x$ 及 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的图象, 并且说明这两个函数的相同性质和不同性质.
2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\log_5(1+x)$;

(2) $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$;

(3) $y=\log_7\frac{1}{1-3x}$;

(4) $y=\sqrt{\log_3 x}$.

3. 比较下列各题中两个值的大小:

(1) $\log_{10}6$, $\log_{10}8$;　　(2) $\log_{0.5}6$, $\log_{0.5}4$;

(3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5$, $\log_{\frac{2}{3}}0.6$;　　(4) $\log_{1.5}1.6$, $\log_{1.5}1.4$.

1.14 指数方程和对数方程

在指数里含有未知数的方程叫做**指数方程**，在对数符号后面含有未知数的方程叫做**对数方程**. 在这两类方程中，我们只能解一些特殊的方程. 现在举一些例子.

例1 解方程 $4^x=2^{x+1}$.

解: 原方程可化为

$$2^{2x}=2^{x+1}.$$

同一个底 a (这里 $a>0$, 且 $a\neq1$) 的幂相等, 必须并且只需它们的幂指数相等. 因此上式就是

$$2x=x+1.$$

$$\therefore\qquad x=1.$$

例2 电视机厂生产的电视机台数，如果每年平均比上一年增长 10.4%，那么约经过多少年可以增长到原来的 2 倍 (结果保留一个有效数字)?

解: 设经过 x 年可以增长到原来的 2 倍, 根据题意, 得

$$(1+10.4\%)^x=2.$$

两边取对数, 得

$$x\lg 1.104=\lg 2.$$

$$\therefore \quad x=\frac{\lg 2}{\lg 1.104}=\frac{0.3010}{0.0429}\approx 7.$$

答：约经过 7 年.

（注：在例 2 中，也可以把指数式 $(1+10.4\%)^x=2$ 化为对数式 $\log_{1.104}2=x$，再利用换底公式得到 $x=\dfrac{\lg 2}{\lg 1.104}\approx 7$.）

例 3　解方程 $3^{x+1}+9^x-18=0$.

解：原方程可化为

$$3\cdot 3^x+(3^x)^2-18=0.$$

利用换元法，设 $3^x=y$，方程又成为

$$y^2+3y-18=0,$$

由此解得

$$y_1=3,\quad y_2=-6.$$

由 $3^x=3$，得 $x=1$；另 $3^x=-6$ 不符合指数函数意义（性质(1)），应舍去．所以原方程的解是 $x=1$.

例 4　解方程 $\lg(x^2+11x+8)-\lg(x+1)=1$.

解：把原方程化为

$$\lg\frac{x^2+11x+8}{x+1}=\lg 10.$$

同一个底的对数相等，必须并且只需它们的真数（使对数有意义）相等．因此上式就是

$$\frac{x^2+11x+8}{x+1}=10.$$

解这个方程，得 $x_1=-2$，$x_2=1$.

检验：$x=-2$ 时，$x+1=-1$，负数的对数没有意义，所以

$x=-2$ 不是原方程的根；$x=1$ 时，原方程的左边 $=\lg 20-\lg 2=\lg 10=1=$ 右边，所以 $x=1$ 是原方程的根.

注意：解对数方程时，必须对求得的根进行检验. 因为在利用对数性质进行变形而得到新方程时，如果未知数的字母的取值范围扩大，可能产生增根. 如例 4，由原方程变形为

$$\lg\frac{x^2+11x+8}{x+1}=\lg 10$$

时，x 的取值范围由 $\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x^2+11x+8>0,\\x+1>0\end{cases}\right\}$ 变为

$$\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x^2+11x+8>0,\\x+1>0\end{cases}\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x^2+11x+8<0,\\x+1<0\end{cases}\right\}.$$

因为 $x=-2\in\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x^2+11x+8<0,\\x+1<0\end{cases}\right\}$，所以方程产生了增根.

例 5　求方程 $x+\lg x=3$ 的近似解.

解： 在同一坐标系内画出 $y=\lg x$ 及 $y=3-x$ 的图象，求得交点的横坐标 $x\approx 2.6$（图 1-31），这个 x 值近似地满足 $\lg x=3-x$，所以它就是原方程的近似解.

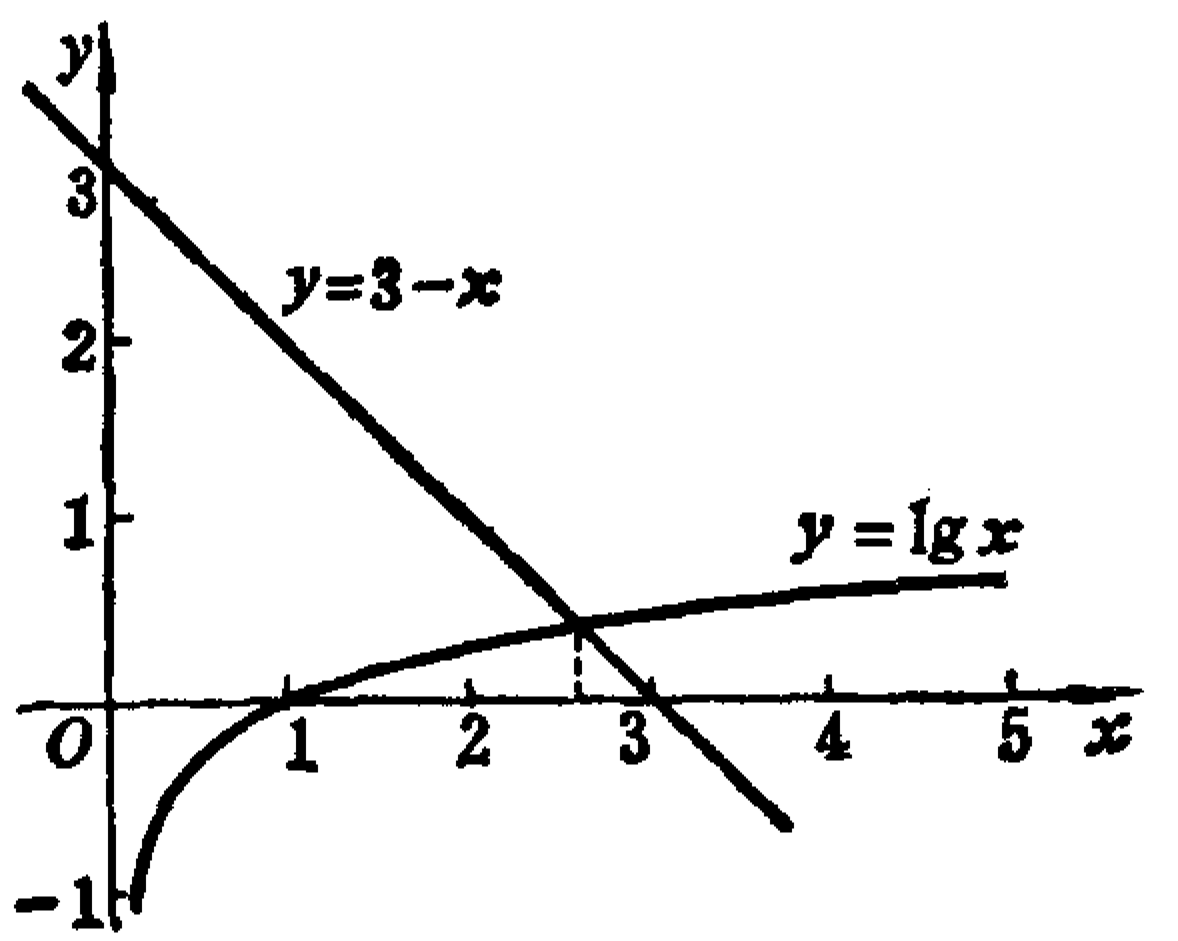


图 1-31

练　习

1. 解下列指数方程：

(1) $2^{x-1}=8$;　　(2) $3^{\frac{1}{x}}=9$;

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=64$;　　(4) $5^{(x-1)(x+2)}=1$.

2. 利用常用对数解下列指数方程：

(1) $10^x=300$;　　(2) $2^y=100$;

(3) $3^t=12$;　　(4) $10^{4m}=5.75$.

3. 已知镭经过100年剩留原来质量的95.76%，计算它约经过多少年剩留一半(结果保留四个有效数字).

4. 一个生产队去年粮食平均亩产量是817斤，从今年起的5年内，计划平均每年比上一年提高7%，约经过几年可以提高到亩产量1000斤(结果保留一个有效数字)?

5. 解下列对数方程：

(1) $2\lg x+\lg 7=\lg 14$;　　(2) $\lg x+\lg(x-3)=1$;

(3) $\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$;

(4) $\frac{1}{2}(\lg x-\lg 5)=\lg 2-\frac{1}{2}\lg(9-x)$.

6. 用换元法解方程：

(1) $5^{2x}-23\times 5^x-50=0$;

(2) $\frac{1}{12}(\lg x)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$.

习 题 五

1. (1) 一种产品的年产量原来是a件，在今后m年内，计划

使年产量平均每年比上一年增加 $p\%$. 写出年产量随经过年数变化的函数关系式.

(2) 一种产品的成本原来是 a 元, 在今后 m 年内, 计划使成本平均每年比上一年降低 $p\%$. 写出成本随经过年数变化的函数关系式.

2. 求下列函数的定义域、值域:

(1) $y=2^{3-x}$; (2) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$;

(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{5x}$; (4) $y=0.7^{\frac{1}{4x}}$.

3. 求下列函数的反函数:

(1) $y=4^x\,(x\in R)$; (2) $y=0.25^x\,(x\in R)$;

(3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x(x\in R)$; (4) $y=(\sqrt{2})^x\,(x\in R)$;

(5) $y=\lg x\,(x\in R^+)$; (6) $y=2\log_4 x\,(x\in R^+)$;

(7) $y=\log_a 2x\,(a>0$, 且 $a\neq 1, x\in R^+)$;

(8) $y=\log_a\frac{x}{2}\,(a>0$, 且 $a\neq 1, x\in R^+)$.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt[3]{\log_2 x}$; (2) $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$;

(3) $y=\sqrt{x^2+3x+2}+\log_2 3x$.

5. 如果 $f(x)=e^x$, 求证

$$f(x)\cdot f(y)=f(x+y).$$

6. 如果 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$, 求证

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

7. 利用指数函数的性质(1),(3)证明性质(4).

8. 利用换底公式证明:

(1) $\log_{a^n}b^n=\log_a b$;

(2) $\log_{a^n}b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$.

9. 解下列方程:

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\cdot 8^{2x}=4$;　　(2) $5^{x-1}\cdot 10^{3x}=8^x$;

(3) $5^{2x}-6\times 5^x+5=0$;

(4) $3^x-3^{-x}=\dfrac{80}{9}$.

10. 解下列方程:

(1) $\log_{x+2}(2x^2+3x-2)=1$;

(2) $\log_a\dfrac{x^2-x+2}{x+1}=0(a>0,\ a\neq 1)$;

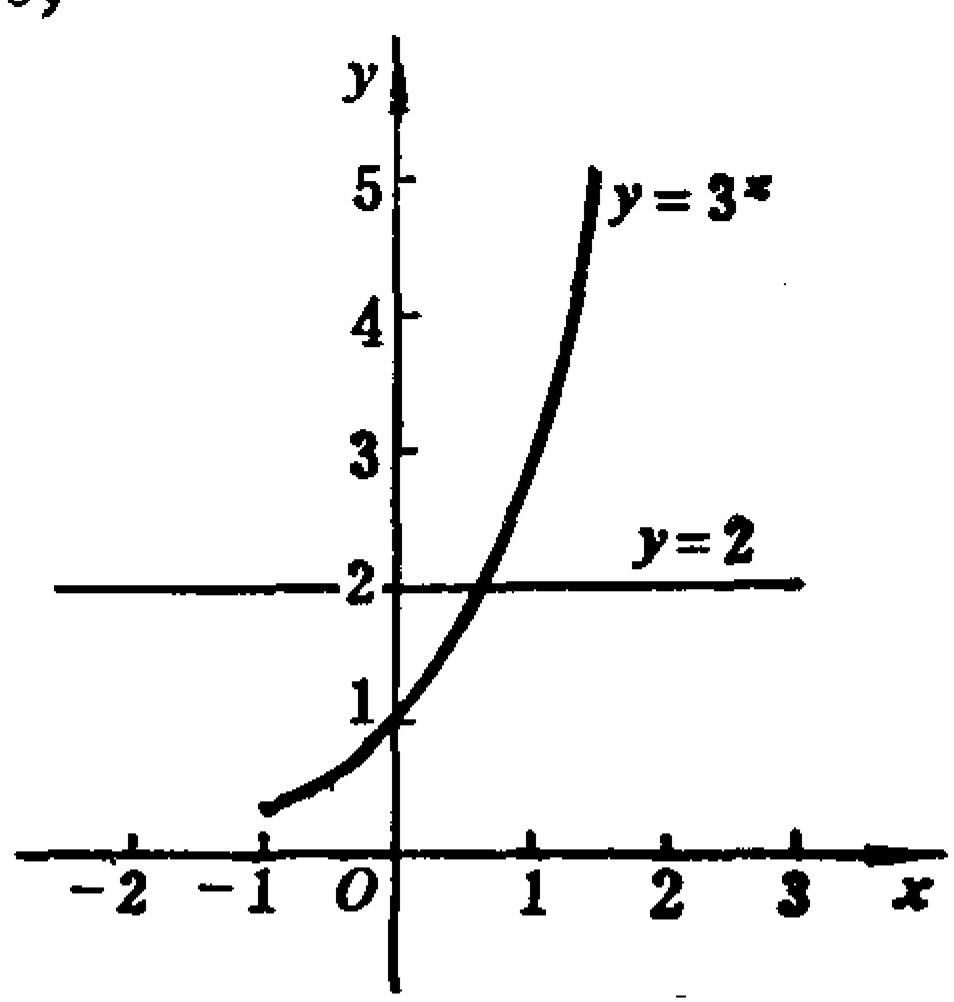
(3) $\lg(x^2-3)=\lg(3x+1)$;

(4) $\lg(x^2-x-2)-\lg(x+1)-\lg 2=0$;

(5) $2(\log_3 x)^2+\log_3 x-1=0$;

(6) $2\log_x 25-3\log_{25}x=1$.

11. 一台机器的价值是50万元.如果每年的折旧率是4.5%(就是每年减少它的价值的4.5%),那么约经过几年,它的价值降为20万元(结果保留两个有效数字)?



(第12题)

12. 如图,画出函数$y=3^x$及$y=2$

的图象，求方程 $3^x=2$ 的近似解(精确到 0.1)。

13. 用图象法求下列方程的近似解(精确到 0.1):

(1) $3^x=4-x$;

(2) $\lg x+x^2=0$.

小　　结

一、本章主要内容是在引入集合的概念、集合同集合之间的关系以及定义映射、一一映射、逆映射这些概念的基础上，进一步阐明函数与反函数的概念，研究函数的单调性与奇偶性，并具体研究幂函数、指数函数和对数函数以及简单的指数方程和对数方程等.

二、一组对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象就是这个集合的元素. 对象同集合的关系是属于或不属于.

集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$. 如果 $A\subseteq B$ 而且 $B\subseteq A$，则 $A=B$. 子集、真子集这两个概念是不同的.

集合 A,B 的交集，记作 $A\cap B$，它是 A 的子集也是 B 的子集，特别地，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

集合 A,B 的并集，记作 $A\cup B$，集合 A,B 都是 $A\cup B$ 的子集，特别地，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

一个集合的补集是相对于给定的全集来说的. 如果 A 是全集 I 的子集，则补集记作 $\bar{A}$，而 $\bar{A}$ 也是 I 的子集. $A,\bar{A}$ 及 I 的关系是 $A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$，$\bar{\bar{A}}=A$.

三、给定两个集合 A,B，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它

对应，这样的对应(包括集合 A，B 及对应法则 f)就是从集合 A 到集合 B 的映射，表示为 $f: A\to B$.

设 $f: A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的一个映射，如果在这个映射的作用下，对于 A 中的不同元素，在 B 中有不同的象，而且 B 中的每一个元素都有原象，那么这个映射就是 A 到 B 上的一一映射．这时，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样得到的映射就是映射 $f: A\to B$ 的逆映射，表示为 $f^{-1}: B\to A$．显然，映射 $f: A\to B$ 与映射 $f^{-1}: B\to A$ 互为逆映射，它们互相依存．

以实数 x 为自变量的函数 $y=f(x)$ 实际上是 x 取值的集合到 y 取值的集合上的映射，其中 x 取值的集合就是函数 $f(x)$ 的定义域，和 x 对应的 y 的值就是函数值，函数值的集合就是函数 $f(x)$ 的值域．

如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f: A\to B$ 是函数 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射，那么这个映射的逆映射 $f^{-1}: B\to A$ 所确定的函数 $y=f^{-1}(x)$ 就是函数 $y=f(x)$ 的反函数，$y=f^{-1}(x)$ 的定义域、值域分别是 $y=f(x)$ 的值域、定义域．由 $y=f(x)$ 求 $y=f^{-1}(x)$ 的步骤是：(1) 由 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；(2) 把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$．函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．

四、在一个区间上，如果对于自变量 x 的任意两个值 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；如果对于任意的 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 在这个区间上是减函数．

如果对于函数定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=$

$-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是奇函数．如果对于函数定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是偶函数．

奇函数的图象关于原点对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数．

偶函数的图象关于 y 轴对称；反过来，如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数．

五、函数 $y=x^{\alpha}$ 就是幂函数，其中 α 是一个常量．我们已讨论了 α 是有理数 n 的情况：当 n 为正整数时，幂函数的定义域是实数集 R；当 n 为零或负整数时，幂函数的定义域是除 $x=0$ 以外的所有实数；当 n 为正分数 $\dfrac{p}{q}$ 或负分数 $-\dfrac{p}{q}$（p, q 是互质的正整数，$q>1$）时，x^{n} 的意义分别是 $\sqrt[q]{x^{p}}$ 或 $\dfrac{1}{\sqrt[q]{x^{p}}}$，幂函数的定义域分别是使 $\sqrt[q]{x^{p}}$ 或 $\dfrac{1}{\sqrt[q]{x^{p}}}$ 有意义的实数的集合．

六、函数 $y=a^{x}$ 就是指数函数，其中 a 是一个大于零且不等于 1 的常量，函数的定义域是实数集 R．函数 $y=\log_{a}x$ 就是对数函数，其中 a 是一个大于零且不等于 1 的常量，函数的定义域是 R^{+}．指数函数 $y=a^{x}$ 和对数函数 $y=\log_{a}x$ 互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称．

七、在指数方程和对数方程中，我们只能解一些比较特殊的方程．解这些特殊方程一般是根据指数、对数的定义，或采取将方程两边化成同底幂、同底对数，从而得到幂指数相等、真数相等的新方程，或在方程两边同时取对数，从而得到新方程等．解对数方程时，可能产生增根，因此，检验是解对数方程整个过程中不可缺少的一步．

复习参考题一

A 组

1. 用列举法写出与下列集合相等的集合:

(1) $A=\{x|x=9\}$;

(2) $B=\{x|x\geqslant 1$, 且 $x\leqslant 2, x\in N\}$;

(3) $C=\{x|x=1$, 或 $x=2\}$.

2. 设 P 表示平面内的点, 属于下列集合的点组成什么图形?

(1) $\{P|PA=PB\}$ (A, B 是定点);

(2) $\{P|PO=3$ 厘米$\}$ (O 是定点).

3. 设 $A=\{$菱形$\}$, $B=\{$矩形$\}$, 求 $A\cap B$.

4. 设 $A=\{$过点 M 的圆$\}$, $B=\{$过点 P 的圆$\}$, 求 $A\cap B$.

5. 设平面内有三角形 ABC, 且 P 表示平面内的点, 求

$$\{P|PA=PB\}\cap\{P|PA=PC\}.$$

6. 设全集 $I=R$, $A=\{x|x\leqslant 6\}$, 求:

(1) $A\cap\varnothing, A\cup\varnothing$;

(2) $A\cap R, A\cup R$;

(3) $\bar{A}$; (4) $A\cap\bar{A}, A\cup\bar{A}$.

7. 举出符合下列对应法则的例子:

(1) 对于一个集合中的几个元素, 另一个集合中有一个元素和它们对应;

(2) 对于一个集合中的一个元素, 另一个集合中有几个元素和它对应;

(3) 对于一个集合中的一个元素, 另一个集合中有且仅

有一个元素和它对应。

8. 举出几个映射的例子，并说明相应于每个映射的象集合及原象集合各是什么。

9. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4x+3}$；　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x+3}+\sqrt{-x}+\sqrt{x+4}$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-5x-x^2}}$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$，求证：

(1) $f(-x)=f(x)$；　　(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

11. 设 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，求证：

(1) $[g(x)]^2-[f(x)]^2=1$；

(2) $f(2x)=2f(x)\cdot g(x)$；

(3) $g(2x)=[f(x)]^2+[g(x)]^2$.

12. (1) 当 $n>0$ 时，幂函数 $y=x^n$ 有哪些共同性质？

(2) 当 $n<0$ 时，幂函数 $y=x^n$ 有哪些共同性质？

13. 分下列两种情况写出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的单调区间，以及在每一单调区间上，函数是增函数还是减函数。

(1) $a>0$；　　(2) $a<0$.

14. 求证：在公共的定义域内，

(1) 奇函数与奇函数的积是偶函数；

(2) 奇函数与偶函数的积是奇函数；

(3) 偶函数与偶函数的积是偶函数.

15. 举出几个一一映射的例子,并分别求出它们的逆映射.

16. 把下列指数式化为对数式, 或对数式化为指数式($a>0$, 且$a\neq 1$):

(1) $\log_a N=b$;　　(2) $a^0=1$;

(3) $a^1=a$;　　(4) $\log_a\sqrt[3]{a^2}=\frac{2}{3}$.

17. 写出对数的运算性质:

(1) $\log_a(M\cdot N)=$ __________________;

(2) $\log_a\frac{M}{N}=$ __________________;

(3) $\log_a M^n=$ __________;

(4) $\log_a\sqrt[n]{M}=$ __________.

18. 写出对数换底公式,并加以证明.

19. 求证:

(1) $\log_2 64=3\log_8 64$;

(2) $\log_3 81=\frac{4}{3}\log_2 8$;

(3) $\dfrac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_7 9}{\log_5\frac{1}{3}\cdot\log_7\sqrt[3]{4}}=-\frac{3}{2}$;

(4) $\log_4 8-\log_{\frac{1}{9}}3-\log_{\sqrt{2}}4=-2$.

20. 利用对数计算:

(1) $3.74^{\frac{1}{4}}\cdot e^{0.24}$;　　(2) $\left(\frac{0.034}{127}\right)^2\times 5^{\ln 3}$.

21. 下列函数中哪些互为反函数? 在同一坐标系内画出每一

对反函数的图象，然后说明各函数的性质：

(1) $y=x^4(x\in R)$;　　(2) $y=4^x(x\in R)$;

(3) $y=x^{\frac{1}{4}}(x\in \overline{R}^-)$;　　(4) $y=\log_4 x(x\in R^+)$.

22. 求下列函数的定义域：

(1) $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$;　　(2) $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$;

(3) $y=\log_a(2-x)(a>0$, 且 $a\neq 1)$;

(4) $y=\log_a(-x)^2(a>0$, 且 $a\neq 1)$.

23. 设 x, y 为非零实数，$a>0$，且 $a\neq 1$，下列各式哪些成立，哪些不一定成立，为什么？

(1) $\log_a x^2=2\log_a x$;　　(2) $\log_a x^2=2\log_a|x|$;

(3) $\log_a|x\cdot y|=\log_a|x|\cdot\log_a|y|$;

(4) $\log_a 3>\log_a 2$.

24. 解下列方程：

(1) $6^{2x+4}=2^{x+8}\cdot 3^{3x}$;　　(2) $5^x+5^{x-1}=750$;

(3) $9^x=(\sqrt{3})^{x+2}$;　　(4) $4^x-3\times 2^x+2=0$;

(5) $4^x-2\times 6^x+9^x=0$;

(6) $2^x=3^{x+1}$(精确到 0.01).

25. 解下列方程：

(1) $\log_{\sqrt{x}}2x=4$;　　(2) $\log_7(\log_3 x)=-1$;

(3) $\log_{10}[\log_2(\log_x 25)]=0$;

(4) $\log_x x^x=2$;

(5) $\lg(x-1)+\lg(x-2)=\lg(x+2)$;

(6) $x^{2\lg x}=10x$ lg10.

26. 设 1980 年底我国人口为 10 亿，查表计算：

$x^{\lg x^2}=10x$

(1) 如果我国人口每年比上年平均递增2%，那么到2000年底将达到多少(结果保留四个有效数字)。

(2) 要使2000年底我国人口不超过12亿，那么每年比上一年平均递增率最高是多少(精确到0.01%)。

B 组

27. 设直线 l_1 及 l_2 在同一个平面内，$A=\{P|\text{点 } P\in l_1\}$，$B=\{Q|\text{点 } Q\in l_2\}$，问：

(1) $A\cap B=\varnothing$ 时，直线 l_1，l_2 有什么关系。

(2) $A\cap B$ 是单元素集时，直线 l_1，l_2 有什么关系。

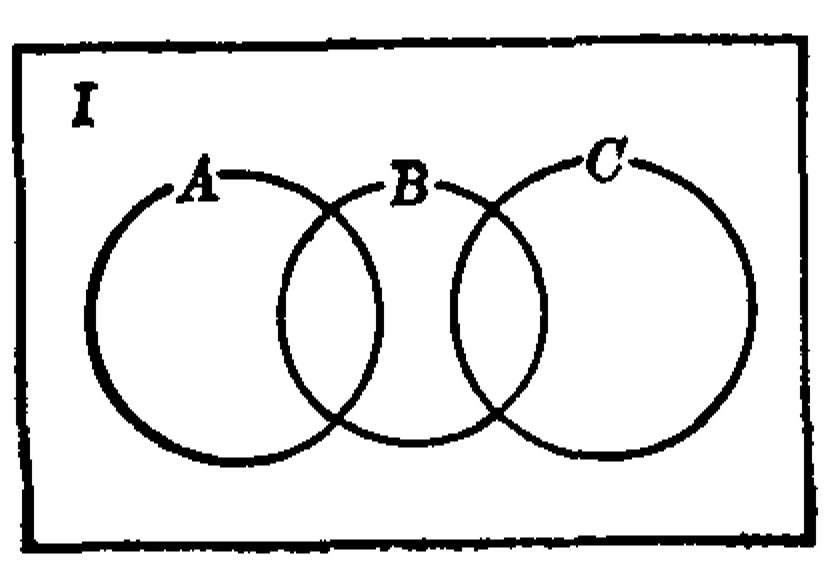
(3) $A\cap B$ 含有两个以上元素时，直线 l_1，l_2 有什么关系。

28. 设集合 I, A, B, C 的关系如图所示，并记 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 为 A，B, C 在 I 中的补集，用阴影表示下列集合：

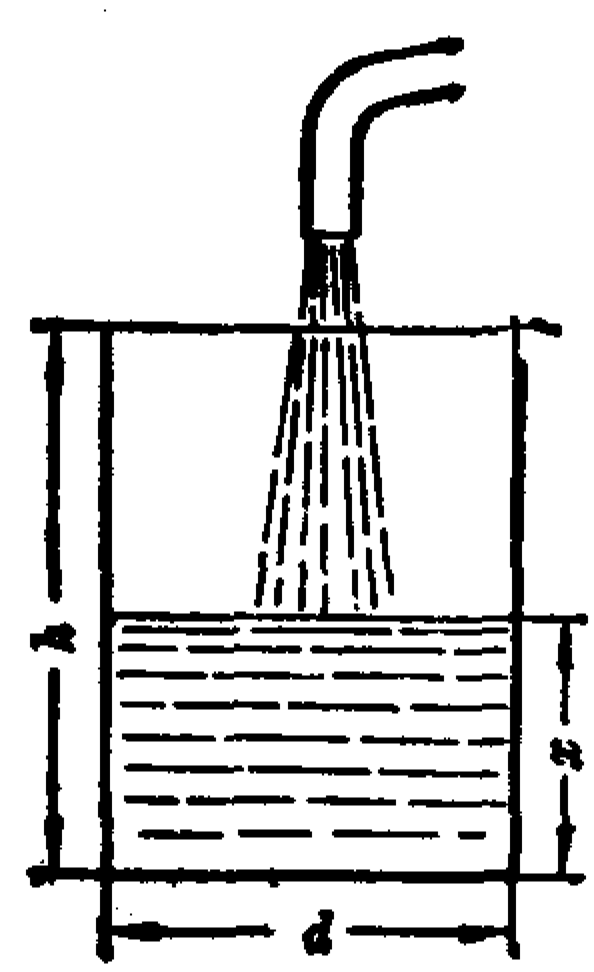
(1) $\bar{A}\cap\bar{C}$；　　(2) $(A\cap B)\cup C$；

(3) $(\overline{A\cap B})\cap C$；　　(4) $(A\cap B)\cup B$；

(5) $\bar{B}\cup C$；　　(6) $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$.



(第28题)



(第29题)

29. 如图，一个圆柱形容器的底部直径是 d 厘米，高是 h 厘米. 现在以每秒钟 s 厘米^{3}的速度向容器内注入某种溶液. 求容器内溶液的高度 x 与注入溶液的时间 t 之间的函数关系式，并写出函数的定义域与值域.

30. 某人开汽车以 60 公里/小时的速度从 A 地到 150 公里远处的 B 地，在 B 地停留 1 小时后，再以 50 公里/小时的速度返回 A 地. 把汽车离开 A 地的路程 x 公里表示为时间 t 小时(从 A 地出发时开始)的函数，并画出函数的图象；又把车速 v 公里/小时表示为时间 t 的函数，并画出函数的图象.

31. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2x-5$，比较 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 是否一样.

32. 已知 $f(x)=(x^2+2)^2-4(x^2+2)+4$，求证

$$f(tx)=t^4f(x).$$

33. (1) 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $(0<a<b)$ 是减函数，那么它在区间 $[-b, -a]$ 上是增函数还是减函数？

(2) 已知偶函数 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $(0<a<b)$ 是减函数，那么它在区间 $[-b, -a]$ 上是增函数还是减函数？

34. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的任一函数，求证 $F_1(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$F_2(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

35. 设在离海平面高度 x 米处的大气压强是 y 毫米水银柱高，y 与 x 之间的函数关系式是

$$y=Ce^{kx},$$

这里 C, k 都是常量。已知某地某天在海平面及 1000 米高空的大气压强分别是 760 及 675 毫米水银柱高，求在 600 米高空的大气压强，又求大气压强是 720 毫米水银柱高处的高度(结果都保留三位有效数字)。

36. 把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是 θ_1 度，空气的温度是 θ_0 度，t 分钟后物体的温度 θ 度可由公式

$$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$$

求得，这里 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的正的常量。现有 62°C 的物体，放在 15°C 的空气中冷却，1 分钟以后物体的温度是 52°C，求上式中 k 的值，然后计算开始冷却后多少分钟物体的温度是 42°C, 32°C, 22°C, 15.1°C(精确到一个有效数字)。物体会不会冷却到 12°C？

37. 求下列函数的定义域、值域：

(1) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$;　　(2) $y=-\sqrt{x^2+25}$;

(3) $y=\dfrac{1}{(x-1)(2x-1)}$;　　(4) $y=x+\sqrt{1-2x}$.

38. (1) 已知 $\ln y=x+\ln C$，求证 $y=Ce^x$;

(2) 已知 $\ln\dfrac{y}{x}-ax=\ln C$，求证 $y=Cxe^{ax}$。

39. 设 $a^2+b^2=7ab$，且 $a>0, b>0$，求证

$$\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

40. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3^x-9}$;　　(2) $y=\sqrt{1-a^x}$ $(0<a<1)$;

(3) $y=\log_a(6x^2-x-2)$ $(a>0$, 且 $a\neq1)$;

(4) $y=\log_a(-x^2+4x-3)\,(a>0$, 且 $a\neq 1)$.

41. (1) 方程 $3^{2x^2}=3^{5x+7}$ 与方程 $2x^2=5x+7$ 的解集是否相等，为什么？

(2) 方程 $\log_2 2x^2=\log_2(x+6)$ 与方程 $2x^2=x+6$ 的解集是否相等，为什么？

(3) 方程 $\lg(x-1)+\lg(x-2)=\lg(x+2)$ 与方程 $(x-1)\cdot(x-2)=x+2$ 的解集是否相等，为什么？

42. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\3^{x-y-1}=1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=648,\\3^x\cdot 2^y=432;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\lg x+\lg y=5,\\\lg x-\lg y=3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x-y=90,\\\lg x+\lg y=3.\end{cases}$

第二章　三角函数

一　任意角的三角函数

2.1　角的概念的推广

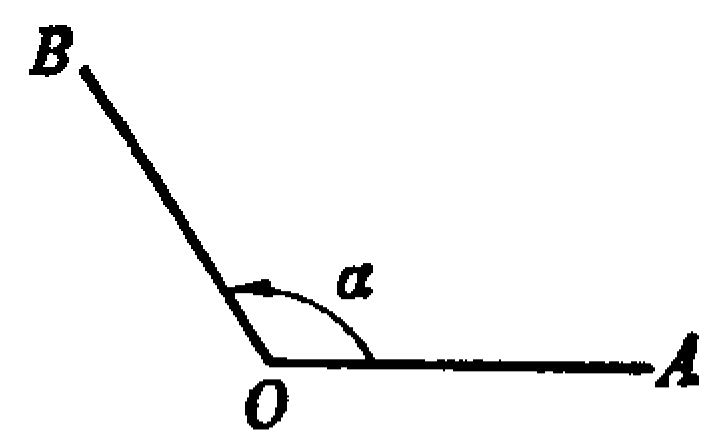
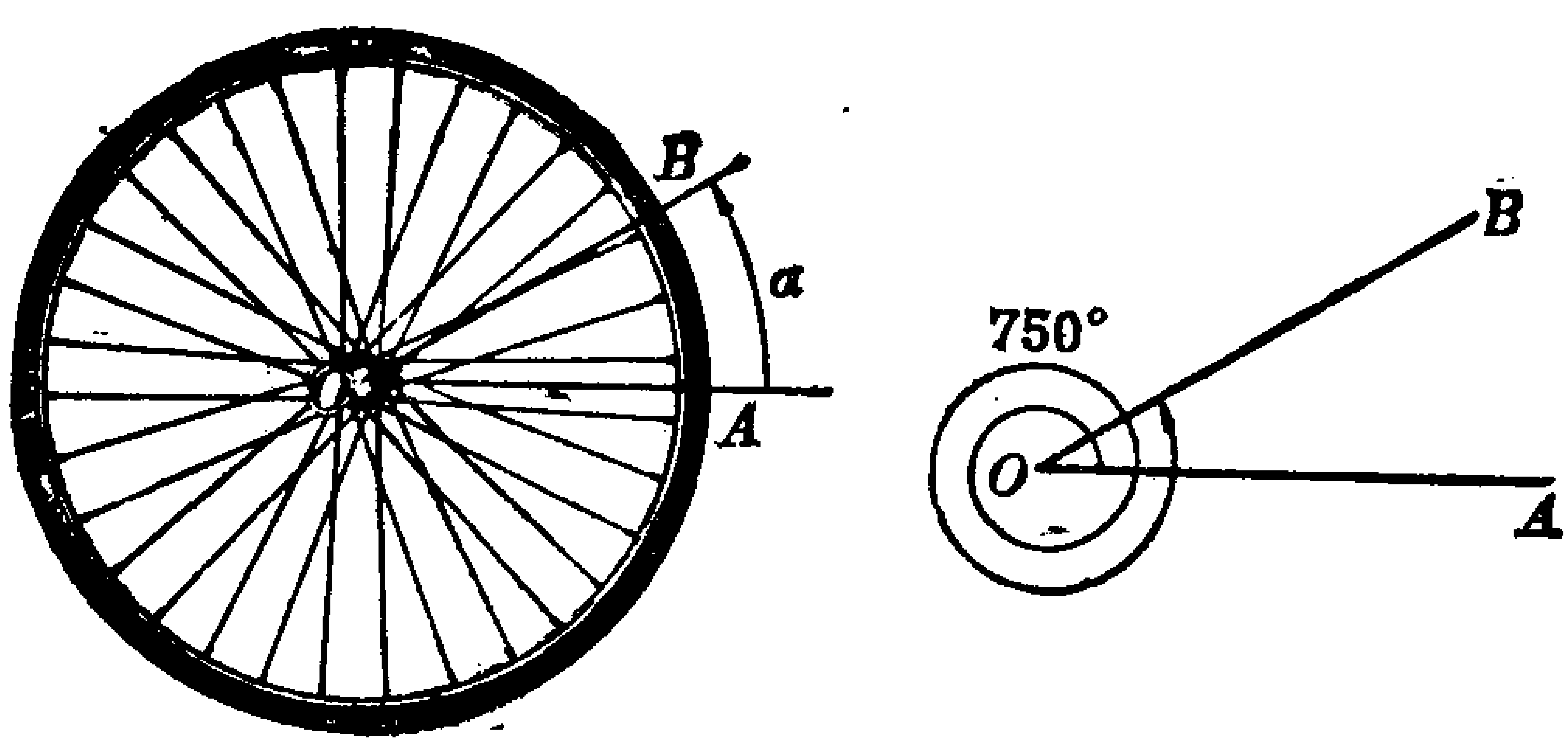


图　2-1

我们知道，角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的. 如图 2-1，一条射线由原来的位置OA，绕着它的端点O按逆时针方向旋转到另一位置OB，就形成角α. 旋转开始时的射线OA叫做角α的**始边**，旋转终止时的射线OB叫做角α的**终边**，射线的端点O叫做角α的**顶点**.

过去我们所研究的角都是$0°$到$360°$的角. 但是，在日常生活中，在生产和科学实验中，还要经常遇到大于$360°$的



(1)　　　　(2)

图　2-2

角. 如图 2-2(1)所示，在自行车的车轮按逆时针方向旋转一周的过程中，OA 形成了 0° 到 360° 的所有的角；在车轮继续旋转第二周的过程中，又形成了 360° 到 720° 的所有的角；这样下去，可以形成更大的角(如图 2-2(2)).

在实际生活中，我们还看到角的形成可以按照两种相反的旋转方向：逆时针方向和顺时针方向. 为了区别起见，我们把按逆时针方向旋转所形成的角叫做**正角**，把按顺时针方向旋转所形成的角叫做**负角**. 如在图 2-3 中，以 OA 为始边的角 $\alpha=210^\circ$, $\beta=-150^\circ$, $\gamma=-660^\circ$. 特别地，当一条射线没有作任何旋转时，我们也认为这时形成了一个角，并把这个角叫做**零角**.

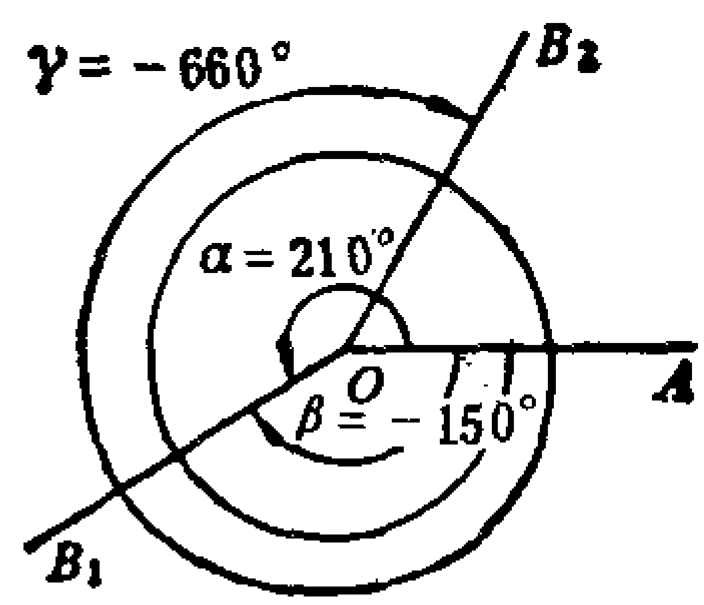


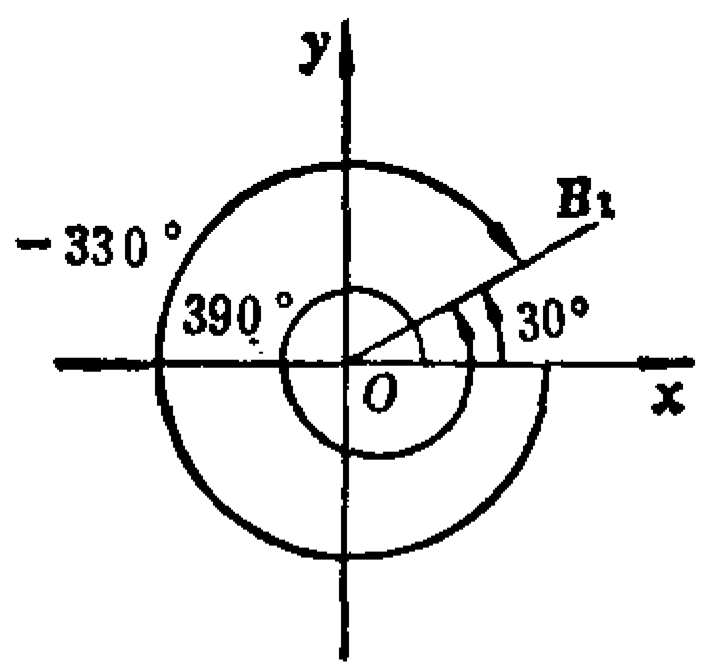
图 2-3

角的概念经这样推广以后，它包括任意大小的正角、负角和零角.

今后我们常在直角坐标系内讨论角，使角的顶点与坐标原点重合，角的始边在 x 轴的正半轴上. 角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角(或说这个角属于第几象限). 如图 2-4(1) 中的 30°, 390°, -330° 的角都是第一象限的角；图 2-4(2) 中的 300°, -60°的角都是第四象限的角；585°的角是第三象限的角. 如果角的终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限.

从图 2-4(1) 中看到，390°, -330° 的角都与30°的角的终边相同. 390°, -330° 可以分别写成下列形式：

$$360^\circ+30^\circ; \qquad -360^\circ+30^\circ.$$



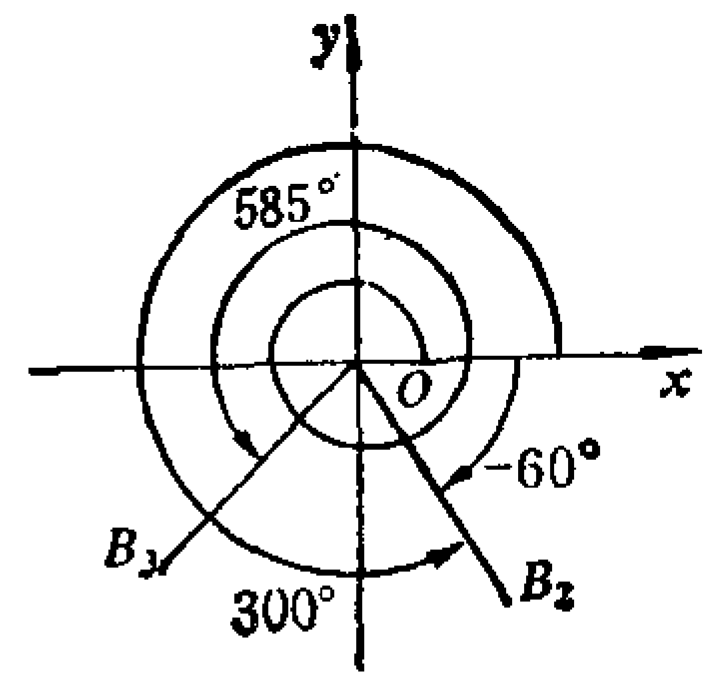


图 2-4

显然，除了这两个角以外，与 30° 的角终边相同的角还有：

$$2\times360°+30°;\qquad -2\times360°+30°;$$
$$3\times360°+30°;\qquad -3\times360°+30°;$$
$$\cdots;\qquad\qquad \cdots.$$

所有与 30° 的角终边相同的角，连同 30° 的角在内（而且只有这样的角），可以用下式来表示：

$$k\cdot360°+30°,\ k\in Z.$$

当 $k=0$ 时，它表示 30° 的角；$k=1$ 时，它表示 390° 的角；$k=-1$ 时，它表示 −330° 的角，等等.

一般地，**所有与 α 角终边相同的角，连同 α 角在内（而且只有这样的角），可以用式子 $k\cdot360°+\alpha,\ k\in Z$ 来表示.**

由此可见，对于给定的顶点、始边和终边，确定了一个由无限个角组成的集合. 与 α 角终边相同的角的集合可记作：

$$\{\beta\,|\,\beta=k\cdot360°+\alpha,\ k\in Z\}.$$

例 1 在 0°～360° 间❶，找出与下列各角终边相同的角，

---

❶ 本书规定，在 0°～360° 间的 α 角，是指 $0°\leqslant\alpha<360°$.

并判定下列各角是哪个象限的角.

(1) $-120°$; (2) $640°$; (3) $-950°12'$.

解: (1) $\because \quad -120° = -360° + 240°$,

$\therefore \quad -120°$的角与 $240°$ 的角的终边相同, 它是第三象限的角;

(2) $\because \quad 640° = 360° + 280°$,

$\therefore \quad 640°$ 的角与 $280°$的角的终边相同, 它是第四象限的角;

(3) $\because \quad -950°12' = -3 \times 360° + 129°48'$,

$\therefore \quad -950°12'$ 的角与 $129°48'$ 的角的终边相同, 它是第二象限的角.

例 2 写出与下列各角终边相同的角的集合 S, 并把 S 中在 $-360° \sim 720°$ 间的角写出来:

(1) $60°$; (2) $-21°$; (3) $363°14'$.

解: (1) $S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360° + 60°, k \in Z\}$.

S 中在 $-360° \sim 720°$ 间的角是

$$-1 \times 360° + 60° = -300°;$$
$$0 \times 360° + 60° = 60°;$$
$$1 \times 360° + 60° = 420°.$$

(2) $S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360° - 21°, k \in Z\}$.

S 中在 $-360° \sim 720°$ 间的角是

$$0 \times 360° - 21° = -21°;$$
$$1 \times 360° - 21° = 339°;$$
$$2 \times 360° - 21° = 699°.$$

(3) $S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360° + 363°14', k \in Z\}$.

S 中在 $-360°\sim720°$ 间的角是

$$-2\times360°+363°14'=-356°46';$$

$$-1\times360°+363°14'=3°14';$$

$$0\times360°+363°14'=363°14'.$$

例 3 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解: 在 $0°\sim360°$ 间，终边在 y 轴的正半轴上的角为 $90°$，终边在 y 轴的负半轴上的角为 $270°$（图 2-5），因此，终边在 y 轴的正半轴、负半轴上的所有的角分别是

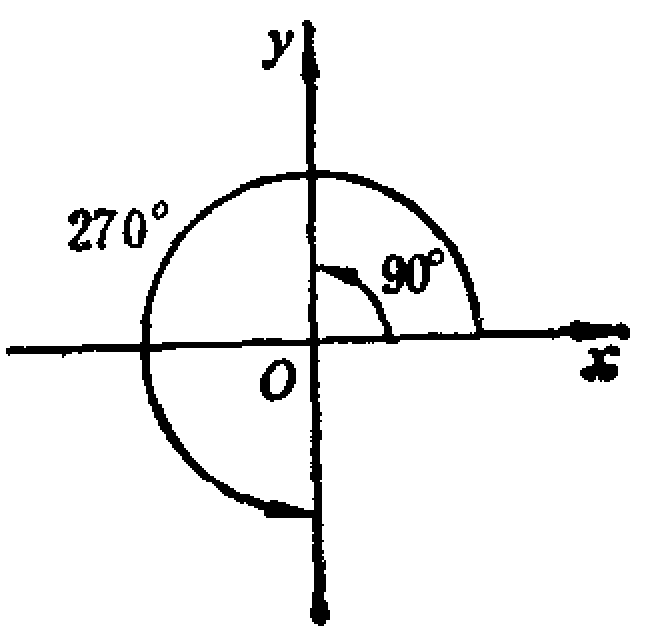


图 2-5

$$k\cdot360°+90°,\quad k\cdot360°+270°,k\in Z,$$

即终边在 y 轴上的所有的角是

$$k\cdot360°+90° \text{ 或 } k\cdot360°+270°,k\in Z.$$

又 $k\cdot360°+90°=2k\cdot180°+90°$; (1)

$$k\cdot360°+270°=2k\cdot180°+180°+90°$$
$$=(2k+1)\cdot180°+90°. \quad (2)$$

在(1)式等号右边的前一项是 $180°$ 的所有偶数 $(2k)$ 倍；在(2)式等号右边的前一项是 $180°$ 的所有奇数 $(2k+1)$ 倍，因此，它们可以合并为 $180°$ 的所有整数（用 n 来表示）倍. 这样，(1)式和(2)式可以合并写成：

$$n\cdot180°+90°,n\in Z,$$

因而终边在 y 轴上的角的集合是

$$S=\{\beta\mid\beta=n\cdot180°+90°,n\in Z\}.$$

练 习

1. (口答)锐角是第几象限的角? 第一象限的角是否都是锐角?再就钝角、直角来回答这两个问题.
2. 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合, 始边落在 x 轴的正半轴上, 作出下列各角, 并指出它们是哪个象限的角:

   (1) $420°$; (2) $-75°$; (3) $855°$; (4) $-510°$.
3. 在$0°\sim360°$间, 找出与下列各角终边相同的角, 并指出它们是哪个象限的角:

   (1) $-54°18'$; (2) $395°8'$; (3) $-1190°30'$; (4) $1563°$.
4. 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并且把集合中在$-720°\sim360°$间的角写出来:

   (1) $45°$; (2) $-30°$; (3) $1303°18'$; (4) $-225°$.

2.2 弧度制

我们在平面几何里研究过角的度量, 规定周角的$\frac{1}{360}$为1度的角. 这种用度做单位来度量角的制度叫做**角度制**. 下面, 再介绍在数学和其他许多科学研究中还要经常用到的另一种度量角的制度——弧度制.

我们把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做**1弧度的角**. 如图 2-6, $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r, $\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是1弧度的角. 在图 2-7 中, 圆心角$\angle AOC$ 所对的 $\overset{\frown}{AC}$ 的长 $l=2r$, 那么$\angle AOC$ 的弧度数就是

$$\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2.$$

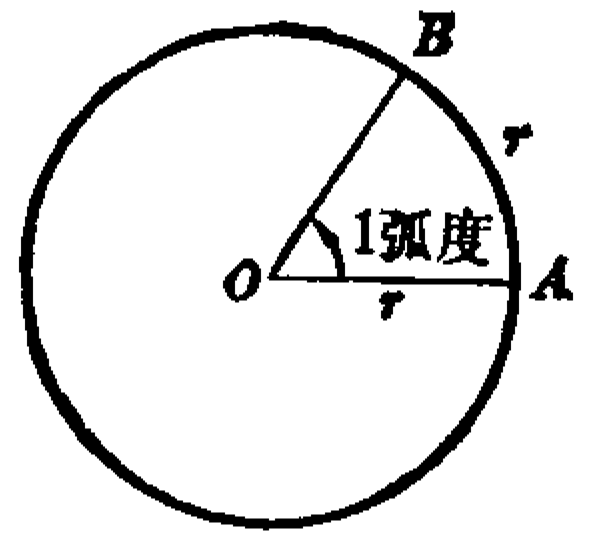


图　2-6

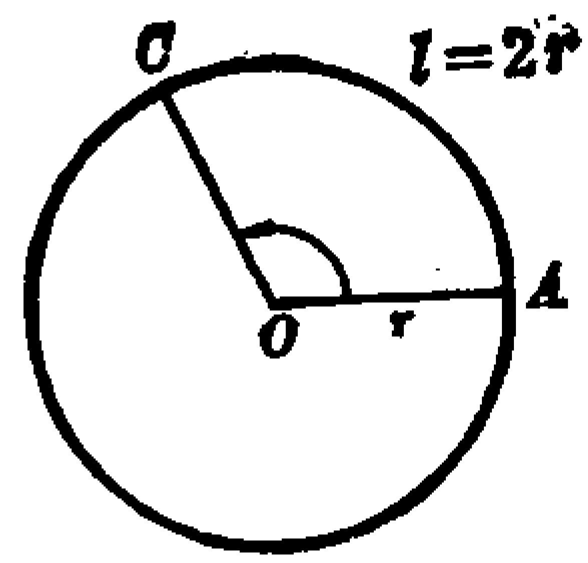


图　2-7

如果圆心角所对的弧的长 $l=2\pi r$（即弧是一个整圆），那么这个圆心角的弧度数是

$$\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi.$$

如果圆心角表示一个负角，且它所对的弧的长$l=4\pi r$，那么这个角的弧度数的绝对值是

$$\frac{l}{r}=\frac{4\pi r}{r}=4\pi,$$

即这个角的弧度数是-4π.

一般地，我们规定：**正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零，任一已知角 α 的弧度数的绝对值**

$$|\alpha|=\frac{l}{r},$$

其中 l 为以角 α 作为圆心角时所对圆弧的长，r 为圆的半径. 这种用"弧度"做单位来度量角的制度叫做**弧度制.**

根据上面的公式$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$，可以得到

$$l=|\alpha|r,$$

这就是说，圆弧的长等于圆弧所对圆心角的弧度数的绝对值与半径的积. 这个圆弧长公式比采用角度制时的相应公式

$\left(l=\frac{n\pi r}{180}\right)$要简单一些．以后还要遇到一些公式，用弧度制表示比用角度制表示简便得多．

例 1　利用弧度制来推导扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}lR$，其中 l 是扇形的弧长，R 是圆的半径(图 2-8)．

解：因为圆心角为 1 弧度的扇形的面积为 $\frac{1}{2\pi}\cdot\pi R^2$，而弧长为 l 的扇形的圆心角的弧度数为 $\frac{l}{R}$，所以它的面积为

$$S=\frac{l}{R}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\pi R^2=\frac{1}{2}lR.$$

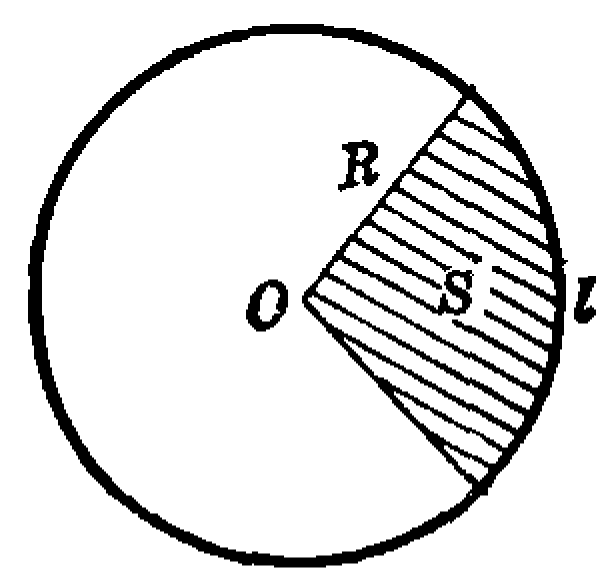


图　2-8

对于同一个角，当分别用弧度为单位和用度为单位来度量时，所得的量数除零角以外都是不同的．下面介绍它们之间的换算关系．

上面指出，周角的弧度数是 2π，而在角度制里它是360°，因此

$$\boxed{\begin{aligned}&360^\circ=2\pi\text{弧度},\\&180^\circ=\pi\text{弧度}.\end{aligned}}$$

由此还可得到：

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{ 弧度};$$

$$1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.30^\circ=57^\circ 18'.$$

例 2　把 67°30′ 化成弧度．

解: $\because \quad 67°30' = \left(67\frac{1}{2}\right)°$,

$\therefore \quad 67°30' = \frac{\pi}{180}$弧度$\times 67\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi$ 弧度.

例 3 把$\frac{3}{5}\pi$ 弧度化成度.

解: $\frac{3}{5}\pi$ 弧度$= \frac{3}{5} \times 180° = 108°$.

下面是一些特殊角的度数与弧度数的对应表:

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

度数与弧度数的换算，还可以利用«中学数学用表»中的«度、分、秒化弧度表»、«弧度化度、分、秒表»来进行，用法见表中说明.

用弧度制来度量角，实际上是在角的集合与实数集R之间建立了这样的一一对应关系：每一个角都有一个实数(即这个角的弧度数)与它对应，不同的角有不同的实数与它对应；反过来，每一个实数也都有一个角(角的弧度数等于这个实数)与它对应，如图 2-9 所示.

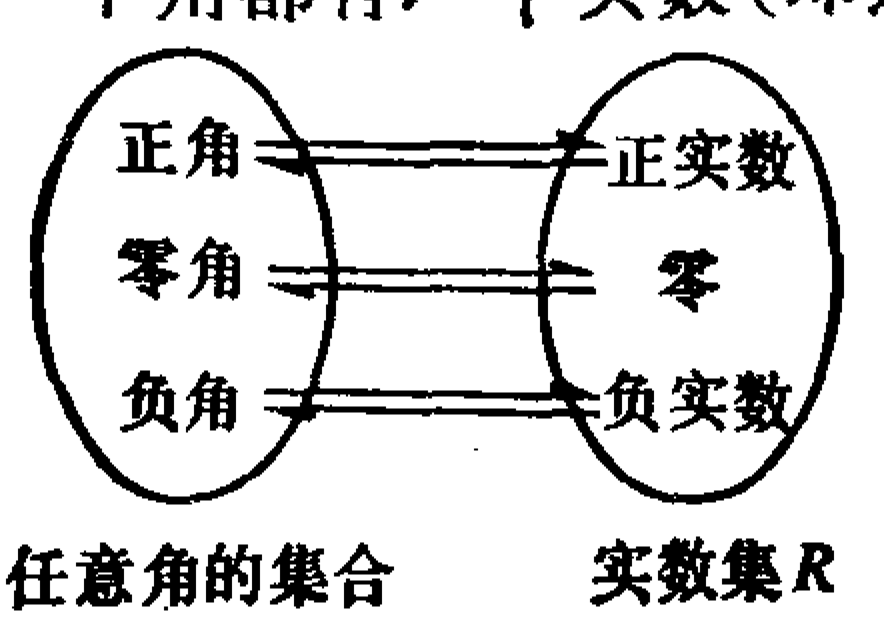


图 2-9

今后我们用弧度制表示角的时候，“弧度”二字通常略去不写，而只写这个角所对应的弧度数. 例如，角$\alpha=2$就表示α是 2 弧度的角，$\sin\frac{\pi}{3}$就表示$\frac{\pi}{3}$弧度的角的正弦.

例 4　计算:

(1) $\sin\frac{3\pi}{4}$;　　　　(2) $\mathrm{tg}\,1.5$.

解: (1) $\because$　$\frac{3}{4}\pi$ 弧度$=135°$,

$\therefore$　$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin 135°=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(2) $\because$　1.5 弧度$\approx 57.30°\times 1.5$

$$=85.95°=85°57',$$

$\therefore$　$\mathrm{tg}\,1.5\approx \mathrm{tg}\,85°57'=14.12$.

例 5　将下列各角化成$2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in Z)$的形式:

(1) $\frac{19}{3}\pi$;　　　　(2) $-315°$.

解: (1) $\frac{19}{3}\pi=6\pi+\frac{\pi}{3}\left(\alpha=\frac{\pi}{3},k=3\right)$;

(2) $-315°=-\left(\frac{\pi}{180}\times 315\right)=-\frac{7}{4}\pi$

$$=-2\pi+\frac{\pi}{4}\left(\alpha=\frac{\pi}{4},\ k=-1\right).$$

例 6　如图 2-10, 求公路弯道部分$\overset{\frown}{AB}$的长 l (精确到 1 米. 图中长度单位: 米).

解: $\because$　$60°=\frac{\pi}{3}$弧度,

$\therefore$　$l=|\alpha|r$

$=\frac{\pi}{3}\times 45$

$\approx 3.14\times 15$

≈ 47(米).

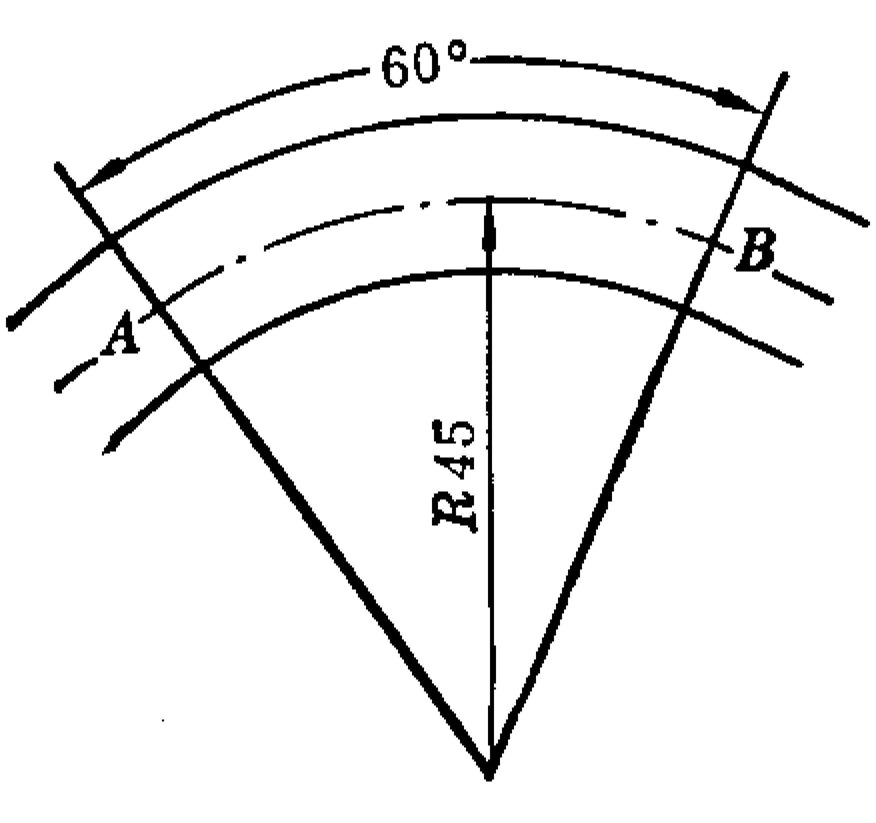


图　2-10

答：弯道部分$\overset{\frown}{AB}$的长约为 47 米。

练 习

1. (口答)下列各度分别是多少π弧度？

(1) 180°； (2) 90°； (3) 60°； (4) 45°；

(5) 30°； (6) 120°； (7) 270°； (8) 360°.

2. (口答)下列各弧度分别是多少度？

(1) π； (2) 2π； (3) $\frac{1}{2}\pi$； (4) $\frac{1}{3}\pi$；

(5) $\frac{2\pi}{3}$； (6) $\frac{\pi}{6}$； (7) $\frac{\pi}{4}$； (8) $\frac{3\pi}{4}$.

3. 把下列各度化成弧度(写成多少π的形式)：

(1) 12°； (2) 75°； (3) −210°；

(4) 135°； (5) 300°； (6) 22°30′.

4. 把下列各弧度化成度：

(1) $\frac{\pi}{12}$； (2) $-\frac{4}{3}\pi$； (3) $\frac{3}{10}\pi$；

(4) $-\frac{\pi}{5}$； (5) -12π； (6) $\frac{5}{6}\pi$.

5. 用弧度表示：

(1) 终边在x轴上的角的集合；

(2) 终边在y轴上的角的集合。

6. 求下列各三角函数的值：

(1) $\sin\frac{2\pi}{3}$； (2) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$； (3) $\cos 1.2$； (4) $\sin 1$.

7. (口答)时间经过 4 小时，时针和分针各转了多少度，等

于多少弧度?

8. 用度和弧度表示的弧长公式分别计算在半径为1米的圆中,$60°$的圆心角所对的圆弧的长。

9. 把下列各角化成$2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi, k\in Z)$的形式,并指出它们是第几象限的角:

(1) $\frac{23}{6}\pi$; (2) $-1500°$.

10. 已知在半径为120mm的圆上的一条弧的长是144mm,求这条弧所对的圆心角的弧度数和度数。

习题六

1. 在$0°\sim360°$间,找出与下列各角终边相同的角,并判定下列各角是哪个象限的角:

(1) $-265°$; (2) $1185°14'$; (3) $-1000°$;

(4) $-843°10'$; (5) $-15°$; (6) $3900°$;

(7) $560°24'$; (8) $2903°15'$.

2. 写出与下列各角终边相同的角的集合,并把集合中在$-360°\sim360°$间的角写出来:

(1) $60°$; (2) $-75°$; (3) $-824°30'$;

(4) $475°$; (5) $90°$; (6) $270°$;

(7) $180°$; (8) $0°$.

3. 写出终边在x轴上的角的集合。

4. 分别写出第一象限的角、第二象限的角、第三象限的角、第四象限的角的集合。

5. 一条弦的长等于半径,这条弦所对的圆心角是否为1弧

度？为什么？

6. 把下列各度化成弧度（写成多少π的形式）：

$18°$，$-120°$，$735°$，$-12.5°$，

$10°$，$1080°$，$19°48'$，$-9°20'$.

7. 把下列各弧度化成度：

$-\frac{7\pi}{6}$，$\frac{\pi}{15}$，$\frac{5\pi}{8}$，$-\frac{8\pi}{3}$，-5，1.4.

8. 填写下表：

角＼函数	正 弦	余 弦	正 切	余 切
$\frac{\pi}{6}$				
$\frac{\pi}{4}$				
$\frac{\pi}{3}$				

9. 填写下表：

角＼函数	正 弦	余 弦	正 切	余 切
$\frac{\pi}{2}$				
$\frac{2\pi}{3}$				
$\frac{3\pi}{4}$				
$\frac{5\pi}{6}$				

10. 把下列各角化成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi, k\in Z)$ 的形式：

(1) $-\frac{25}{6}\pi$; (2) -5π; (3) $-45°$; (4) $400°$.

11. 求下列各三角函数的值：

(1) $\operatorname{tg}1$; (2) $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}$; (3) $\cos\frac{4}{5}\pi$; (4) $\sin 2.1$.

12. 采用弧度制，重新解答第 4 题。

13. 圆的半径等于 240mm，求这个圆上长500mm的弧所对圆心角的度数。

14. 直径是20cm的滑轮，每秒钟旋转45弧度，求轮周上一点经过 5 秒钟所转过的弧长。

15. 航海罗盘将圆周分成32等份，把每一等份所对的圆心角的大小分别用度与弧度表示出来。

16. 某种蒸气机上的飞轮直径为 1.2m，每分钟按逆时针方向旋转300转，求：

(1) 飞轮每秒钟转过的弧度数；

(2) 轮周上的一点每秒钟经过的弧长。

17. 要在半径$OA=100$cm的圆形金属板上，截取一块$\overset{\frown}{AB}$的长为112cm 的扇形板，应截取的圆心角 AOB 的度数是多少(精确到1°)？

18. 已知1°的圆心角所对的弧的长为 1 米，这个圆的半径是多少？

19. 已知长 50cm 的弧含有200°，求这条弧所在的圆的半径(精确到1cm)。

2.3 任意角的三角函数

在初中，我们已经接触过正弦、余弦、正切、余切这四种三角函数．它们都是以角为自变量、以比值为函数值的函数．这四种三角函数的定义，当时是针对 0°～360° 间的角作出的，并对 0°～180° 间的角的三角函数作了一些讨论．下面将三角函数的定义推广到任意角的情形．

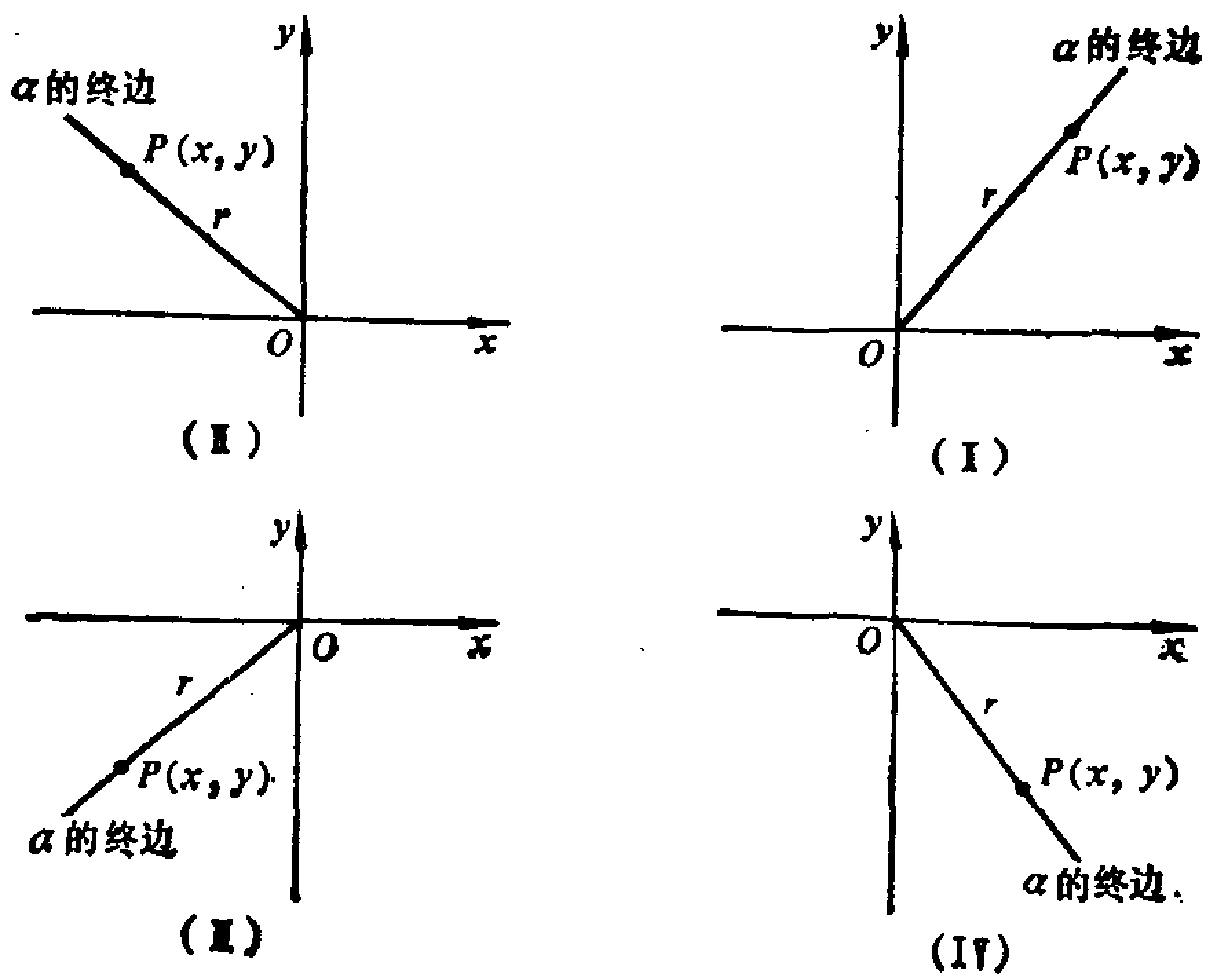


图 2-11

设 α 是一个任意大小的角．角 α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y)，它与原点的距离是 $r(r>0)$(图 2-11)，那么角 α 的正弦、余弦、正切、余切分别是

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

对于确定的角 α，这四个比值的大小和 P 点在角 α 的终

边上的位置没有关系．当角 α 的终边在 x 轴上时，$\alpha=k\pi$（或 $\alpha=k\cdot 180°$），$k\in Z$，$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$ 无意义（因为 $y=0$）；当角 α 的终边在 y 轴上时，$\alpha=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（或 $\alpha=k\cdot 180°+90°$），$k\in Z$，$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$ 无意义（因为 $x=0$）．此外，对于确定的角 α，上面四个比值都是一个确定的实数．这就是说，正弦、余弦、正切、余切分别可看成从一个角的集合到一个比值的集合的映射（图 2-12），它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，这些函数都叫做**三角函数**．

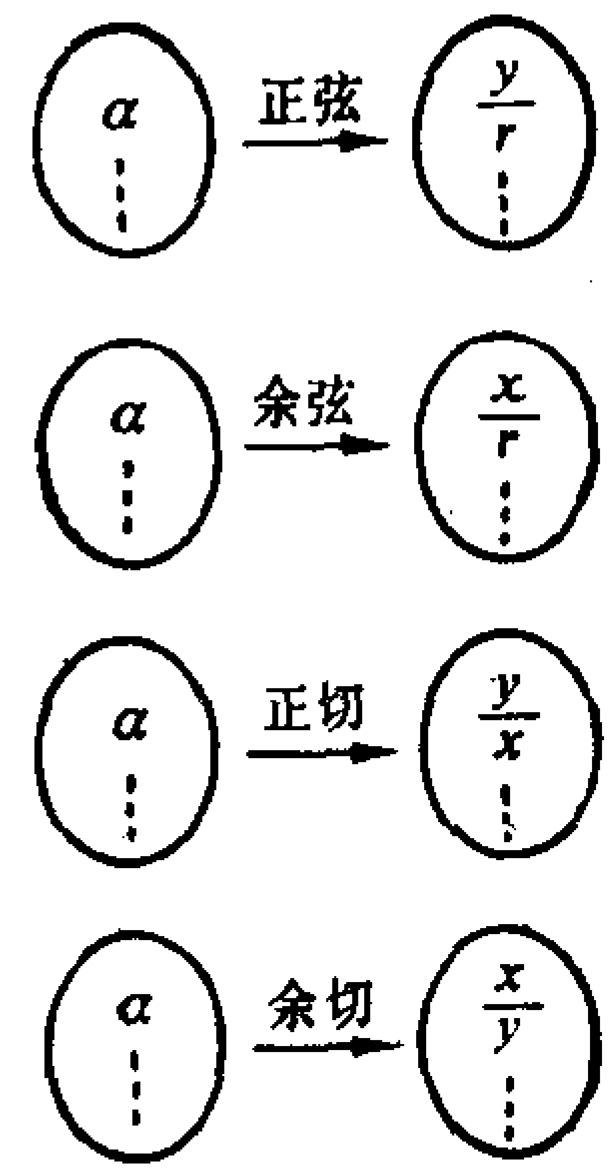


图 2-12

有时，我们还要用到下面两个三角函数：

角 α 的**正割**：　　$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$，

角 α 的**余割**：　　$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$．

由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数可以看成是以实数为自变量的函数．例如，当采用弧度制来度量角时，对于每一个实数，对应着一个确定的角（其弧度数等于这个实数），而这个确定的角又对应着它的三角函数值（所取的实数应使相应的三角函数有意义），从而这个实数就对应着它的三角函数值，即

$$\text{实数}\longrightarrow\text{角}\begin{pmatrix}\text{其弧度数等}\\\text{于这个实数}\end{pmatrix}\longrightarrow\text{三角函数值（实数）}$$

当自变量是用弧度制来度量角所得到的实数 α 时，三角函数的定义域如下表：

三 角 函 数	定 义 域
$\sin\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \in R\}$
$\cos\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \in R\}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \in R, \alpha \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \in R, \alpha \neq k\pi, k \in Z\}$
$\sec\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \in R, \alpha \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$
$\csc\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha \in R, \alpha \neq k\pi, k \in Z\}$

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(2, -3)$，求 α 的六个三角函数值(图 2-13)。

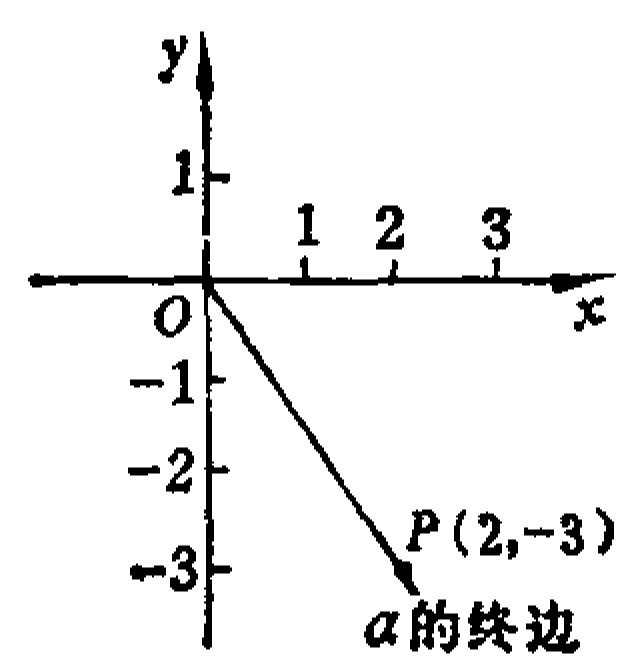


图 2-13

解： $\because \quad x=2, y=-3,$

$\therefore \quad r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}.$

$\therefore \quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13},$

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13},$

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}, \quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{2}{3},$

$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{13}}{3}.$

例 2 求下列各角的六个三角函数值：

(1) 0;　　(2) π;　　(3) $\frac{3\pi}{2}$.

解: (1) $\because$ 当 $\alpha=0$ 时, $x=r, y=0$,

$\therefore$ $\sin 0=0$,　　$\cos 0=1$,

$\operatorname{tg} 0=0$,　　$\operatorname{ctg} 0$ 不存在,

$\sec 0=1$,　　$\csc 0$ 不存在.

(2) $\because$ 当 $\alpha=\pi$ 时, $x=-r, y=0$,

$\therefore$ $\sin \pi=0$,　　$\cos \pi=-1$,

$\operatorname{tg} \pi=0$,　　$\operatorname{ctg} \pi$ 不存在,

$\sec \pi=-1$,　　$\csc \pi$ 不存在.

(3) $\because$ 当 $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ 时, $x=0, y=-r$,

$\therefore$ $\sin \frac{3\pi}{2}=-1$,　　$\cos \frac{3\pi}{2}=0$,

$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ 不存在,　　$\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}=0$,

$\sec \frac{3\pi}{2}$ 不存在,　　$\csc \frac{3\pi}{2}=-1$.

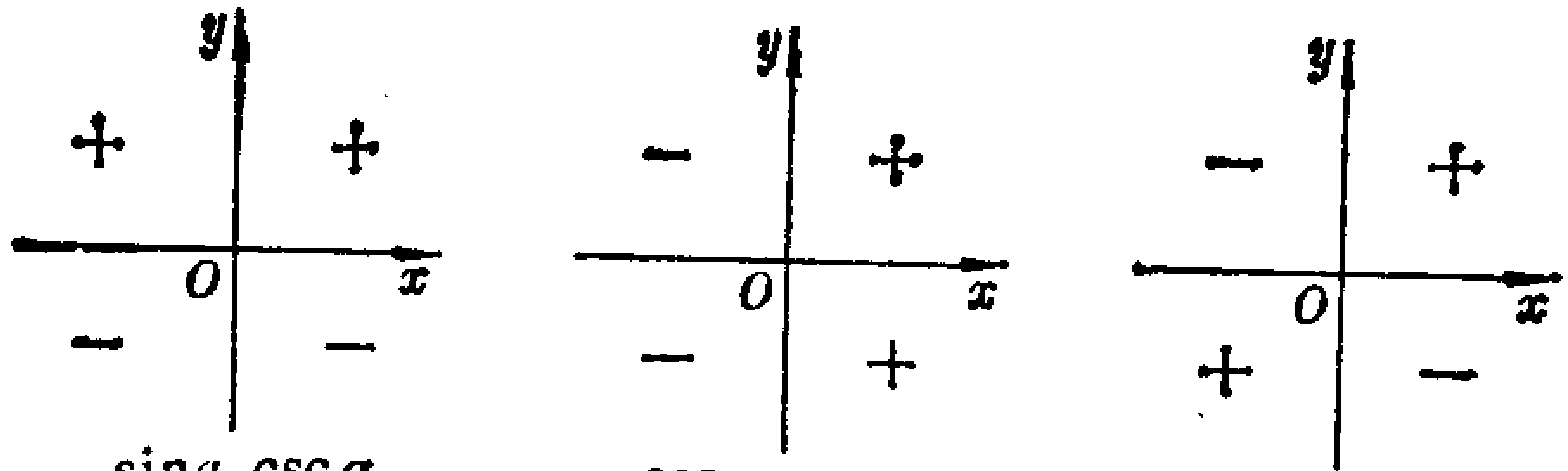
由三角函数的定义和各象限内点的坐标的符号知道:

正弦值$\left(\frac{y}{r}\right)$与余割值$\left(\frac{r}{y}\right)$对于第一、二象限的角是正的($y>0, r>0$), 而对于第三、四象限的角是负的($y<0, r>0$);

余弦值$\left(\frac{x}{r}\right)$与正割值$\left(\frac{r}{x}\right)$对于第一、四象限的角是正的($x>0, r>0$), 而对于第二、三象限的角是负的($x<0, r>0$);

正切值$\left(\frac{y}{x}\right)$与余切值$\left(\frac{x}{y}\right)$对于第一、三象限的角是正的(x, y 同号), 而对于第二、四象限的角是负的(x, y 异号).

各三角函数值在每个象限的符号，如图 2-14 所示。



$\sin\alpha, \csc\alpha$　　$\cos\alpha, \sec\alpha$　　$\text{tg}\,\alpha, \text{ctg}\,\alpha$

图　2-14

根据三角函数的定义还可以知道，**终边相同的角的同一三角函数的值相等**．由此得到一组公式(**公式一**)：

$$\sin(k\cdot 360°+\alpha)=\sin\alpha,\qquad \cos(k\cdot 360°+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\text{tg}(k\cdot 360°+\alpha)=\text{tg}\alpha,\qquad \text{ctg}(k\cdot 360°+\alpha)=\text{ctg}\alpha.$$
$$(k\in z)$$

利用公式一可以把求任意角的三角函数值的问题，转化为求 $0°\sim 360°(0\sim 2\pi)$ 间角的三角函数值的问题．

例 3　确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\cos 250°$;　　(2) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\text{tg}(-672°10')$;　(4) $\text{ctg}\dfrac{11\pi}{3}$.

解：(1) 因为 $250°$ 是第三象限的角，所以 $\cos 250°<0$;

(2) 因为 $-\dfrac{\pi}{4}$ 是第四象限的角，所以 $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$;

(3) 因为　$\text{tg}(-672°10')=\text{tg}(-2\times 360°+47°50')$ $=\text{tg}\,47°50'$，而 $47°50'$ 是第一象限的角，所以

$$\text{tg}(-672°10')>0;$$

(4) 因为 $\text{ctg}\frac{11\pi}{3}=\text{ctg}\left(2\pi+\frac{5}{3}\pi\right)=\text{ctg}\frac{5}{3}\pi$，而$\frac{5}{3}\pi$是第四象限的角，所以$\text{ctg}\frac{11\pi}{3}<0$.

例 4 根据条件 $\sin\theta<0$ 且 $\text{tg}\theta>0$，确定 θ 是第几象限的角.

解: $\because$ $\sin\theta<0$,

$\therefore$ θ 在第三象限或第四象限，或 θ 的终边在 y 轴的负半轴上;

$\because$ $\text{tg}\theta>0$,

$\therefore$ θ 在第一象限或第三象限.

$\because$ $\sin\theta<0$ 与 $\text{tg}\theta>0$ 同时成立,

$\therefore$ θ 在第三象限.

例 5 求下列各三角函数值:

(1) $\sin 1480°10'$; (2) $\cos\frac{9\pi}{4}$; (3) $\text{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

解: (1) $\sin 1480°10'=\sin(4\times360°+40°10')$

$$=\sin 40°10'=0.6451;$$

(2) $\cos\frac{9\pi}{4}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $\text{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\text{tg}\left(-2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\text{tg}\frac{5\pi}{6}$

$$=\text{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\text{tg}\frac{\pi}{6}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

练　习

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(-3, -1)$，求 α 的六个三角函数值.

2. 填写下表：

α	0°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数					
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\mathrm{tg}\,\alpha$					
$\mathrm{ctg}\,\alpha$					

3. (口答)设 α 是三角形的一个内角，在 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ 中，哪些有可能取负值？

4. 确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\csc 156^\circ$；　(2) $\cos\dfrac{16}{5}\pi$；　(3) $\sec(-80^\circ)$；

(4) $\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{17}{8}\pi\right)$；(5) $\sin\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$；(6) $\mathrm{tg}556^\circ12'$.

5. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限的角：

(1) $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta>0$；　(2) $\sec\theta<0$ 且 $\mathrm{ctg}\theta<0$；

(3) $\sin\theta$ 与 $\mathrm{tg}\theta$ 同号；　(4) $\cos\theta$ 与 $\mathrm{tg}\theta$ 异号.

6. 求下列各三角函数值：

(1) $\cos 1109^\circ$；　　(2) $\mathrm{tg}\dfrac{19\pi}{3}$；

(3) $\sin(-1290°)$;　　(4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$.

2.4 同角三角函数的基本关系式

根据三角函数的定义，可以得到同角三角函数间的下列基本关系式：

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1.$$

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{x}=1.$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha&=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2\\&=\frac{y^2+x^2}{r^2}\\&=\frac{r^2}{r^2}=1.\end{aligned}$$

将 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的两边都除以 $\cos^2\alpha$，可以得到

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha.$$

将 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的两边都除以 $\sin^2\alpha$, 又可以得到

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

以上关系式可归纳如下:

(1) 倒数关系

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1;\\&\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;\\&\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1.\end{aligned}}$$

(2) 商数关系

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\\&\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\end{aligned}}$$

(3) 平方关系

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\\&1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;\\&1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.\end{aligned}}$$

上面这些关系式都是恒等式，即当 α 取使关系式的两边都有意义的任意值时，关系式两边的值都相等. 以后所说的恒等式都是指这个意义下的恒等式.

利用这些关系式, 可以根据一个角的某一个三角函数值, 求出这个角的其他三角函数值, 还可化简三角函数式, 证明其他一些三角恒等式, 等等.

例1 已知$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，并且α是第二象限的角，求α的其他三角函数值。

解： 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可得 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$\because$ α是第二象限的角，$\cos\alpha<0$，

$\therefore$ $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{-\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4},$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{-\frac{3}{5}}=-\frac{5}{3},$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}.$$

例2 已知$\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，求α的其他三角函数值。

解： 因为 $\cos\alpha<0$，所以α是第二象限的角或者是第三象限的角。

(1) 如果α是第二象限的角，可以得到

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{15}{17}\Big/-\frac{8}{17}=-\frac{15}{8},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{-\frac{15}{8}}=-\frac{8}{15},$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{-\frac{8}{17}}=-\frac{17}{8},$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{15}{17}}=\frac{17}{15}.$$

(2) 如果 α 是第三象限的角，则可得到

$$\sin\alpha=-\frac{15}{17},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{15}{8},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{15},$$

$$\sec\alpha=-\frac{17}{8},\ \csc\alpha=-\frac{17}{15}.$$

例 3 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=m(m\neq 0)$，求 $\cos\alpha$.

解: 由于 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值为 m，且 $m\neq 0$，所以角 α 的终边不在两个坐标轴上.

(1) 如果 α 是第一、二象限的角，可以得到

$$\csc\alpha=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\sqrt{m^2+1},$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1},$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}.$$

(2) 如果 α 是第三、四象限的角，可以得到

$$\csc\alpha=-\sqrt{m^2+1},$$

$$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1},$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=-\frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}.$$

例 4 已知 $\mathrm{tg}\alpha\neq0$，用 $\mathrm{tg}\alpha$ 来表示 α 的其他三角函数。

解： $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$,

$\sec\alpha=\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$（$\alpha$ 为第一、四象限的角时取正号，α 为第二、三象限的角时取负号，以下各式同）

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

一般地，当已知角 α 的任一个三角函数值及角 α 的终边所在的象限时，都可以根据同角三角函数间的基本关系式求出角 α 的其他三角函数值；当已知角 α 的一个三角函数值、而未指定角 α 的终边所在的象限时，要根据角 α 的终边可能在的两个象限分别求其他三角函数值；当已知的角 α 的三角函数值用字母表示时，为了确定角 α 的有些三角函数值表达式前面的正负号，要对角 α 的终边所在的象限分别进行讨论。

练 习

1. 根据下列条件，求角 α 的其他三角函数值：

(1) 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，并且 α 为第一象限的角；

(2) 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，并且 α 为第三象限的角。

2. 已知 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求 θ 的其他三角函数值。

3. 已知 $\operatorname{ctg}\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 φ 的其他三角函数值。

4. 已知 $\sin x=0.35$，求 x 的其他三角函数值(保留两个有效数字)。

例 5 化简下列各式:

(1) $\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}$； (2) $\sqrt{\sec^2 A-1}$.

解: (1) $\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}=\sqrt{1-\sin^2 80^\circ}$

$=\sqrt{\cos^2 80^\circ}=\cos 80^\circ$. ($\because$ $\cos 80^\circ>0$)

(2) $\sqrt{\sec^2 A-1}=\sqrt{\operatorname{tg}^2 A}=|\operatorname{tg} A|$.

例 6 求证 $\operatorname{ctg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha$.

证明: $\operatorname{ctg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

$=(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha)^2-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\sin^2\alpha$

$=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

例 7 求证 $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{\sec^2\theta+\csc^2\theta}$.

证明: $\frac{1}{\sec^2\theta+\csc^2\theta}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}}$

$=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\sin^2\theta\cos^2\theta$.

例 8 求证

$(1-\sin^2 A)(\sec^2 A-1)=\sin^2 A(\csc^2 A-\operatorname{ctg}^2 A)$.

证明: $(1-\sin^2 A)(\sec^2 A-1)=\cos^2 A\cdot\operatorname{tg}^2 A$

$$=\cos^2A\cdot\frac{\sin^2A}{\cos^2A}=\sin^2A,$$

$$\sin^2A(\csc^2A-\operatorname{ctg}^2A)=\sin^2A\cdot1=\sin^2A,$$

$$\therefore\quad(1-\sin^2A)(\sec^2A-1)=\sin^2A(\csc^2A-\operatorname{ctg}^2A).$$

例 9 求证 $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

证明一: $\because\quad(1-\sin x)(1+\sin x)$

$$=1-\sin^2x=\cos^2x$$

$$=\cos x\cos x,$$

$$\therefore\quad\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

证明二:

$$\because\quad\frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2x-(1-\sin^2x)}{(1-\sin x)\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2x-\cos^2x}{(1-\sin x)\cos x}=0,$$

$$\therefore\quad\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

从上面的例子可以看到，证明三角恒等式，可以从任何一边开始，证得它等于另一边，也可以证明左右两边都等于同一个式子，有时也可以先证明另一个恒等式，从而推得需要证明的恒等式，等等．要在熟练掌握各基本公式的基础上，按照由繁到简的原则，灵活地运用各种证法．在变形的过程中，将同

一式子中的正切、余切、正割、余割都化成正弦及余弦，并注意运用基本公式中的平方关系，有时可使式子简化.

练 习

1. 化简：

(1) $\cos\theta\operatorname{tg}\theta$；　　(2) $\dfrac{1}{\sec^2\alpha}+\dfrac{1}{\csc^2\alpha}$；

(3) $\csc\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$；

(4) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}$；　　(5) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha\csc\alpha}$.

2. 化简：

(1) $\sec\theta\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta}$，其中$\theta$为第二象限的角；

(2) $\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}$.

3. 求证下列恒等式：

(1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；

(2) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

(3) $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\csc\alpha}=\cos\alpha$；

(4) $(\sin\varphi+\operatorname{tg}\varphi)(\cos\varphi+\operatorname{ctg}\varphi)$
$=(1+\sin\varphi)(1+\cos\varphi)$.

习 题 七

1. 已知角α的终边分别经过下列各点，求α的六个三角函数值：

(1) $(-8,-6)$；　　(2) $(\sqrt{3},-1)$。

2. 计算：

(1) $5\sin 90^\circ+2\cos 0^\circ-3\sin 270^\circ+10\cos 180^\circ$;

(2) $7\cos 270^\circ+12\sin 0^\circ+2\operatorname{ctg} 90^\circ-8\sec 180^\circ$;

(3) $\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{2}$;

(4) $\sin^4\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{2}+6\operatorname{tg}^3\frac{3\pi}{4}$.

3. 化简：

(1) $a\sin 0^\circ+b\cos 90^\circ+c\operatorname{tg} 180^\circ$;

(2) $-p^2\sec 180^\circ+q^2\sin 90^\circ-2pq\cos 0^\circ$;

(3) $a^2\cos 2\pi-b^2\sin\frac{3\pi}{2}+ab\cos\pi-ab\csc\frac{\pi}{2}$;

(4) $m\operatorname{tg} 0+n\cos\frac{\pi}{2}-p\sin\pi-q\cos\frac{3}{2}\pi-r\sin 2\pi$.

4. 根据已知条件计算下式的值：

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$-4\cos 2\alpha+3\cos\left(\alpha+\frac{3}{4}\pi\right).$$

(1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$; (2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

5. 确定下列各三角函数值的符号(不求出值)：

(1) $\csc 186^\circ$; (2) $\operatorname{ctg} 505^\circ$; (3) $\sin 7.6\pi$;

(4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{23}{4}\pi\right)$; (5) $\sec 940^\circ$; (6) $\cos\left(-\frac{59}{17}\pi\right)$.

6. 确定下列各式的符号：

(1) $\operatorname{tg} 125^\circ\cdot\sin 273^\circ$;

(2) $\dfrac{\operatorname{ctg}108^\circ}{\cos 305^\circ 12'}$;

(3) $\sin\dfrac{5}{4}\pi\cdot\cos\dfrac{4}{5}\pi\cdot\operatorname{tg}\dfrac{11}{6}\pi$;

(4) $\dfrac{\sec\dfrac{5}{6}\pi\cdot\operatorname{tg}\dfrac{11}{6}\pi}{\csc\dfrac{2}{3}\pi}$.

7. 根据下列条件，确定 θ 是第几象限的角:

(1) $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$;　(2) $\sec\theta<0$ 且 $\operatorname{tg}\theta>0$;

(3) $\dfrac{\sin\theta}{\operatorname{ctg}\theta}>0$;　(4) $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$.

8. 求下列各三角函数值:

(1) $\cos 840^\circ$;　(2) $\sin\left(-\dfrac{67}{12}\pi\right)$;

(3) $\operatorname{ctg}(-1300^\circ)$;　(4) $\operatorname{tg}(-1266^\circ 15')$;

(5) $\sin\dfrac{49}{18}\pi$;　(6) $\cos\left(-\dfrac{11}{3}\pi\right)$;

(7) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)$;　(8) $\cos 398^\circ 13'$;

(9) $\operatorname{ctg}(-610^\circ 42')$;　(10) $\sin\dfrac{47}{10}\pi$.

9. 根据下列条件，求角 α 的其他各三角函数值:

(1) 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 为第四象限的角;

(2) 已知 $\sec\alpha=-\dfrac{5}{4}$，且 α 为第三象限的角;

(3) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$;

(4) 已知 $\cos\alpha=0.68$(计算结果保留两个有效数字).

10. (1) 已知 $\cos\theta=\frac{12}{13}$, 并且 θ 为第四象限的角, 求 $\sec\theta$ 及 $\operatorname{tg}\theta$;

(2) 已知 $\sin x=-\frac{1}{3}$, 求 $\cos x$ 及 $\operatorname{tg}x$.

11. (1) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, 求 $\cos\alpha-\sin\alpha$;

(2) 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, 求 $\sec^2\alpha+\csc^2\alpha$.

12. 已知 $\csc\alpha=t$, 求 $\cos\alpha$.

13. (1) 已知 $\cos\theta\neq 0$, 且 $\cos\theta\neq\pm 1$, 用 $\cos\theta$ 来表示 θ 的其他各三角函数;

(2) 用 $\sec\varphi$ 来表示 φ 的其他各三角函数;

(3) 已知 $\sin\theta\neq 0$, 且 $\sin\theta\neq\pm 1$, 用 $\sin\theta$ 来表示 θ 的其他各三角函数;

(4) 已知 $\operatorname{ctg}\alpha\neq 0$, 用 $\operatorname{ctg}\alpha$ 来表示 α 的其他各三角函数.

14. 化简:

(1) $\sin^2 190°\cdot\csc^2 190°$; (2) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;

(3) $\csc^2\theta-\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta$; (4) $\sec^2 A-\operatorname{tg}^2 A-\sin^2 A$.

15. 化简:

(1) $\sec\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\csc^2\alpha-1}$(其中 α 为第四象限的角);

(2) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$(其中 α 为第二象限的角).

16. 化简：

(1) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\cos\alpha\sec\alpha$;

(2) $(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta)^2-(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\beta)^2$;

(3) $\dfrac{\sin A+\cos A}{\sec A+\csc A}$;

(4) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\csc^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

17. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$，求 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值。

18. 证明下列恒等式：

(1) $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$;

(2) $\operatorname{tg}^2\theta-\sin^2\theta=\operatorname{tg}^2\theta\cdot\sin^2\theta$;

(3) $(\sin A-\csc A)(\cos A-\sec A)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}A+\operatorname{ctg}A}$;

(4) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2A}{1+\operatorname{ctg}^2A}=\left(\dfrac{1-\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{ctg}A}\right)^2$.

19. 证明下列恒等式：

(1) $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$;

(2) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$
$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$;

(3) $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x$;

(4) $\sin^3\theta(1+\operatorname{ctg}\theta)+\cos^3\theta(1+\operatorname{tg}\theta)=\sin\theta+\cos\theta$;

(5) $\dfrac{\operatorname{tg}^2A-\operatorname{ctg}^2A}{\sin^2A-\cos^2A}=\sec^2A+\csc^2A$;

(6) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}$;

(7) $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\csc A)^2$
$=(1+\sec A\csc A)^2$;

(8) $\dfrac{\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} A}=\dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{ctg} A}$.

20. 已知α是第一象限的角，求证

$$\sqrt{\csc^2\alpha-1}-\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$$
$$=\sqrt{1-\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

21. 已知 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, x\neq 0$, 求证

(1) $x^2+y^2=\rho^2$; (2) $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$.

22. 已知 $x\cos\theta=a, y\operatorname{ctg}\theta=b(a\neq 0, b\neq 0)$, 求证

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2.5 诱导公式

我们知道，0°～90° 间的角的三角函数值，可以通过查表求得．另外，利用第 2.3 节的公式一，可以把求任意角的三角函数值转化为求 0°～360°间的角的三角函数值．因此，如果能把求 90°～360° 间的角的三角函数值转化为求 0°～90° 间的角的三角函数值，那么任意角的三角函数值就都能通过查表来求了．

对于 90°～360° 间的角，可用下面的形式来表示：

设 $0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$，那么

90°～180° 间的角，可以写成 $180°-\alpha$；

180°～270° 间的角，可以写成 $180°+\alpha$；

270°～360° 间的角，可以写成 $360°-\alpha$.

下面依次讨论 $180°+\alpha$, $-\alpha$, $180°-\alpha$, $360°-\alpha$的三角函数值与 α 的三角函数值之间的关系. 为了使讨论更具有一般性,这里假定 α 为任意角.

如图2-15,以原点为圆心,等于单位长的线段为半径作一个圆(这个圆叫做单位圆). 已知任意角 α 的终边与这个圆相交于点 $P(x, y)$. 由于角 $180°+\alpha$ 的终边就是角 α 的终边的反向延长线,角 $180°+\alpha$ 的终边与单位圆的交点 P', 是与点 P 关于点 O 对称的,因此点 P' 的坐标是$(-x, -y)$. 又因单位圆的半径 $r=1$,由正弦函数和余弦函数的定义得到

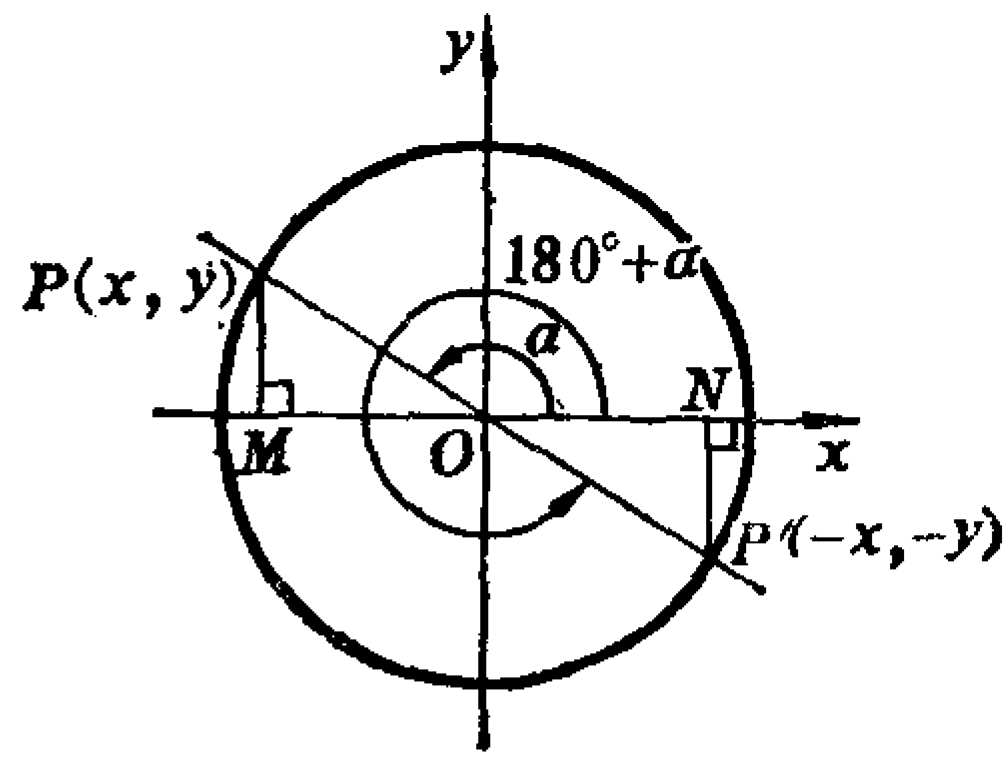


图 2-15

$$\sin\alpha=y, \qquad \cos\alpha=x,$$

$$\sin(180°+\alpha)=-y, \qquad \cos(180°+\alpha)=-x.$$

因此

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha, \qquad \cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha.$$

又根据同角三角函数间的基本关系式,有

$$\operatorname{tg}(180°+\alpha)=\frac{\sin(180°+\alpha)}{\cos(180°+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180°+\alpha)=\frac{\cos(180°+\alpha)}{\sin(180°+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

于是我们得到一组公式(**公式二**):

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha, & \cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha,\\ \operatorname{tg}(180°+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(180°+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.\end{array}}$$

我们再来研究任意角 α 与 $-\alpha$的三角函数值之间的关系.

如图2-16，任意角α的终边与单位圆相交于点$P(x,y)$，角$-\alpha$的终边与单位圆相交于点P'. 由于角α与$-\alpha$是由射线从x轴的正半轴开始，按相反的方向绕原点作相同大小的旋转而成的，这两个角的终边关于x轴对称. 因此，点P'的坐标为$(x,-y)$. 由于$r=1$，我们得到

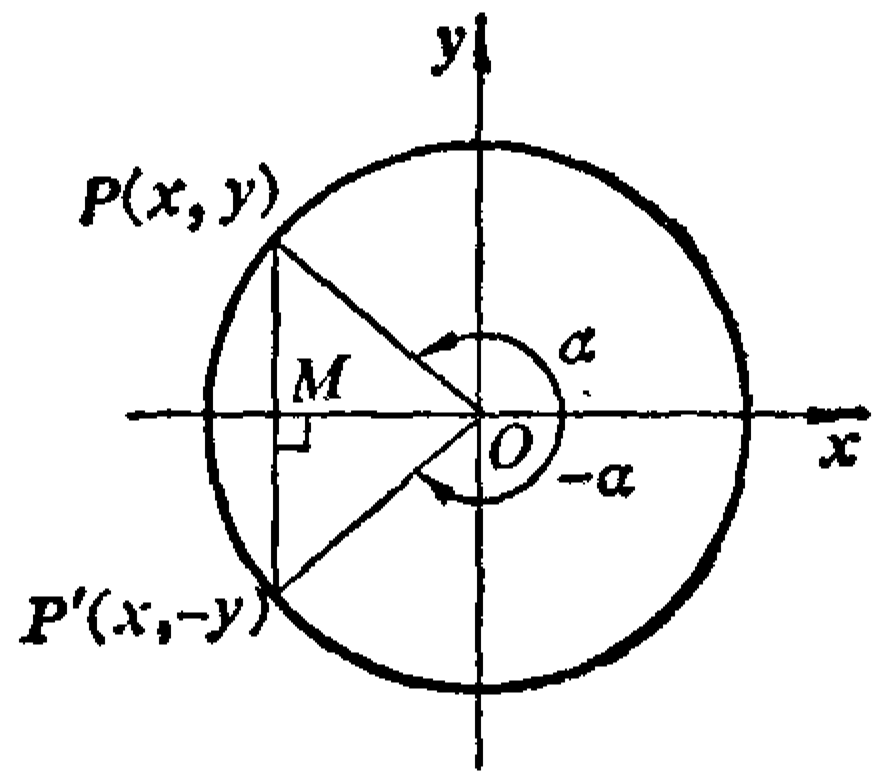


图 2-16

$$\sin(-\alpha)=-y,\quad \cos(-\alpha)=x,$$

从而，

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

于是得到一组公式(**公式三**)：

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(-\alpha)=-\sin\alpha, & \cos(-\alpha)=\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \end{array}}$$

例 1 求下列各三角函数值：

(1) $\cos225°$；　　(2) $\operatorname{tg}\frac{4}{3}\pi$；

(3) $\sin\frac{11}{10}\pi$；　　(4) $\operatorname{ctg}200°18'$.

解：(1) $\cos225°=\cos(180°+45°)$

$$=-\cos 45^{\circ}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

(2) $\operatorname{tg}\frac{4}{3}\pi=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3};$

(3) $\sin\frac{11}{10}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{10}\right)=-\sin\frac{\pi}{10}$

$$=-\sin 18^{\circ}=-0.3090;$$

(4) $\operatorname{ctg}200^{\circ}18'=\operatorname{ctg}(180^{\circ}+20^{\circ}18')$

$$=\operatorname{ctg}20^{\circ}18'=2.703.$$

例 2 求下列各三角函数值:

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right);$ (2) $\operatorname{tg}(-210^{\circ});$

(3) $\cos(-240^{\circ}12');$ (4) $\operatorname{ctg}(-400^{\circ}).$

解: (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$

(2) $\operatorname{tg}(-210^{\circ})=-\operatorname{tg}210^{\circ}=-\operatorname{tg}(180^{\circ}+30^{\circ})$

$$=-\operatorname{tg}30^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3};$$

(3) $\cos(-240^{\circ}12')=\cos 240^{\circ}12'=\cos(180^{\circ}+60^{\circ}12')$

$$=-\cos 60^{\circ}12'=-0.4970;$$

(4) $\operatorname{ctg}(-400^{\circ})=-\operatorname{ctg}400^{\circ}=-\operatorname{ctg}(360^{\circ}+40^{\circ})$

$$=-\operatorname{ctg}40^{\circ}=-1.1918.$$

例 3 化简

$$\frac{\sin(180^{\circ}+\alpha)\cdot\cos(360^{\circ}+\alpha)}{\operatorname{ctg}(-\alpha-180^{\circ})\cdot\sin(-180^{\circ}-\alpha)}.$$

解: $\because$ $\operatorname{ctg}(-\alpha-180^{\circ})=\operatorname{ctg}[-(180^{\circ}+\alpha)]$

$$=-\operatorname{ctg}(180^{\circ}+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\sin(-180^\circ-\alpha)=\sin[-(180^\circ+\alpha)]$$

$$=-\sin(180^\circ+\alpha)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\therefore\quad \frac{\sin(180^\circ+\alpha)\cdot\cos(360^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}(-\alpha-180^\circ)\cdot\sin(-180^\circ-\alpha)}$$

$$=\frac{(-\sin\alpha)\cdot\cos\alpha}{(-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha.$$

练　习

1. 求下列各三角函数值:

(1) $\operatorname{tg}210^\circ$;　　(2) $\cos\frac{13}{9}\pi$;

(3) $\sin(1+\pi)$;　　(4) $\operatorname{ctg}253^\circ18'$.

2. 求下列各三角函数值:

(1) $\operatorname{ctg}(-45^\circ)$;　　(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

(3) $\cos(-70^\circ6')$;　　(4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{18}\pi\right)$.

3. 求下列各三角函数值:

(1) $\cos(-420^\circ)$;　　(2) $\operatorname{tg}(-800^\circ)$;

(3) $\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$;　　(4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$;

(5) $\sin(-1300^\circ)$;　　(6) $\cos\left(-\frac{79}{6}\pi\right)$.

4. 化简:

(1) $\frac{\sin(\alpha+180^\circ)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(-\alpha-180^\circ)}$;

(2) $\sin^3(-\alpha)\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)$.

我们利用公式二和公式三，可以推出 $180°-\alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系：

$$\begin{aligned}\sin(180°-\alpha)&=\sin[180°+(-\alpha)]\\&=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha;\\\cos(180°-\alpha)&=\cos[180°+(-\alpha)]\\&=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha;\\\mathrm{tg}(180°-\alpha)&=\mathrm{tg}[180°+(-\alpha)]\\&=\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha;\\\mathrm{ctg}(180°-\alpha)&=\mathrm{ctg}[180°+(-\alpha)]\\&=\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha.\end{aligned}$$

于是又得到一组公式(**公式四**)：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha, & \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha,\\ \mathrm{tg}(180°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha, & \mathrm{ctg}(180°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha.\end{array}}$$

同学们还可以利用公式一和公式三，自己推证 $360°-\alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系(**公式五**)：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha, & \cos(360°-\alpha)=\cos\alpha,\\ \mathrm{tg}(360°-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha, & \mathrm{ctg}(360°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha.\end{array}}$$

公式一、二、三、四、五都叫做**诱导公式**.

上面这些诱导公式，可以概括如下：

$k\cdot360°+\alpha(k\in Z)$，$-\alpha$，$180°\pm\alpha$，$360°-\alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

利用诱导公式求任意角的三角函数值，一般可按下面的

步骤进行:

任意负角的三角函数 $\xrightarrow{\text{用公式三、一}}$ 任意正角的三角函数 $\xrightarrow{\text{用公式一}}$ $0^\circ \sim 360^\circ$间角的三角函数 $\xrightarrow[\text{二、四、五}]{\text{用公式}}$ $0^\circ \sim 90^\circ$间角的三角函数 $\xrightarrow{\text{查表}}$ 求值

例 4 求下列各三角函数值:

(1) $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$; (2) $\cos(-150^\circ 15')$;

(3) $\sin\frac{11}{6}\pi$; (4) $\operatorname{ctg}310^\circ 18'$.

解: (1) $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$;

(2) $\cos(-150^\circ 15')=\cos 150^\circ 15'$

$=\cos(180^\circ-29^\circ 45')$

$=-\cos 29^\circ 45'=-0.8682$;

(3) $\sin\frac{11}{6}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

(4) $\operatorname{ctg}310^\circ 18'=\operatorname{ctg}(360^\circ-49^\circ 42')=-\operatorname{ctg}49^\circ 42'$

$=-0.8481$.

例 5 求下列各三角函数值:

(1) $\cos 519^\circ$; (2) $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$;

(3) $\operatorname{ctg}(-1665^\circ)$; (4) $\operatorname{tg}(-324^\circ 18')$.

解: (1) $\cos 519^\circ=\cos(360^\circ+159^\circ)=\cos 159^\circ$

$=\cos(180^\circ-21^\circ)=-\cos 21^\circ=-0.9336$;

(2) $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)=\sin\left(-3\times 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

(3) $\operatorname{ctg}(-1665^\circ)=-\operatorname{ctg}1665^\circ$

$=-\operatorname{ctg}(4\times360^\circ+225^\circ)$

$=-\operatorname{ctg}225^\circ=-\operatorname{ctg}(180^\circ+45^\circ)$

$=-\operatorname{ctg}45^\circ=-1;$

(4) $\operatorname{tg}(-324^\circ18')=\operatorname{tg}(-360^\circ+35^\circ42')$

$=\operatorname{tg}35^\circ42'=0.7186.$

例 6 求证

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}=1.$$

证明: $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}$

$$=\frac{(-\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha[-\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)]}{(-\cos\alpha)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$$

$$=\frac{(-\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha(-\operatorname{ctg}\alpha)}{(-\cos\alpha)(-\operatorname{tg}\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$=1.$

练　习

1. 填写下表:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$-\frac{\pi}{3}$				
$\frac{2}{3}\pi$				
$\frac{4}{3}\pi$				
$\frac{5}{3}\pi$				
$\frac{7}{3}\pi$				

2. 求下列各三角函数值:

(1) $\sin\frac{3}{5}\pi$;　(2) $\cos 100°21'$;

(3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$;　(4) $\operatorname{tg}(-145°20')$;

(5) $\sin\frac{31}{36}\pi$;　(6) $\cos 324°32'$.

3. 求下列各三角函数值:

(1) $\cos\frac{65}{6}\pi$;　(2) $\operatorname{ctg}\frac{35}{3}\pi$;

(3) $\sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right)$;　(4) $\operatorname{tg}(-1596°)$;

(5) $\cos(-1182°13')$;　(6) $\sin 670°39'$.

4. 化简:

(1) $\frac{\cos(\alpha-\pi)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-2\pi)}{\sin(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}$;

(2) $\sin^2(-\alpha)-\operatorname{tg}(360°-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)$

$-\sin(180°-\alpha)\cos(360°-\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha+180°)$.

2.6 已知三角函数值求角

已知任意一个角(角必须属于这个函数的定义域)，可以求出它的三角函数值;反过来,如果已知一个三角函数值，也可以求出与它对应的角.

例1 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $0\leqslant\alpha<2\pi$, 求 α.

解: 因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, 所以 α 是第一、二象限的角. 由

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

知道,符合条件的第一象限的角是$\frac{\pi}{4}$. 又由

$$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

知道，符合条件的第二象限的角是 $\pi-\frac{\pi}{4}$, 即$\frac{3\pi}{4}$. 于是，所求的 α 是$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.

也可以说，所求的 α 的集合是$\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$.

例2 已知 $\cos\alpha=-0.7660$, 且 $0°\leqslant\alpha<360°$, 求 α.

解: 因为 $\cos\alpha=-0.7660<0$, 所以 α 是第二、三象限的角.

先求符合下面条件的锐角 θ:

$$\cos\theta=0.7660,$$

查表得 $\theta=40°$.

由 $\cos(180°-40°)=-\cos 40°=-0.7660$

知道，符合条件的第二象限的角是 $180°-40°$，即 $140°$.

又由

$$\cos(180°+40°)=-\cos 40°=-0.7660$$

知道，符合条件的第三象限的角是 $180°+40°$，即 $220°$.

因此，所求的 α 是 $140°$ 或 $220°$.

例 3 已知 $\sin x=-0.3322$，求 x.

解: 因为 $\sin x=-0.3322<0$，所以 x 是第三、四象限的角.

先求符合下面条件的锐角 θ:

$$\sin\theta=0.3322,$$

查表得

$$\theta=19°24',$$

因为

$$\sin(180°+19°24')=-\sin 19°24'=-0.3322,$$

$$\sin(360°-19°24')=-\sin 19°24'=-0.3322,$$

所以，在 $0°\sim360°$ 间，符合条件的第三、四象限的角分别是 $199°24'$，$340°36'$. 由公式一知道，与 $199°24'$，$340°36'$ 有相同终边的角的正弦都等于 -0.3322. 所以，所求的 x 是

$$k\cdot360°+199°24' \text{ 或 } k\cdot360°+340°36',\ k\in Z.$$

例 4 已知 $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{3}$，求 x 的集合.

解: 因为 $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{3}>0$，所以 x 是第一、三象限的角.

查表得

$$\mathrm{tg}18°26' = \frac{1}{3},$$

又

$$\mathrm{tg}(180° + 18°26') = \mathrm{tg}18°26' = \frac{1}{3},$$

因此所求的 x 是

$$k \cdot 360° + 18°26'$$

或

$$k \cdot 360° + (180° + 18°26')(k \in Z)。$$

因为

$$k \cdot 360° + 18°26' = 2k \cdot 180° + 18°26', \qquad (1)$$

$$k \cdot 360° + 180° + 18°26'$$
$$= (2k+1) \cdot 180° + 18°26', \qquad (2)$$

所以，把(1)，(2)合并，所求的 x 就是

$$n \cdot 180° + 18°26', n \in Z.$$

因此，所求的 x 的集合是

$$\{x \mid x = n \cdot 180° + 18°26', n \in Z\}。$$

练　习

1. 求适合下列条件的 α:

(1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

(2) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, 且 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

(3) $\mathrm{ctg}\alpha = 1$, 且 $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

(4) $\sin\alpha=-0.8572$, 且 $0°<\alpha<360°$;

(5) $\cos\alpha=-0.4099$, 且 $0°<\alpha<360°$;

(6) $\operatorname{tg}\alpha=-4$, 且 $0°<\alpha<360°$.

2. 求适合下列条件的 x:

(1) $\sin x=0.3469$; 且 x 在第一象限;

(2) $\operatorname{ctg}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 且 x 在第二象限;

(3) $\cos x=\dfrac{4}{5}$, 且 x 在第四象限;

(4) $\operatorname{tg}x=4.653$, 且 x 在第三象限.

3. 求适合下列条件的 x 的集合:

(1) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2) $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

(3) $\sin x=0.7662$;　　(4) $\operatorname{tg}x=-29.12$.

习题八

1. 求下列各三角函数值:

(1) $\cos 210°$;　　(2) $\sin 263°42'$;

(3) $\operatorname{ctg}\dfrac{4}{3}\pi$;　　(4) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $\sin\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)$;　　(6) $\cos\left(-\dfrac{11}{9}\pi\right)$;

(7) $\operatorname{tg}165°18'$;　　(8) $\cos(-104°26')$;

(9) $\operatorname{ctg}250°24'$;　　(10) $\operatorname{tg}\dfrac{7}{4}\pi$.

2. 化简:

(1) $\dfrac{\sin(180°+\alpha)-\operatorname{tg}(-\alpha)-\operatorname{tg}(360°+\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha+180°)+\cos(-\alpha)+\cos(\alpha+180°)}$;

(2) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\pi)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cdot\cos^3(-\alpha-\pi)}$.

3. 求证:

(1) $\cos(-210°)\cdot\operatorname{tg}(-240°)+\sin(-30°)$

$-\operatorname{ctg}225°=0$;

(2) $\dfrac{\operatorname{ctg}(-\alpha-\pi)\cdot\sin(\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(2\pi+\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha$.

4. 求下列各三角函数值:

(1) $\cos\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right)$; (2) $\sin(-1574°)$;

(3) $\operatorname{tg}\dfrac{47}{15}\pi$; (4) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{55}{12}\pi\right)$;

(5) $\sin(-2160°52')$; (6) $\cos(-1751°36')$;

(7) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{70}{9}\pi\right)$; (8) $\cos 1615°8'$;

(9) $\sin\left(-\dfrac{26}{3}\pi\right)$; (10) $\sin(-23.1\pi)$;

(11) $\operatorname{tg}10$; (12) $\cos(-3.1)$.

5. 化简:

(1) $\sin(-1071°)\cdot\sin 99°+\sin(-171°)\cdot\sin(-261°)$

$-\operatorname{ctg}1089°\cdot\operatorname{ctg}(-630°)$;

(2) $1+\sin(\alpha-2\pi)\cdot\sin(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)$

$-2\cos^2(-\alpha)$.

6. 求证:

(1) $\sin(-\alpha)\cdot\sin(\pi-\alpha)-\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)$

$$-2\cos^2(-\alpha)+1=\sin^2\alpha;$$

(2) $\dfrac{\cos(\alpha-\pi)\operatorname{ctg}(5\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)\sin(-2\pi-\alpha)}=\operatorname{ctg}^3\alpha.$

7. 根据下列条件，求三角形的内角 A:

(1) $\sin A=\dfrac{1}{2}$;　　(2) $\cos A=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) $\operatorname{tg} A=1$;　　(4) $\operatorname{ctg} A=-\sqrt{3}$.

8. 根据下列条件，求 $0\sim 2\pi$(或 $0^\circ\sim 360^\circ$)间的角 α:

(1) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2) $\cos\alpha=0.1896$;

(3) $\operatorname{tg}\alpha=8$;　　(4) $\operatorname{ctg}\alpha=1$.

9. 求适合下列条件的 x 的集合:

(1) $\sin x=-1$;　　(2) $\cos x=0$;

(3) $\sin x=\dfrac{12}{13}$;　　(4) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{5}$;

(5) $\sec x=4.023$;　　(6) $\operatorname{ctg} x=0.8594$.

10. 求适合下列条件的 x 的集合:

(1) $\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}=0$;　　(2) $3\operatorname{tg} x-1=0$;

(3) $\cos(\pi-x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　(4) $2\sin^2 x=1$.

二　三角函数的图象和性质

2.7　用单位圆中的线段表示三角函数值

我们知道，坐标轴是规定了方向的直线．一条与坐标轴平行的线段也可以规定两种相反的方向．如图2-17，x 轴上

的线段 AB，可以规定从点 A 到点 B 或从点 B 到点 A 这样两种相反的方向；与 y 轴平行的线段 CD，也可以规定从点 C 到点 D 或从点 D 到点 C 这样两种相反的方向．如果这样的线段的方向与坐标轴的正向一致，就规定这条线段是正的，否则，就规定它是负的．例如图 2-17 中，$AB=4$（长度单位），$BA=-4$（长度单位）．

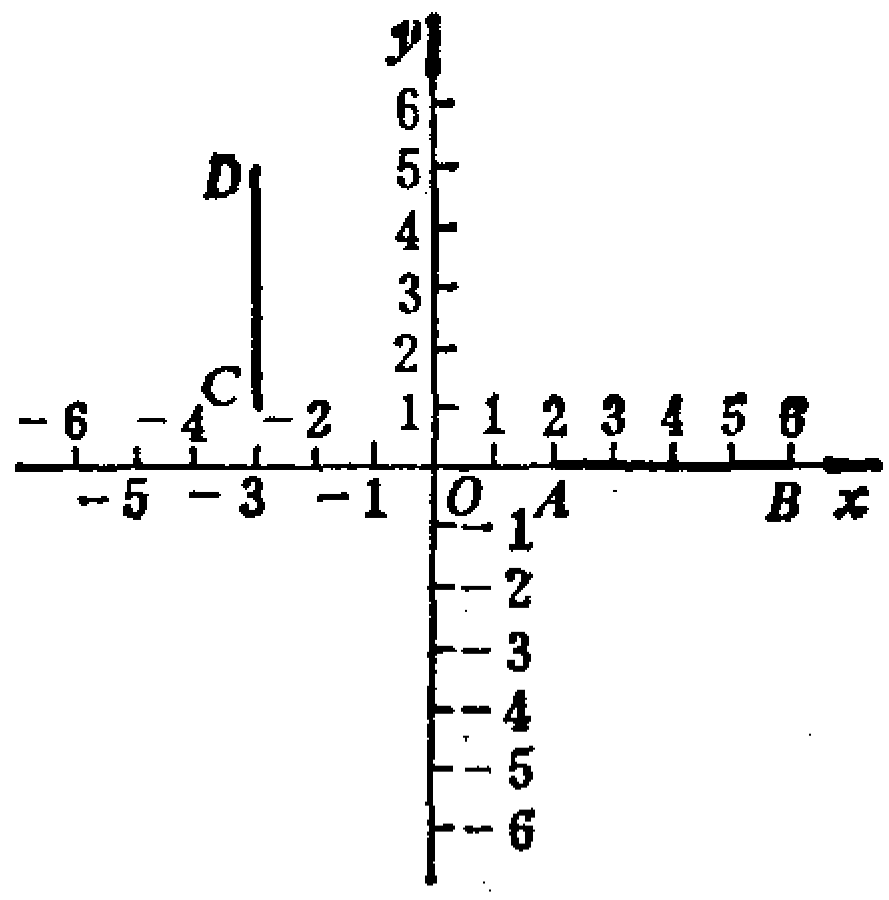


图 2-17

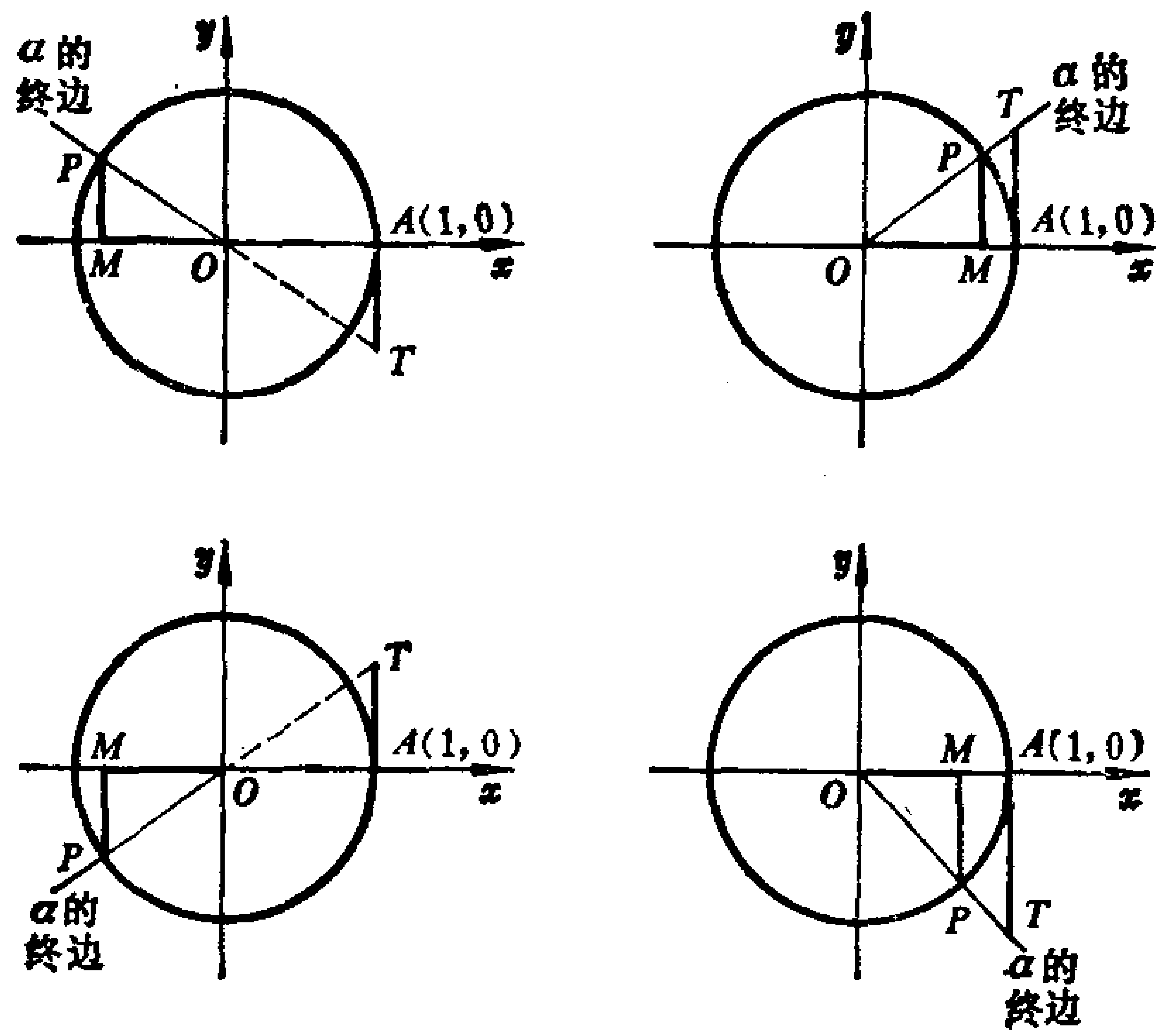


图 2-18

如图2-18，设任意角 α 的终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，那么，

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y, \qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x.$$

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M. 我们把线段 MP,OM 都看作是规定了方向的线段，这样，当 MP 的方向与 y 轴的正向一致时，MP 是正的，相反时，MP 是负的；当 OM 的方向与 x 轴的正向一致时，OM 是正的，相反时，OM 是负的. 因此，线段 MP 的符号与点 P 的纵坐标 y 的符号相同，且 MP 的长度等于 $|y|$；线段 OM 的符号与点 P 的横坐标 x 的符号相同，且 OM 的长度等于 $|x|$. 从而，$\sin\alpha = y = MP$，$\cos\alpha = x = OM$. 我们把单位圆中规定了方向的线段 MP,OM 分别叫做角 α 的**正弦线**，**余弦线**.

过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线，那么这条切线平行于 y 轴（为什么？）. 设这条切线与角 α 的终边（当 α 为第一、四象限的角时）或这条终边的反向延长线（当 α 为第二、三象限的角时）交于点 T. 因为 $\triangle OMP \backsim \triangle OAT$，并且 OM 与 MP 同号时，OA 与 AT 也同号，OM 与 MP 异号时，OA 与 AT 也异号，所以

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA}.$$

但 $OA=1$，从而

$$\mathrm{tg}\alpha = AT.$$

我们把规定了方向的线段 AT 叫做角 α 的**正切线**.

当角 α 的终边在 x 轴上时，点 T 与点 A 重合，这时正切线变成了一个点；当角 α 的终边在 y 轴上时，点 T 不存在，即正切线不存在.

练　习

1. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线：

(1) $\frac{\pi}{3}$;　　(2) $\frac{5\pi}{6}$;　　(3) $-\frac{2\pi}{3}$;　　(4) $-\frac{13\pi}{6}$.

2. 以 5cm 为单位长作单位圆，分别作出 30°, 225°, 330° 的角的正弦线、余弦线、正切线，量出它们的长度，从而写出这些角的正弦值、余弦值、正切值(精确到 0.01)。

2.8　正弦函数、余弦函数的图象和性质

我们利用单位圆中的正弦线、余弦线来作正弦函数、余弦函数的图象.

在直角坐标系的 x 轴上任取一点 O_1，以 O_1 为圆心作单位圆(见图 2-19 的上半部分)，从这个圆与 x 轴的交点 A 起把圆

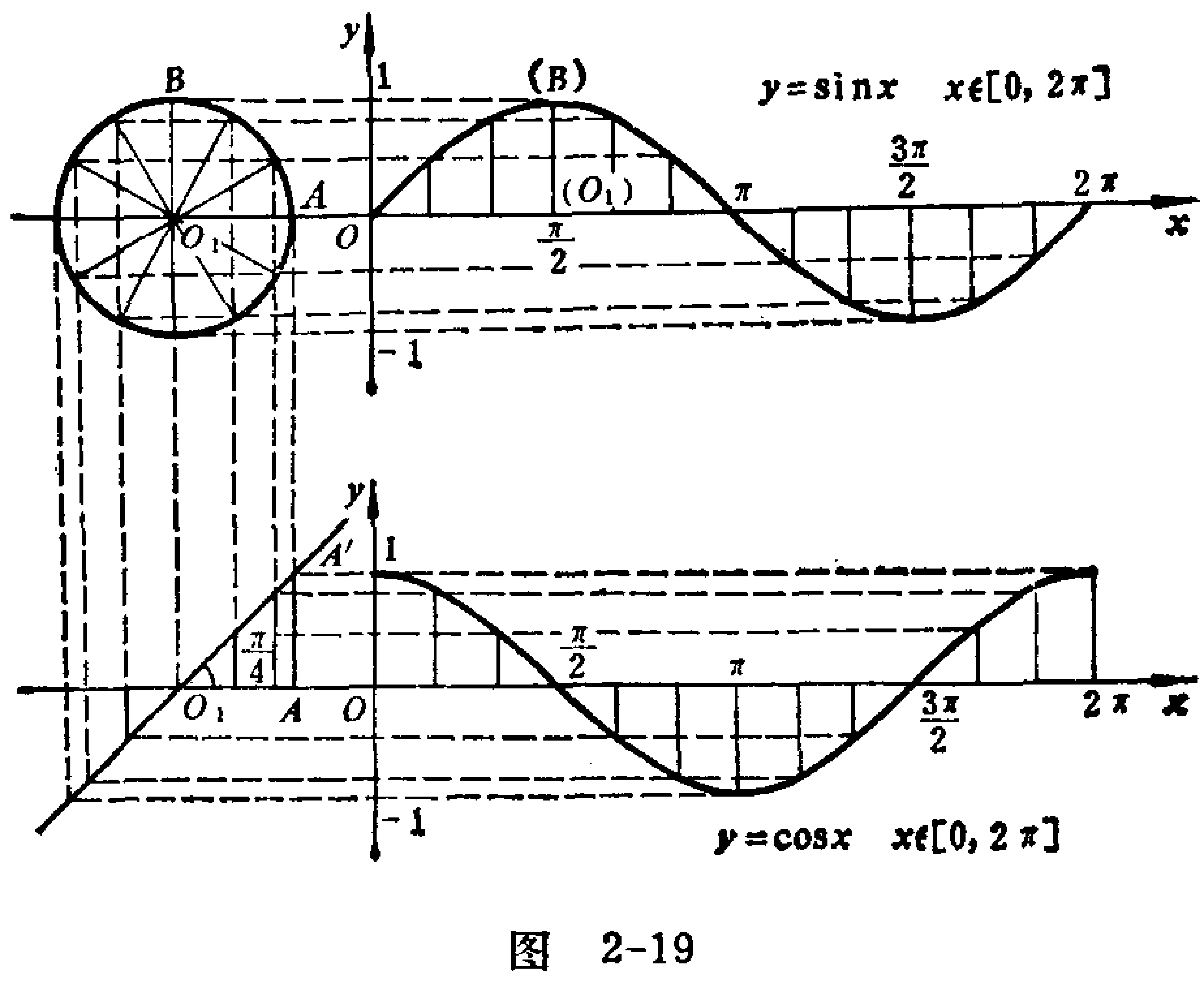


图　2-19

分成 12 等份(等份越多，作出的图象越精确). 过圆上的各分点作 x 轴的垂线，可以得到对应于角 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \cdots\cdots, 2\pi$

的正弦线及余弦线(例如 O_1B 对应于角$\frac{\pi}{2}$的正弦线). 相应地,再把 x 轴上从 0 到 2π 这一段($2\pi\approx6.28$)分成 12 等份(例如,从原点起向右的第四个点,就是对应于角$\frac{\pi}{2}$的点). 把角 x的正弦线向右平行移动,使得正弦线(是规定了方向的线段)的起点与 x 轴上的点 x 重合(例如,把单位圆中的正弦线 O_1B 向右平行移动,使得 O_1 与 x 轴上的点$\frac{\pi}{2}$重合),再用光滑曲线把这些正弦线的终点连结起来,就得到了正弦函数 $y=\sin x$, $x\in[0, 2\pi)$的图象.

为了作出余弦函数 $y=\cos x, x\in[0, 2\pi)$的图象,我们把坐标系向下平移(见图 2-19 的下半部分),过点 O_1 作与 x 轴的正半轴成角$\frac{\pi}{4}$的直线,又过余弦线 O_1A 的终点 A 作 x 轴的垂线,它与前面所作的直线交于 A'. 那么,规定了方向的线段 O_1A 与 AA' 的长度相等且方向同时为正. 这样,我们就把余弦线 O_1A“竖立”起来成为 AA'. 用同样的方法,将其他的余弦线也都“竖立”起来. 再将它们平移,使起点与 x 轴上的点 x 重合,最后用光滑曲线把这些竖立起来的线段的终点连结起来,就得到余弦函数 $y=\cos x, x\in[0, 2\pi)$的图象.

因为终边相同的三角函数值相等,所以正弦函数$y=\sin x$在…, $x\in[-2\pi, 0)$, $x\in[2\pi, 4\pi)$, $x\in[4\pi, 6\pi)$, …时的图象,与 $x\in[0, 2\pi)$时的图象的形状完全一样,只是位置不同. 余弦函数的情况也相同. 我们把 $y=\sin x, y=\cos x$ 在 $x\in[0, 2\pi)$时的图象向左和向右平行移动 2π, 4π, …, 就可以得到 $y=\sin x, x\in R$ 及 $y=\cos x, x\in R$的图象(图 2-20).

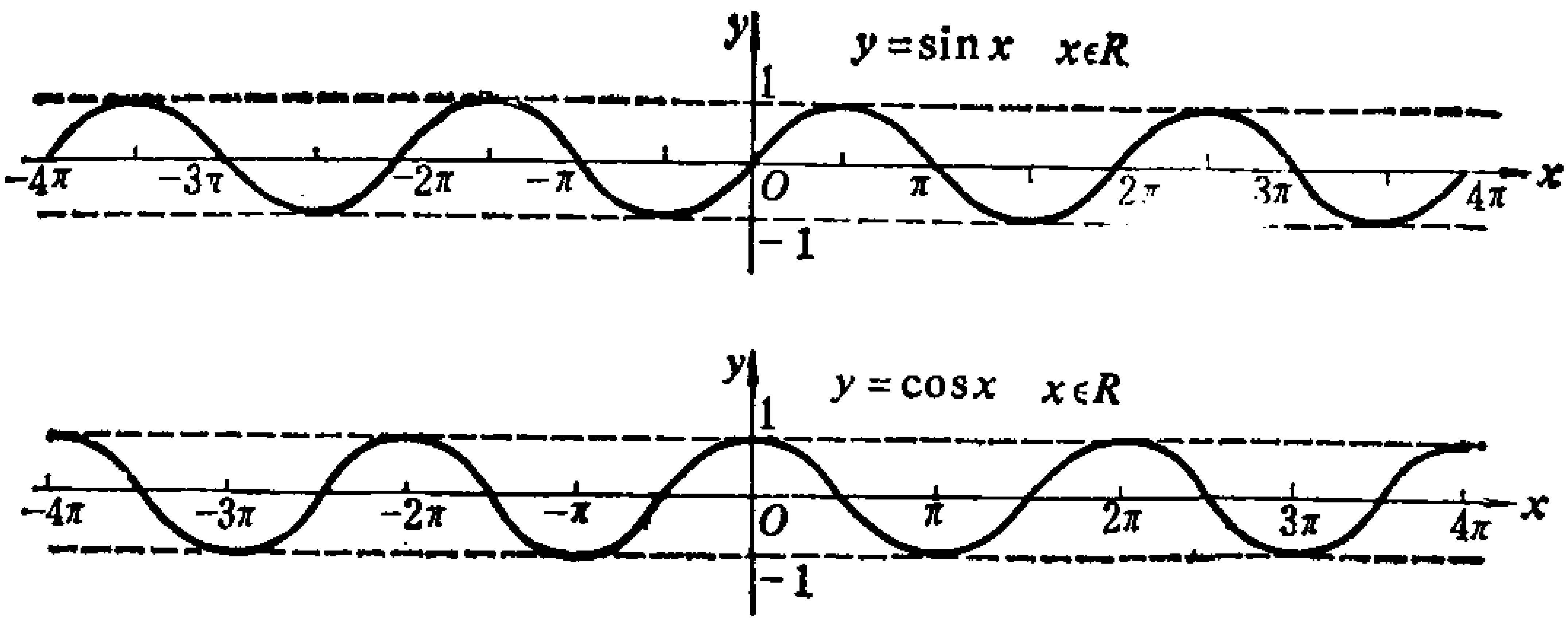


图 2-20

正弦函数 $y=\sin x, x\in R$ 和余弦函数 $y=\cos x$，$x\in R$ 的图象分别叫做**正弦曲线**和**余弦曲线**.

练　习

用描点法作出正弦函数 $y=\sin x, x\in[0,\ 2\pi)$ 和余弦函数 $y=\cos x, x\in[0, 2\pi)$ 的图象.

由图 2-19 可以看出，下面五个点在确定图象形状时起着关键的作用：

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0).$$

这五点描出后，正弦函数 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象的形状就基本上确定了；

$(0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (\pi, -1), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (2\pi, 1)$这五点描出后，余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象的形状就基本上确定了.

因此，在精确度要求不太高时，我们常常先描出这五个

点，然后用光滑曲线将它们连结起来，就得到在相应区间内的正弦函数、余弦函数的简图．今后，我们作正、余弦函数的简图，一般都象这样先找出在确定图象形状时起着关键作用的五个点，然后描点作图．

例1 作下列函数的简图：

(1) $y=1+\sin x, x\in[0, 2\pi]$;

(2) $y=-\cos x, x\in[0, 2\pi]$.

解： (1) 列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

描点作图(图2-21)：

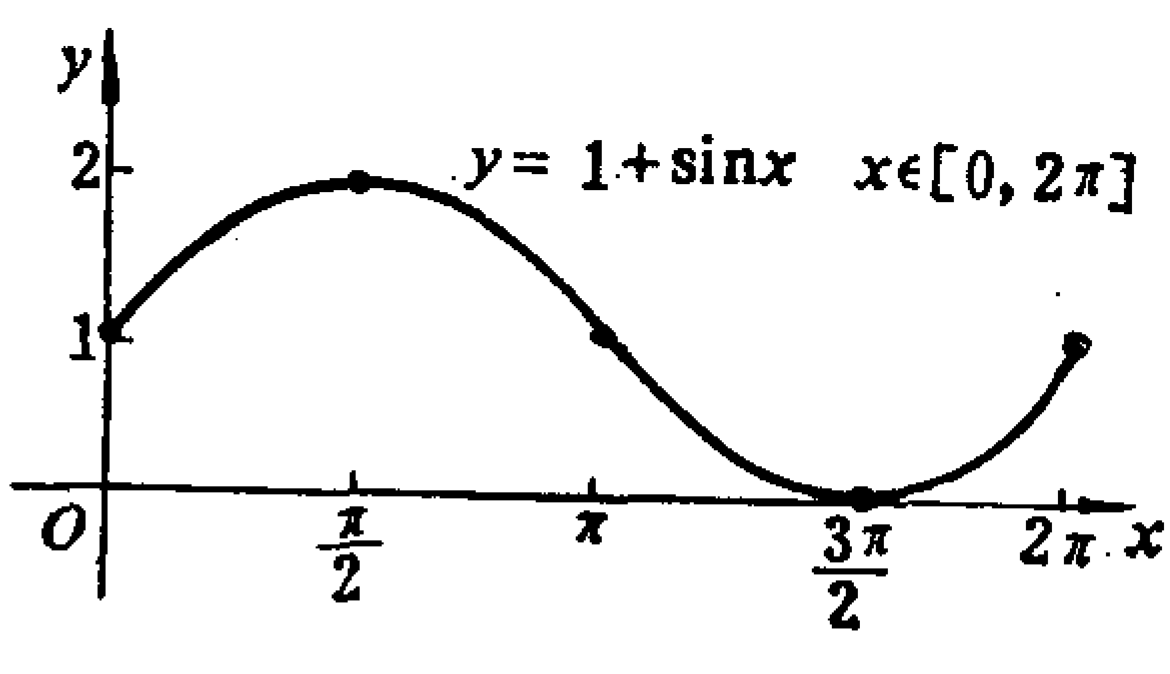


图 2-21

(2) 列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

描点作图(图 2-22):

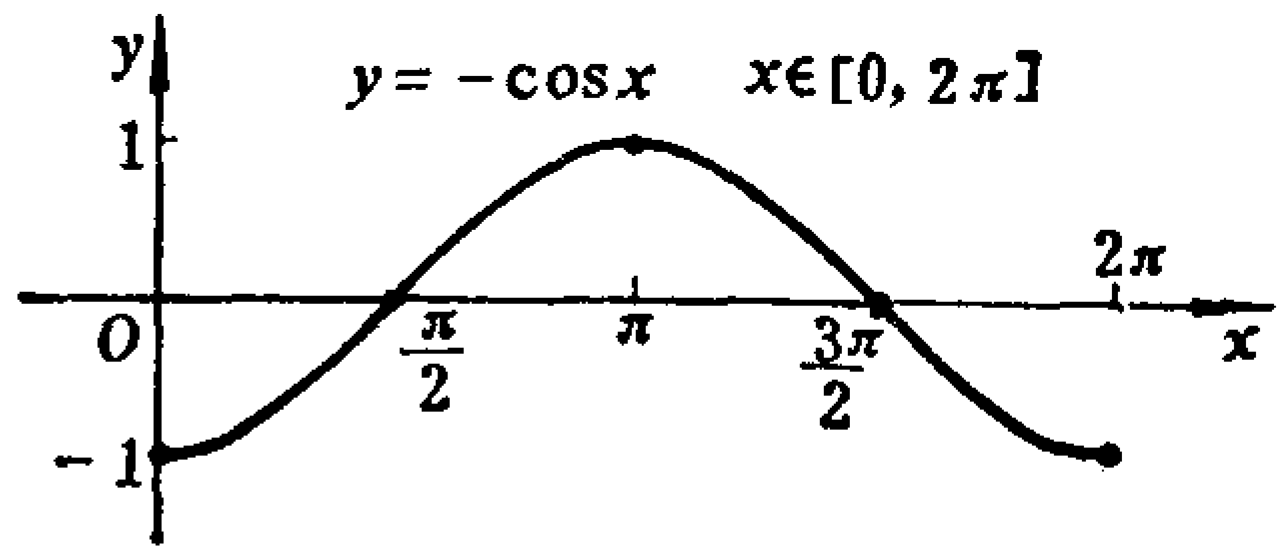


图 2-22

下面来研究正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的主要性质.

(1) **定义域**

函数 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 的定义域都是$(-\infty,+\infty)$.

(2) **值域**

因为在单位圆中,正弦线、余弦线的长都是等于或小于半径的长 1 的，所以$|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$,即$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$. **函数 $y=\sin x$, $x\in R$ 及 $y=\cos x$, $x\in R$ 的值域都是$[-1,1]$.**

函数 $y=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$时取最大值$y=1$;在 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ 时取最小值 $y=-1$.

函数 $y=\cos x$ 在 $x=2k\pi$, $k\in Z$ 时取最大值 $y=1$; 在 $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ 时取最小值 $y=-1$.

(3) **周期性**

由诱导公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ $(k\in Z)$知道,正弦函数值、余弦函数值是按照一定的规律不断

重复出现的，这是正弦函数和余弦函数的重要性质.

一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，

$$f(x+T)=f(x)$$

都成立，那么就把函数 $y=f(x)$ 叫做**周期函数**，不为零的常数 T 叫做这个函数的**周期**. 例如，对于正弦函数 $\sin x$，$x\in R$ 来说，$2\pi, 4\pi, \cdots, -2\pi, -4\pi, \cdots$ 都是它的周期. 一般地，$2k\pi$ ($k\in Z$，且 $k\neq 0$) 都是它的周期. 对于一个周期函数来说，如果在所有的周期中存在着一个最小的正数，就把这个最小的正数叫做**最小正周期**. 例如，2π 是正弦函数 $\sin x, x\in R$ 的所有周期中的最小正数，因而 2π 是这个函数的最小正周期.

正弦函数 $y=\sin x, x\in R$ 和余弦函数 $y=\cos x, x\in R$ 都是周期函数，$2k\pi$ ($k\in Z$ 且 $k\neq 0$) 都是它们的周期，最小正周期是 2π. ❶

今后我们谈到三角函数的周期时，一般指的是三角函数的最小正周期.

(4) **奇偶性**

由诱导公式 $\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$ 可知，**正弦函数 $y=\sin x, x\in R$ 是奇函数，余弦函数 $y=\cos x, x\in R$ 是偶函数.**

反映在图象上，**正弦曲线关于坐标系原点 O 对称，余弦曲线关于 y 轴对称.**

(5) **单调性**

---

❶ 这个结论可以证明，本书从略.

由正弦曲线可以看出：当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线逐渐上升，$\sin x$ 由 -1 增大到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线逐渐下降，$\sin x$ 由 1 减小到 -1. 这个变化情况如下表所示：

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

由正弦函数的周期性知道：

正弦函数 $y=\sin x$ 在每一个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$ 上，都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$ 上，都从 1 减小到 -1，是减函数. 也就是说，正弦函数 $y=\sin x$ 的单调区间是 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 及 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)$.

类似地，由余弦曲线可以看出，函数 $y=\cos x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的变化情况如下表所示：

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

由余弦函数的周期性知道：

余弦函数 $y=\cos x$ 在每一个闭区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$，$(k\in Z)$ 上，都从 -1 增大到 1，是增函数；在每一个闭区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$，$(k\in Z)$ 上，都从 1 减小到 -1，是减函数. 也就是说，余弦函数 $y=\cos x$ 的单调区间是 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 及 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$，$(k\in Z)$.

例 2 求使下列函数取得最大值的 x 的集合，并说出最大值是多少.

(1) $y=\cos x+1$;　　(2) $y=\sin 2x$.

解：(1) 使函数 $y=\cos x$ 取得最大值的 x，就是使函数 $y=\cos x+1$ 取得最大值的 x，因而使 $y=\cos x$ 取得最大值的 x 的集合 $\{x|x=2k\pi, k\in Z\}$，就是使 $y=\cos x+1$ 取得最大值的 x 的集合.

函数 $y=\cos x+1$ 的最大值是 $1+1=2$.

(2) 令 $z=2x$，那么使函数 $y=\sin z$ 取得最大值的 z 的集合是 $\{z|z=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z\}$. 由

$$2x=z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

得
$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

就是说，使得 $y=\sin 2x$ 取得最大值的 x 的集合是

$$\{x|x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z\}.$$

函数 $y=\sin 2x$ 的最大值是 1.

例 3 求下列函数的周期：

(1) $y=3\cos x$;　　(2) $y=\sin 2x$;

(3) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

解: (1) 因为 $\cos x$ 的最小正周期是 2π，所以当自变量 $x(x\in R)$增加到 $x+2\pi$ 且必须增加到 $x+2\pi$ 时，函数 $\cos x$ 的值重复出现，函数 $3\cos x$ 的值也重复出现，因此 $y=3\cos x$ 的周期(即最小正周期，下同)是 2π.

(2) 把 $2x$ 看成是一个新的变量 z，那么 $\sin z$ 的最小正周期是 2π. 就是说，当 z 增加到 $z+2\pi$ 且必须增加到 $z+2\pi$ 时，函数 $\sin z$ 的值重复出现. 而 $z+2\pi=2x+2\pi=2(x+\pi)$，所以当自变量 x 增加到 $x+\pi$ 且必须增加到 $x+\pi$ 时，函数值重复出现，因此 $y=\sin 2x$ 的周期是 π.

(3) 把$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}$看成是一个新的变量 z，那么 $2\sin z$ 的周期是 2π. 由于

$$z+2\pi=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi=\frac{1}{2}(x+4\pi)-\frac{\pi}{6},$$

所以当自变量 x 增加到 $x+4\pi$ 且必须增加到 $x+4\pi$ 时，函数值重复出现，因此$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$的周期是 4π.

我们看到，例 3 中函数周期的变化仅与自变量 x 的系数有关. 一般地，**函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ (其中 A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$，$x\in R$)的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.**

事实上，设 $\omega x+\varphi=z$，那么函数 $A\sin z$ 或 $A\cos z$ 的周期是 2π，但是 $\omega x+\varphi+2\pi=\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi$，所以当自变量 x

增加到 $x+\frac{2\pi}{\omega}$ 且必须增加到 $x+\frac{2\pi}{\omega}$ 时，函数值重复出现，因此函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi) \quad \text{或} \quad y=A\cos(\omega x+\varphi)$$

的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 根据这个结论，我们可以由正弦函数式或余弦函数式直接写出它的周期. 如在上面的例 3 中，(1)的周期是 2π，(2)的周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，(3)的周期是 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

例 4 不通过求值，指出下列各式大于零，还是小于零.

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;

(2) $\cos\left(-\frac{23}{5}\pi\right)-\cos\left(-\frac{17}{4}\pi\right)$.

解: (1) 因为 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$，且正弦函数 $y=\sin x$ 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时是增函数，所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right),$$

即

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)>0.$$

(2) $\cos\left(-\frac{23}{5}\pi\right)=\cos\frac{23}{5}\pi=\cos\frac{3}{5}\pi$,

$$\cos\left(-\frac{17}{4}\pi\right)=\cos\frac{17}{4}\pi=\cos\frac{1}{4}\pi.$$

因为 $0<\frac{1}{4}\pi<\frac{3}{5}\pi<\pi$，且余弦函数 $y=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant$

π 上是减函数，所以

$$\cos\frac{3}{5}\pi<\cos\frac{1}{4}\pi,$$

即

$$\cos\frac{3}{5}\pi-\cos\frac{1}{4}\pi<0,$$

$$\therefore\qquad \cos\left(-\frac{23}{5}\pi\right)-\cos\left(-\frac{17}{4}\pi\right)<0.$$

练　习

1. 作下列函数的简图($x\in[0,2\pi]$)：

   (1) $y=-\sin x$;　(2) $y=1+\cos x$;　(3) $y=2\sin x$.

2. 观察正弦曲线和余弦曲线，写出满足下列条件的 x 的区间：

   (1) $\sin x>0$;　(2) $\sin x<0$;

   (3) $\cos x>0$;　(4) $\cos x<0$.

3. 下列各等式能否成立？为什么？

   (1) $2\cos x=3$;　(2) $\sin^2 x=0.5$.

4. 求使下列函数取得最小值的 x 的集合，并说出函数的最小值是多少。

   (1) $y=2\sin x$;　(2) $y=2-\cos\frac{x}{3}$.

5. 等式 $\sin(30^\circ+120^\circ)=\sin 30^\circ$ 是否成立？如果这个等式成立，能不能说 120° 是正弦函数 $y=\sin x$ 的周期？为什么？

6. 求下列函数的周期：

   (1) $y=\sin 3x$;　(2) $y=\cos\frac{x}{3}$;

(3) $y=3\sin\frac{x}{4}$;

(4) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{10}\right)$;

(5) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

(6) $y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

7. 不通过求值，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 250°$, $\sin 260°$;

(2) $\cos\frac{15}{8}\pi$, $\cos\frac{14}{9}\pi$;

(3) $\cos 515°$, $\cos 530°$;

(4) $\sin\left(-\frac{54}{7}\pi\right)$, $\sin\left(-\frac{63}{8}\pi\right)$.

2.9 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

在物理和工程技术的许多问题中，都要遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数（其中 A, ω, φ 是常数）。例如，物体作简谐振动时位移 y 与时间 x 的关系，交流电中电流强度 y 与时间 x 的关系等，都可用这类函数来表示。下面来讨论这类函数的简图的作法。

例 1 作函数 $y=2\sin x$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的简图。

解： 函数 $y=2\sin x$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的周期 $T=2\pi$，我们先来作 $x\in[0, 2\pi]$ 时函数的简图。

列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$2\sin x$	0	2	0	-2	0
$\frac{1}{2}\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

描点作图(图 2-23):

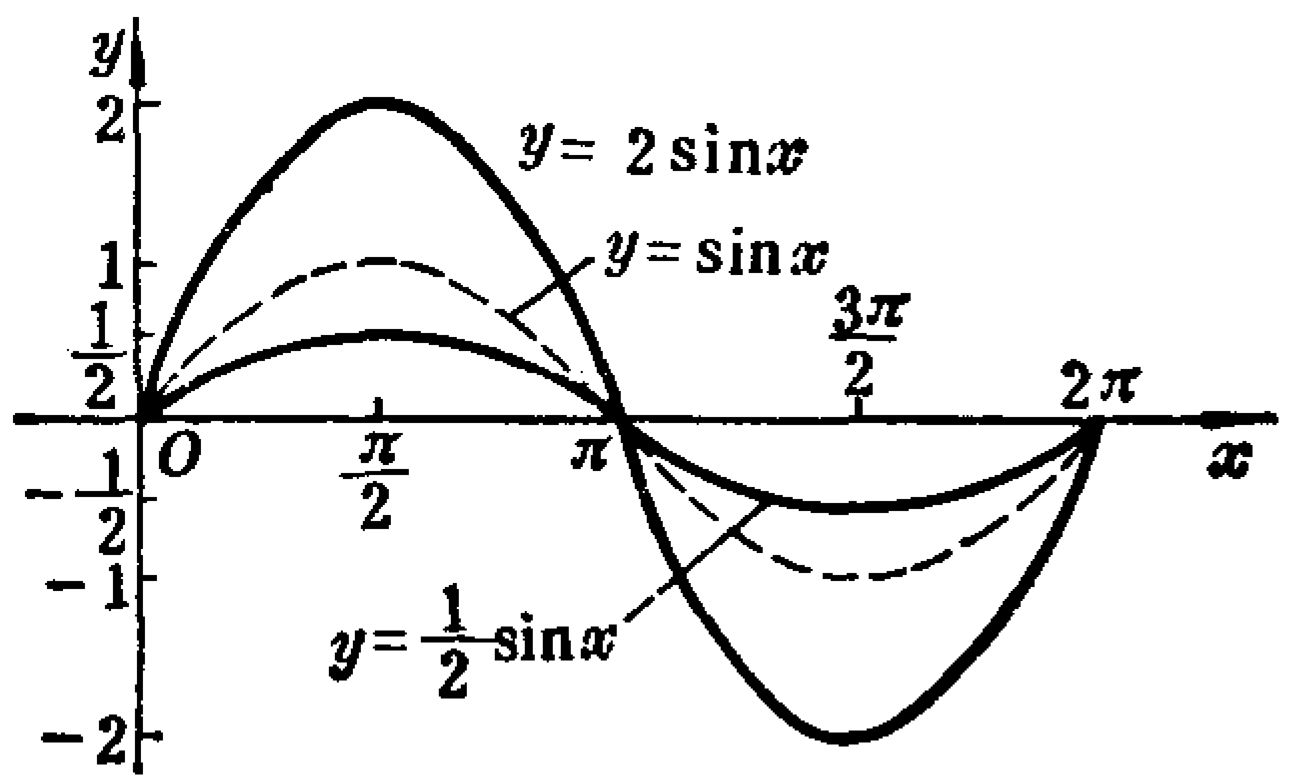


图 2-23

利用这类函数的周期性，我们可以把上面的简图向左、右扩展，得出 $y=2\sin x, x\in R$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x, x\in R$ 的简图(从略).

从图 2-23 可以看出，对于同一个 x 值，$y=2\sin x$ 的图象上点的纵坐标等于 $y=\sin x$ 的图象上点的纵坐标的 2 倍. 因此，$y=2\sin x$ 的图象可以看作是把 $y=\sin x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变) 而得到的. 从而，$y=2\sin x, x\in R$ 的值域是$[-2, 2]$，最大值是 2，最小值是-2.

类似地，$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象可以看作是把 $y=\sin x$ 的图象上所有点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍(横坐标不变)而得到

的．从而 $y=\frac{1}{2}\sin x$，$x\in R$ 的值域是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，最大值是 $\frac{1}{2}$，最小值是$-\frac{1}{2}$．

一般地，函数 $y=A\sin x(A>0$ 且 $A\neq 1)$ 的图象可以看作是把 $y=\sin x$ 的图象上所有点的纵坐标伸长（当 $A>1$ 时）或缩短（当 $0<A<1$ 时）到原来的 A 倍（横坐标不变）而得到的．$y=A\sin x, x\in R$ 的值域是$[-A, A]$，最大值是 A，最小值是 $-A$.

例 2 作函数 $y=\sin 2x$ 及 $y=\sin\frac{1}{2}x$的简图．

解： 函数 $y=\sin 2x$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，我们先来作 $x\in[0,\pi]$时函数的简图．

设 $2x=X$，那么 $\sin 2x=\sin X$．当 X 取 $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ 时，所对应的五点是函数 $y=\sin X$，$X\in[0,2\pi]$图象上起关键作用的点．这里$x=\frac{X}{2}$，所以当 x 取 $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$ 时，所对应的五点是函数 $y=\sin 2x$，$x\in[0,\pi]$图象上起关键作用的点．

列表：

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0

函数$y=\sin\frac{1}{2}x$的周期$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，我们来作$x\in[0,4\pi]$时函数的简图.

列表:

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\frac{1}{2}x$	0	1	0	-1	0

描点作图(图 2-24):

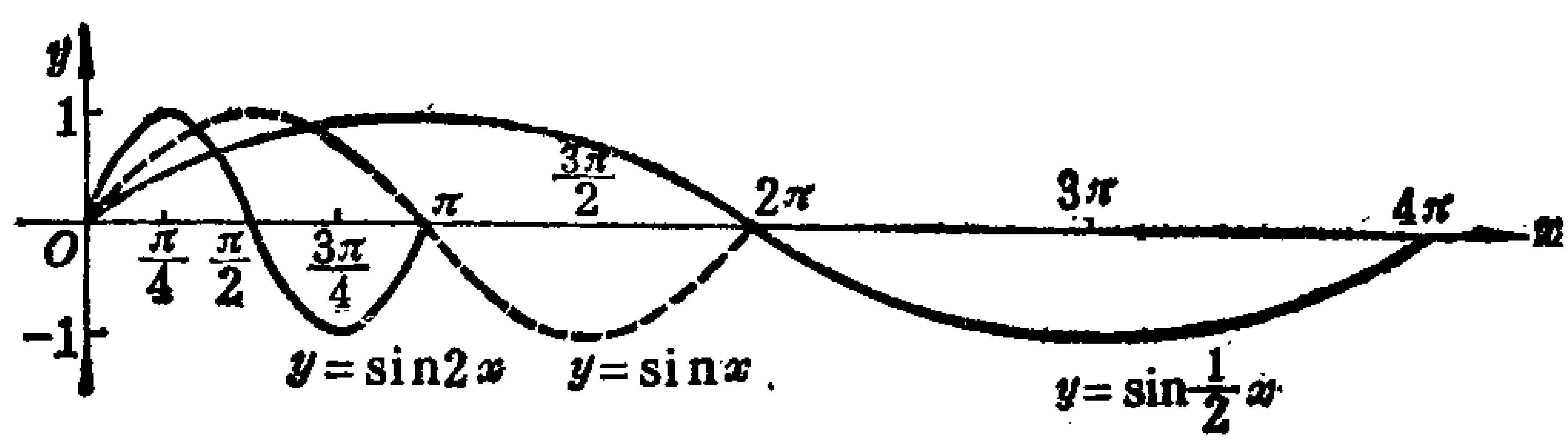


图　2-24

利用这类函数的周期性，我们可以把上面的简图向左、右扩展，得出$y=\sin 2x$, $x\in R$及$y=\sin\frac{1}{2}x$, $x\in R$的简图(从略).

从图 2-24 可以看出，在函数$y=\sin 2x$的图象上横坐标为$\frac{x_0}{2}$ $(x_0\in R)$的点的纵坐标同$y=\sin x$上横坐标为x_0的点的纵坐标相等(例如，当$x_0=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\left(2\cdot\frac{x_0}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$,

$\sin x_0=\sin\frac{\pi}{2}=1$）. 因此，$y=\sin 2x$ 的图象可以看作是把 $y=\sin x$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变)而得到的.

类似地，$y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象可以看作是把 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)而得到的.

一般地，函数 $y=\sin\omega x(\omega>0$ 且 $\omega\neq1)$的图象，可以看作是把 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短（当 $\omega>1$ 时）或伸长(当 $0<\omega<1$时)到原来的$\frac{1}{\omega}$倍（纵坐标不变）而得到的.

例 3 作函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$和$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的简图.

解: 函数$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期是 2π，我们来作这个函数在长度为一个周期的闭区间上的简图.

设 $x+\frac{\pi}{3}=X$, 那么 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin X$, $x=X-\frac{\pi}{3}$.当X取$0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ 时, x取$-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{3}$，所对应的五点是函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$图象上起关键作用的点.

列表:

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

类似地，对于函数$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，可列出下表：

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0

描点作图(图 2-25)：

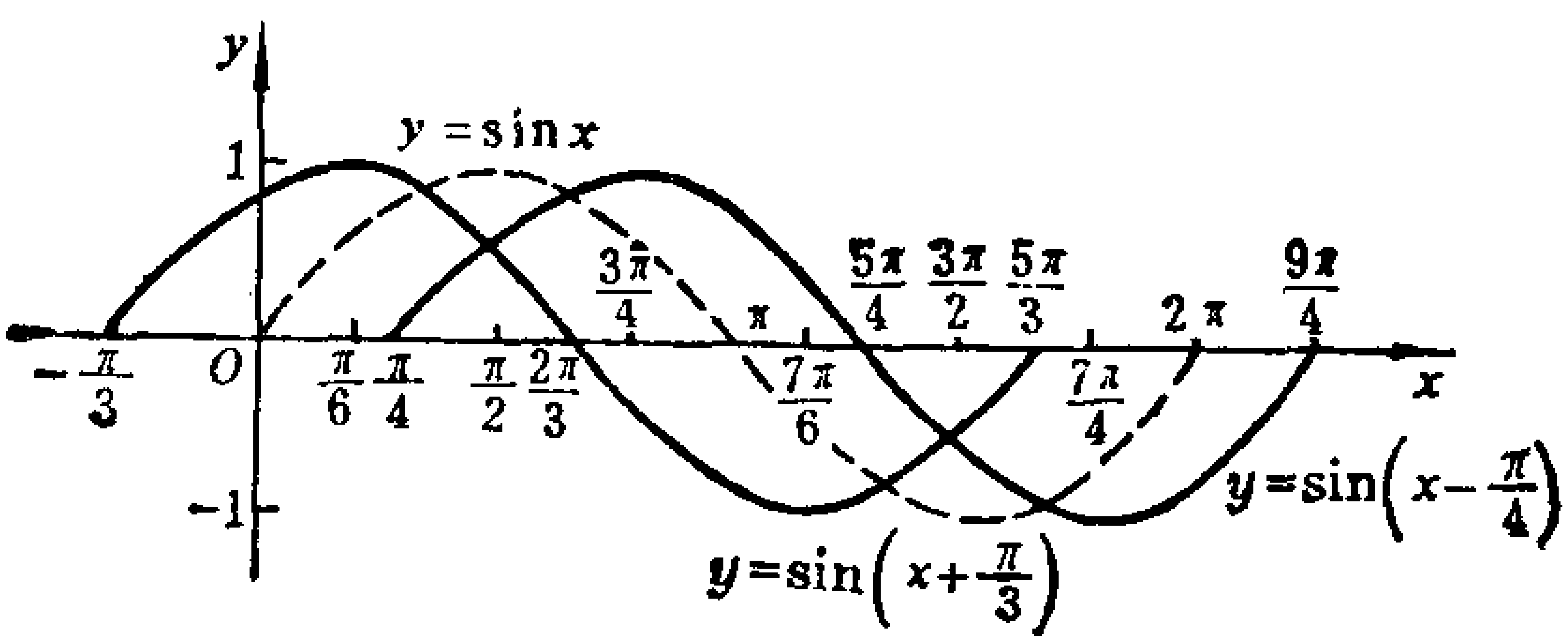


图 2-25

利用这类函数的周期性，我们可以把所得到的简图向左、右扩展，得出$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in R$ 及 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in R$ 的简图(从略)。

由图 2-25 可以看出，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可以看作是

把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位而得到的，$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象可以看作是把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向右平行移动$\frac{\pi}{4}$个单位而得到的.

一般地，函数 $y=\sin(x+\varphi)$，$(\varphi\neq0)$的图象，可以看作是把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左(当 $\varphi>0$ 时）或向右（当 $\varphi<0$ 时)平行移动$|\varphi|$个单位而得到的.

例 4 作函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的简图.

解: 函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 我们来作这个函数在长度为一个周期的闭区间上的简图.

设$X=2x+\frac{\pi}{3}$, 那么$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin X$, $x=\dfrac{X-\frac{\pi}{3}}{2}$ $=\frac{X}{2}-\frac{\pi}{6}$. 当$X$取$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$时，$x$ 取$-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}$, 所对应的五点是函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x\in\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$图象上起关键作用的点.

列表:

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

描点作图(图 2-26):

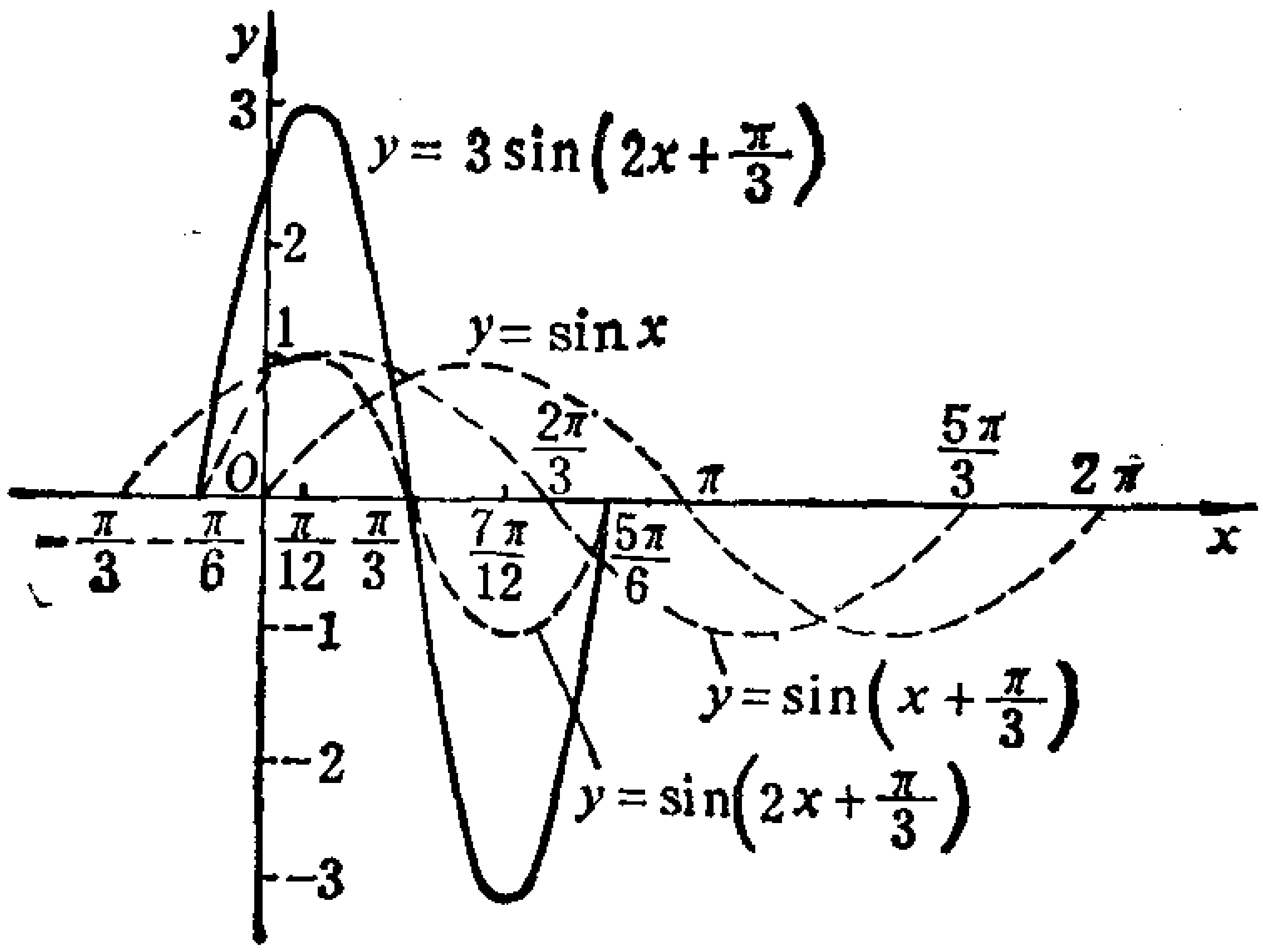


图 2-26

利用这类函数的周期性，我们可以把上面所得到的简图向左、右扩展，得到$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x\in R$ 的简图(从略)。

函数$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可以看作是用下面的方法得到的：先把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位，得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象；再把$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有的点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变)，得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象；再把$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有的点的纵坐标伸长到原来的 3 倍(横坐标不变)，从而得到$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象。

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$(A>0, \omega>0)$，$x\in R$的图象可以看作是用下面的方法得到的：先把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左$(\varphi>0)$或向右$(\varphi<0)$平行移动$|\varphi|$个单位，再把所得各点的横坐标缩短$(\omega>1)$或伸长$(0<\omega<1)$到原来的$\frac{1}{\omega}$倍（纵坐标不变），再把所得各点的纵坐标伸长$(A>1)$或缩短$(0<A<1)$到原来的 A 倍（横坐标不变）.

当函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$(A>0, \omega>0)$，$x\in[0, +\infty)$表示一个振动量时，$A$ 就表示这个量振动时离开平衡位置的最大距离，通常把它叫做这个振动的**振幅**；往复振动一次所需要的时间 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，它叫做振动的**周期**；单位时间内往复振动的次数 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$，它叫做振动的**频率**；$\omega x+\varphi$ 叫做**相位**，φ 叫做**初相**（即当 $x=0$ 时的相位）。

练　习

1. 作下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=\frac{3}{2}\sin x$；　(2) $y=\frac{1}{3}\sin x$；

(3) $y=\sin 4x$；　(4) $y=2\sin\frac{1}{3}x$；

(5) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；　(6) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$；

(7) $y=4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$；　(8) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$；

(9) $y=5\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$；　(10) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. 函数 $y=\frac{1}{8}\sin x$ 的振幅是多少？它的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

3. 函数 $y=\sin\frac{2}{3}x$ 的周期是多少？它的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

4. 函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$ 的初相是多少？它的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有什么关系？

2.10 正切函数、余切函数的图象和性质

由诱导公式 $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}x$, $x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$ 知道，正切函数是周期函数．可以证明它的周期(最小正周期)是 π．现用单位圆上的正切线来作正切函数 $y=\operatorname{tg}x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

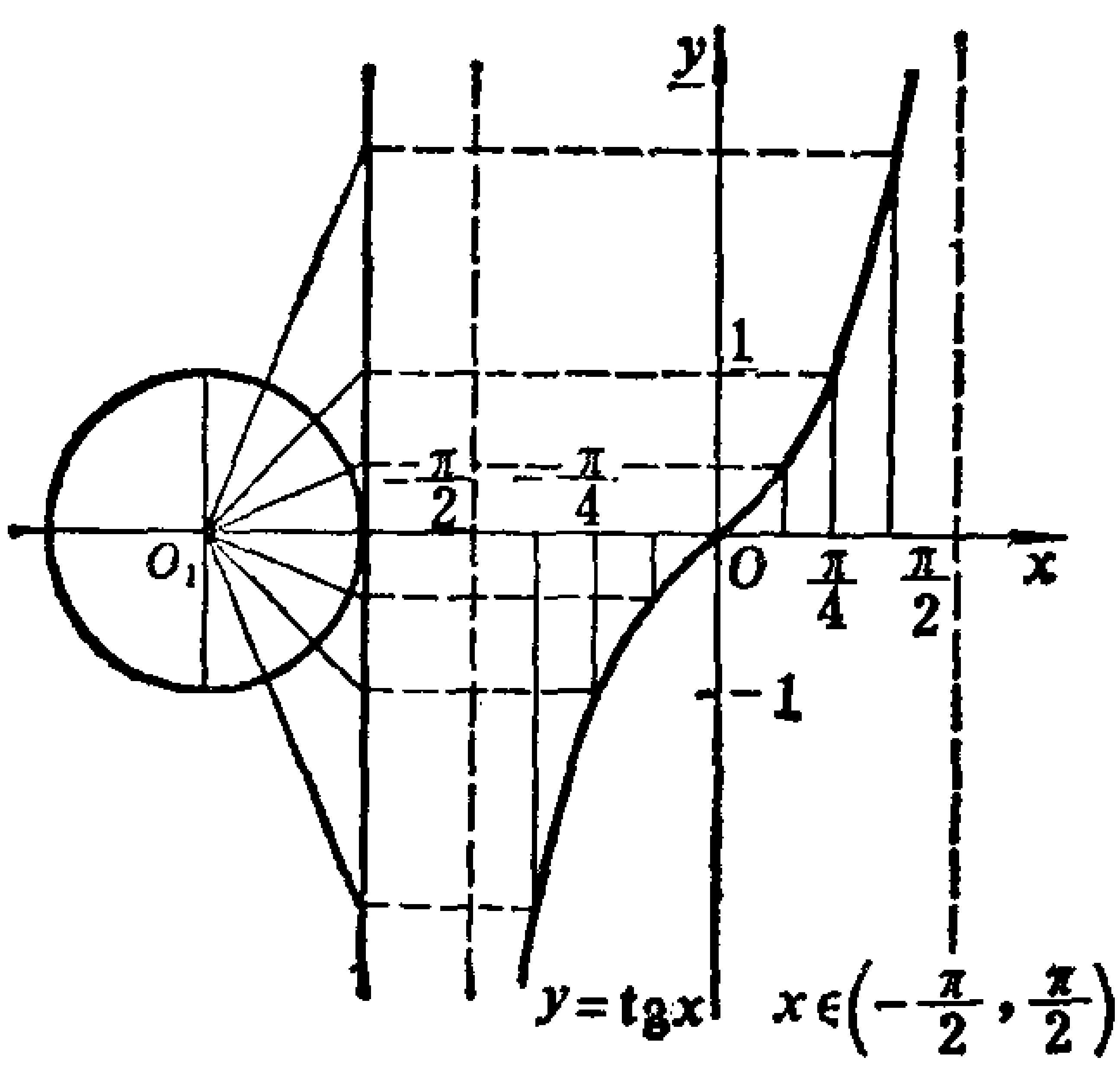


图 2-27

内的图象(图 2-27).

根据正切函数的周期性，我们可以把图象向左、右扩展，得出 $y=\mathrm{tg}x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in Z$ 的图象——**正切曲线**(图 2-28). 可以看出，正切曲线是由相互平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in Z)$隔开的无穷多支曲线所组成的.

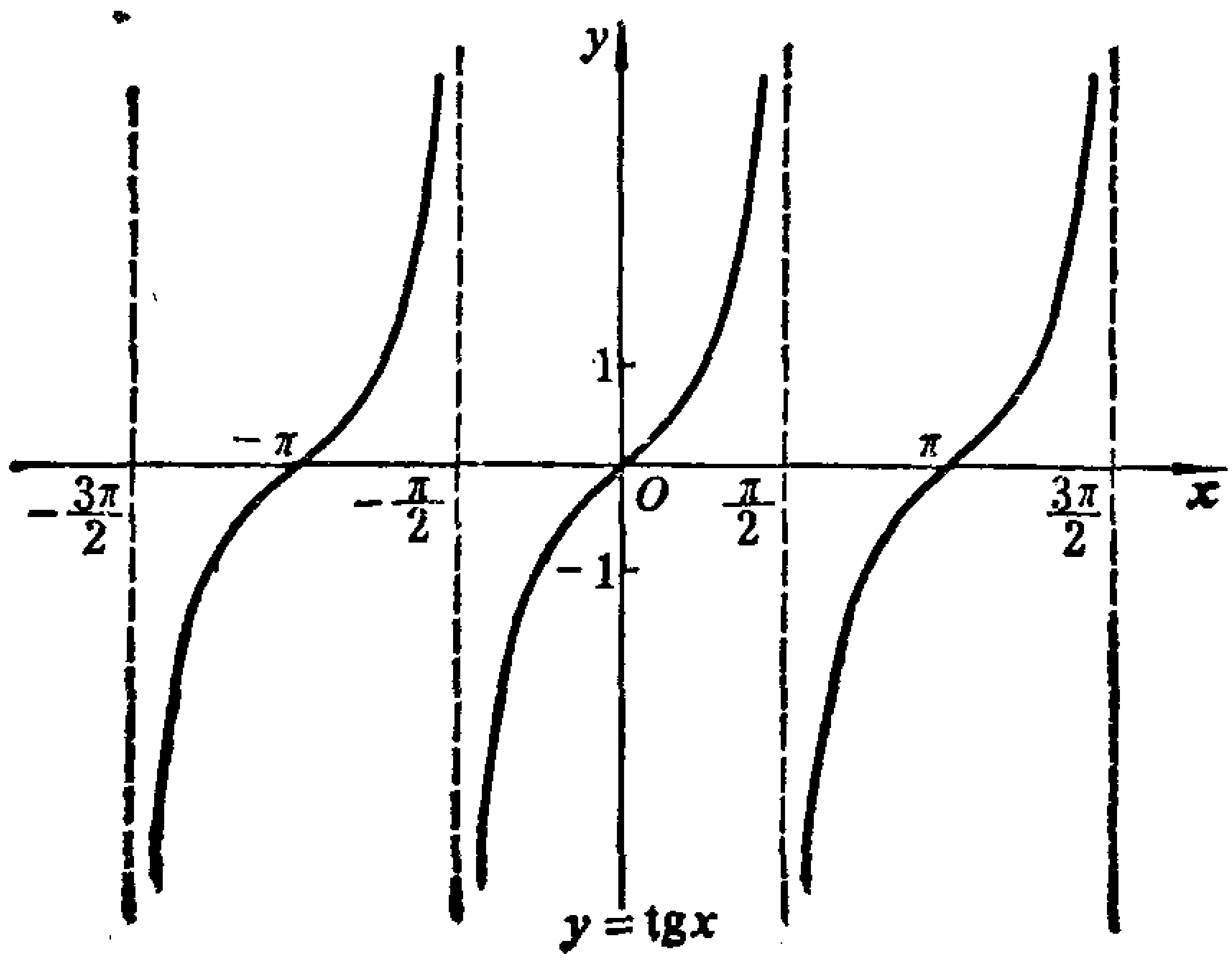


图 2-28

正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 有以下主要性质:

(1) **定义域**

函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域是 $\{x|x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in Z\}$.

(2) **值域**

从图 2-28 可以看出，当 x 小于$\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ 而无限接近

于$\frac{\pi}{2}+k\pi$时，$\operatorname{tg}x$ 无限增大，即可比指定的任何正数都大，我们把这种情况记作 $\operatorname{tg}x\to+\infty$（读作$\operatorname{tg}x$ 趋向于正无穷大）；当 x 大于$\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$ 而无限接近于$\frac{\pi}{2}+k\pi$时，$\operatorname{tg}x$ 无限减小，即取负值且它的绝对值可比指定的任何正数都大，我们把这种情况记作 $\operatorname{tg}x\to-\infty$（读作 $\operatorname{tg}x$ 趋向于负无穷大）. 这就是说，$\operatorname{tg}x$ 可以取任意实数值，但没有最大值、最小值. 因此，**函数 $y=\operatorname{tg}x$ 的值域是实数集 R.**

(3) **周期性**

$y=\operatorname{tg}x$ 是周期函数，周期是 π.

(4) **奇偶性**

从诱导公式 $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$ 知道，**$y=\operatorname{tg}x$ 是奇函数，它的图象关于原点对称.**

(5) **单调性**

从图 2-28 可以看出，**函数 $y=\operatorname{tg}x$ 在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in Z$ 内都是增函数.**（想一想：正切函数在整个定义域内是增函数吗？）

用类似的方法，可以作出余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$，$x\in R$ 且 $x\neq k\pi$，$k\in Z$ 的图象——**余切曲线**，如图 2-29 所示.

余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 的主要性质如下：

(1) **定义域**

函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 的定义域是$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq k\pi,k\in Z\}$.

(2) **值域**

函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 的值域是实数集 R，没有最大值、最小值.

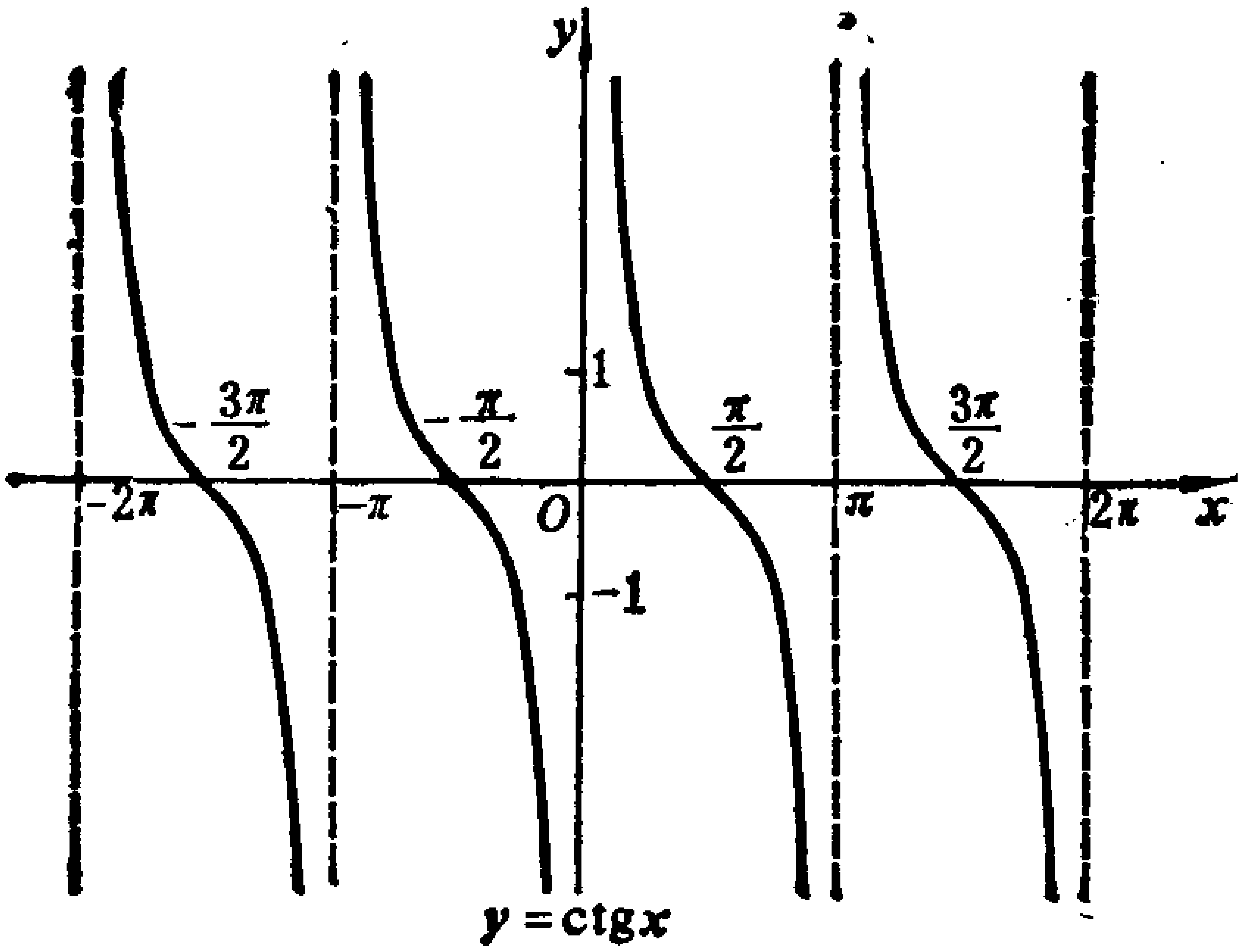


图 2-29

(3) 周期性

$y=\text{ctg}x$ 是周期函数，周期是 π.

(4) 奇偶性

$y=\text{ctg}x$ 是奇函数，它的图象关于原点对称.

(5) 单调性

$y=\text{ctg}x$ 在每一个开区间 $(k\pi,\ (k+1)\pi)$，$k\in Z$ 内都是减函数.

例 求函数 $y=\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的定义域.

解： 令 $z=x+\frac{\pi}{4}$，那么函数 $y=\text{tg}z$ 的定义域是

$$\left\{z \mid z\in R,\ \text{且}\ z\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}.$$

由 $$x+\frac{\pi}{4}=z=k\pi+\frac{\pi}{2},$$

得

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{4}.$$

因此，$y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的定义域是

$$\{x \mid x\in R, \text{且 } x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in Z\}.$$

练　习

1. 根据图2-27，写出 $y=\operatorname{tg}x, x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$的图象的作法。
2. 观察正切曲线及余切曲线，写出满足下列条件的x的值或x的区间：
   (1) $\operatorname{tg}x>0$;　(2) $\operatorname{tg}x=0$;　(3) $\operatorname{tg}x<0$;
   (4) $\operatorname{ctg}x>0$;　(5) $\operatorname{ctg}x=0$;　(6) $\operatorname{ctg}x<0$.
3. 求下列函数的定义域：
   (1) $y=\operatorname{tg}3x$;　(2) $y=-3\operatorname{ctg}2x$.
4. 求下列函数的周期：
   (1) $y=\operatorname{tg}2x$;　(2) $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;
   (3) $y=5\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
5. 指出下列各组函数值的差哪些大于零，哪些小于零(不求值)：
   (1) $\operatorname{tg}138°-\operatorname{tg}143°$;
   (2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{13}{4}\pi\right)-\operatorname{tg}\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$;

(3) $\operatorname{ctg}281^\circ-\operatorname{ctg}305^\circ$;

(4) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{19}{7}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{23}{8}\pi\right)$.

习题九

1. 作出下列各角的正弦线、余弦线、正切线：

(1) $\dfrac{\pi}{4}$；(2) $-\dfrac{\pi}{6}$；(3) $-\dfrac{3}{4}\pi$；(4) $\dfrac{14}{3}\pi$。

2. 作出下列函数在$[0, 2\pi]$上的简图：

(1) $y=1-\sin x$；(2) $y=3\cos x$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}\sin x-1$.

3. 求下列函数的最大值、最小值及使函数取得这些值的x的集合：

(1) $y=-5\sin x$；(2) $y=1-\dfrac{1}{2}\cos x$；

(3) $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；(4) $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. 求下列各函数的周期：

(1) $y=\sin\dfrac{3}{4}x$；(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}\sin 5x$；(4) $y=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

5. (1) 证明余弦曲线关于y轴对称；

(2) 证明正切曲线关于坐标原点O对称。

6. 在下列函数中，哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数也不是偶函数？为什么？

(1) $y=-\sin x$; (2) $y=|\sin x|$;

(3) $y=3\cos x+1$; (4) $y=\sin x-1$.

7. 不通过求值，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\sin 103°15'$, $\sin 164°30'$;

(2) $\cos\left(-\frac{47}{10}\pi\right)$, $\cos\left(-\frac{44}{9}\pi\right)$;

(3) $\sin 508°$, $\sin 144°$;

(4) $\cos 760°$, $\cos(-770°)$.

8. 指出下列函数的单调区间：

(1) $y=1+\sin x$; (2) $y=-\cos x$.

9. 根据三角函数的图象，写出使下列不等式成立的 x 的集合：

(1) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\sqrt{2}+2\cos x\geqslant 0$.

10. 证明：**两个三角形，如果有两边对应相等而夹角不等，那么，夹角所对的边也不等，夹角大的所对的边较大**（提示：利用余弦定理以及余弦函数在 $[0, \pi]$ 上是减函数这一性质）。

11. 确定下列各函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{1+\sin x}$; (2) $y=\frac{1}{1-\cos x}$;

(3) $y=\sqrt{\cos x}$; (4) $y=\sqrt{-2\sin x}$.

12. 作出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=4\sin 2x$; (2) $y=\frac{1}{2}\cos 3x$;

(3) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$; (4) $y=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

13. 作函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象，把它与余弦曲线$y=\cos x$进行比较，能得出什么结论？

14. 作函数 $y=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象，把它与正弦曲线 $y=\sin x$进行比较，能得出什么结论？

15. 不画图，写出下列各函数的振幅、周期和初相，并说明这些函数的图象可由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过怎样的变化得出：

(1) $y=8\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{8}\right)$；　　(2) $y=\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)$.

16. 电流强度 I 随时间 t 变化的函数关系是 $I=A\sin\omega t$. 设 $\omega=100\pi$(弧度/秒)，$A=5$(安培).

(1) 求电流强度 I 变化的周期与频率；

(2) 当 $t=0, \frac{1}{200}, \frac{1}{100}, \frac{3}{200}, \frac{1}{50}$(秒)时，求电流强度 I；

(3) 画出电流强度 I 随时间 t 变化的函数的图象(以 I 为纵坐标，0.5cm 表示 1 安培；以 t 为横坐标，1cm 表示$\frac{1}{200}$秒).

17. 一根长 l 厘米的线，一端固定，另一端悬挂一个小球. 小球摆动时，离开平衡位置的位移 S (厘米)和时间 t (秒)的函数关系是：

$$S=3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{3}\right).$$

(1) 求小球摆动的周期；

(2) 已知 $g=980$ 厘米/秒^2，要使小球摆动的周期是 1

秒，线的长度应当是多少厘米（精确到0.1厘米，π 取3.14）？

18. 不通过求值，比较下列各组中两个三角函数值的大小：

(1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{5}\pi\right)$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3}{7}\pi\right)$;

(2) $\operatorname{ctg}1519°$, $\operatorname{ctg}1493°$;

(3) $\operatorname{tg}6\frac{9}{11}\pi$， $\operatorname{tg}\left(-5\frac{3}{11}\pi\right)$;

(4) $\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi$， $\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}$.

19. 作函数 $y=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象．将它与余切曲线 $y=\operatorname{ctg}x$进行比较，能得出什么结论？

20. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $y=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$.

21. 求下列函数的周期：

(1) $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $y=2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

22. 下列函数是奇函数还是偶函数？为什么？

(1) $y=-\operatorname{tg}x$; (2) $y=-|\operatorname{ctg}x|$.

23. 根据三角函数的图象，写出使下列不等式成立的 x 的集合：

(1) $1+\operatorname{tg}x\geqslant 0$; (2) $\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}\geqslant 0$.

小　　结

一、本章主要内容是任意角的概念、弧度制、任意角的三角函数的概念、同角三角函数间的关系、诱导公式，以及三角函数的图象和性质.

二、根据生产实际和进一步学习数学的需要，我们引入了任意大小的正、负角的概念. 采用弧度制来度量角，实际上是在角的集合与实数集R之间建立了这样的一一对应关系：每一个角都有一个实数(即这个角的弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有一个角(角的弧度数等于这个实数)与它对应. 采用弧度制时，弧长公式十分简单：$l=|\alpha|r$(l为弧长，r为半径，α为圆弧所对圆心角的弧度数)，这就使一些与弧长有关的公式(如扇形面积公式等)得到了简化.

三、在角的概念推广后，我们定义了任意角的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割这六种三角函数. 它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数. 由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数可以看成是以实数为自变量的函数.

四、同角三角函数的八个基本关系式是进行三角恒等变换的重要基础，它们在化简三角函数式和证明三角恒等式等问题中要经常用到，必须熟记，并能熟练运用.

五、掌握了五组诱导公式以后，就可以把任意角的三角

函数化为 $0°\sim90°$ 间角的三角函数. 在五组诱导公式中，公式二和公式三是基本的(其中关于正弦、余弦的诱导公式是最基本的)，由它们可以推出其他各组公式.

五组公式列表如下:

	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$2k\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

概括上表中的公式，可以说成: $k\cdot360°+\alpha(k\in Z)$, $-\alpha$, $180°\pm\alpha$, $360°-\alpha$的三角函数值等于 α 的同名函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

六、利用正弦线、余弦线可以比较精确地作出正弦函数、余弦函数的图象. 可以看出，在长度为一个周期的闭区间上，有五个点(即函数值最大和最小的点以及函数值为零的点)在确定正弦函数、余弦函数图象的形状时起着关键的作用. 因此，在精确度要求不太高时，可找出这五个点来作正弦、余弦函数及与它们类似的一些函数(特别是函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$)的简图.

七、正弦、余弦、正切、余切函数的主要性质可列表归纳如下:

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}x$	$y=\mathrm{ctg}x$
定义域	R	R	$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\}$	$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq k\pi,\ k\in Z\}$
值　域	$[-1,1]$ 最大值为1， 最小值为-1.	$[-1,1]$ 最大值为1， 最小值为-1.	R 函数无最大值、最小值.	R 函数无最大值、最小值.
周期性	周期为 2π	周期为 2π	周期为 π	周期为 π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调性	在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$上都是增函数；在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$上都是减函数$(k\in Z)$.	在$[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$上都是增函数；在$[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$上都是减函数$(k\in Z)$.	在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$内都是增函数$(k\in Z)$.	在$(k\pi,\ (k+1)\pi)$内都是减函数$(k\in Z)$.

复习参考题二

A 组

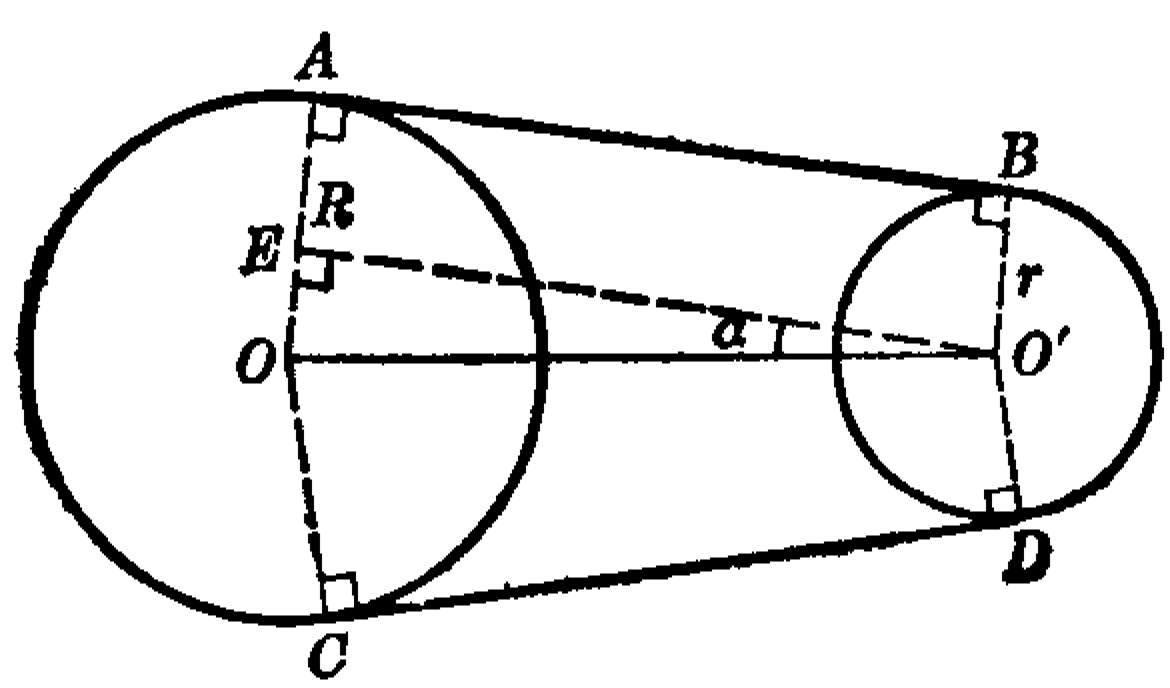
1. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并且把集合中在$-2\pi \sim 4\pi$之间的角写出来：

(1) $\frac{\pi}{4}$;　　(2) $-\frac{2}{3}\pi$;

(3) $\frac{12}{5}\pi$;　　(4) 0.

2. 在半径等于 15cm 的圆中，一扇形的弧含有 54°，求这扇形的周长和面积（π 取 3.14，计算结果保留两个有效数字）.

3. 如图，两轮的半径分别为 R, r $(R>r)$, $O'E \perp AO$, $\angle EO'O=\alpha$，求连接两轮的皮带传动装置的皮带长.



（第 3 题）

4. 0°～360° 间的角 α 的正弦、余弦、正切、余切的定义是怎样的？当 α 为锐角时，$90°-\alpha$ 的三角函数与 α 的三角函数之间有什么关系？$180°-\alpha$ 的三角函数与 α 的三角函数之间有什么关系？

5. 30°、45°、60° 角的正弦、余弦、正切值是怎样求得的？

6. 已知直角三角形中的一个锐角为α，那么$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$与α的对边、邻边、斜边之间有什么关系？

7. 写出余弦定理和正弦定理，怎样用它们来解各种类型的三角形？

8. 确定下列各三角函数值的符号：

(1) $\sin 4$;　(2) $\cos 5$;　(3) $\mathrm{tg} 8$;　(4) $\mathrm{ctg}(-3)$.

9. 已知 $\cos\varphi=\frac{1}{4}$，求 $\sin\varphi$, $\mathrm{tg}\varphi$.

10. 已知 $\sin x=2\cos x$，求角 x 的六个三角函数值。

11. 化简：

(1) $\cos\alpha\cdot\csc\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}$（$\alpha$为第四象限的角）；

(2) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}-\sqrt{\csc^2\alpha-1}$（$\alpha$为第二象限的角）；

(3) $\frac{1-\sin^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}+1-\frac{1}{\sin^2\varphi}$;

(4) $\frac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}+\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}}$;

(5) $\frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ-\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$.

12. (1) 用 $\cos\alpha$ 来表示 $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

(2) 用 $\sin\alpha$ 来表示$\frac{\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

(3) 用 $\sec\alpha$ 来表示$\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\cos\alpha$;

(4) 用 $\mathrm{ctg}\alpha$ 来表示

$$\frac{1+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sec^2\alpha-1}.$$

13. 求证下列恒等式：

(1) $(\sin x+\cos x)(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)=\sec x+\csc x$;

(2) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha$;

(3) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}=\frac{1}{1+\sin^2\alpha}+\frac{1}{1+\csc^2\alpha}$;

(4) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;

(5) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=1$;

(6) $(1-\mathrm{tg}^2A)^2=(\sec^2A-2\mathrm{tg}A)(\sec^2A+2\mathrm{tg}A)$.

14. 已知 $\mathrm{tg}\alpha=3$, 计算：

(1) $\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$;　　(2) $\frac{2}{3}\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha$;

(3) $\sin\alpha\cos\alpha$;　　(4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

15. 计算：

(1) $\sin 420°\cos 750°+\sin(-330°)\cos(-660°)$;

(2) $\mathrm{tg}675°+\mathrm{ctg}765°-\mathrm{tg}(-300°)+\mathrm{ctg}(-690°)$;

(3) $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{25\pi}{3}+\mathrm{tg}\left(-\frac{25}{4}\pi\right)$;

(4) $\sin 2+\cos 3+\mathrm{tg}4$.

16. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$, 计算：

(1) $\cos(2\pi-\alpha)$;　　(2) $\sec(5\pi-\alpha)$;

(3) $\mathrm{tg}(\alpha-7\pi)$;　　(4) $\mathrm{ctg}(3\pi+\alpha)$.

17. 求下列各三角函数值：

(1) $\sin 378^\circ 21'$, $\cos 742.5^\circ$, $\operatorname{tg} 1111^\circ$, $\operatorname{ctg} 370^\circ 15'$;

(2) $\sin(-879^\circ)$, $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{33\pi}{8}\right)$, $\cos\left(-\dfrac{13}{10}\pi\right)$,

$\operatorname{ctg}(-1.2\pi)$;

(3) $\sin 3$, $\operatorname{ctg}(-3)$, $\cos(\sin 2)$.

18. 设 $\pi<x<2\pi$, 填写下表:

x	$\dfrac{7\pi}{6}$				$\dfrac{7\pi}{4}$	
$\sin x$						
$\cos x$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$				$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} x$			1			
$\operatorname{ctg} x$				$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		

19. 求适合下列条件的 x 的集合:

(1) $\sin x=0$; (2) $\cos x=-0.6124$;

(3) $\cos x=0$; (4) $\sin x=0.1011$;

(5) $\operatorname{tg} x=-4$; (6) $\operatorname{ctg} x=6.754$.

20. 已知 α 是 $0\sim 2\pi$ 间的一个角, 利用单位圆证明: 角 α 的正弦的绝对值与角 α 的余弦的绝对值之和不可能小于1.

21. 确定下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-\operatorname{tg} x}$; (2) $y=\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\cos x-\dfrac{1}{2}}$;

(3) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; (4) $y=2\operatorname{ctg}\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

22. 下列各式能不能成立？为什么？

(1) $\cos^2 x=1.5$;　　(2) $\sin x-\cos x=2.5$;

(3) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2$;　　(4) $\sin^3 x=-\frac{\pi}{4}$.

23. 求下列各函数的最大值、最小值，并且求使函数取得最大值、最小值的 x 的集合：

(1) $y=\sqrt{2}+\frac{\sin x}{\pi}$;　　(2) $y=3-2\cos x$.

24. 已知 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，当 x 属于哪个区间时，

(1) 角 x 的正弦函数、余弦函数都是增函数？

(2) 角 x 的正弦函数、余弦函数都是减函数？

(3) 角 x 的正弦函数是增函数，而余弦函数是减函数？

(4) 角 x 的正弦函数是减函数，而余弦函数是增函数？

25. 确定下列函数哪些是偶函数，哪些是奇函数：

(1) $y=\sec x$;　(2) $y=\csc x$;　(3) $y=x^2+\cos x$;

(4) $y=|2\sin x|$;　(5) $y=\operatorname{tg} x^2$;　(6) $y=x^2\sin x$.

26. 作出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图：

(1) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$;　　(2) $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $y=1-\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$;　　(4) $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)$.

27. (1) 用描点法作函数 $y=\sin x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象；

(2) 根据(1)，如何再运用函数 $y=\sin x$ 的性质得到它在 $[0, 2\pi]$ 上的图象？

(3) 根据(2)，如何通过移动坐标轴得到 $y=\sin(x+\varphi)$

$+k$(φ, k 都是常数)的图象?

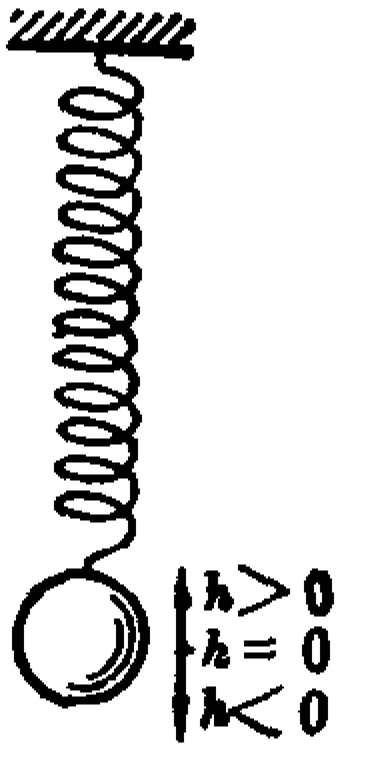
28. 不画图，写出下列各函数的振幅、周期、初相，并说明这些函数的图象可由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过怎样的变化得出.

(1) $y=\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$;　　(2) $y=2\sin\dfrac{1}{6}x$.

29. 弹簧挂着的小球作上下振动，它在 t 秒时相对于平衡位置（就是静止时的位置）的高度 h 厘米由下列关系决定:

$$h=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right).$$

以 t 为横坐标，h 为纵坐标，作出这个函数在长度为一个周期的闭区间上的图象，并且回答下列问题:



（第 29 题）

(1) 小球在开始振动时(即 $t=0$ 时)的位置在哪里?

(2) 小球的最高点和最低点与平衡位置的距离分别是多少?

(3) 经过多少时间小球往复振动一次(周期)?

(4) 每秒钟小球能往复振动多少次(频率)?

B 组

30. 求证下列恒等式:

(1) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x-\cos x}-\dfrac{\sin x+\cos x}{\mathrm{tg}^2 x-1}=\sin x+\cos x$;

(2) $1-(\cos^6 x+\sin^6 x)=3\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

31. 已知 $\sin x+\cos x=m$, 求 $\sin^4 x+\cos^4 x$.

32. 已知 $\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=p$, $\mathrm{tg}^4 x+\mathrm{ctg}^4 x=q$, 求 p 与 q 之间的

关系。

33. 用 $\mathrm{tg}\alpha$ 表示 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}$.

34. 已知 $\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1$, $\dfrac{x}{a}\sin\theta-\dfrac{y}{b}\cos\theta=1$, 求证

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.$$

35. 求适合下列条件的 x 的集合:

(1) $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;　　(2) $4\cos^2 2x=1$.

36. 已知函数 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{k}{5}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 其中 $k\neq0$.

(1) 求$f(x)$的最大值、最小值;

(2) 求最小正整数 k, 使$f(x)$的周期不大于1.

37. (1) 证明π是函数 $y=\sin x\cos x$ 的一个周期;

(2) 证明π是函数 $y=\sin x\cos x$ 的最小正周期(提示: 可用反证法. 设T是函数$y=\sin x\cos x$的最小正周期, 且 $0<T<\pi$. 可通过取 x 的一个特殊值, 证明这样的T不存在).

38. 已知 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\left[A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(4\pi f\dfrac{x}{v}\right)\right]}$, 其中, $v>0$, A_1、A_2、f都为非负值, A_1、A_2、f、v都是常量, 求

(1) 使 y 达到最大值的 x 的值的集合;

(2) 使 y 达到最小值的 x 的值的集合.

(提示: 当 $x\geqslant0$ 时, 函数$y=x^{\frac{1}{2}}$是增函数.)

39. 利用单位圆证明:

(1) 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上，$y=\sin x$ 是增函数；

(2) 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上，$y=\cos x$ 是减函数。

(提示：可用圆中弧、弦、弦心距间的大小关系证明.)

40. 研究下列函数的性质(定义域、值域、周期性、奇偶性、单调性)：

(1) $y=\sin|x|$；　　(2) $y=|\cos x|$。

第三章　两角和与差的三角函数

3.1　两角和与差的三角函数

1. 两角和与差的余弦

研究两角和与差的三角函数的问题，就是研究怎样利用角 α 与 β 的三角函数，表示 $\alpha\pm\beta$ 的三角函数. 关于 $\cos(\alpha+\beta)$ 怎样用 α, β 的三角函数来表示，我们有下面的重要公式:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{\alpha+\beta})❶$$

证明: 在直角坐标系 xOy 内，作单位圆 O, 并作 α, β 和 $-\beta$ 角; 使 α 角的始边为 Ox, 交圆 O 于 P_1, 终边交圆 O 于 P_2; β 角的始边为 OP_2, 终边交圆 O 于 P_3; $-\beta$ 角的始边为 OP_1, 终边交圆 O 于 P_4(图 3-1). 这时 P_1, P_2, P_3, P_4 的坐标分别是:

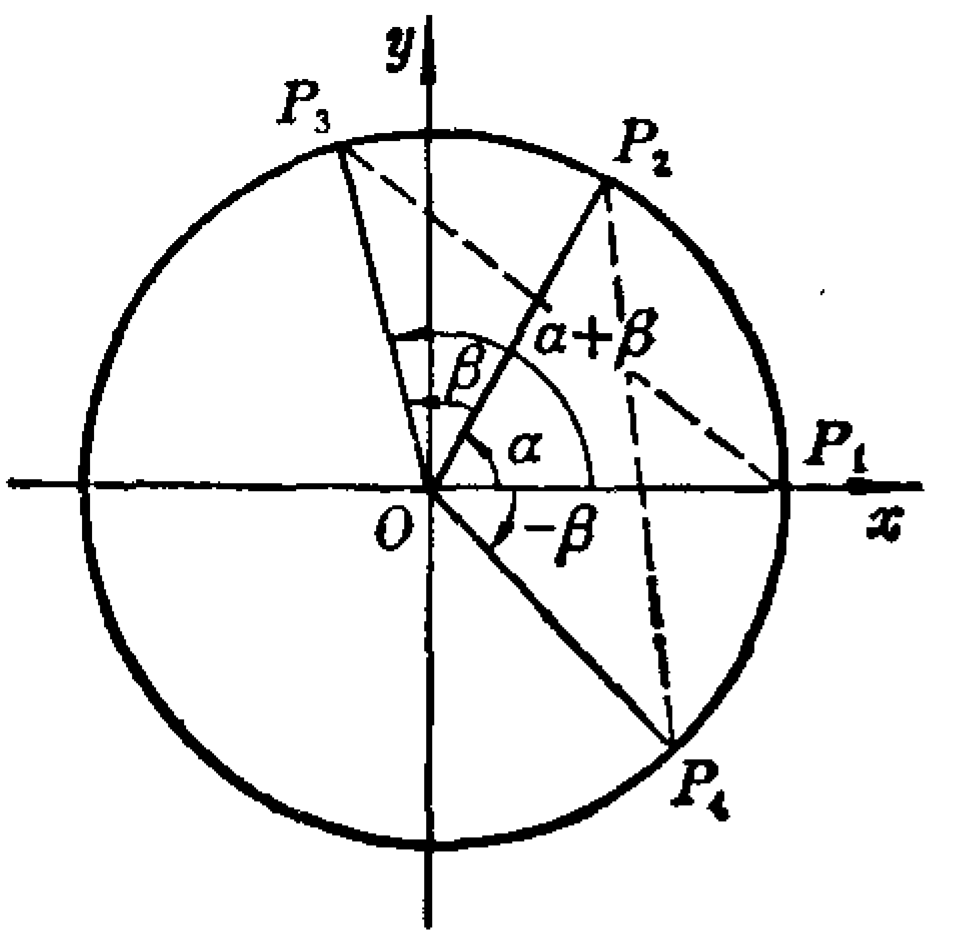


图　3-1

$P_1(1, 0)$;

$P_2(\cos\alpha, \sin\alpha)$;

$P_3(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$;

$P_4(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$.

由 $|P_1P_3|=|P_2P_4|$ 及两点间距离公式，得

---

❶ $C_{\alpha+\beta}$ 是简记符号，用来表示公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

下面还有其他一些简记符号.

$$[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)$$
$$=[\cos(-\beta)-\cos\alpha]^2+[\sin(-\beta)-\sin\alpha]^2,$$

展开,整理得

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta).$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

上面的公式,对于任意的角 α 和 β 都成立.

在上面的公式中,用 $-\beta$ 代替 β,就得到

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

即
$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (C_{\alpha-\beta})$$

例 1 不查表,求 $\cos 105°$ 及 $\cos 15°$ 的值.

解: $\cos 105°=\cos(60°+45°)$

$$=\cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4};$$

$\cos 15°=\cos(45°-30°)$

$$=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

例 2 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\cos\beta=-\frac{3}{4}$, $\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

解: 由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,得

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3};$$

又由 $\cos\beta=-\frac{3}{4}$, $\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 得

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}.$$

例 3 证明: 公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

当 α 为任意角时仍然成立.

证明: 利用公式 $(C_{\alpha-\beta})$, 可得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha,$$

$$\because\quad \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$\therefore\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

因为上式中的 α 为任意角, 如果把 $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 换成 α, 就得

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

即

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

利用上述两式, 不难证明下面两式在两边都有意义时

成立:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

以上四个公式是当 α 为任意角时$\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$的诱导公式. 如果把其中的 α 换成$(-\alpha)$, 就可得到当 α 为任意角时$\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$的诱导公式:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha; \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

练　习

1. 等式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 成立吗? 用 $\alpha=60°$, $\beta=30°$ 代入进行检验.
2. 不查表, 求下列各式的值:

   (1) $\cos 75°$; (2) $\cos 165°$; (3) $\cos\left(-\frac{61\pi}{12}\right)$.
3. 已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$的值.
4. 已知 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$, $\theta\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$, 求 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$的值.
5. 把下列各三角函数化成 $0°\sim45°$ 的角的三角函数:

   (1) $\cos 1856°$; (2) $\sin(-1190°)$; (3) $\operatorname{ctg}(-310°)$.
6. 不查表, 求下列各式的值:

(1) $\cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ$;

(2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

2. 两角和与差的正弦

因为 $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right]$,

而 $$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

所以 $$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (S_{\alpha+\beta})$$

把公式$(S_{\alpha+\beta})$中的β换成$-\beta$, 得

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

即 $$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.} \qquad (S_{\alpha-\beta})$$

例 1 不查表, 求 $\sin 75^\circ$ 的值.

解: $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

例 2 已知$\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 求$\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$.

解: $\because$ $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore$ $\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

$$\therefore\quad \sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\varphi\cos\frac{\pi}{6}-\cos\varphi\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}.$$

例 3 求证 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}=1-\mathrm{ctg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta$.

证明: 左边

$$=\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}=1-\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}$$

$=1-\mathrm{ctg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta=$右边.

$\therefore$ 原式成立.

例 4 求证 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

证法一: 左边 $=2\left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\text{右边}.$$

$\therefore$ 原式成立.

证法二: 右边 $=2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\alpha\right)$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

$$=\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=\text{左边}.$$

$\therefore$ 原式成立.

练　习

1. 等式$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$成立吗？用$\alpha=60°$，$\beta=30°$代入进行检验。

2. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\sin 105°$； (2) $\sin 15°$； (3) $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.

3. 已知 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，求 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$的值。

4. 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，且α, β 都是第二象限角，求 $\sin(\alpha-\beta)$及 $\cos(\alpha-\beta)$

5. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\sin 13°\cos 17°+\cos 13°\sin 17°$；

(2) $\sin 70°\cos 25°-\sin 20°\sin 25°$.

6. 求证：

(1) $\frac{1}{2}\left(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\right)=\cos(60°-\alpha)$；

(2) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\varphi\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=\cos\varphi$.

3. 两角和与差的正切

由 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$，把最后一个分式的分子、分母分别除以 $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ ($\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$)，得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (T_{\alpha+\beta})$$

把公式$(T_{\alpha+\beta})$中的β换成$-\beta$,得

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (T_{\alpha-\beta})$$

注意: 在两角和与差的正切的公式中,α,β的取值范围,应该是使$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$及$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$都存在的那些值, 即$\alpha,\beta$及$\alpha\pm\beta$都不能取$\frac{\pi}{2}+n\pi\ (n\in Z)$. 例如,如果$\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$,那么求$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$的值, 就不能用和角的正切公式,而应该用诱导公式.

例 1 已知$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=-2$.

(1) 求$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$;

(2) 求$\alpha+\beta$的值(其中$0^\circ<\alpha<90^\circ, 90^\circ<\beta<180^\circ$).

解: (1) $\because\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=-2$,

而
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)},$$

其中
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{3}+2}{1+\frac{1}{3}\times(-2)}=7.$$

$\therefore$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{7}.$$

(2) 由 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=-2$, 得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{3}-2}{1-\frac{1}{3}\times(-2)}=-1;$$

又因 $0°<\alpha<90°, 90°<\beta<180°$，所以

$$90°<\alpha+\beta<270°.$$

在 90° 与 270° 之间，只有 135° 的正切的值为 -1，

$\therefore$ $$\alpha+\beta=135°.$$

例 2 计算 $\frac{1+\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}75°}$ 的值.

分析：因为 $\operatorname{tg}45°=1$，所以原式可以看成是

$$\frac{\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}75°}.$$

这样，我们就可以运用两角和的正切公式，把原式化为

$$\operatorname{tg}(45°+75°),$$

而因 $45°+75°=120°$ 是特殊角，所以可以求得原式的值.

解： $\because$ $\operatorname{tg}45°=1$，

$\therefore$ $$\frac{1+\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}75°}=\frac{\operatorname{tg}45°+\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}75°}$$
$$=\operatorname{tg}(45°+75°)$$
$$=\operatorname{tg}120°=-\sqrt{3}.$$

例 3 设 $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(b\neq0)$ 的两个根，求 $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ 的值.

解： 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，$a\neq0$. 由一元二次方程根与系数的关系，得

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\frac{b}{a},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{c}{a}.$$

而 $$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

由题设 $b\neq0$，故 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta\neq0$，代入，得

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\dfrac{c}{a}}{-\dfrac{b}{a}}=\frac{a-c}{-b}=\frac{c-a}{b}.$$

练　习

1. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\operatorname{tg}75^\circ$； (2) $\operatorname{tg}15^\circ$； (3) $\operatorname{ctg}105^\circ$.

2. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\operatorname{tg}12^\circ+\operatorname{tg}33^\circ}{1-\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}33^\circ}$； (2) $\dfrac{1-\operatorname{tg}15^\circ}{1+\operatorname{tg}15^\circ}$.

3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$，求 $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

4. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$，$\operatorname{tg}\beta=3$，并且 α,β 都是锐角，求证

$$\alpha+\beta=135^\circ.$$

习 题 十

1. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，并且 α，β 都是第二象限的角，求 $\cos(\alpha+\beta)$和 $\cos(\alpha-\beta)$的值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{12}{13}$，求 $\cos C$ 的值.

3. 求证：

(1) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$； (2) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$；

(3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$； (4) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$；

(5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$; (6) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$.

4. 化简:

(1) $\sin(30^\circ+\alpha)-\sin(30^\circ-\alpha)$;

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\phi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)$;

(4) $\cos(60^\circ+\theta)+\cos(60^\circ-\theta)$;

(5) $\sin58^\circ\cos37^\circ-\cos58^\circ\sin37^\circ$;

(6) $\cos24^\circ\cos69^\circ-\sin24^\circ\sin69^\circ$;

(7) $\sin14^\circ\cos16^\circ+\sin76^\circ\cos74^\circ$;

(8) $\sin21^\circ\cos81^\circ-\sin69^\circ\cos9^\circ$;

(9) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$;

(10) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$;

(11) $\cos(36^\circ+x)\cos(54^\circ-x)$

$-\sin(36^\circ+x)\sin(54^\circ-x)$;

(12) $\sin(70^\circ+\alpha)\cos(10^\circ+\alpha)$

$-\cos(70^\circ+\alpha)\sin(170^\circ-\alpha)$.

5. 求证:

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$;

(3) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

(4) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

(5) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$.

6. (1) 已知 $\operatorname{tg}x=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}y=-3$, 求 $\operatorname{tg}(x+y)$ 的值;

(2) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2k+1$, $\operatorname{tg}\beta=2k-1$, 求 $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$ 的值.

7. 已知 $\cos\theta=-\frac{12}{13}$, $\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, 求

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\operatorname{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

8. 用 $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ 表示 $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$, 并求 $\frac{1-\operatorname{ctg}15^\circ}{1+\operatorname{ctg}15^\circ}$ 的值.

9. 化简:

(1) $\frac{\operatorname{tg}53^\circ-\operatorname{tg}23^\circ}{1+\operatorname{tg}53^\circ\operatorname{ctg}67^\circ}$; (2) $\frac{\operatorname{tg}2\theta-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}2\theta\operatorname{tg}\theta}$;

(3) $\frac{1-\operatorname{tg}15^\circ}{1+\operatorname{ctg}75^\circ}$; (4) $\frac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}$.

10. 求证:

(1) $\operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}^2y}{1-\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}^2y}$;

(2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}$;

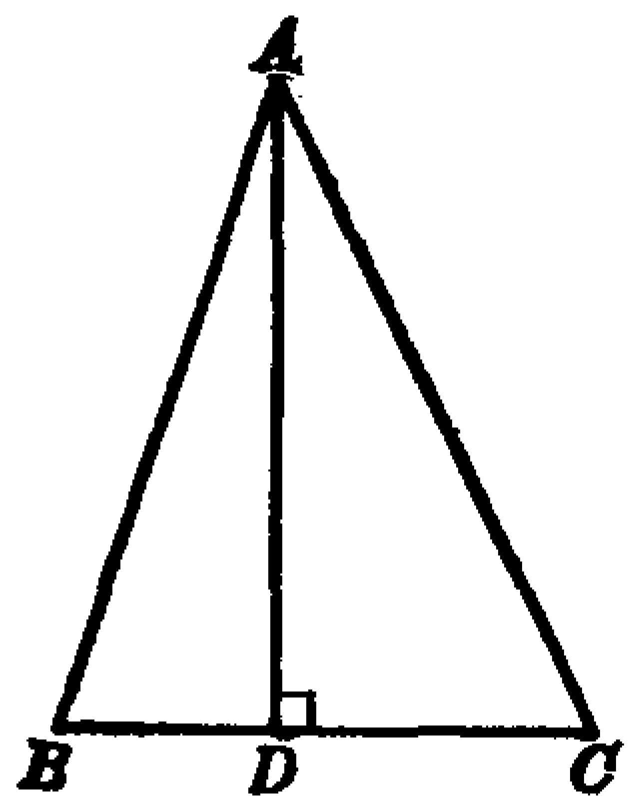
(3) $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$.

11. 已知 $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\phi=\frac{1}{3}$, 并且 θ,ϕ 都是锐角, 求证 $\theta+\phi=45^\circ$.

12. 已知 $a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$, 求证:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b\sin\beta-a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b\cos\beta}.$$

13. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，垂足为D，且$BD:DC:AD=2:3:6$，求$\angle BAC$的度数。



(第13题)

14. 已知$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{tg}\beta$是方程$x^2+6x+7=0$的两个根，求证

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta).$$

3.2 二倍角的正弦、余弦、正切

在公式$(S_{\alpha+\beta})$，$(C_{\alpha+\beta})$，$(T_{\alpha+\beta})$中，当$\alpha=\beta$时，就可以得出相应的二倍角的三角函数公式：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad (C_{2\alpha})$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad (T_{2\alpha})$$

因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以公式$(C_{2\alpha})$可以变形为

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

或

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha. \qquad (C_{2\alpha}')$$

有了二倍角的三角函数公式，就可以用单角的三角函数来表示二倍角的三角函数.

例1 已知$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\mathrm{tg}2\alpha$的值。

解： $\because \quad \sin\alpha=\frac{5}{13},\ \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right),$

$\therefore \quad \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}.$

$\therefore \quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169},$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169},$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{-120}{169}\Big/\frac{119}{169}=-1\frac{1}{119}.$

例 2 (1) 用 $\sin\theta$ 表示 $\sin 3\theta$;

(2) 用 $\cos\theta$ 表示 $\cos 3\theta$.

解： (1)
$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(2\theta+\theta)\\&=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\&=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta.\end{aligned}$$

$\therefore \quad \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.$

(2)
$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(2\theta+\theta)\\&=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta.\end{aligned}$$

$\therefore \quad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta.$

例 3 求证

$$[\sin\theta(1+\sin\theta)+\cos\theta(1+\cos\theta)]$$
$$\times[\sin\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1-\cos\theta)]=\sin 2\theta.$$

证明： 左边 $=(\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos\theta)$

$$\times(\sin\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta+\cos\theta)$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1$$

$$=2\sin\theta\cos\theta$$

$=\sin 2\theta=$ 右边.

∴ 原式成立.

例 4 化简 $\sin 50°(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10°)$.

解： $\sin 50°(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,10°)=\sin 50°\left(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10°}{\cos 10°}\right)$

$$=\sin 50°\cdot\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\cos 10°}$$

$$=2\sin 50°\cdot\frac{\sin 30°\cos 10°+\cos 30°\sin 10°}{\cos 10°}$$

$$=2\cos 40°\cdot\frac{\sin 40°}{\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin 80°}{\cos 10°}=\frac{\cos 10°}{\cos 10°}=1.$$

例 5 把一段半径为 R 的圆木，锯成横截面为矩形的木料，怎样锯法才能使横截面的面积最大？

解： 因为锯得的矩形横截面是圆内接矩形，所以它的对角线是圆的直径，其长度应为 $2R$. 设对角线与一个边的夹角为 θ（图 3-2），则矩形的长与宽分别为 $2R\cos\theta$，$2R\sin\theta$. 因此，

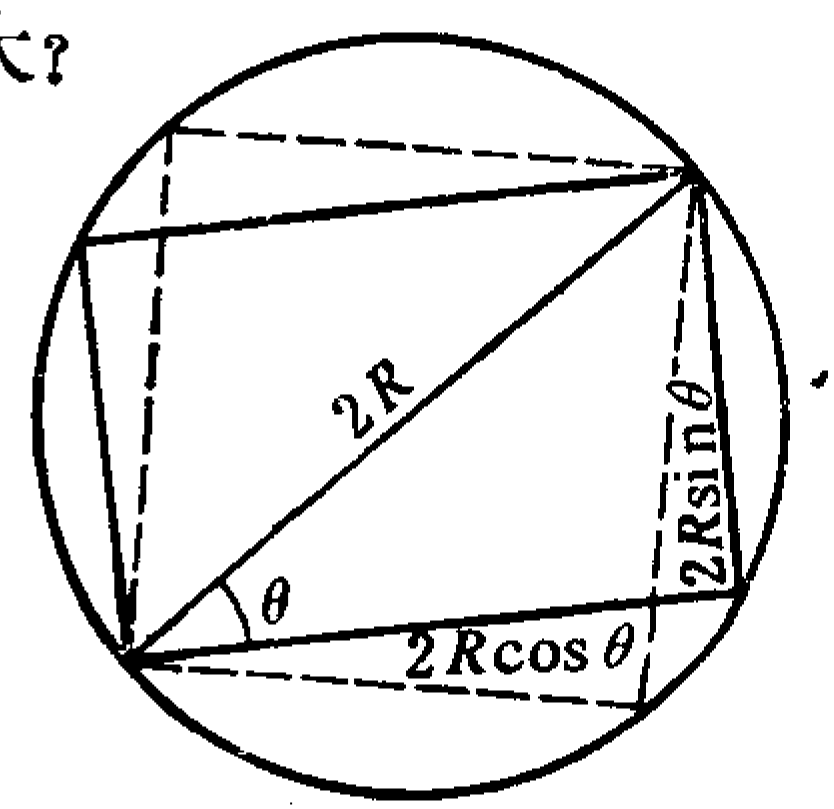


图 3-2

矩形的面积

$$\begin{aligned}S&=2R\cos\theta\cdot 2R\sin\theta\\&=2R^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\&=2R^2\cdot\sin 2\theta.\end{aligned}$$

因为 $\sin 2\theta\leqslant 1$, 所以 $S\leqslant 2R^2$.

当 $\sin 2\theta$ 取最大值 1 时, S 取最大值 $2R^2$.

所以，当 $2\theta=90^\circ$，即 $\theta=45^\circ$ 时，圆内接矩形的面积最大，这时圆内接矩形为内接正方形.

答：以圆木的直径为对角线，锯成横截面为正方形的木料时，横截面的面积最大.

练　习

1. 不查表，求下列各式的值：

(1) $2\sin 67^\circ 30'\cos 67^\circ 30'$;　(2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$;

(3) $2\cos^2\dfrac{\pi}{12}-1$;　(4) $1-2\sin^2 75^\circ$;

(5) $\dfrac{2\operatorname{tg}22.5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 22.5^\circ}$;　(6) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;

(7) $1-2\sin^2 750^\circ$;　(8) $\dfrac{2\operatorname{tg}150^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 150^\circ}$.

2. 化简：

(1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;　(2) $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$;

(3) $\cos^4\varphi-\sin^4\varphi$;　(4) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\theta}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\theta}$.

3. 已知 $\sin\alpha=0.8$, $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ 的值。

4. 已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 求 $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ 的值。

5. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, 求 $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ 的值。

6. 写出由 $\operatorname{tg}\alpha$ 求 $\operatorname{tg} 3\alpha$ 的公式。

7. 证明下列恒等式:

(1) $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$;

(2) $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$;

(3) $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$;

(4) $\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=\cos x$;

(5) $1+2\cos^2\theta-\cos 2\theta=2$;

(6) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha$;

(7) $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\operatorname{tg} 2\alpha$;

(8) $\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\operatorname{ctg}\theta$;

(9) $\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg} 2\varphi=\csc 2\varphi$;

(10) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$.

3.3 半角的正弦、余弦和正切

上节我们研究了用单角的三角函数表示二倍角的三角函数. 这一节我们研究如何用单角的三角函数表示半角(单角的一半)的三角函数.

由 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, 得

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

即

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha;$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha.$$

$$\therefore\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad (S_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (C_{\frac{\alpha}{2}})$$

将这两个公式左边、右边分别相除, 又可得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (T_{\frac{\alpha}{2}})$$

这三个公式中根号前的符号, 由$\frac{\alpha}{2}$所在的象限来确定. 如果没有给出限定符号的条件, 根号前面应保持正负两个符号.

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$还可以用 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的不带根号的式子来表示:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

或

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

即

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (T_{\frac{\alpha}{2}}{}')$$

例 1 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, 求 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

解: $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\pm\frac{1}{2}$,

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 2 已知 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$, 并且 $180°<\theta<270°$, 求 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

解法一: 因为 $180°<\theta<270°$, 所以 $90°<\frac{\theta}{2}<135°$, 即 $\frac{\theta}{2}$ 是第二象限角.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}}=-2.$$

解法二: 因为 $180°<\theta<270°$, 即 θ 是第三象限角.

$$\therefore \quad \sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}.$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{-\frac{4}{5}}=-2,$$

或 $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}=-2.$$

如果已经知道 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 的值，那么求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$时，用公式($T_{\frac{\alpha}{2}}'$)比较方便．一般地说，选用分母为单项式的公式 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$更为方便.

例 3 求证$\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{4}\sin 2\alpha.$

证法一: $$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

证法二: $$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

例 4　用 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 表示 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

解: $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$

$$=\frac{2}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}-1=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-1=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

用 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 分别表示 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ 的公式，即

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

通常叫做**万能公式**. 这是因为, 不论 α 角的哪一种三角函数, 都可以用这几个公式把它化为 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的有理式，这样就可以把问题转化为以 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 为变量的一元有理函数，往往有助于问题解决.

我们用万能公式来证明例 3:

$$右边=\frac{1}{2}\cdot\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1}{2}tg\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos^2\alpha,$$

$$左边=\cos^2\alpha\cdot\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

∴ 原式成立。

练　习

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$.

2. 已知 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$，且 $270°<\theta<360°$，求 $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$, $tg\frac{\theta}{2}$.

3. 已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，且 $\frac{3}{2}\pi<A<2\pi$，求 $tg\frac{A}{2}$.

4. 求证 $tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

5. 证明下列恒等式:

(1) $\sin^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$;

(2) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

(3) $1-\sin\theta=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$;

(4) $\dfrac{\cos A}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}\sin A$;

(5) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

(6) $\dfrac{4\sin\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\sec\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=\sin 4\alpha$.

6. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-3$, 求 2α 的各三角函数值。

习题十一

1. 已知等腰三角形一个底角的正弦等于$\frac{5}{13}$, 求这个三角形的顶角的正弦、余弦及正切。

2. 已知 $\cos\phi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 并且 $180°<\phi<270°$, 求 $\sin 2\phi$, $\cos 2\phi$, $\operatorname{tg}2\phi$ 的值。

3. 证明下列恒等式:

(1) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\alpha$;

(2) $\operatorname{tg}\theta-\operatorname{ctg}\theta=-2\operatorname{ctg}2\theta$;

(3) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{tg}2\alpha$;

(4) $\dfrac{1+\sin 2\phi}{\sin\phi+\cos\phi}=\sin\phi+\cos\phi$;

(5) $\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$;

(6) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos 2\alpha$;

(7) $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}$;

(8) $\frac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}=\mathrm{tg}\theta$.

4. 已知等腰三角形的顶角的余弦等于$\frac{7}{25}$，求这个三角形的一个底角的正弦、余弦及正切。

5. 已知 $\cos\phi=\frac{1}{3}$，并且 $270°<\phi<360°$，求 $\sin\frac{\phi}{2}$, $\cos\frac{\phi}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}$的值。

6. 已知 $2\alpha+\beta=90°$，且 α 是锐角，求证

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\sin\beta}{2}},\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}}.$$

7. 已知圆心角的正弦等于$\frac{3}{5}$，求对同弧的圆周角的正弦、余弦及正切。

8. 求证：

(1) $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; (2) $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

(3) $\mathrm{tg}67°30'=\sqrt{2}+1$.

9. 证明下列恒等式：

(1) $2\sin\theta+\sin 2\theta=4\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}$;

(2) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

(3) $\mathrm{tg}15°+\mathrm{ctg}15°=4$;

(4) $\dfrac{\csc^2\alpha-2}{\csc^2\alpha}=\cos 2\alpha$;

(5) $\sin(n\pi+\theta)\cos(n\pi-\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$, $(n\in Z)$;

(6) $\dfrac{1+\sin\phi}{\cos\phi}=\dfrac{\cos\phi}{1-\sin\phi}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\phi}{2}\right)$;

(7) $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)$

$=2\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

(8) $\dfrac{\cos\alpha}{\sec\dfrac{\alpha}{2}+\csc\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}\sin\alpha\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

(9) $\cos^4\theta=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{4}\cos^2 2\theta$;

(10) $\sin^4 x=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x$.

10. (1) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$, 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ 的值;

(2) 已知 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{b}{a}$, 求证 $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=a$;

(3) 已知 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{m}{n}$, 求 $m\cos\alpha+n\sin\alpha$ 的值。

11. 设 $\sin\alpha$ 与 $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ 的比为 8:5, 求 $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$ 的值。

12. 在一块半圆形的铁板中截出一块面积最大的矩形，应该怎样截取?求出这个矩形的面积.

13. 已知 $\operatorname{tg}^2\theta=2\operatorname{tg}^2\phi+1$, 求证 $\cos 2\theta+\sin^2\phi=0$.

14. 已知 $x+y=3-\cos 4\theta$, $x-y=4\sin 2\theta$, 求证 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=2$.

3.4 三角函数的积化和差与和差化积

在计算或化简的过程中，有时需要把三角函数的积的形式与和差的形式进行互化. 下面我们就来研究这种互化.

1. 三角函数的积化和差

将公式($S_{\alpha+\beta}$)加上公式($S_{\alpha-\beta}$)，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\therefore\quad \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (1)$$

将公式($S_{\alpha+\beta}$)减去公式($S_{\alpha-\beta}$)，得

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\therefore\quad \cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (2)$$

将公式($C_{\alpha+\beta}$)加上公式($C_{\alpha-\beta}$)，得

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

$$\therefore\quad \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]. \qquad (3)$$

将公式($C_{\alpha+\beta}$)减去公式($C_{\alpha-\beta}$)，得

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\therefore\quad \sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]. \qquad (4)$$

(1), (2), (3), (4)这四个公式叫做**积化和差公式**.

例 1 不查表，求 $\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$的值.

解法一： $\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

解法二： $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}$

$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

例 2 把下列各式化为和差的形式，然后查表求值.

(1) $2\cos31^\circ\sin14^\circ$； (2) $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}$.

解： (1) $2\cos31^\circ\sin14^\circ$

$$=\sin(31^\circ+14^\circ)-\sin(31^\circ-14^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin17^\circ$$

$$=0.7071-0.2924=0.4147;$$

(2) $\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{15}+\frac{\pi}{5}\right)\right.$

$$\left.+\cos\left(\frac{2\pi}{15}-\frac{\pi}{5}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{15}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos12^\circ\right)=0.25+0.4891=0.7391.$$

例 3 求证 $\sin15^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot\sin75^\circ=\frac{1}{8}$.

证法一： $\sin15^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot\sin75^\circ$

$$=\frac{1}{2}\sin15^\circ\sin75^\circ$$

$$=-\frac{1}{4}[\cos(15^\circ+75^\circ)-\cos(15^\circ-75^\circ)]$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos 90°-\cos 60°)=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}.$$

证法二: $\sin 15°\cdot\sin 30°\cdot\sin 75°$

$$=\frac{1}{2}\sin 15°\cdot\sin 75°$$

$$=\frac{1}{2}\sin 15°\cdot\cos 15°=\frac{1}{4}\sin 30°=\frac{1}{8}.$$

例 4 求 $\cos 10°\cdot\cos 30°\cdot\cos 50°\cdot\cos 70°$ 的值.

解: 原式$=\cos 10°\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}[\cos(50°+70°)$

$$+\cos(50°-70°)]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10°\left(-\frac{1}{2}+\cos 20°\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10°\cos 20°$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°+\frac{\sqrt{3}}{8}(\cos 30°+\cos 10°)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°+\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10°$$

$$=\frac{3}{16}.$$

例 5 求证 $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha.$

证明: 左边$=\sin^2\alpha(\sin 3\alpha\sin\alpha)+\cos^2\alpha(\cos 3\alpha\cos\alpha)$

$$=\frac{1}{2}[\sin^2\alpha(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$$

$$+\cos^2\alpha(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$+\cos 4\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha\cos 2\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\alpha(1+\cos 4\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\alpha$$

$$=\cos^3 2\alpha=\text{右边}.$$

$\therefore$ 原式成立.

例 6 已知$\triangle ABC$中，$\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$，求证这个三角形是等腰三角形.

证明: 由 $\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$, 知

$$\sin B\sin C=\frac{1+\cos A}{2},$$

又由 $A+B+C=180°$, 知

$$\cos A=-\cos(B+C),$$

$\therefore\quad -\frac{1}{2}[\cos(B+C)-\cos(B-C)]$

$=\frac{1}{2}[1-\cos(B+C)].$

化简, 得

$$\cos(B-C)=1.$$

$\because\quad -180°<B-C<180°,$

$\therefore\quad B-C=0.$

由此, 得 $B=C$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

练　习

1. 把下列各式化为和差的形式，然后查表求值：

(1) $2\sin70^\circ\cos20^\circ$；　(2) $\cos80^\circ\sin20^\circ$；

(3) $\cos68^\circ\cos52^\circ$；　(4) $\sin121^\circ\sin59^\circ$.

2. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\sin105^\circ\cos75^\circ$；　(2) $2\cos37.5^\circ\cos22.5^\circ$；

(3) $2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$.

3. 证明下列各恒等式：

(1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos2\alpha$；

(2) $2\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\cos(60^\circ-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin2\alpha$；

(3) $\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ=\frac{1}{4}$；

(4) $\cos2\alpha\cos\alpha-\sin5\alpha\sin2\alpha=\cos4\alpha\cos3\alpha$；

(5) $\cos4x\cdot\cos2x-\cos^2 3x=-\sin^2 x$；

(6) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{tg}2x$.

2. 三角函数的和差化积

在积化和差的公式中，如果令 $\alpha+\beta=\theta$，$\alpha-\beta=\varphi$，则

$$\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2},\qquad \beta=\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

把 α，β 的值代入积化和差的公式(1)中，就有

$$\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}+\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\right.$$

$$+\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}-\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\Big]=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin\varphi).$$

$$\therefore \qquad \sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

同样可得,

$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\varphi}{2},$$

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\varphi}{2},$$

$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

这四个公式叫做**和差化积公式**.

例1 把下列各式化为积的形式:

(1) $\sin 104^\circ+\sin 16^\circ$;

(2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

解: (1) $\sin 104^\circ+\sin 16^\circ$

$$=2\sin\frac{104^\circ+16^\circ}{2}\cos\frac{104^\circ-16^\circ}{2}$$

$$=2\sin 60^\circ\cos 44^\circ=\sqrt{3}\cos 44^\circ;$$

(2) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=2\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cdot\cos\frac{\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$=2\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\alpha.$$

例2 求 $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$ 的值.

解: $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$

$$=2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 3 把下列各式化为积的形式:

(1) $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\sin x+\cos x$.

解: (1) $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos x-\cos\frac{\pi}{6}$

$$=-2\sin\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}$$

$$=-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right);$$

(2) $\sin x+\cos x=\sin x+\sin(90^\circ-x)$

$$=2\sin 45^\circ\cos(x-45^\circ)$$

$$=\sqrt{2}\cos(x-45^\circ),$$

或 $\sin x+\cos x=\cos(90^\circ-x)+\cos x$

$$=2\cos 45^\circ\cos(45^\circ-x)$$

$$=\sqrt{2}\cos(45^\circ-x).$$

因为 $\sqrt{2}\cos(45^\circ-x)=\sqrt{2}\cos[-(x-45^\circ)]$

$$=\sqrt{2}\cos(x-45^\circ),$$

所以两种解法的结果实际上是一样的.

例 4 求 $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$ 的值.

解: $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$

$$=\frac{1-\cos 20^\circ}{2}+\frac{1+\cos 80^\circ}{2}+\frac{1}{2}(\sin 50^\circ-\sin 30^\circ)$$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos 80^\circ-\cos 20^\circ)+\frac{1}{2}\left(\sin 50^\circ-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}(-2\sin 50^\circ \sin 30^\circ)+\frac{1}{2}\left(\sin 50^\circ-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\frac{1}{2}\sin 50^\circ-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}.$$

例 5 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

证明: 由 $A+B+C=180^\circ$，得

$$C=180^\circ-(A+B),\ \frac{C}{2}=90^\circ-\frac{A+B}{2}.$$

$\therefore$ $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\left(-\frac{B}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

例 6 把 $1+\sin\theta+\cos\theta$ 化成积的形式.

解: $1+\sin\theta+\cos\theta$

$$=(1+\cos\theta)+\sin\theta$$

$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right).$$

例 7 化下列各式为一个角的一个三角函数的形式:

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$;

(2) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;

(3) $a\sin\alpha+b\cos\alpha$.

解: (1) $\because\quad \cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 原式 $=\sin\alpha\cos 45^\circ+\cos\alpha\sin 45^\circ$

$=\sin(\alpha+45^\circ)$;

(2) 原式 $=2\left(\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$, 而

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ 原式 $=2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;

(3) 分析: 如果 $a=x\cos\varphi$, $b=x\sin\varphi$, 原式 $=x(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)$, 这样就可以把原式化为 $x\sin(\alpha+\varphi)$ 了. 现在问题转变为 x 与 φ 应当怎样来确定.

由 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$，可得$\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{b}{x}\right)^2=1$，

$$\therefore \qquad x^2=a^2+b^2.$$

这样就得到 $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$，不妨取 $x=\sqrt{a^2+b^2}$，于是就得到 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，从而得 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$. 因为 a，b 是已知的，所以 φ 可以确定。

$$\begin{aligned}&a\sin\alpha+b\cos\alpha\\&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).\end{aligned}$$

令 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).\end{aligned}$$

(其中 φ 角所在象限由 a，b 的符号确定，φ 角的值由 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ 确定)。

练 习

1. 把下列各式化为积的形式：

   (1) $\sin 24^\circ+\sin 21^\circ$；(2) $\sin(15^\circ+\alpha)-\sin(15^\circ-\alpha)$；

   (3) $\cos 3x+\cos 2x$； (4) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. 求下列各式的值：

   (1) $\frac{\sin 20^\circ-\cos 50^\circ}{\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}$； (2) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\sin 80^\circ$.

3. 求证：

(1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

(2) $\dfrac{\sin x+\sin y}{\cos x-\cos y}=\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2}$.

4. 将下列各式化为一个角的一个三角函数的形式:

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$; (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$;

(3) $\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha$; (4) $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$.

习题十二

1. 求下列各式的值:

(1) $\sin 45^\circ\cos 15^\circ$;

(2) $\cos 75^\circ\cos 15^\circ$;

(3) $\cos 157^\circ 30'\sin 22^\circ 30'$;

(4) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$;

(5) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$;

(6) $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}50^\circ\operatorname{tg}70^\circ$.

2. 把下列各式化为和或差的形式:

(1) $2\sin\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

(2) $\sin ax\sin bx$;

(3) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

(4) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

(5) $\sin x\cos 3x$.

3. 把下列各式化为积的形式:

(1) $\sin 28^\circ + \cos 17^\circ$;　(2) $\cos 54^\circ - \sin 54^\circ$;

(3) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

(5) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha$;　(6) $1+\sin 2A$;

(7) $1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$;　(8) $3-4\sin^2\alpha$;

(9) $\sin^2\theta-\sin^2\varphi$;　(10) $\cos^2 x-\cos^2 y$.

4. 证明下列各恒等式:

(1) $\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}$;

(2) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$;

(3) $\frac{\sin x-\sin y}{\sin(x+y)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x+y)}$;

(4) $\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{1+\cos 2(\alpha+\beta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$;

(5) $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sec 2\alpha$;

(6) $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ-A)+\cos^2(60^\circ+A)=\frac{3}{2}$;

(7) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{11\alpha}{2}=\sin 2\alpha\sin 5\alpha$;

(8) $(\cos x+\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=\cos x+\sin 3x$.

5. 求下列各式的值:

(1) $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$;

(2) $\dfrac{\cos 80^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ+\sin 20^\circ}$;

(3) $\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ$;

(4) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ+\cos 80^\circ\cos 160^\circ+\cos 160^\circ\cos 40^\circ$;

(5) $\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

(2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$;

(3) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$;

(4) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$.

7. 将下列各式化为一个角的一个三角函数的形式：

(1) $3\cos\alpha-4\sin\alpha$;　(2) $5\sin\varphi+12\cos\varphi$;

(3) $4\sin t+3\cos t$;　(4) $7\sin 2t-6\cos 2t$.

8. 求下列各式的最大值和最小值：

(1) $\sin x\cos x$;　(2) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2\theta\right)$;　(4) $6\cos\theta+8\sin\theta$.

小　结

一、本章内容包括两角和与差的三角函数的公式，倍角、半角的三角函数的公式，以及三角函数的积化和差与和差化积公式。这些公式主要用于三角函数式的计算和推导。它们

在高等数学、电工学、力学、机械设计与制造等方面都有广泛的应用，要熟练地掌握．主要公式如下．

两角和与差公式：$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$；

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

积化和差公式：

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta$$
$$=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

和差化积公式： $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

此外，还有万能公式：

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

二、上述公式是以两角和的余弦公式为基础推导得出，这些公式的内在联系和推导的线索如下表(见213页).

掌握表中公式的内在联系及其推导的线索，能够帮助我们理解和记忆这些公式，这是学好本章内容的关键.

三、应注意的几个问题：

(1) 凡使公式中某个式子没有意义的角，都不适合公式；

(2) 在半角公式$\left(S_{\frac{\alpha}{2}},\ C_{\frac{\alpha}{2}},\ T_{\frac{\alpha}{2}}\right)$中，根号前的符号由半角所在的象限来决定；

$S_{\alpha+\beta}$　$C_{\alpha+\beta}$ $\longrightarrow$ $T_{\alpha+\beta}$

$\downarrow$

$S_{\alpha-\beta}$　$C_{\alpha-\beta}$ $\longrightarrow$ $T_{\alpha-\beta}$

$\longrightarrow$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$\downarrow$

$S_{2\alpha}$　$C_{2\alpha}$ $\longrightarrow$ 万能公式

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$\downarrow$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$S_{\frac{\alpha}{2}}$　$C_{\frac{\alpha}{2}}$ $\longrightarrow$ $T_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(3) 把 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 化成$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$时，其中辅助角$\varphi$在哪个象限，由 a,b 的符号确定，φ 的值由 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ 确定。

复习参考题三

A 组

1. 以 α 角的顶点 O 作原点，始边作 x 轴的正半轴，建立直角坐标系．在终边上截取 $OP=1$，写出点 P 的坐标．

2. 在直角坐标系中，两点 A, B 的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，写出 A, B 间的距离公式．

3. 写出同角三角函数的基本关系式——倒数关系、商数关系、平方关系．

4. 写出 $2k\pi+\alpha(k\in Z)$，$-\alpha, \pi-\alpha, \pi+\alpha$，$2\pi-\alpha$ 的诱导公式，并用一句话加以概括．

5. 写出函数 $y=\sin\alpha$ 和 $y=\cos\alpha$ 的定义域和值域，说出它们在什么时候取得最大值和最小值，并研究它们的单调性、奇偶性和周期性．

6. 已知 $\cos\alpha=-\frac{9}{41}$，$\alpha\in\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$．

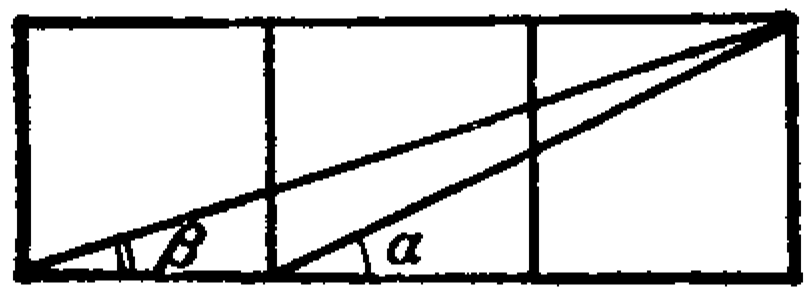
7. 如果 α，β 都是锐角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，求证 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$．

8. (1) 已知 $A+B=\frac{\pi}{4}$，求证 $(1+\operatorname{tg}A)(1+\operatorname{tg}B)=2$；

   (2) 如果 A, B 都是锐角，且 $(1+\operatorname{tg}A)(1+\operatorname{tg}B)=2$，

   求证 $A+B=\frac{\pi}{4}$．

9. 如图，三个相同的正方形相接，求证 $\alpha+\beta=45°$．



（第 9 题）

10. 如果 α, β, γ 都是锐角，并且它们的正切依次为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{8}$，求证 $\alpha+\beta+\gamma=45°$.

11. 写出 $\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha, \frac{3\pi}{2}+\alpha$ 的诱导公式，并用一句话加以概括.

12. 已知 $\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值.

13. 已知 $\operatorname{tg} x=\frac{7}{24}$，求 $\cos 2x$, $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的值.

14. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，求 $\sin 2\theta$ 的值.

15. 已知 $\sin\varphi\cos\varphi=\frac{60}{169}$，且$\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，求 $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ 的值.

16. 在等腰三角形 ABC 中，腰为底的 2 倍，求顶角 A 的三角函数的值.

17. 化下列各式为和差的形式：

(1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$;

(2) $\sin(n-1)x\cos(n+1)x$;

(3) $\cos(m-1)x\cos(m-3)x$;

(4) $\dfrac{2\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}$.

18. 化下列各式为积的形式:

(1) $1+\sin 2x-\cos 2x$;

(2) $1+\cos\theta+\cos\dfrac{\theta}{2}$;

(3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$;

(4) $1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$.

19. 化简:

(1) $\cos 52^\circ 30'\cos 7^\circ 30'$;

(2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

(3) $\mathrm{tg}\,67^\circ 30'-\mathrm{tg}\,22^\circ 30'$;

(4) $\cos 20^\circ-\sin 10^\circ-\sin 50^\circ$;

(5) $\sin(x+60^\circ)+2\sin(x-60^\circ)-\sqrt{3}\cos(120^\circ-x)$;

(6) $\cos\alpha\cdot\csc\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}\left(\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi\right)$.

20. 证明下列各式:

(1) $\mathrm{tg}\,20^\circ+\mathrm{tg}\,40^\circ+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,20^\circ\,\mathrm{tg}\,40^\circ=\sqrt{3}$;

(2) $\sin x\left(1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right)=\mathrm{tg}\,x$;

(3) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$;

(4) $2\sin\alpha+\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin^3\alpha}{1-\cos\alpha}$;

(5) $\sec\theta=\sqrt{\dfrac{\sec^4\theta-\mathrm{tg}^4\theta}{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(6) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\sec 2\alpha$;

(7) $\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

(8) $\dfrac{3-4\cos 2A+\cos 4A}{3+4\cos 2A+\cos 4A}=\operatorname{tg}^4 A$;

(9) $\dfrac{1+\cos A+\cos 2A+\cos 3A}{2\cos^2 A+\cos A-1}=2\cos A$;

(10) $\operatorname{tg}3\theta-\operatorname{tg}2\theta-\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}3\theta\operatorname{tg}2\theta\operatorname{tg}\theta$.

21. 求下列函数的最大值与最小值:

(1) $y=\sin 3x\cos 3x$;　　(2) $y=\sin(x-30°)\cos x$;

(3) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$;　(4) $y=\sin x+\cos x$;

(5) $y=a\sin x+b$.

22. 在$\triangle ABC$中,求证:

(1) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$;

(2) $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$.

23. 在$\triangle ABC$中,求证:

(1) $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$;

(2) $(a^2-b^2-c^2)\operatorname{tg}A+(a^2-b^2+c^2)\operatorname{tg}B=0$.

24. 在$\triangle ABC$中,如果 $2\cos B\cdot\sin C=\sin A$, 那么$\triangle ABC$为等腰三角形.

25. $\triangle ABC$的三个内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c, 如果 $a^2=b(b+c)$, 求证 $A=2B$.

26. 发电厂发出的电是三相交流电,它的三根导线上的电流强度分别是时间 t 的函数:

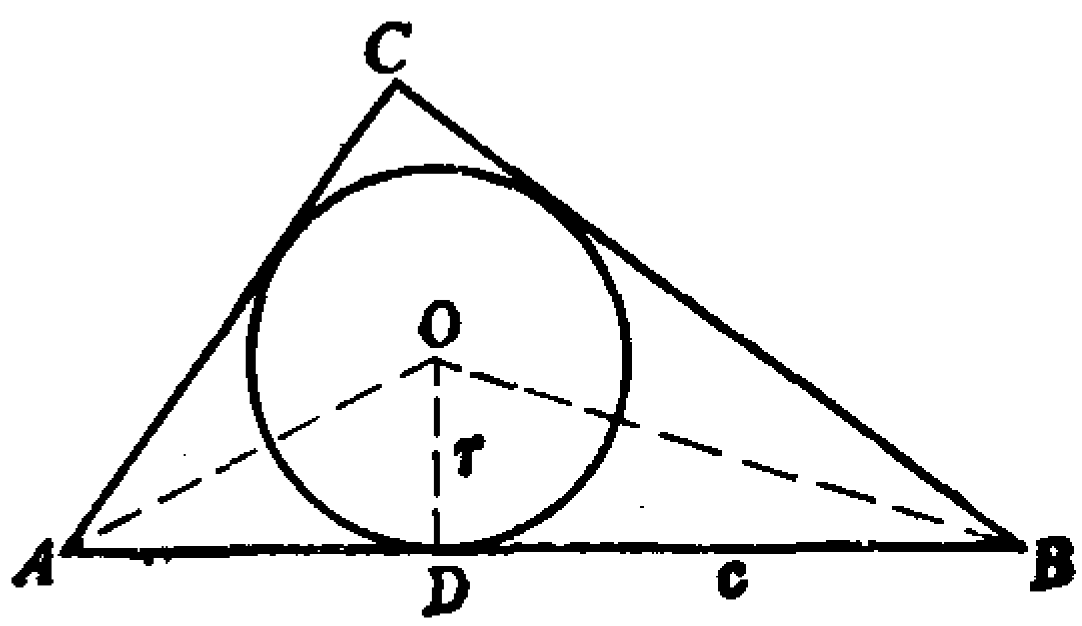
$I_A=I\sin\omega t,\ I_B=I\sin(\omega t+120°),$

$I_C=I\sin(\omega t+240°).$

求证：$I_A+I_B+I_C=0.$

27. 已知电流 $i=I_m\sin\omega t$，电压 $v=V_m\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$，求证电功率 $p=iv=\frac{1}{2}V_mI_m\sin 2\omega t.$

28. 如图，在直角三角形 ABC 中，c 是斜边，r是内切圆半径，



(第 28 题)

求证：

(1) $r=\dfrac{c}{\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\left(45°-\dfrac{A}{2}\right)}$;

(2) $r\leqslant\frac{c}{2}(\sqrt{2}-1)$.

B 组

29. 证明下列各恒等式：

(1) $\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\sec 2\theta-\operatorname{tg}2\theta$;

(2) $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=4\cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

(3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2};$$

(4) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

30. 把下列各式化成积的形式:

(1) $\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}$($\alpha$ 在第四象限);

(2) $\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}\left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$.

31. 设 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$, 用含 t 的有理式表示下列各函数:

(1) $\dfrac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$;

(2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

32. 设 $\sin\alpha$, $\sin\beta$ 是方程

$$x^2-(\sqrt{2}\cos20^\circ)x+\left(\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}\right)=0$$

的两根, 求 α, β $(0^\circ<\alpha<90^\circ, 0^\circ<\beta<90^\circ)$.

33. 如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根分别是 $\operatorname{tg}\varphi$ 与 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$, 而且两根的比是 $\frac{3}{2}$, 求 p, q 的值。

34. 已知三角形的最小内角为 30°, 它的对边的长为 2cm, 另外两个内角的差为60°, 求最大边的长(要准确值)。

35. 设 A, B, C 是一三角形的三个内角, 且

$$\lg\sin A-\lg\cos B-\lg\sin C=\lg 2,$$

求证这个三角形是等腰三角形。

36. 在$\triangle ABC$中，

$$\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B},$$

求证这个三角形是直角三角形。

37. 设R是$\triangle ABC$的外接圆半径，求证：

$$a+b+c=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

38. 已知正n边形的边长为a，内切圆半径为r，外接圆半径为R，求证：

$$R+r=\frac{1}{2}a\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

39. 半径分别为R, $r(R>r)$的两圆相外切，它们的两条外公切线的夹角为θ，求证：

$$\sin\theta=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$

40. 求证：

(1) $$\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}};$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

附录I 近似计算的法则

在度量的时候，一般只能得到一个近似数．例如，用皮尺量教室一边的长，量得 6.8 米，实际上这边的长可能比 6.8 米略长一些或者略短一些．假定教室一边的长是 6.82 米，6.82 米就是教室一边长的准确数．这样，由皮尺量得教室一边的长(近似数)，就比教室一边实际长(准确数)少 0.02 米．

一个近似数和它的准确数的差，叫做这个近似数的**误差**．

在计算的时候，我们已经知道可以把一个数进行四舍五入得到一个近似数．由四舍五入得到的一个近似数，它的误差的绝对值不超过这个近似数最末一位的单位的一半．

如果一个近似数的误差的绝对值不超过某一位的单位的一半，从左边第一个不是零的数字起，到这位数字止，所有的数字都叫做这个近似数的**有效数字**．如近似数 56.08 有四个有效数字 5、6、0、8，近似数 0.0085 有两个有效数字 8、5，近似数 0.0390 有三个有效数字 3、9、0．

在实际应用中，实数的运算往往取其近似数来进行．近似计算一般采用下面的法则．

法则 1．近似数相加减，所得结果的位数，通常只保留到各个已知数都有的最后一位为止．已知数中过多的位数，可以先四舍五入到这一位的下一位，再进行计算．

例 1 (1) 作近似数的加减计算：

$$7.35-2.478-0.03419+18.6;$$

(2) 计算: $32+14\frac{2}{7}+\sqrt{1880}$(精确到十分位).

解: (1) 因为 18.6 只精确到十分位，所以结果只要保留到十分位. 可以先把数位过多的各数分别四舍五入到百分位后计算，得出的中间结果也都保留到百分位. 因此，

$$\begin{aligned}&7.35-2.478-0.03419+18.6\\\approx&7.35-2.48-0.03+18.6\\=&23.44\approx 23.4.\end{aligned}$$

(2) 题中各数都是准确数，它们可以精确到任意数位，因为结果只要求精确到十分位，所以在计算时，$14\frac{2}{7}$和$\sqrt{1880}$只要分别取精确到百分位的近似值 14.29 和 43.36 就可以了. 因此，

$$\begin{aligned}32+14\frac{2}{7}+\sqrt{1880}&\approx 32+14.29+43.36\\&=89.65\approx 89.7.\end{aligned}$$

法则 2. 近似数相乘除，所得结果的有效数字的个数，通常只保留到与已知数中有效数字个数最少的一个相同. 已知数中过多的有效数字，可以先四舍五入到比结果应保留的有效数字的个数多一个，再进行计算.

例 2 (1) 求近似数 24.78 与 0.32 的积;

(2) 求近似数 7.9 除以近似数 24.78 的商;

(3) 作近似数的乘除计算: $\frac{80.43\times 1.05}{24\times 7.146}$.

解:

(1)
$$\begin{array}{r} 24.8 \\ \times)\,0.32 \\ \hline 496 \\ 744 \\ \hline 7.936 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rl} & 0.318 \\ 248) & 79 \\ & 744 \\ \hline & 460 \\ & 248 \\ \hline & 2120 \end{array}$$

$\therefore\quad 24.78\times0.32\approx7.9.\qquad\therefore\quad 7.9\div24.78\approx0.32.$

(3) 因为 24 只有两个有效数字，所以结果只要保留两个有效数字. 可以先把有效数字过多的各数分别四舍五入到有三个有效数字后计算，得出的中间结果也都保留三个有效数字. 因此，

$$\frac{80.43\times1.05}{24\times7.146}\approx\frac{80.4\times1.05}{24\times7.15}\approx\frac{84.4}{172}\approx0.49.$$

法则 3. 近似数平方或开平方，所得结果的有效数字的个数，通常只保留到与底数或被开方数的有效数字的个数相同.

例 3 作近似数计算：(1) 12.8^2； (2) $\sqrt{0.049}$.

解: (1) $12.8^2=12.8\times12.8\approx164.$

(2) $\sqrt{0.049}\approx0.22.$

法则 4. 近似数的混合计算，仍按照运算顺序进行计算，计算过程中得出的中间结果，一般要比按照法则 1、2、3 进行近似计算应保留的数字多一位.

例 4 作近似数的计算：

$$3.28\times2.15+4.8409\times2.7.$$

解: $3.28\times2.15+4.8409\times2.7$

$\approx3.28\times2.15+4.84\times2.7$

$$\approx 7.052+13.1\approx 7.1+13.1\approx 20.$$

注意：1. 在进行计算时，首先要看题中所给的数是近似数还是准确数. 近似数用近似计算法则进行计算，准确数则用一般方法进行计算.

2. 上述法则中所说的近似计算保留数位的方法，只是在一般情况下通常采用的方法，在实际问题中，也可以根据具体情况，比上述法则所说的多保留或少保留一位数字.

我们知道，在近似计算的计算过程中，由于保留数位的不同或者计算次序的不同，虽然计算都正确，得数也可能稍有不同，但都应看做是正确的.

3. 有些习题，如果近似计算所涉及的近似数的数字都是很简单的，或者两数相除能除尽的，开方能开尽的，并且所得结果的位数和用近似计算所得的位数相差不大时，可以不必用近似计算方法. 此外，有些问题的答案，如果用分数或根式来表示比较方便时，也可用分数或根式来表示，不必采用近似计算方法.

练　习

1. 计算下列近似数的加、减法：

(1) $28.5+2.974+0.06429+5.73$;

(2) $140.0-8.3025$;

(3) $235.0-14.012-86.1254+43.007$;

(4) $2+\sqrt{2}+3\frac{1}{6}+\sqrt{5}$（精确到百分位）.

2. 计算下列近似数的乘、除法：

(1) 12.7×56.9;

(2) 0.078×3.14159265;

(3) $7.84\div 2.46705$;

(4) $\dfrac{1.85\times 64.72\times 4.0}{17.9\times 284.3}$.

3. 计算下列近似数的平方和平方根：

(1) 4.87^2;　　(2) $\sqrt{0.00565}$.

4. 计算下列近似数的混合运算：

(1) $3.5\times 51.2+8.25\times 12.7$;

(2) $8.64\div 0.98-33.2\times 0.57$;

(3) $4.58^2-\sqrt{165}+6.72$;

(4) $(16.7+32-18.64+5.976)\div 0.36$.

附录Ⅱ 换底公式

利用常用对数表，可以求得任意一个正数的以 10 为底的对数. 现在我们来说明以其他正数 $a(a\neq1)$ 为底的对数的求法，例如，求 $\log_3 5$.

设 $\log_3 5=x$，写成指数式，得

$$3^x=5.$$

两边取常用对数，得

$$x\lg 3=\lg 5,$$

$$\therefore \qquad x=\frac{\lg 5}{\lg 3}=\frac{0.6990}{0.4771}=1.465,$$

就是

$$\log_3 5=1.465.$$

一般地，我们有下面的换底公式：

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

证明：设 $\log_b N=x$，写成指数式，得

$$b^x=N.$$

两边取以 a 为底的对数，得

$$x\log_a b=\log_a N.$$

$$\therefore \qquad x=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

所以

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

在科学技术中常常使用以无理数 $e=2.71828\cdots$ 为底的对数，以 e 为底的对数叫做**自然对数**，$\log_e N$ 通常记作 $\ln N$. 根据对数换底公式，可以得到自然对数与常用对数之间的关系：

$$\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}=\frac{\lg N}{0.4343},$$

就是

$$\ln N=2.303\lg N.$$

例 1 求 $\log_8 9\cdot\log_{27}32$ 的值.

解： $\log_8 9\cdot\log_{27}32=\frac{\lg 9}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 32}{\lg 27}=\frac{2}{3}\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{5}{3}\frac{\lg 2}{\lg 3}$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}=1\frac{1}{9}.$$

例 2 求证 $\log_x y\cdot\log_y z=\log_x z$.

证明： 把 $\log_y z$ 化成以 x 为底的对数，则

$$\log_x y\cdot\log_y z$$

$$=\log_x y\cdot\frac{\log_x z}{\log_x y}=\log_x z.$$

练　习

1. 利用常用对数表，求下列各对数的值：

(1) $\log_2 1000$;　　(2) $\log_5 0.5$;

(3) $\log_3 10$;　　(4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$.

2. 利用常用对数表计算：

(1) $\ln\pi$; (2) $\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(3) 已知 $\ln x=2.174$, 求 x;

(4) 已知 $\ln x=-0.7103$, 求 x.

3. 求下列各式的值:

(1) $\ln e^2$; (2) $e^{\ln x}$.

4. 不查表计算下列各题:

(1) $(\lg 5)^2+\lg 2\cdot\lg 50$;

(2) 已知 $\lg 2=0.3010$, $\lg 7=0.8451$, 求 $\lg 35$;

(3) $\log_2\frac{1}{25}\cdot\log_3\frac{1}{8}\cdot\log_5\frac{1}{9}$.

5. 利用换底公式证明:

(1) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$;

(2) $(\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c a)=1$.