高级中学课本

（试　　用）

代　　数

（甲种本）

第 二 册

人民教育出版社数学室编

*

人 民 教 育 出 版 社 出版

北 京 出 版 社 重 印

北京市新华书店发行

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

开本787×1092　1/32　印张7.5　字数150 000

1984年9月第1版　1989年6月第5次印刷

ISBN 7-107-00313-5/G·516(课)　定价 0.68元

说　　明

一、本书供六年制中学高中二年级选用，每周授课3课时。

二、本书内容包括：反三角函数和简单三角方程，数列与数学归纳法，不等式，行列式和线性方程组，复数。另外有些小节的节号前标有“*”号，这些小节的内容仅供选学（共需16课时左右）。

三、本书的习题共分三类：练习，习题，复习参考题。

1. 练习　主要供课堂练习用。

2. 习题　主要供课内外作业用。

3. 复习参考题　在每章之后配备A，B两组复习参考题。A组题主要供复习本章知识时使用；B组题综合性、灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用。

为了因材施教，使教学更有针对性和灵活性，本书配备的习题和复习参考题A组数量较多，便于教学时根据实际情况选用。

四、本书在编写过程中，曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本（试用本）《数学》第一、三、四册的有关章节，大部分内容是以原来章节为基础编写的。初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校和中学教师征求意见，有的省、市还进行了试教，他们都提出了宝贵的意见。

五、本书由人民教育出版社数学室编写。参加编写工作的有蔡上鹤、李琳、饶汉昌、贾云山、曾宪源、陶振宗。全书由吕学礼校订。

目　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

一　反三角函数

1.1　反正弦函数

我们已经学习了正弦函数 $y=\sin x$ 和它的图象(图 1-1). 从图象可以看到，对于 x 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上的每一个值，y 都在 $[-1, 1]$ 上有唯一的值和它对应. 例如，对于 $x=\frac{\pi}{6}$，有 $y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 和它对应. 反过来，对于 y 在 $[-1, 1]$ 上的每一个值，x 有无穷多个值和它对应. 例如，对于 $y=\frac{1}{2}$，x 有 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，…等无穷多个值和它对应. 由此可见，确定函数 $y=\sin x$ 的映射不是定义域 $(-\infty, +\infty)$ 到值域 $[-1, 1]$ 上的一一映射. 函数 $y=\sin x(x\in(-\infty, +\infty))$ 没有反函数.

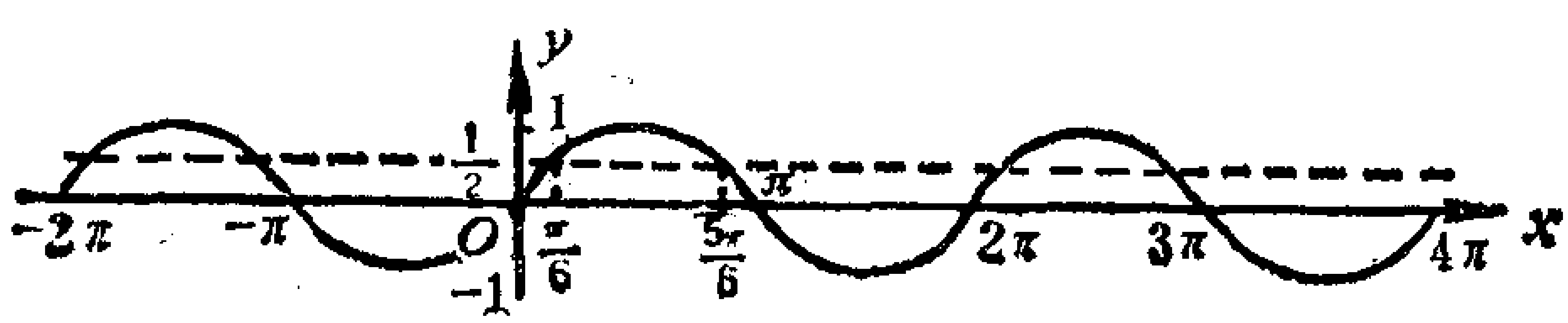


图 1-1

但由图 1-2 可以看到，在正弦函数的单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

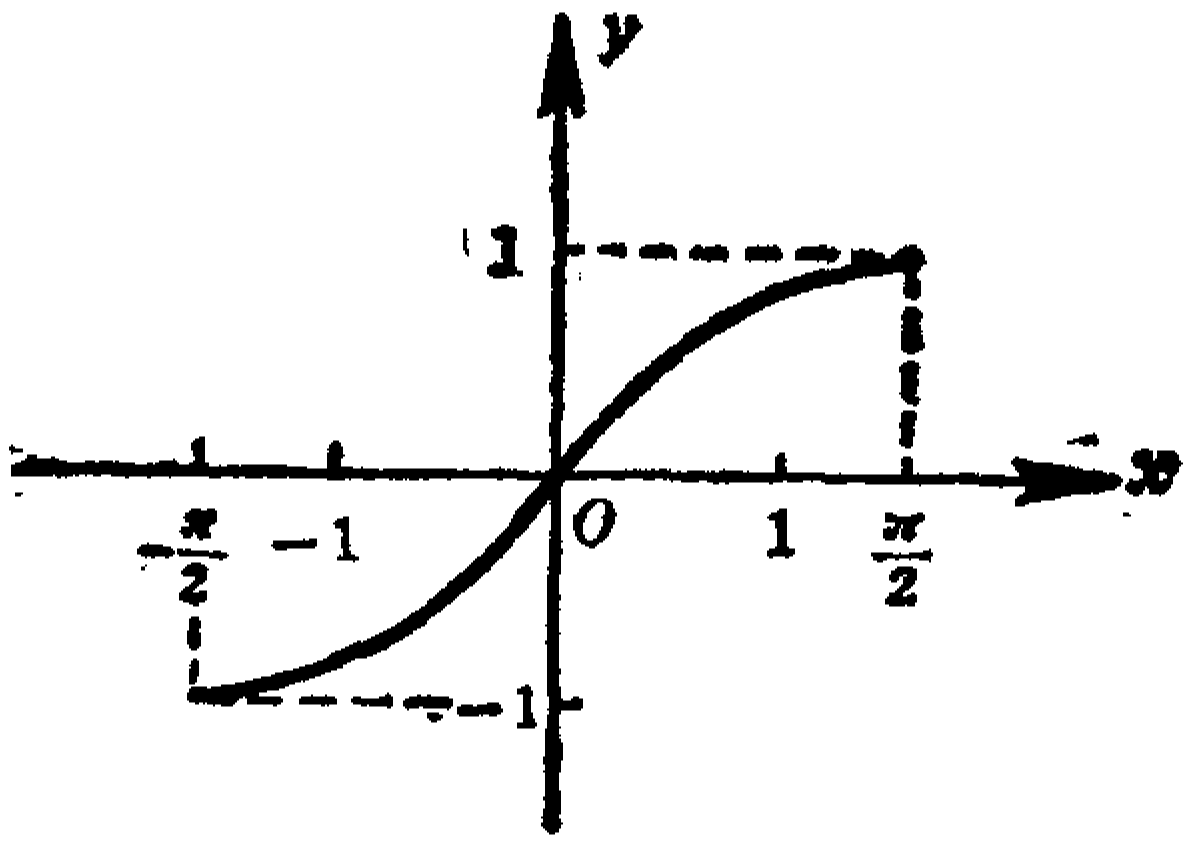


图 1-2

上，对于 x 的每一个值，$y=\sin x$ 有唯一的值和 x 对应；而对于 x 的不同的值，$y=\sin x$ 有不同的值和 x 对应，并且随着 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$，$y=\sin x$ 由 -1 增大到 $+1$，取得 $[-1,1]$ 上的一切值．因此，确定函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的映射是区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 到 $[-1,1]$ 上的一一映射．所以这个映射有逆映射，函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 有反函数．

函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数叫做**反正弦函数**，记作 $x=\arcsin y$．

习惯上用字母 x 表示自变量，用 y 表示函数，所以反正弦函数可以写成 $y=\arcsin x$，❶它的定义域是 $[-1,1]$，它的值

---

❶ 有的书上把反正弦函数写作 $y=\sin^{-1}x$．同样，后面讲到的反余弦函数、反正切函数、反余切函数也可写作 $\cos^{-1}x$, $\mathrm{tg}^{-1}x$, $\mathrm{ctg}^{-1}x$．

域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

这样，对于属于$[-1,1]$的每一个x值，$\arcsin x$就表示属于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的唯一确定的一个值，它的正弦正好等于已知的$x$. 也可以说，$\arcsin x$表示属于$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的唯一确定的一个角（弧度数），这个角的正弦恰好等于x. 例如，对于$x=\frac{1}{2}$，$y=\arcsin\frac{1}{2}$就表示$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上使$\sin y=\frac{1}{2}$的唯一确定的一个角，这个角是$\frac{\pi}{6}$，因为根据正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性可以知道，在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，除了$\frac{\pi}{6}$以外，其他任何角的正弦都不等于$\frac{1}{2}$.

由此可以得到

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

一般地，根据反正弦函数的定义，可以得到

$$\boldsymbol{\sin(\arcsin x)=x,}$$

其中 $\boldsymbol{x\in[-1,1]}$，$\boldsymbol{\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$.

下面我们来研究反正弦函数的图象和性质.

根据互为反函数的图象的性质，容易知道，反正弦函数$y=\arcsin x$的图象就是与正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的一段图象关于直线$y=x$对称的图形(图 1-3).

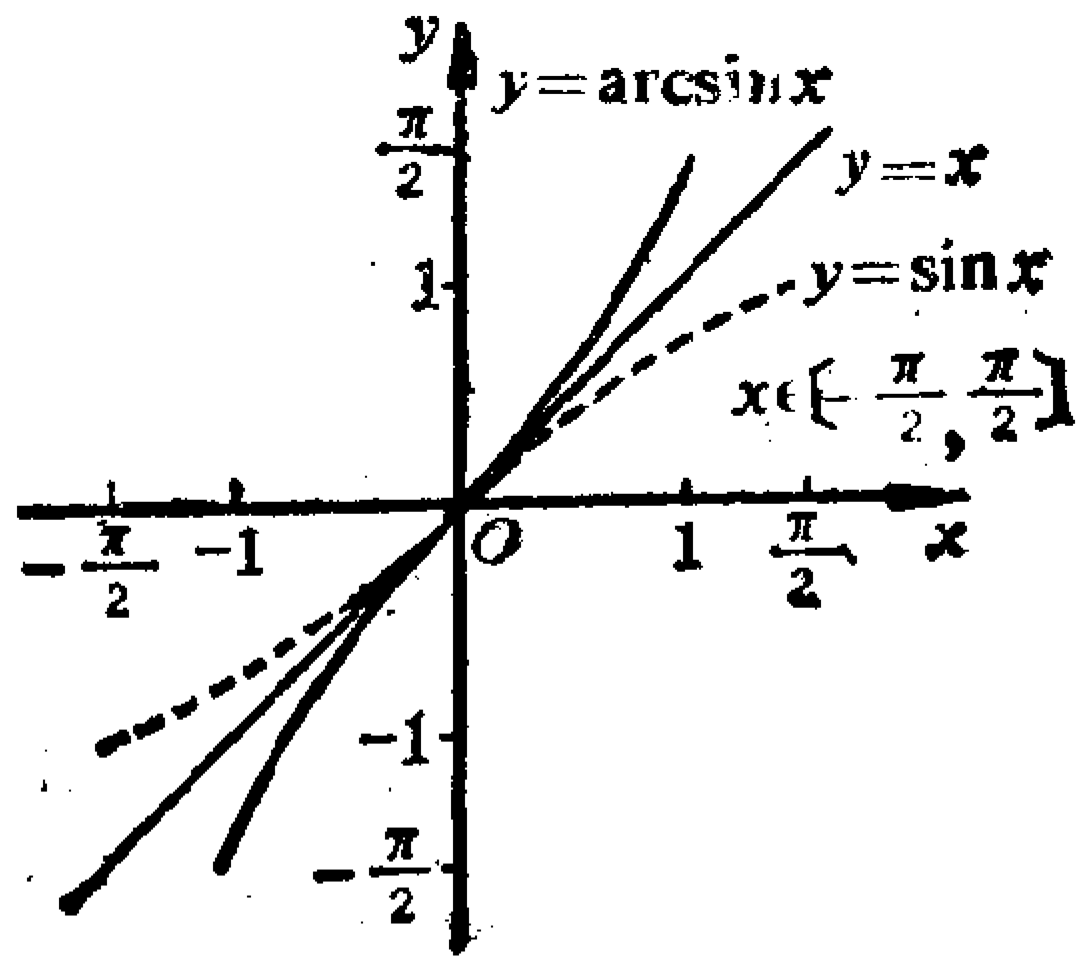


图 1-3

从图象上可以看出，反正弦函数 $y=\arcsin x$ 有以下性质：

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(2) 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的图象关于原点对称，这说明它是奇函数. 也就是

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\ x\in[-1,1].$$

例 1 求下列反正弦函数值：

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　(2) $\arcsin 0.2672$;

(3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;　　(4) $\arcsin(-1)$.

解：(1)因为在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

注意：虽然 $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，但是，$\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\frac{3\pi}{4}$。同理，$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$也不等于其他值$\left(\text{如}\frac{9\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}\text{等}\right)$，只能等于$\frac{\pi}{4}$.

（2）查正弦函数表，得$\sin 15°30'=0.2672$. 又因为$15°30'$的弧度数属于$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，所以

$$\arcsin 0.2672=15°30'.$$

（3）因为在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

（4）因为在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，所以

$$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

例 2 求下列各式的值：

（1）$\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$； （2）$\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

解：（1）$\because\quad x=\frac{2}{3}\in[-1, 1]$，

$\therefore$
$$\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

（2）$\because\quad x=-\frac{1}{2}\in[-1, 1]$，

$\therefore$
$$\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

例 3 求下列各式的值：

(1) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (2) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

(3) $\cos(\arcsin x), x\in[-1, 1]$; (4) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

解: (1) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

(2) 设 $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$, 则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

由 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 得 $\cos\alpha\geqslant 0$, 可知

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5},$$

∴ $$\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}.$$

(3) 设 $\arcsin x=\alpha$, 则 $\sin\alpha=x$, 且 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$,

∴ $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

或: 由 $x\in[-1, 1]$, 得 $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 可知

$$\cos(\arcsin x)\geqslant 0,$$

∴ $$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}=\sqrt{1-x^2}.$$

(4) 利用倍角公式及本例题第(3)题的结果, 可知

$$\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$$
$$=2\times\frac{3}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}.$$

例 4 求下列各式的值:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$; (2) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

解: (1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

由例 4 第(2)题可以看出, 虽然 $\sin(\arcsin x)=x$, 其中 $x\in[-1,1]$, 但是 $\arcsin(\sin x)$不一定等于 x, 而是等于在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上与 x 有相同正弦的一个值.

练 习

1. 用反正弦的形式把下列各式中的 $x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$表示出来:

   (1) $\sin x=\frac{2}{5}$; (2) $\sin x=-\frac{1}{3}$;

   (3) $\sin x=0.3147$; (4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. (1) $\arcsin\sqrt{2}$ 有意义吗, 为什么?

   (2) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}$是否成立, 为什么?

3. 写出下列函数的定义域、值域:

   (1) $y=\arcsin 2x$; (2) $y=\frac{1}{2}\arcsin x$;

(3) $y=3\arcsin\frac{2}{3}x$;　　(4) $y=2\arcsin(1-x)$.

4. 求下列反正弦函数值:

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(3) $\arcsin 0.6959$;　　(4) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

5. 求下列各式的值:

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$;　　(2) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$.

6. 求下列各式的值:

(1) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;　　(2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

(3) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$, $x\in(-1, 1)$;

(4) $\cos\left(2\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

7. 求下列各式的值:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

(2) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

1.2 反余弦函数

从余弦函数的图象（图 1-4）同样可以看到，余弦函数 $y=\cos x$ （$x\in(-\infty, +\infty)$）不存在反函数. 但在单调区间 $[0, \pi]$ 上，对于不同的 x 值，y 有不同的值和它对应，并且随着 x 由 0 增大到 π，y 由 1 减小到 -1，取得值域 $[-1, 1]$ 上

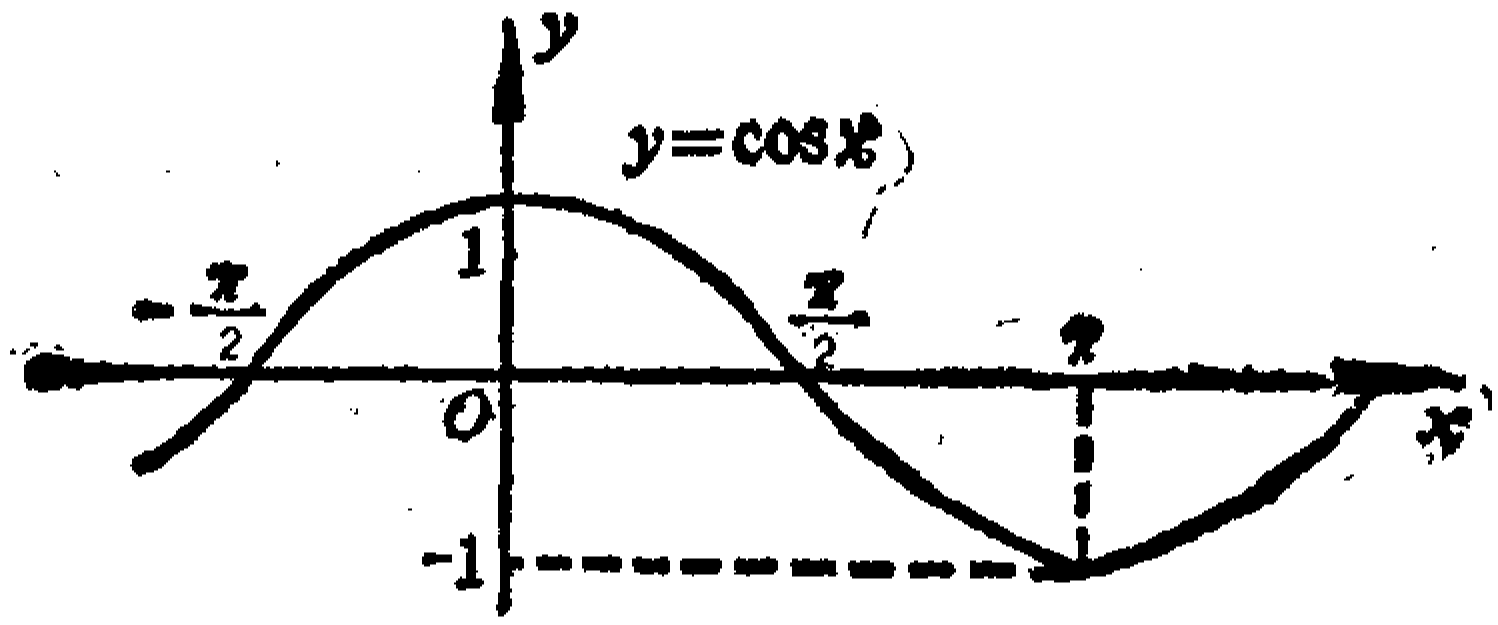


图 1-4

的一切值．因此，函数 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 有反函数．

函数 $y=\cos x(x\in[0,\pi])$ 的反函数叫做**反余弦函数**，记作 $y=\arccos x$，它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$．

这样，对于属于 $[-1,1]$ 的每一个 x 值，$\arccos x$ 就表示属于 $[0,\pi]$ 的唯一确定的一个值，它的余弦正好等于已知的 x．也可以说，$\arccos x$ 表示属于 $[0,\pi]$ 的唯一确定的一个角(弧度数)，这个角的余弦恰好等于 x．例如，对于 $x=\frac{1}{2}$，$y=\arccos\frac{1}{2}$ 就表示 $[0,\pi]$ 上使 $\cos y=\frac{1}{2}$ 的唯一确定的一个角，这个角是 $\frac{\pi}{3}$，因为根据余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调性可以知道，在 $[0,\pi]$ 上，除了 $\frac{\pi}{3}$ 外，其他任何角的余弦都不等于 $\frac{1}{2}$．

由此可以得到

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

一般地，根据反余弦函数的定义，可以得到

$$\cos(\arccos x)=x,$$

其中 $x\in[-1,1]$, $\arccos x\in[0,\pi]$.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的图象如图 1-5 所示，它是与余弦函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的一段图象关于直线 $y=x$ 对称的图形。

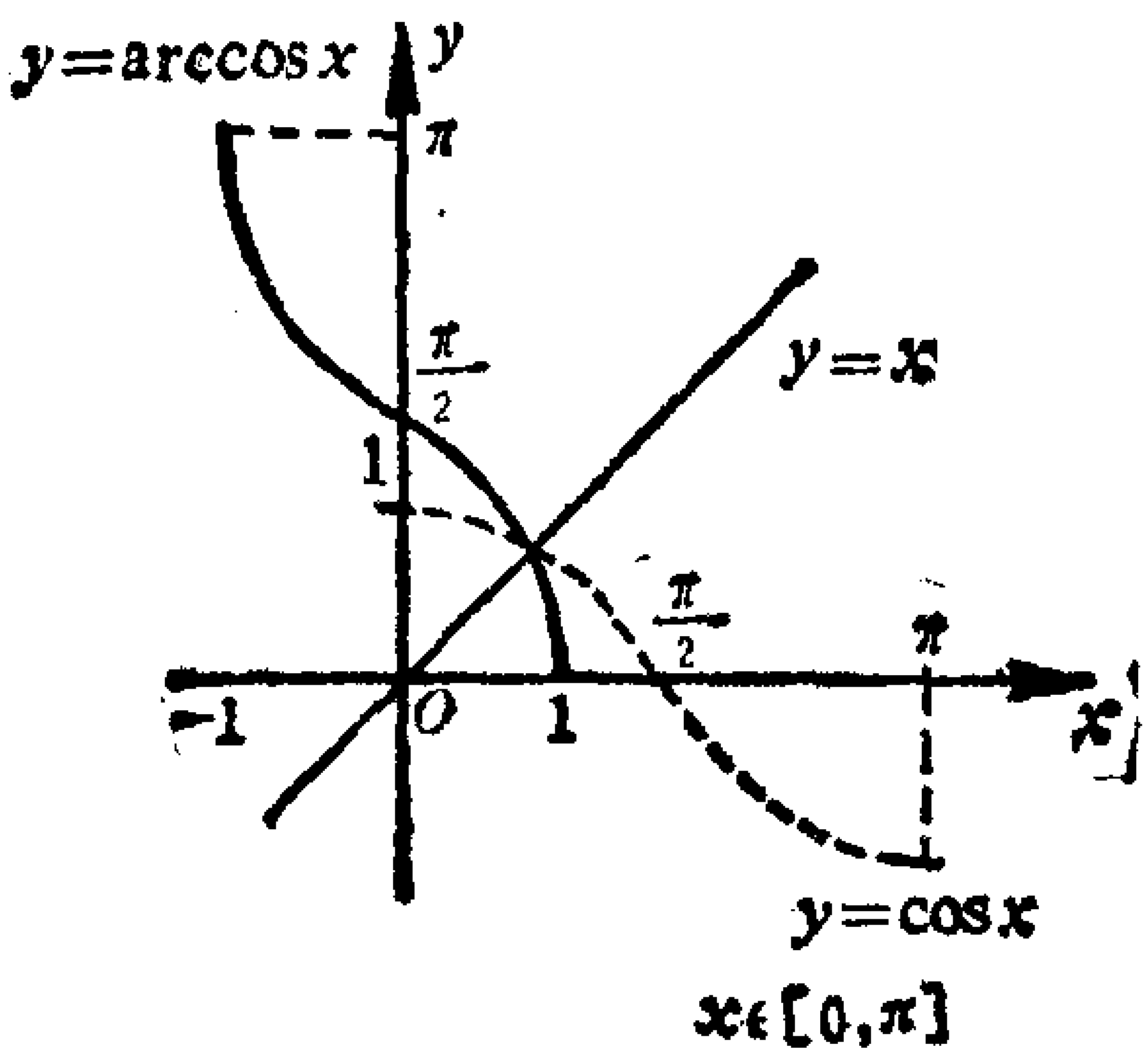


图 1-5

从图象上可以看出：**反余弦函数 $y=\arccos x$ 在区间$[-1,1]$上是减函数**。它既不是偶函数，也不是奇函数。

下面我们来证明：**对于任意 $x\in[-1,1]$，有**

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

证明： 由 $-1\leqslant x\leqslant 1$，得 $1\geqslant -x\geqslant -1$，即 $-x$ 属于反余弦函数的定义域$[-1,1]$.

根据诱导公式与反余弦函数的定义，得

$$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x,$$

因此，$\pi-\arccos x$ 是余弦等于 $-x$ 的一个值.

又因 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，所以 $0\geqslant-\arccos x\geqslant-\pi$，由此可得 $\pi\geqslant\pi-\arccos x\geqslant 0$，即 $\pi-\arccos x\in[0,\pi]$.

因此，$\pi-\arccos x$ 是属于$[0,\pi]$且它的余弦等于 $-x$ 的一个值．于是

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

例1 求下列各式的值:

(1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(3) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$;　　(4) $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{6}\right)$.

解: (1) 因为在$[0, \pi]$上, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

(2) 因为在$[0, \pi]$上, $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

或: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

(3) $\because$　　$-\frac{\sqrt{2}}{3}\in[-1, 1]$,

$\therefore$　　$\cos\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(4) $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{6}\right)=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$.

例2 求下列各式的值:

(1) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$;

(2) $\operatorname{tg}(\arccos x)$, $x\in[-1, 1]$, 且 $x\neq 0$;

(3) $\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$.

解： (1) 设$\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\alpha$，则$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

由$\alpha\in[0,\pi]$，得 $\sin\alpha\geqslant 0$，可知

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

$$\therefore\qquad \sin\left[\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=\frac{3}{5}.$$

(2) 由 $\arccos x\in[0,\pi]$，知 $\sin(\arccos x)\geqslant 0$.

$$\therefore\quad \operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-[\cos(\arccos x)]^2}}{\cos(\arccos x)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

(3) 设$\arccos\dfrac{4}{5}=\alpha$，则$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha$是第一象限的角，

$$\therefore\qquad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}.$$

又设$\arccos\left(-\dfrac{5}{13}\right)=\beta$，则$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，$\beta$ 是第二象限的角，

$$\therefore\qquad \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{12}{13}.$$

代入原式，得

$$\cos\left[\arccos\frac{4}{5}+\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$$

$$=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}.$$

练 习

1. 用反余弦的形式把下列各式中的$x(x\subset[0,\ \pi])$表示出来：

(1) $\cos x=\frac{2}{3}$；　　(2) $\cos x=-\frac{1}{5}$；

(3) $\cos x=0.8065$；　　(4) $\cos x=a\quad(a\in[-1,1])$.

2. (1) $\arccos 1.2$ 有意义吗，为什么？

(2) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$是否成立，为什么？

3. 写出下列函数的定义域、值域：

(1) $y=\arccos 3x$；　　(2) $y=-5\arccos x$；

(3) $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{4}$；　　(4) $y=3\arccos(2-3x)$.

4. 求下列反余弦函数值：

(1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\arccos 0$；

(3) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$；　　(4) $\arccos 0.0471$.

5. 求下列各式的值：

(1) $\cos(\arccos 0.8795)$；　　(2) $\arccos(\cos 0.8795)$；

(3) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$；　　(4) $\arccos\left[\cos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$.

6. 求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$；　　(2) $\cos\left(2\arccos\frac{4}{5}\right)$；

(3) $\sin\left[\frac{\pi}{3}+\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$；

(4) $\operatorname{ctg}(\arccos x), x\in(-1,1)$.

1.3 反正切函数与反余切函数

正切函数 $y=\operatorname{tg}x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数叫做**反正切函数**，记作 $y=\operatorname{arctg}x$，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$ $(x\in(0,\pi))$ 的反函数叫做**反余切函数**，记作 $y=\operatorname{arcctg}x$，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$.

由反正切函数与反余切函数的定义，我们得到：

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=x,$$

其中 $x\in(-\infty,+\infty)$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg}x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x)=x,$$

其中 $x\in(-\infty,+\infty)$, $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x\in(0,\pi)$.

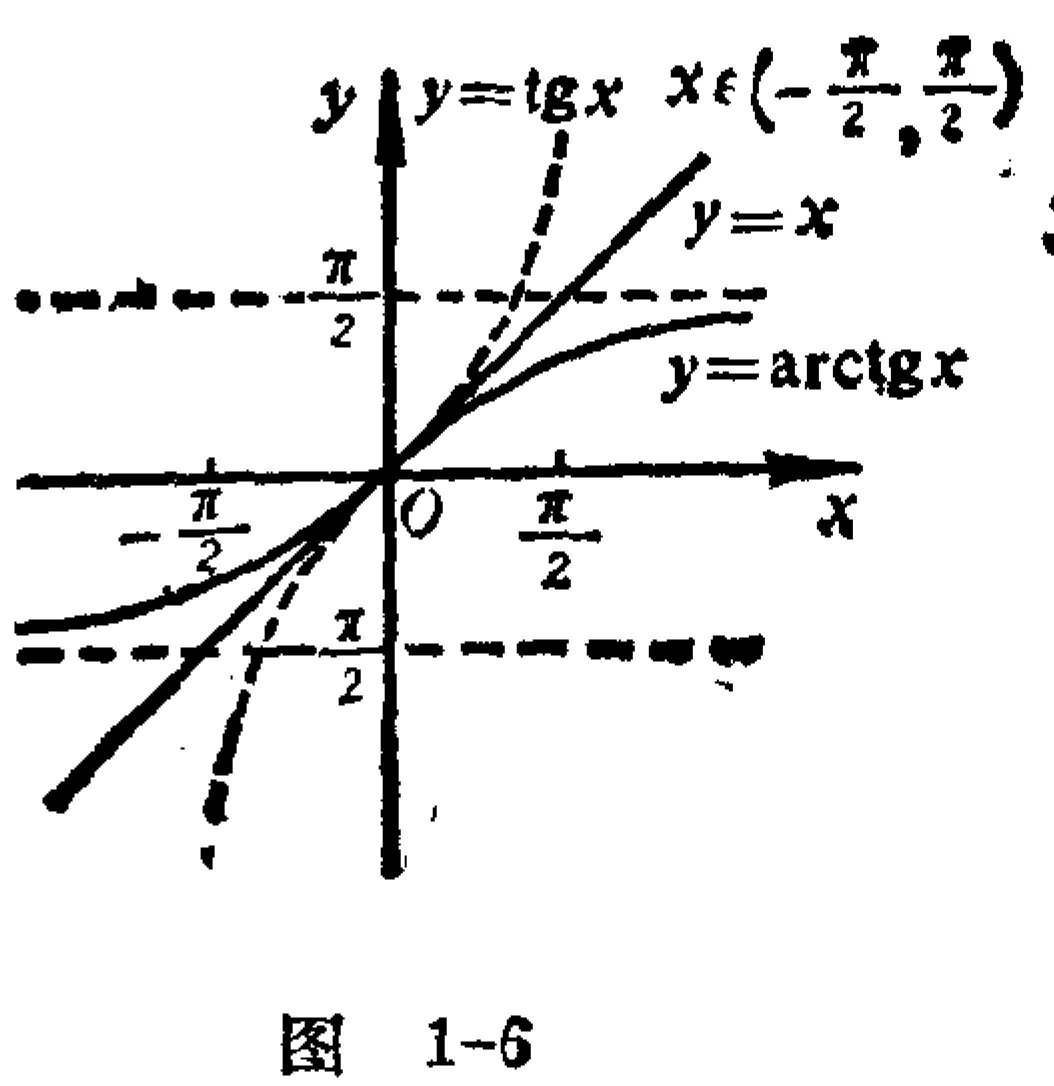


图 1-6

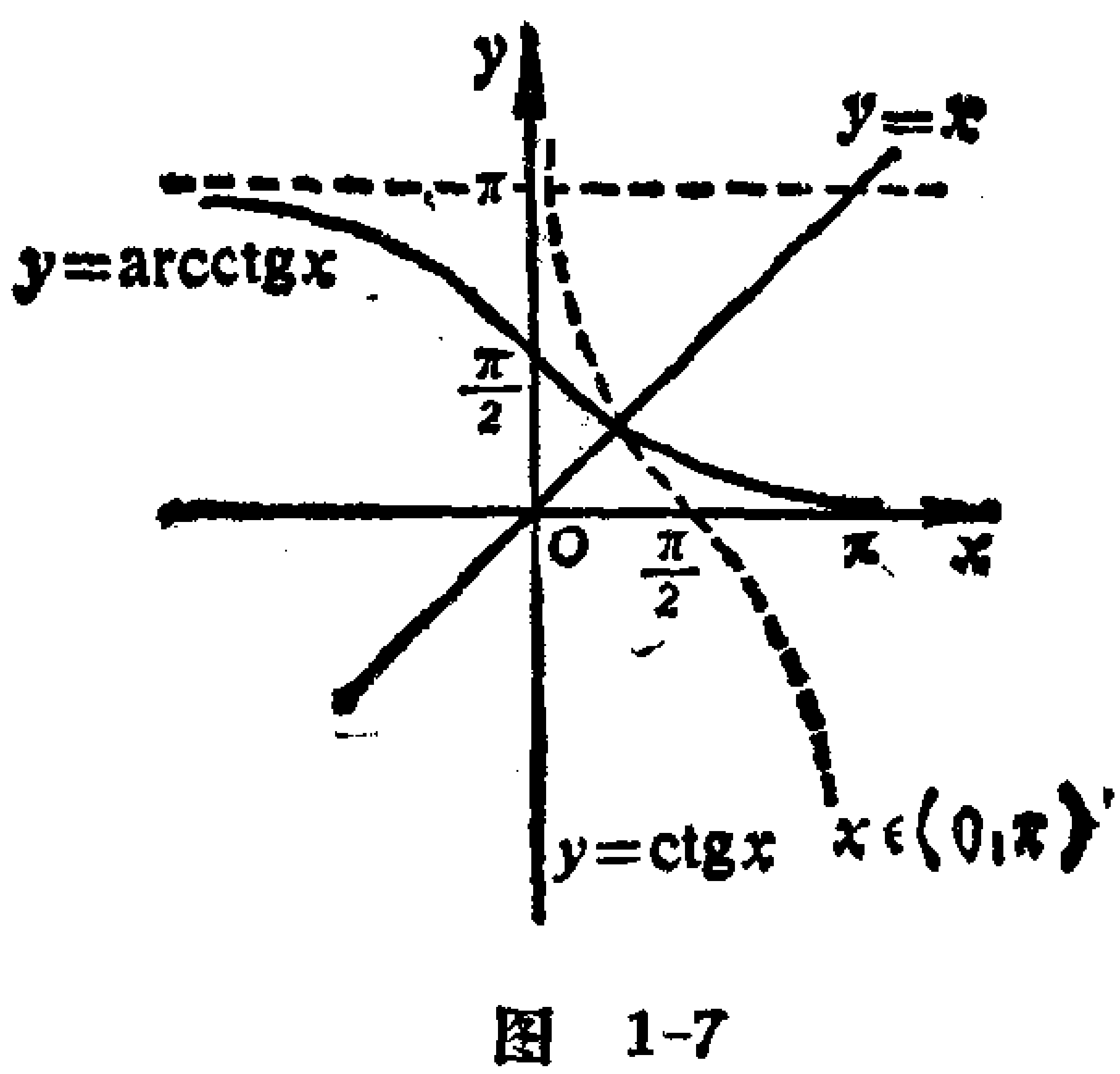


图 1-7

图 1-6 与图 1-7 分别是反正切函数与反余切函数的图象。

从图象上可以看出：

(1) 反正切函数 $y=\operatorname{arc\,tg}x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；反余切函数 $y=\operatorname{arc\,ctg}x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

(2) 反正切函数 $y=\operatorname{arc\,tg}x$ 是奇函数，即

$$\operatorname{arc\,tg}(-x)=-\operatorname{arc\,tg}x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) 反余切函数有下述关系：

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,ctg}x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

这个性质与反余弦函数是类似的.

反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数，都叫做反三角函数.[1]

例 1 求下列各式的值：

(1) $\operatorname{arc\,tg}0$； (2) $\operatorname{arc\,tg}(-2)$；

(3) $\operatorname{arc\,ctg}1$； (4) $\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})$.

解： (1) $\operatorname{arc\,tg}0=0$；

(2) $\operatorname{arc\,tg}(-2)=-\operatorname{arc\,tg}2=-63^\circ26'$；

(3) $\operatorname{arc\,ctg}1=\dfrac{\pi}{4}$；

(4) $$\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})=\pi-\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

---

[1] 反三角函数还有反正割函数和反余割函数两种. 这两种反三角函数在本书中不研究.

例2 求证 $\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}x=\frac{\pi}{2}$.

证明: 根据诱导公式与反余切函数的定义，得

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}x\right)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg}x)=x,$$

因此，$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}x$ 是正切等于 x 的一个值.

又因为 $0<\operatorname{arc\,ctg}x<\pi$, 所以 $0>-\operatorname{arc\,ctg}x>-\pi$, 由此可得 $\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}x>-\frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

因此，$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}x$ 是属于 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 且它的正切等于 x 的一个值. 于是

$$\operatorname{arc\,tg}x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}x,$$

$$\therefore\qquad \operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

练　习

1. 用反正切或反余切的形式把下列各式中的 x 表示出来:

   (1) $\operatorname{tg}x=0.6\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

   (2) $\operatorname{tg}x-\sqrt{5}=0\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

   (3) $\operatorname{ctg}x=3\ (0<x<\pi)$;

   (4) $3\operatorname{ctg}x+1=0\ (0<x<\pi)$.

2. 写出下列函数的定义域、值域:

   (1) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$;　　(2) $y=3\operatorname{arc\,ctg}(1-x)$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$；　　(2) $\operatorname{arctg}(-2.689)$；

(3) $\operatorname{arcctg}0$；　　(4) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

4. 求下列各式的值：

(1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2.84)$；　　(2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\right)$；

(3) $\operatorname{ctg}\left[\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$；　　(4) $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

5. 求下列各式的值：

(1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$；

(2) $\sin(\operatorname{arcctg}2)$；

(3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{2}{5}\right)$；

(4) $\cos(2\operatorname{arctg}5)$.

习　题　一

1. 求下列反正弦函数值：

(1) $\arcsin 0$；　　(2) $\arcsin 0.7841$；

(3) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$；　　(4) $\arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2. 用反正弦的形式把下列各式中的 x 表示出来：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\sin x=-\frac{1}{4}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}\quad\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$；

(4) $\sin x=-\frac{1}{4}\left(\pi<x<\frac{3\pi}{2}\right)$.

3. 求下列各式的值:

(1) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{4}{7}\right)\right]$; (2) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$;

(3) $\operatorname{tg}(\arcsin 0.8)$; (4) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{6}\right)$;

(5) $\cos(2\arcsin 0.5)$;

(6) $\sin\left[\frac{\pi}{3}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$;

(7) $\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{4}\right)$;

(8) $\arcsin\left(\frac{1}{3}+\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

4. 求下列函数的定义域、值域:

(1) $y=\arcsin 3x$; (2) $y=\frac{1}{3}\arcsin(x-1)$;

(3) $y=\frac{3}{5}\arcsin(2-x)$; (4) $y=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{x}{2}$.

5. 求下列各式的值:

(1) $\arccos 1$; (2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (4) $\arccos 0.6943$;

(5) $\arccos(-0.9178)$; (6) $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

6. 用反余弦的形式把下列各式中的x表示出来:

(1) $\cos x=\frac{1}{3}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $\cos x-\dfrac{3}{7}=0 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<0\right)$.

7. 求下列各式的值:

(1) $\cos(\arccos 0.2571)$;

(2) $\cos\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{13}\right)\right]$;

(3) $\sin\left(2\arccos\dfrac{2}{3}\right)$;

(4) $\arccos\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.

8. 求下列函数的定义域、值域:

(1) $y=\arccos\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\arccos x}$.

9. 求下列各式的值:

(1) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;　　(2) $\operatorname{arctg} 2.747$;

(3) $\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$;　　(4) $\operatorname{arcctg}(-7.232)$;

(5) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$;

(6) $\operatorname{arcctg}(-6.460)+\operatorname{arctg}(-6.460)$.

10. 求下列各式的值:

(1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 0.4)$;

(2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

(3) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg} x)$;

(4) $\cos[\operatorname{arcctg}(-5)]$;

(5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

(6) $\operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)$.

11. 求下列函数的定义域、值域：

(1) $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$； (2) $y=\sqrt{\operatorname{arc\,ctg} x}$.

12. 已知等腰三角形的高与底的比为 4:3，用反三角函数把它的三个内角表示出来。

13. 求证：

(1) $\cos(\operatorname{arc\,tg} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

(2) $\sin(\operatorname{arc\,tg} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

二 简单三角方程

1.4 三角方程

我们看下面的问题：图 1-8 中的 P，Q 分别是宽为 4cm，8cm 的钢板。现在要把它们焊接成 60° 角，下料时角 x 应取多少度？

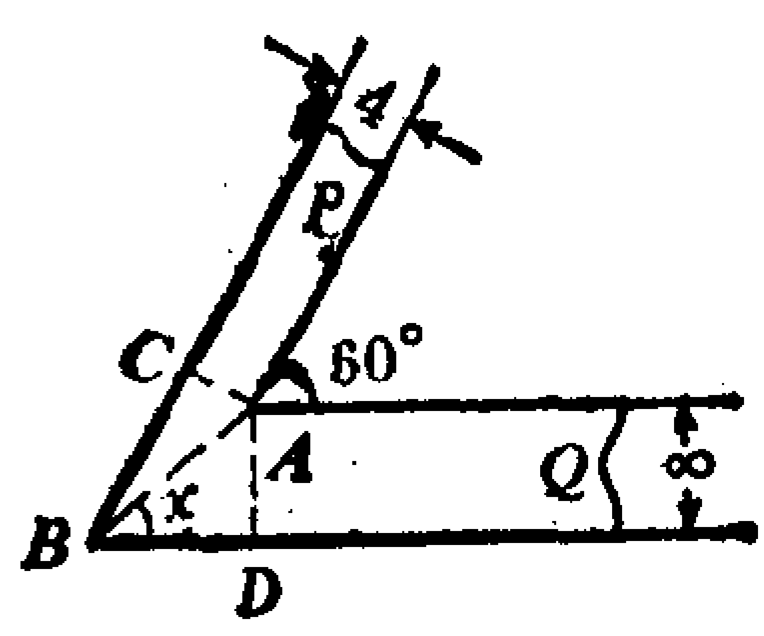


图 1-8

因为$\angle CBD=60°$，从点 A 画$\angle CBD$ 两边的垂线 AC，AD，可以看出，

$$AB\cdot\sin x=8,\quad AB\cdot\sin(60°-x)=4.$$

由此可得

$$\sin x=2\sin(60°-x).$$

这是一个含有未知数的三角函数的方程。这种含有未知

数的三角函数的方程叫做三角方程.

1.5 最简单的三角方程

在三角方程中，$\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$ 是最简单的. 其他的三角方程的求解，往往可以归结为求这种最简单的三角方程的解集. 下面我们先研究这四个最简单的三角方程的解集.

1. $\sin x=a$ 的解集

因为$|\sin x|\leqslant 1$,所以当$|a|>1$时，方程 $\sin x=a$ 的解集为$\varnothing$.

当$|a|=1$时,方程 $\sin x=a$ 成为 $\sin x=1$或 $\sin x=-1$. 由于 $y=\sin x$ 的周期为 2π，而在长度为一个周期的区间 $[-\pi,\pi)$上,方程 $\sin x=1$ 有唯一解 $x=\frac{\pi}{2}$,方程$\sin x=-1$有唯一解 $x=-\frac{\pi}{2}$. 因此,在$(-\infty,+\infty)$上,方程 $\sin x=1$ 的解集是

$$\left\{x \,\middle|\, x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\},$$

方程 $\sin x=-1$ 的解集是

$$\left\{x \,\middle|\, x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}.$$

这就是说,当$|a|=1$时,方程 $\sin x=a$ 的解集是

$$\{x\,|\,x=2k\pi+\arcsin a,\ k\in Z\}.$$

当$|a|<1$时,由反正弦函数的定义可知,方程 $\sin x=a$在单调区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上有唯一解 $x=\arcsin a$，而在单调区间

$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上又有唯一解 $x=\pi-\arcsin a$. 因此，在长度为一个周期的区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上，方程$\sin x=a$有两个解$x=\arcsin a$, $x=\pi-\arcsin a$. 于是，当$|a|<1$时，在$(-\infty, +\infty)$上，方程 $\sin x=a$ 的解集是

$$\{x \mid x=2k\pi+\arcsin a, k\in Z\}$$
$$\cup\{x \mid x=(2k+1)\pi-\arcsin a, k\in Z\}.$$

上面第一个集合中的元素 x 等于 π 的偶数倍与 $\arcsin a$ 的和，第二个集合中的元素 x 等于 π 的奇数倍与 $-\arcsin a$的和. 因为当 k 为偶数时$(-1)^k=1$, k 为奇数时$(-1)^k=-1$, 所以上述并集等于

$$\{x \mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a, k\in Z\}.$$

因此，方程 $\sin x=a$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解集如下表所示：

a 的取值范围	方程$\sin x=a$的解集
$\|a\|>1$	$\varnothing$
$\|a\|=1$	$\{x \mid x=2k\pi+\arcsin a, k\in Z\}$
$\|a\|<1$	$\{x \mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a, k\in Z\}$

2. $\cos x=a$ 的解集

当$|a|>1$时，方程 $\cos x=a$ 的解集为$\varnothing$.

当$|a|=1$时，在长度为一个周期的区间$[0, 2\pi)$上，方程 $\cos x=1$ 有唯一解 $x=0$; 方程 $\cos x=-1$ 有唯一解 $x=\pi$. 因此，在$(-\infty, +\infty)$上，方程 $\cos x=1$ 的解集是$\{x \mid x=2k\pi,$

$k\in Z\}$，方程 $\cos x=-1$ 的解集是$\{x|x=2k\pi+\pi, k\in Z\}$。就是说，在$|a|=1$时，方程 $\cos x=a$ 的解集是

$$\{x|x=2k\pi+\arccos a, k\in Z\}.$$

当$|a|<1$时，由反余弦函数的定义可知，方程 $\cos x=a$在单调区间$[0,\pi)$上有唯一解 $x=\arccos a$，在单调区间$[-\pi,0)$上又有唯一解 $x=-\arccos a$。因此，在长度为一个周期的区间$[-\pi,\pi)$上，方程 $\cos x=a$ 有两个解 $x=\pm\arccos a$。于是，在$(-\infty,+\infty)$上，方程 $\cos x=a(|a|<1)$的解集是

$$\{x|x=2k\pi\pm\arccos a, k\in Z\}.$$

方程 $\cos x=a$ 在$(-\infty,+\infty)$上的解集如下表所示：

a 的取值范围	方程 $\cos x=a$ 的解集
$\|a\|>1$	$\varnothing$
$\|a\|=1$	$\{x\|x=2k\pi+\arccos a, k\in Z\}$
$\|a\|<1$	$\{x\|x=2k\pi\pm\arccos a, k\in Z\}$

3. $\operatorname{tg}x=a$ 的解集

由反正切函数的定义可知，在单调区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上，不论 a 为什么实数，方程 $\operatorname{tg}x=a$ 都有唯一解 $x=\operatorname{arctg}a$。因为 $y=\operatorname{tg}x$ 的周期是π，所以方程 $\operatorname{tg}x=a$ 的解集如下表所示：

方程 $\operatorname{tg}x=a$ 的解集
$\{x\|x=k\pi+\operatorname{arctg}a, k\in Z\}$

4. $\operatorname{ctg}x=a$ 的解集

由反余切函数的定义可知，在单调区间$(0,\pi)$上，不论 a

为什么实数，方程 $\operatorname{ctg}x=a$ 有唯一解 $x=\operatorname{arc\,ctg}a$. 因为 $y=\operatorname{ctg}x$ 的周期是π，所以方程 $\operatorname{ctg}x=a$ 的解集如下表所示：

方程$\operatorname{ctg}x=a$的解集
$\{x\mid x=k\pi+\operatorname{arc\,ctg}a,\ k\in Z\}$

例 1 解方程 $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

解： 原方程可化为

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

∴ 解集是$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+(-1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ k\in Z\right\}$,

即

$$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+(-1)^k\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right),k\in Z\right\}.$$

例 2 解方程 $2\cos 2x=1$.

解： 原方程可化为

$$\cos 2x=\frac{1}{2},$$

$$2x=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{2}\quad(k\in Z),$$

即

$$2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad(k\in Z).$$

∴ 解集是$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in Z\right\}$.

例 3 解方程 $\operatorname{tg}(x+15^\circ)+1=0$.

解： 原方程可化为

$$\operatorname{tg}(x+15^\circ)=-1,$$

$$x+15^\circ=k\cdot180^\circ+(-45^\circ)\quad(k\in Z).$$

$\therefore$ 解集是$\{x\,|\,x=k\cdot180^\circ-60^\circ,\ k\in Z\}$.

例 4 求适合方程 $\sin(3x-105^\circ)=\frac{1}{2}$且小于 360° 的正角.

解: 由方程 $\sin(3x-105^\circ)=\frac{1}{2}$, 可得

$$3x-105^\circ=k\cdot180^\circ+(-1)^k\cdot30^\circ\quad(k\in Z).$$

$\therefore$ 解集是$\{x\,|\,x=k\cdot60^\circ+(-1)^k\cdot10^\circ+35^\circ,\ k\in Z\}$.

分别设 $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$, 得适合方程且小于 360° 的正角是 45°, 85°, 165°, 205°, 285°, 325°.

练　习

1. 写出下列方程的解集:

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2) $\sin x=-\frac{1}{2}$;

(3) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;　　(4) $\cos x=-0.8475$;

(5) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$;　　(6) $\operatorname{ctg} x=\frac{5}{3}$.

2. 解下列方程:

(1) $2\sin\frac{2x}{3}=1$;

(2) $2\cos(3x-15^\circ)+1=0$;

(3) $3\operatorname{tg}\frac{x+20^\circ}{3}=\sqrt{3}$;

(4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}+30^\circ\right)+1=0$.

3. 求 $0°$ 到 $360°$ 的角 x，已知：

(1) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$; (2) $\cos(3x+20°)=0.95$.

1.6 简单的三角方程

有些比较简单的三角方程，可以通过三角恒等变形或利用代数中解方程的方法，把它化成一个或几个最简单的三角方程，从而求出它们的解．现举例如下：

例1 解方程 $2\sin^2 x+3\cos x=0$.

解： 原方程可化为

$$2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0,$$

即

$$2\cos^2 x-3\cos x-2=0.$$

解这个关于 $\cos x$ 的二次方程，得

$$\cos x=2,\quad \cos x=-\frac{1}{2}.$$

$\cos x=2$ 的解集为 $\varnothing$；再由 $\cos x=-\frac{1}{2}$，得

$$x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\quad (k\in Z).$$

所以原方程的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},k\in Z\right\}$.

例2 解方程 $\sin^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0$.

解： 显然，使 $\cos x=0$ 的 x 值不可能满足原方程(因为 $\cos x=0$ 时，$\sin x=\pm 1$)，所以在方程的两边同除以 $\cos^2 x$，得

$$\operatorname{tg}^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} x-1=0.$$

解这个关于 $\operatorname{tg}x$ 的二次方程，得

$$\operatorname{tg}x=\sqrt{3},\quad \operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由 $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$，得

$$x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad (k\in Z);$$

再由 $\operatorname{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，得

$$x=k\pi-\frac{\pi}{6}\quad (k\in Z).$$

所以原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z\right\}\cup\left\{x\middle|x=k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\in Z\right\}$$

$$=\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{3},\ \text{或}\ x=k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\in Z\right\}.$$

在例 2 中，方程的每一项关于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的次数都是相同的(这里都是二次). 象这样的方程叫做关于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的齐次方程. 它的解法一般是先化为只含有未知数的正切函数的三角方程，然后求解.

例 3 解方程 $\sin x=2\sin(60°-x)$.

解： 将原方程变形，

$$\sin x=2(\sin 60°\cos x-\cos 60°\sin x),$$

$$\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right),$$

得

$$2\sin x=\sqrt{3}\cos x.$$

这是关于 $\sin x$, $\cos x$ 的齐次方程. 在方程两边都除以

$2\cos x$, 得

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

查平方根表，得$\frac{\sqrt{3}}{2}=0.8660$. 再查正切表，得

$$\operatorname{tg} 40^{\circ}54'=0.8660,$$

$$\operatorname{arctg} 0.8660=40^{\circ}54'.$$

所以原方程的解集是

$$\{x \mid x=k\cdot 180^{\circ}+40^{\circ}54', k\in Z\}.$$

例3的方程就是第1.4节中焊接钢板问题所得的方程. 它的解虽然有无穷多个，但是在这个实际问题中，要求$0^{\circ}<x<60^{\circ}$，因此，只有当$k=0$时，$x=40^{\circ}54'$有意义.

例4 解方程 $\sin x=\cos\frac{x}{2}$.

解： 利用倍角公式把原方程化为

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}-1\right)=0,$$

得
$$\cos\frac{x}{2}=0, \quad 或 \quad \sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

由$\cos\frac{x}{2}=0$, 得$\frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$, 即

$$x=4k\pi\pm\pi \quad (k\in Z);$$

由$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, 得$\frac{x}{2}=k\pi+(-1)^{k}\frac{\pi}{6}$, 即

$$x=2k\pi+(-1)^{k}\frac{\pi}{3} \quad (k\in Z).$$

所以原方程的解集是

$$\{x\mid x=(4k\pm1)\pi,k\in Z\}\cup\left\{x\left|x=2k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3},\ k\in Z\right.\right\}$$

$$=\{x\mid x=(4k\pm1)\pi,\ 或\ x=2k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3},k\in Z\}.$$

例5 解方程 $\sin 5x=\sin 4x$.

解法一： 移项并运用三角函数的和差化积公式，得

$$\sin 5x-\sin 4x=0,$$

$$2\cos\frac{9x}{2}\sin\frac{x}{2}=0,$$

$$\cos\frac{9x}{2}=0\ 或\ \sin\frac{x}{2}=0.$$

由 $\cos\frac{9x}{2}=0$，得 $\frac{9x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\quad(k\in Z)$，即

$$x=\frac{4}{9}k\pi\pm\frac{\pi}{9}\quad(k\in Z).$$

由 $\sin\frac{x}{2}=0$，得 $\frac{x}{2}=k\pi\quad(k\in Z)$，即

$$x=2k\pi\quad(k\in Z).$$

所以原方程的解集是

$$\left\{x\left|x=\frac{4}{9}k\pi\pm\frac{\pi}{9},\ k\in Z\right.\right\}\cup\{x\mid x=2k\pi,k\in Z\}$$

$$=\left\{x\left|x=\frac{4}{9}k\pi\pm\frac{\pi}{9},\ 或\ x=2k\pi,\ k\in Z\right.\right\}.$$

解法二： 因为与 α 有相同的正弦值的弧度数 x 的集合是 $\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\alpha,\ k\in Z\}$，所以原方程可以化成

$$5x=k\pi+(-1)^k4x\quad(k\in Z).$$

当 k 是偶数 $2n(n\in Z)$ 时，上式成为 $5x=2n\pi+4x$，由此

可得

$$x=2n\pi \quad (n\in Z).$$

当 k 是奇数 $2n+1(n\in Z)$ 时，上式成为 $5x=(2n+1)\pi-4x$，由此可得

$$9x=(2n+1)\pi \quad (n\in Z),$$

即

$$x=\frac{1}{9}(2n+1)\pi \quad (n\in Z).$$

所以原方程的解集是

$$\{x|x=2n\pi,\ n\in Z\}\cup\left\{x\middle|x=\frac{1}{9}(2n+1)\pi, n\in Z\right\}$$
$$=\left\{x\middle|x=2n\pi,\ 或\ x=\frac{1}{9}(2n+1)\pi,\ n\in Z\right\}.$$

例 5 的两种解法，虽然得到的解集的表示形式不同，但因为当 n 是偶数 $2k$ 时，$\frac{1}{9}(2n+1)\pi$ 成为 $\frac{1}{9}(4k+1)\pi$；当 n 是奇数 $2k-1$ 时，$\frac{1}{9}(2n+1)\pi$ 成为 $\frac{1}{9}(4k-1)\pi$，所以实质上 $\left\{x\middle|x=\frac{1}{9}(2n+1)\pi,n\in Z\right\}$ 与 $\left\{x\middle|x=\frac{1}{9}(4k\pm1)\pi, k\in Z\right\}$ 是相等的集合．就是说，两种解法所得的解集是相同的．

例 6 解方程 $5\sin x-12\cos x=6.5$.

解： 在方程的两边都除以 $\sqrt{5^2+12^2}$，得

$$\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x=\frac{1}{2}.$$

令 $\cos\theta=\frac{5}{13}$, $\sin\theta=\frac{12}{13}$, 即令 $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{12}{5}=2.4$，则满足这些式子的 θ 的一个值为 $67°23'$．由此得

$$\sin x\cos 67^\circ 23' - \cos x\sin 67^\circ 23' = 0.5,$$
$$\sin(x - 67^\circ 23') = 0.5,$$
$$x - 67^\circ 23' = k\times 180^\circ + (-1)^k\times 30^\circ \quad (k\in Z).$$

所以原方程的解集是

$$\{x \mid x = k\times 180^\circ + 67^\circ 23' + (-1)^k\times 30^\circ,\ k\in Z\}.$$

在解例6的方程时，我们在方程的两边都除以$\sqrt{5^2+12^2}$，其中被开方式5^2+12^2是方程中$\sin x$与$\cos x$的系数的平方和. 一般说来，对于形如$a\sin x + b\cos x = c$的三角方程，可先在方程的两边都除以$\sqrt{a^2+b^2}$，然后令$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则方程变形为$\sin(x+\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$，当

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$$

时，方程有解.

练　习

解下列方程：

1. $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$.
2. $4\cos^2 x - 4\sin x = 1$.
3. $2\sin x - 5\cos x = 0$.
4. $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$.
5. $4\cos\frac{x}{2} - 5\cos x = 5$.
6. $\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{4} = 0$.

7. $\cos 3x + \cos 2x = 0$.

8. $6\sin x + 8\cos x = 5$.

习 题 二

解下列方程:

1. $2\sin 2x + 1 = 0$.

2. $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $2\cos\left(\frac{x}{3} + 45^\circ\right) = 1$.

4. $\mathrm{tg}\, 2x - \sqrt{3} = 0$.

5. $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\, 2(x + 25^\circ) - 2 = 0$.

6. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

7. $\sin^2 2x = \sin 2x$.

8. $3\sin x - 2\cos^2 x = 0$.

9. $2\sin^2 x = 1$.

10. $\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$.

11. $\sin x\cos x = \frac{1}{4}$.

12. $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$.

13. $\sin 3x = \sin x$.

14. $\sin 2x = \cos 3x$.

15. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

16. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

17. $5\cos 2x+2\sin 2x=0$.

18. $\cos^2 2x-3\sin^2 2x=0$.

19. $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=1$.

20. $4\sin x+3\cos x=3$.

小　　结

一、本章主要内容是反三角函数的概念、图象、性质以及简单三角方程的解法。

二、本章学习的四种反三角函数的名称，函数式，定义域，值域，列表如下：

名　　称	函　数　式	定　义　域	值　　域
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\ \pi]$
反正切函数	$y=\operatorname{arctg} x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
反余切函数	$y=\operatorname{arcctg} x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ \pi)$

反正弦函数与反正切函数在它们的整个定义域内都是增函数，并且都是奇函数，所以具有以下关系：

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,$$

$$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x.$$

反余弦函数与反余切函数在它们的整个定义域内都是减

函数，并且具有以下关系：

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,$$

$$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x.$$

由此可见，它们既不是奇函数，也不是偶函数.

三、最简单的三角方程的解集列表如下：

方程		方程的解集
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$
	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arcsin a,\ k\in Z\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,\ k\in Z\}$
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$
	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arccos a,\ k\in Z\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\arccos a,\ k\in Z\}$
$\operatorname{tg} x=a$		$\{x\mid x=k\pi+\operatorname{arctg} a,\ k\in Z\}$
$\operatorname{ctg} x=a$		$\{x\mid x=k\pi+\operatorname{arcctg} a,\ k\in Z\}$

四、某些简单的三角方程，可以利用三角恒等变形或代数中解方程的方法，把它化成一个或几个最简单的三角方程，然后求解.

复习参考题一

A 组

1. (1) 怎样的函数可以有反函数？举出函数和它的反函数的例子.

(2) 函数和它的反函数的图象之间有什么关系？

2. (1) 写出三角函数的诱导公式;

(2) 写出同角三角函数的基本关系式;

(3) 写出和角、差角、倍角、半角的三角函数的公式;

(4) 写出三角函数的和差化积及积化和差公式.

3. 画出 $y=x$ 及 $y=\sin(\arcsin x)$ 的图象, 并比较两个图象的相同点及不同点.

4. 求下列函数的反函数, 并写出反函数的定义域、值域:

(1) $y=\frac{1}{2}\arcsin 3x$;　　(2) $y=2\arccos\frac{x}{4}$;

(3) $y=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} 2x$.

5. 求下列各式的值:

(1) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)$;

(2) $\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$;

(3) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{1}{2}\right)$;

(4) $\cos\left(\arccos\frac{3}{5}-\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

6. 求出下列各式里的 x:

(1) $\arcsin\frac{20}{29}=\arccos x$;

(2) $\arcsin x=\arccos\frac{5}{12}$;

(3) $\operatorname{arcctg}\frac{11}{60}=-\operatorname{arctg} x$.

7. 当 a 取什么值时, 下列三角方程的解集是空集?

(1) $\sin x=\frac{1+a}{2}$;　　(2) $\cos x=\frac{1-a}{2}$.

8. 解下列方程:

(1) $4\sin^2 x+(2\sqrt{3}-2)\cos x-(4-\sqrt{3})=0$;

(2) $\sec^2 x=1+\operatorname{tg} x$;

(3) $\cos 3\theta+2\cos\theta=0$;

(4) $\cos 2\theta+\sin 3\theta=0$;

(5) $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 4x$;

(6) $\frac{\sin 2x}{\cos x}=\frac{\cos 2x}{\sin x}$;

(7) $5\cos x+12\sin x=13$;

(8) $4\sin x-3\cos x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

9. 解下列方程:

(1) $\sin^4 x-\cos^4 x=\cos x+\sin x$;

(2) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sec\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2=0$;

(3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$;

(4) $\cos 2\theta=\cos\theta+\sin\theta$;

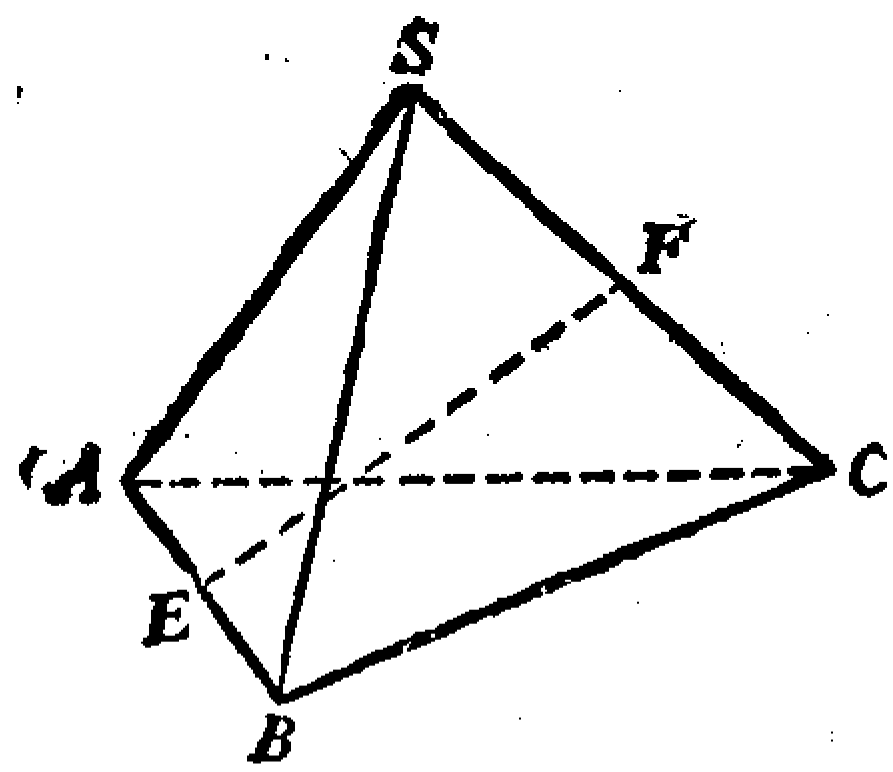
(5) $5\sin^2 x+7\sin x\cos x+4\cos^2 x=1$;

(6) $6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2$.

10. 圆的半径为 R, 弦长为 a, 用反正弦表示这条弦所对的圆周角, 并确定 R 与 a 的取值范围.

11. 如图, 已知正三棱锥 S-ABC 的各侧棱长都等于底面边长 a, 又 E, F 分别是 AB, CS 的中点, 求 EF 和平面 ABC

所成的角（用反三角函数表示）。



（第11题）

12. 炮弹以初速度 v_0（米/秒）沿与水平方向成 θ 角的方向向上射出，它的射程 s（米）可用下式表示：

$$s=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{9.8}.$$

已知 $v_0=630$（米/秒），要使射程为 20 公里，θ 角应取多大？

B 组

13. 求下列各式的值：

(1) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}-\arccos\frac{1}{4}\right)$;

(2) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin a\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin a\right)$ $(|a|\leqslant 1)$.

14. 求证：

(1) $\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$ $(|x|\leqslant 1)$;

(2) $\mathrm{tg}(2\mathrm{arctg}x)=\frac{2x}{1-x^2}$ $(|x|\neq 1)$.

15. 解下列方程：

(1) $\sin 6x\cos x=\sin 4x\cos 3x$;

(2) $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$;

(3) $\sin 5\theta-\sin 3\theta=\sqrt{2}\cos 4\theta$.

16. 求证：

(1) 方程 $\sin^2 x=\sin^2\alpha$ 的解集是

$$\{x\,|\,x=n\pi\pm\alpha,\ n\in Z\};$$

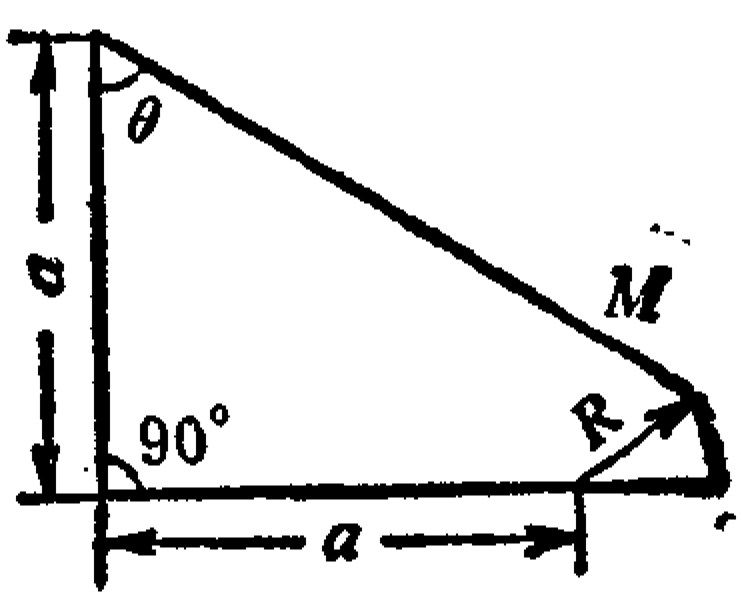
(2) 方程 $\cos^2 x=\cos^2\alpha$ 的解集是

$$\{x\,|\,x=n\pi\pm\alpha,\ n\in Z\};$$

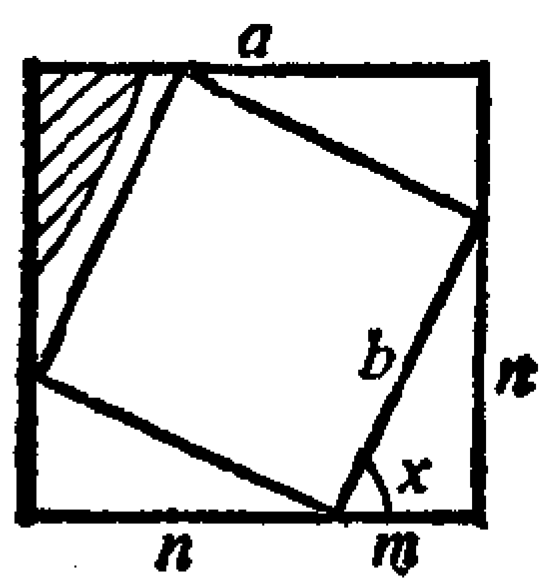
(3) 方程 $\mathrm{tg}^2 x=\mathrm{tg}^2\alpha$ 的解集是

$$\{x\,|\,x=n\pi\pm\alpha,\ n\in Z\}.$$

17. 如图，某种飞机机翼的曲边由线段和圆弧连接而成，切点为 M，求 θ 角。



(第17题)



(第18题)

18. 如图，有一块正方形钢板，一个角上有伤痕，要把它截成一块正方形钢板，面积是原钢板的$\frac{2}{3}$，应按怎样的角度 x 来截？

第二章 数列与数学归纳法

一 数 列

2.1 数列

我们看下面的例子：

图 2-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层. 自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \tag{1}$$

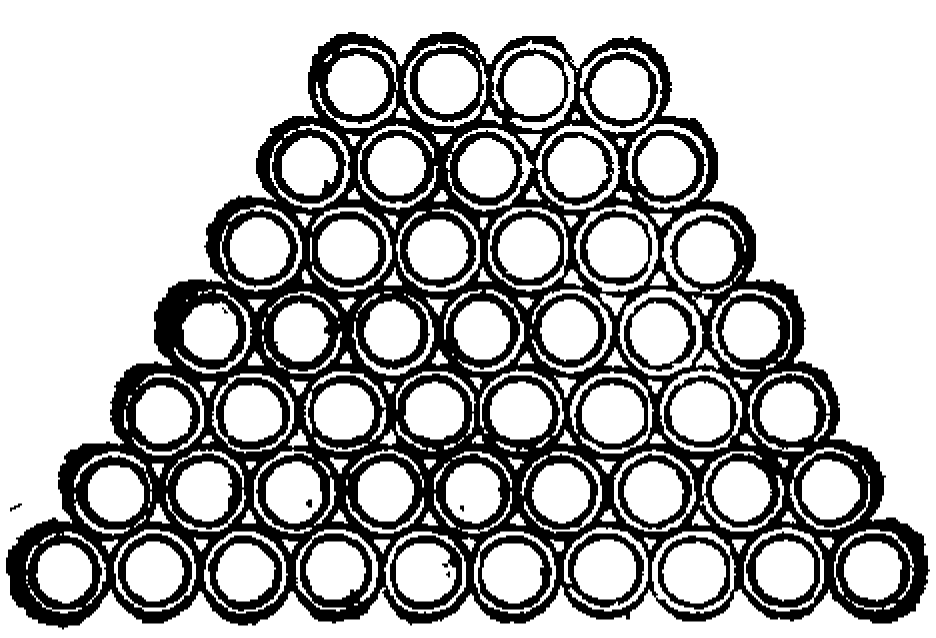


图 2-1

自然数 1, 2, 3, 4, 5, …的倒数排列成一列数：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots. \tag{2}$$

$\sqrt{2}$的精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, … 的不足近似值排列成一列数：

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \cdots. \tag{3}$$

-1的 1 次幂, 2 次幂, 3 次幂, 4 次幂, ……排列成一列数：

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots. \tag{4}$$

无穷多个 1 排列成一列数:

$$1, 1, 1, 1, \cdots. \tag{5}$$

象上面的例子中，按一定次序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项), 第 2 项, ……, 第 n 项, ……. 对于上面的数列(1), 每一项与它的序号有下面的对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{项} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

这告诉我们: 数列可以看作一个定义域为自然数集 N(或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.

数列的一般形式可以写成

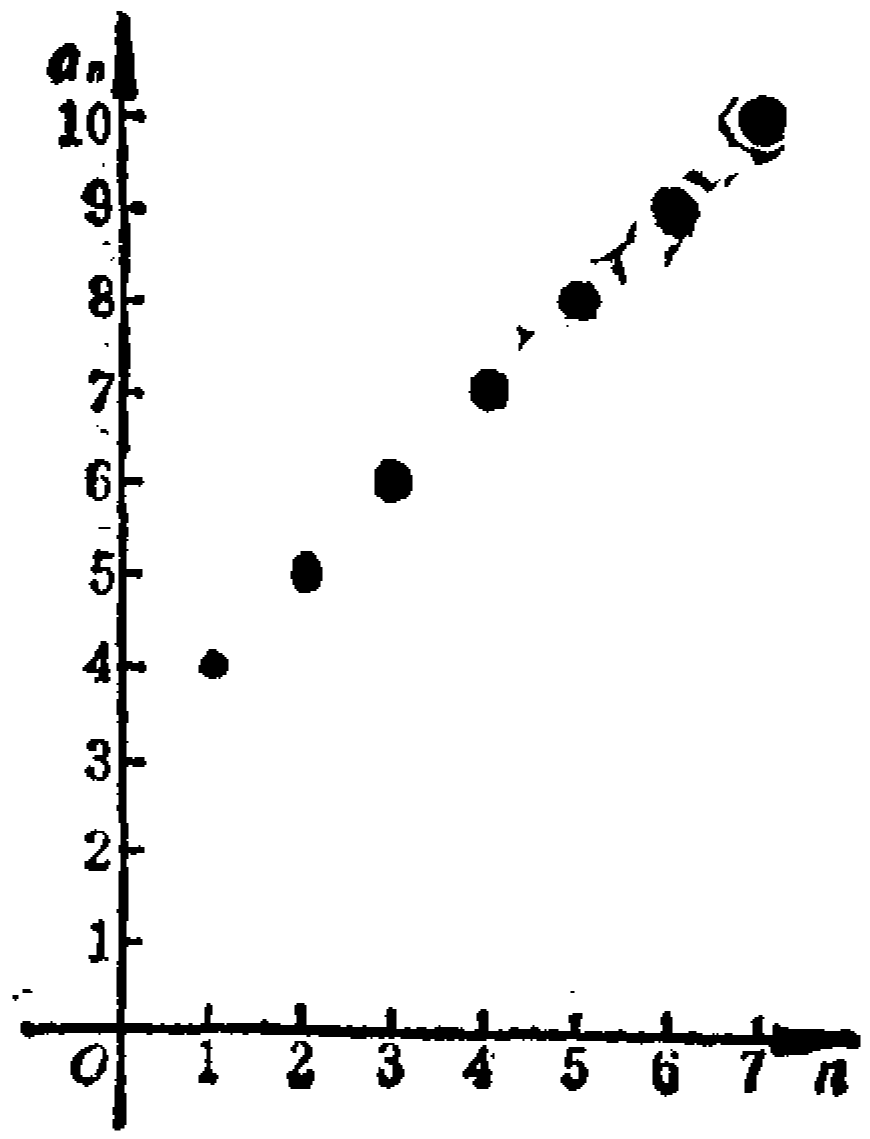
$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots, \ a_n, \ \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项. 有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$. 例如, 把数列

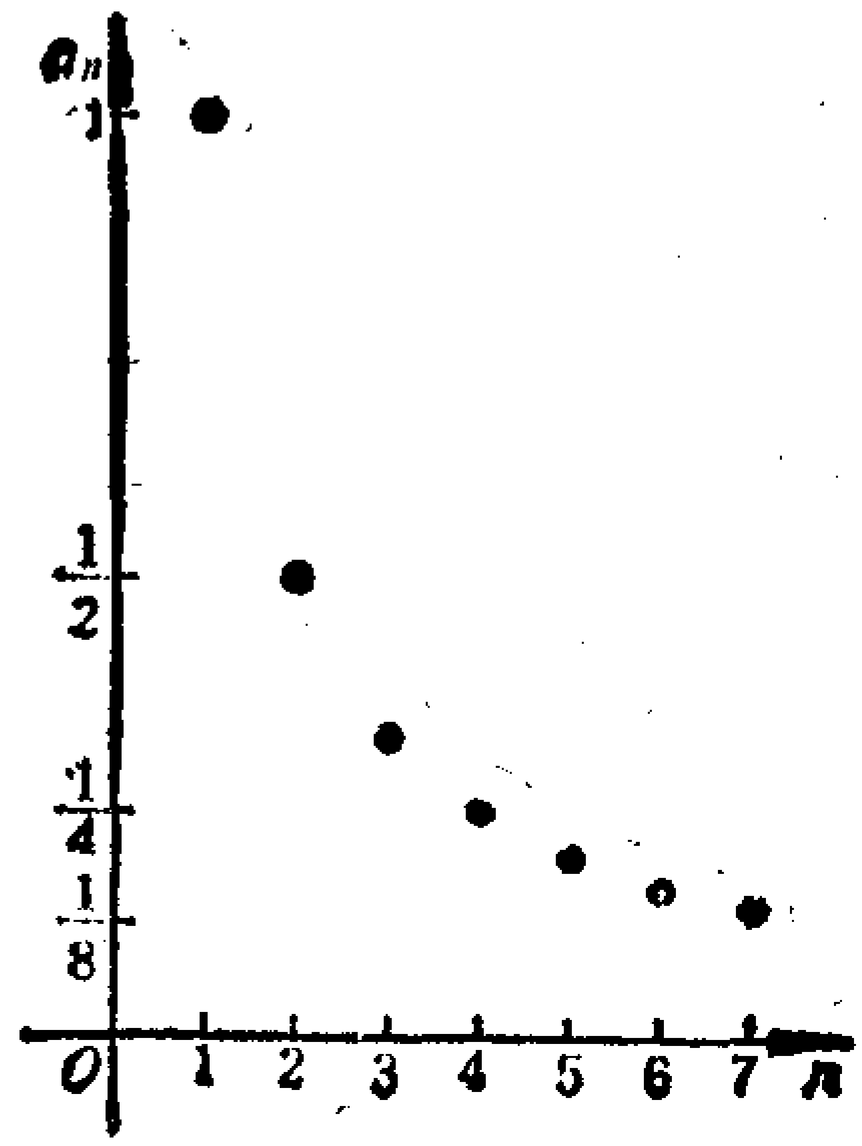
$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \cdots, \ \frac{1}{n}, \ \cdots$$

简记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的**通项公式**. 例如，数列(1)的通项公式是 $a_n=n+3(n\leqslant 7)$; 数列(2)的通项公式是 $a_n=\frac{1}{n}$. 如果已知一个数列的通项公式, 那么只要依次用 $1, 2, 3, \cdots$ 去代替公式中的 n，就可以求出这个数列的各项.

数列可以用图形来表示．在画图时，为方便起见，在平面直角坐标系的两个坐标轴上所取的单位长度可以不同．图2-2(1)，(2)分别是数列(1)，(2)的图形表示．从图上看，数列可用一群孤立的点来表示．



(1)



(2)

图 2-2

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**．上面的数列(1)是有穷数列，数列(2)，(3)，(4)，(5)都是无穷数列．

例 1 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$；　　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$．

解： (1) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$, 得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5.$$

例 2 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $1, 3, 5, 7$;

(2) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$;

(3) $-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$.

解: (1) 数列的前 4 项 $1, 3, 5, 7$ 都是序号的 2 倍减去1, 所以通项公式是 $a_n=2n-1$;

(2) 数列的前 4 项$\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$的分母都是序号加上 1, 分子都是分母的平方减去 1, 所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项$-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正, 所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

练　习

1. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式, 写出它的前 5 项:

(1) $a_n=n^2$;　　　　(2) $a_n=10n$;

(3) $a_n=5(-1)^{n+1}$;　　(4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第7项与第10项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3}$;　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n+3$.

3. (口答)说出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 2, 4, 6, 8;　　(2) 15, 25, 35, 45;

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并对每一个数列各写出一个通项公式：

(1) 2, 4, ( ), 8, 10, ( ), 14;

(2) 2, 4, ( ), 16, 32, ( ), 128, ( );

(3) ( ), 4, 9, 16, 25, ( ), 49;

(4) ( ), 4, 3, 2, 1, ( ), −1, ( );

(5) 1, $\sqrt{2}$, ( ), 2, $\sqrt{5}$, ( ), $\sqrt{7}$.

例3 已知数列$\{a_n\}$的第1项是1，以后各项由公式$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$给出，写出这个数列的前5项。

解： $a_1=1$,

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}.$$

练　习

写出下面数列$\{a_n\}$的前5项：

1. $a_1=5,\quad a_{n+1}=a_n+3$.
2. $a_1=2,\quad a_{n+1}=2a_n$.
3. $a_1=3,\quad a_2=6,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$.
4. $a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

2.2 等差数列

考察上一节中提到过的数列

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \tag{1}$$

我们可以发现，这个数列有这样的特点：从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于1.

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母d表示．例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

与

$$5, 0, -5, -10, \cdots$$

都是等差数列，它们的公差分别是 2 与 -5。

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

如果一个等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到通项公式

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2,$$

即

$$a_n = 2n - 1.$$

这个数列可用图 2-3 来表示。从图中看到，表示这个等差数列各项的点都在同一直线 $y = 2x - 1$ 上。

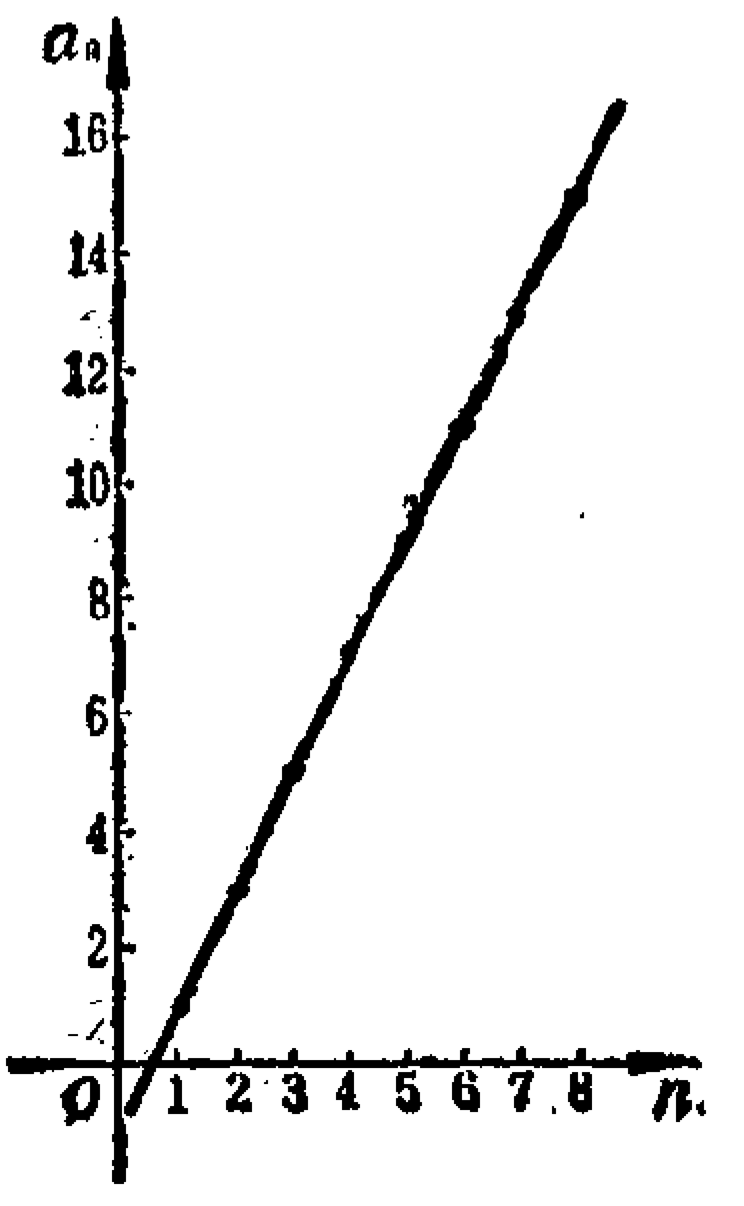


图 2-3

例 1 求等差数列 8, 5, 2, $\cdots$ 的第 20 项。

解： $\because$ $a_1 = 8, d = 5 - 8 = -3,$

$$n=20,$$

$$\therefore \qquad a_{20}=8+(20-1)\times(-3)$$
$$=-49.$$

例 2 等差数列-5, -9, -13, …的第几项是-401?

解: $a_1=-5$, $d=-9-(-5)=-4$, $a_n=-401$, 因此,

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得

$$n=100.$$

答: 这个数列的第 100 项是-401.

例 3 梯子的最高一级宽 33cm, 最低一级宽110cm, 中间还有 10 级, 各级的宽度成等差数列. 计算中间各级的宽.

解: 用$\{a_n\}$表示题中的等差数列, 由已知条件, 有

$$a_1=33, \quad a_{12}=110, \quad n=12,$$
$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

因此,

$$a_2=33+7=40,$$
$$a_3=40+7=47,$$
$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$
$$a_{11}=96+7=103.$$

答: 梯子中间各级的宽从上到下依次是 40, 47, 54, 61, 68, 75, 82, 89, 96, 103cm.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

练　习

1. (1) 求等差数列 3, 7, 11, … 的第 4, 7, 10 项；
   (2) 求等差数列 10, 8, 6, … 的第 20 项；
   (3) 求等差数列 2, 9, 16, … 的第 n 项；
   (4) 求等差数列 0, $-3\frac{1}{2}$, -7, … 的第 $n+1$ 项.
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：
   (1) 已知 $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；
   (2) 已知 $a_1=12$，$a_6=27$，求 d；
   (3) 已知 $a_1=3$，$a_n=21$，$d=2$，求 n；
   (4) 已知 $a_4=10$，$a_7=19$，求 a_1 与 d.

下面通过具体例子，说明求等差数列的前 n 项和的方法.

为了求出图 2-1 所示的钢管的总数，我们可以设想如图 2-4 那样，在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管．这样，每层的钢管数都相等，即

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

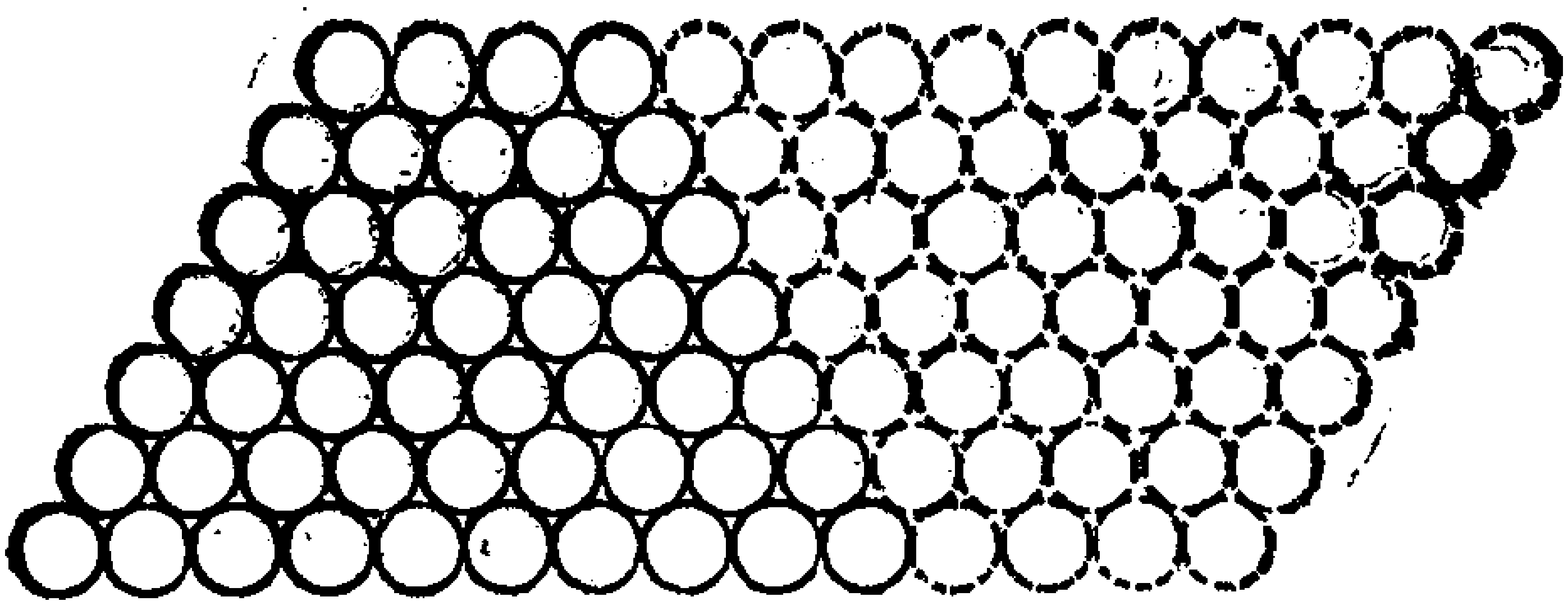


图 2-4

由于共有 7 层，两堆钢管的总数是$(4+10)\times7$，因此所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

它的前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列$\{a_n\}$的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]; \quad (1)$$

再把项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)的两边分别相加，得

$$2S_n=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{个}}$$
$$=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 4 如图 2-5，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放 1 支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放 1 支，最上面一层放 120 支．这个V形架上共放着多少支铅笔？

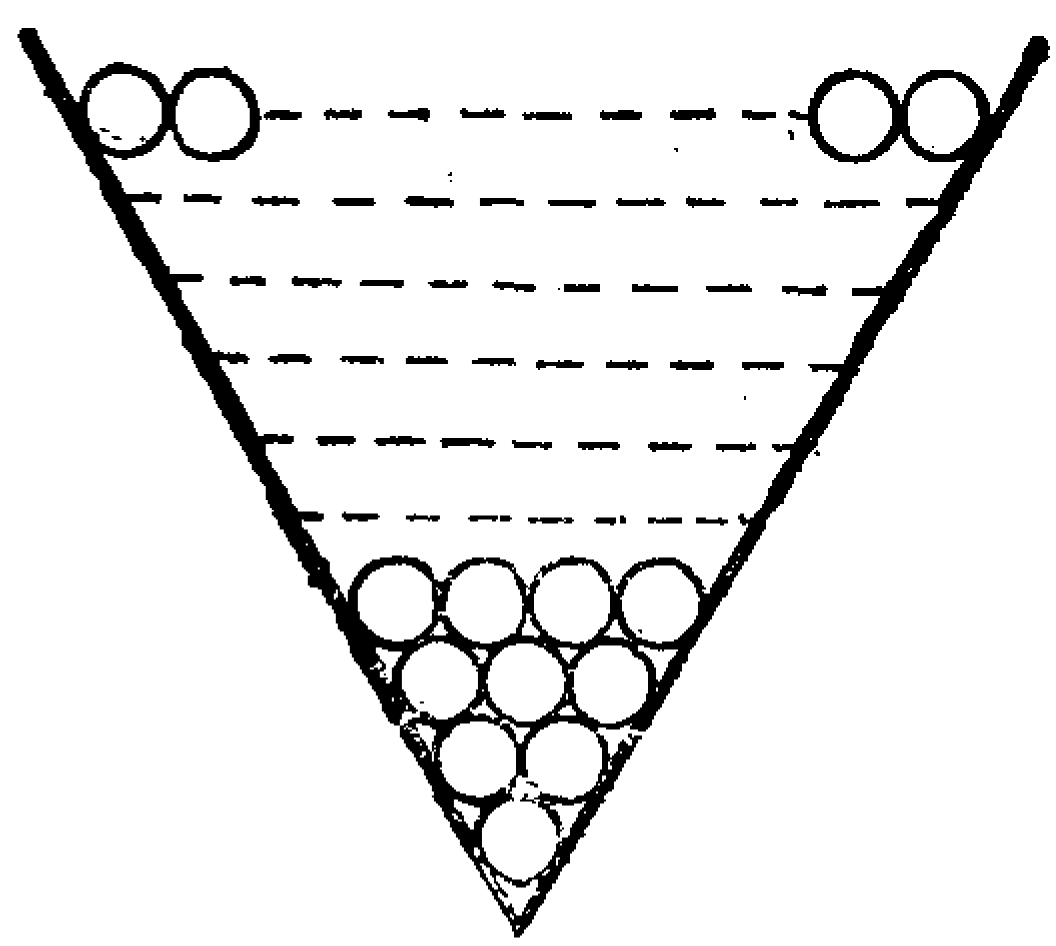


图 2-5

解： 由题意可知，这个V形架上共放着 120 层铅笔，且自下而上各层的铅笔数组成等差数列，记为$\{a_n\}$，其中 $a_1=1$，$a_{120}=120$．根据等差数列$\{a_n\}$前 n 项和的公式，得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7260.$$

答：V 形架上共放着 7260 支铅笔．

例 5 求集合 $M=\{m\,|\,m=7n,\ n\in N,$ 且 $m<100\}$的元素个数，并求这些元素的和．

解： $\because$ $$7n<100,$$

$\therefore$ $$n<\frac{100}{7},$$

$$n<14\frac{2}{7}.$$

由于满足上面不等式的自然数 n 共有 14 个，集合 M 里的元素共有 14 个．将它们从小到大列出，得

$$7,\quad 7\times2,\quad 7\times3,\quad \cdots,\quad 7\times14,$$

即

$$7, 14, 21, \cdots, 98.$$

这个数列是等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=7$，$a_{14}=98$．因此，

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

答：集合 M 共有 14 个元素，它们的和等于 735．

例 5 表明，在小于 100 的正整数中共有 14 个数是 7 的倍数，它们的和是735．

例 6 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列，求证它们的比是 3:4:5．

证明： 将成等差数列的三条边的长从小到大排列，它们可以表示为 $a-d$，a，$a+d$，这里 $a-d>0$，$d>0$．由于它们是直角三角形的三条边的长，根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

从而这三条边的长是 $3d$, $4d$, $5d$．

因此，这三条边的长的比是3:4:5．

练　习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的S_n:

(1) $a_1=5,\quad a_n=95,\quad n=10;$

(2) $a_1=100,\quad d=-2,\quad n=50;$

(3) $a_1=\frac{2}{3},\quad a_n=-\frac{3}{2},\quad n=14;$

(4) $a_1=14.5,\quad d=0.7,\quad a_n=32.$

2. (1) 求自然数列中前 n 个数的和;

(2) 求自然数列中前 n 个偶数的和。

习　题　三

1. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 3, 6, 9, 12;　　(2) 0, −2, −4, −6;

(3) $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}$;　(4) $-\frac{1}{2\times1},\frac{1}{2\times2},-\frac{1}{2\times3},\frac{1}{2\times4}$;

(5) $1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16}$;

(6) $\sqrt[3]{1},-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},-\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列 $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$。

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项及第 48 项;

(2) 420 是这个数列中的第几项?

3. (1) 已知数列$\{a_n\}$的第 1 项是 1，第 2 项是 2，以后各项由公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 给出。写出这个数列的前 10 项。

(2) 用上面的数列，通过公式 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 构造一个新的数

列$\{b_n\}$，并写出这个数列的前10项。

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=-2n+3$。

(1) 计算a_2-a_1，a_3-a_2，a_4-a_3，a_5-a_4；

(2) 计算$a_{n+1}-a_n$；

(3) 证明这个数列是一个等差数列，并求出它的首项与公差。

5. (1) 一个等差数列的第1项是5.6，第6项是20.6，求它的第4项；

(2) 一个等差数列的第3项是9，第9项是3，求它的第12项。

6. 求下列各题中两数的等差中项：

(1) 647与895；

(2) -180与360；

(3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$与$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$；

(4) $(a+b)^2$与$(a-b)^2$。

7. (1) 下面是全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码(表示鞋底长，单位是厘米)：

$$21,\ 21\frac{1}{2},\ 22,\ 22\frac{1}{2},\ 23,\ 23\frac{1}{2},\ 24,\ 24\frac{1}{2},\ 25.$$

这些尺码是否成等差数列？如果是，公差是多少？

(2) 全国统一鞋号中成年男鞋共有14种尺码，其中最小的尺码是$23\frac{1}{2}$(厘米)，各相邻的两个尺码都相差$\frac{1}{2}$厘米。把全部尺码从小到大列出。

8. (1) 在12与60之间插入3个数，使它们同这两个数成

等差数列；

(2) 在 8 与 36 之间插入 6 个数，使它们同这两个数成等差数列。

9. 在通常情况下，从地面到 1 万米高空，高度每增加 1 千米，气温就下降某一固定数值。如果 1 千米高度的气温是 8.5 °C，5 千米高度的气温是 −17.5 °C，求 2 千米、4 千米及 8 千米高度的气温。

10. 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，其中最大的与最小的皮带轮的直径分别是216毫米与120毫米，求中间三个皮带轮的直径。

11. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 与 45，求其余各齿轮的齿数。

12. (1) 在正整数集合中有多少个三位数？求它们的和。

(2) 在三位正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？求它们的和。

(3) 求等差数列 13, 15, 17, …, 81 的各项的和。

(4) 求等差数列 10, 7, 4, …, −47 的各项的和。

13. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的有关未知数：

(1) $a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=999$，求 d 及 n；

(2) $d=\frac{1}{3}$，$n=37$，$S_n=629$，求 a_1 及 a_n；

(3) $a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求 n 及 a_n；

(4) $d=2$，$n=15$，$a_n=-10$，求 a_1 及 S_n。

14. (1) 某等差数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=3n-2$，求它的前n项的和的公式。

(2) 某等差数列$\{a_n\}$的前n项和的公式是$S_n=5n^2+3n$，求它的前3项，并求它的通项公式。

15. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺了瓦片21块，往下每一层多铺1块，斜面上铺了瓦片19层，共铺瓦片多少块？

16. 一个剧场设置了20排座位，第一排有38个座位，往后每一排都比前一排多2个座位。这个剧场一共设置了多少个座位？

17. 一个等差数列的第6项是5，第3项与第8项的和也是5。求这个等差数列前9项的和。

18. 三个数成等差数列，它们的和等于18，它们的平方和等于116，求这三个数。

19. 某多边形的周长等于158cm，所有各边的长成等差数列，最大的边长等于44cm，公差等于3cm。求多边形的边数。

20. 一个梯形两条底边的长分别是12cm与22cm，将梯形的一条腰10等分，过每个分点画平行于梯形底边的直线，求这些直线夹在梯形两腰间的线段的长度的和。

2.3 等比数列

看下面的数列：

$$1,2,4,8,\cdots.$$

这个数列有这样的特点：从第2项起，每一项与它前一项的比都等于常数2。

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示. 例如，数列

$$5,\quad 25,\quad 125,\quad 625,\cdots$$

与

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$$

都是等比数列，它们的公比分别是 5 与 $-\frac{1}{2}$.

因为在一个等比数列里，从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于公比，所以每一项都等于它的前一项乘以公比. 这就是说，如果等比数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ 的公比是 q，那么

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1q, \\ a_3 &= a_2q = (a_1q)q = a_1q^2, \\ a_4 &= a_3q = (a_1q^2)q = a_1q^3, \\ &\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

由此可知，等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1q^{n-1}.}$$

上面的公式还可以改写成

$$a_n = \frac{a_1}{q}q^n = cq^n,$$

这里 $c=\frac{a_1}{q}$，它是一个不为零的常数. 当 q 是不等于 1 的正数时，$y=q^x$ 是一个指数函数，而函数 $y=cq^x$ 是一个不为零的常数与指数函数的积. 因此，从图上看，表示数列 $\{cq^n\}$ 各项

的点都在函数 $y=cq^x$ 的图象上. 例如, 当 $a_1=1$, $q=2$ 时,

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 2^n,$$

表示数列各项的点都在函数 $y=\frac{1}{2}\cdot 2^x$ 的图象上(图2-6).

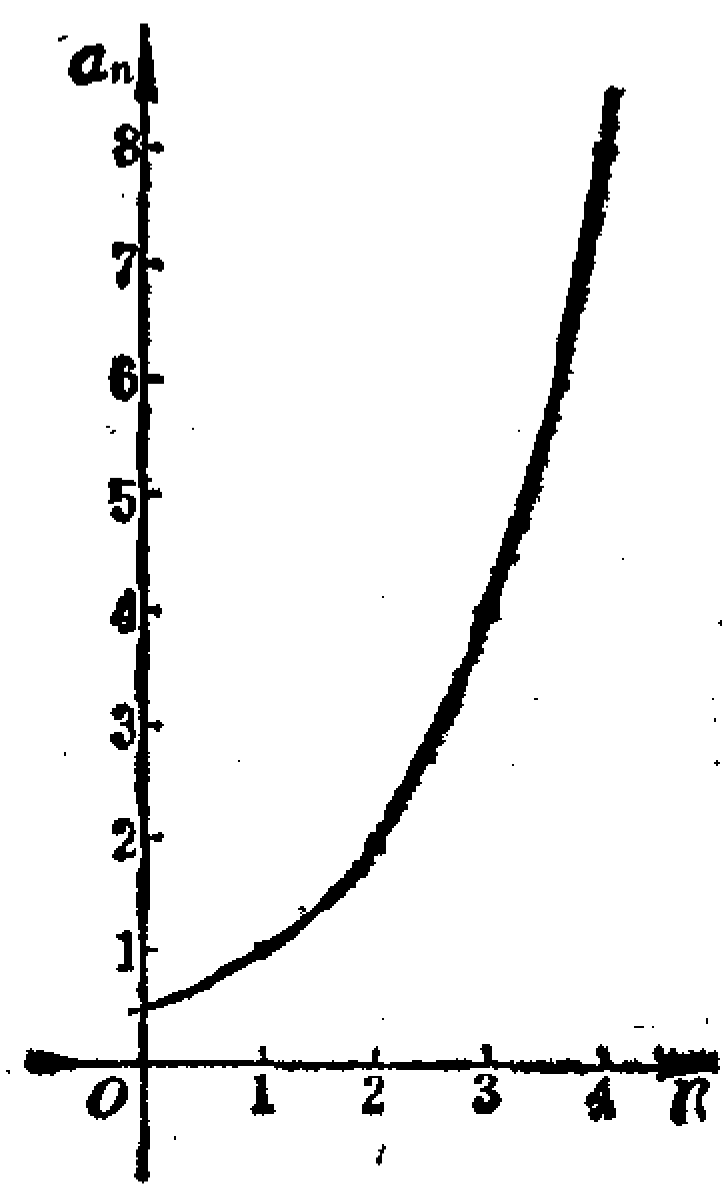


图 2-6

例1 培育水稻新品种, 如果第1代得到120粒种子, 并且从第1代起, 以后各代的每一粒种子都可以得到下一代的120粒种子, 到第5代大约可以得到这种新品种的种子多少粒(保留两个有效数字)?

解: 由于每代的种子数是它的前一代种子数的120倍, 逐代的种子数组成等比数列, 记为$\{a_n\}$, 其中 $a_1=120$, $q=120$, 因此,

$$a_5=120\times 120^{5-1}\approx 2.5\times 10^{10}.$$

答: 到第5代大约可以得到种子 2.5×10^{10} 粒.

例2 一个等比数列的第3项与第4项分别是12与18, 求它的第1项与第2项.

解: 设这个等比数列的第1项是 a_1, 公比是 q, 那么

$$a_1q^2=12, \tag{1}$$

$$a_1q^3=18. \tag{2}$$

解(1), (2)所组成的方程组, 得

$$q=\frac{3}{2}, \qquad a_1=\frac{16}{3},$$

因此，

$$a_1q=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}=8.$$

答：这个数列的第 1 项与第 2 项分别是$\frac{16}{3}$与8.

例 3 某种电讯产品自投放市场以来，经过三次降价，单价由原来的174元降到 58 元. 这种电讯产品平均每次降价的百分率大约是多少(精确到 1%)？

解： 设平均每次降价的百分率是x，那么每次降价后的单价应是降价前的$(1-x)$倍. 这样，将原单价与三次降价后的单价依次排列，就组成一个等比数列，记为$\{a_n\}$，其中

$$a_1=174,\quad a_4=58,\quad n=4.$$

由等比数列的通项公式，得

$$58=174\times(1-x)^{4-1}.$$

整理后，得

$$(1-x)^3=\frac{1}{3},$$

$$1-x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$=0.693,$$

因此，

$$x=1-0.693$$

$$\approx 31\%.$$

答：上述电讯产品平均每次降价的百分率大约是31%.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a, G, b 成等比数列，那么G 叫做 a 与 b 的**等比中项**.

如果G是a与b的等比中项，那么$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$，即$G^2=ab$，因此，

$$G=\pm\sqrt{ab}.$$

容易看出，一个等比数列从第2项起，每一项(有穷等比数列的末项除外)是它的前一项与后一项的等比中项.

练　习

1. 已知等比数列$\{a_n\}$，问：

(1) a_1能不能是零？　　(2) 公比q能不能是零？

2. 求下面等比数列的第4项与第5项：

(1) $5, -15, 45, \cdots$;　　(2) $1.2, 2.4, 4.8, \cdots$;

(3) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \cdots$;　　(4) $\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \cdots$.

3. (1) 一个等比数列的第9项是$\frac{4}{9}$，公比是$-\frac{1}{3}$，求它的第1项；

(2) 一个等比数列的第2项是10，第3项是20，求它的第1项与第4项.

4. (1) 已知等比数列$\{a_n\}$的$a_2=2$，$a_5=54$，求q;

(2) 已知等比数列$\{a_n\}$的$a_1=1$，$a_n=256$，$q=2$，求n.

下面我们来求等比数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

前n项的和S_n.

根据等比数列$\{a_n\}$的通项公式，等比数列$\{a_n\}$前n项的

和可以写成

$$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}. \tag{1}$$

我们知道，将等比数列的每一项乘以公比，就得到它后面相邻的一项．现将(1)的两边分别乘以公比 q，得到

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \tag{2}$$

比较(1)和(2)，我们看到，(1)的右边从第 2 项到最后一项，与(2)的右边从第 1 项到倒数第 2 项完全相同．于是，从(1)的两边分别减去(2)的两边，可以消去这些相同项，得到

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

由此得到 $q\neq1$ 时等比数列$\{a_n\}$的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.}$$

因为

$$a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq,$$

所以上面的公式还可以写成

$$\boxed{S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}.}$$

很明显，当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

例 4　求等比数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…的前 8 项的和．

解： $\because$　$a_1=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$，$n=8$，

$$\therefore\quad S_8=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}.$$

例5 某制糖厂今年制糖 5 万吨，如果平均每年的产量比上一年增加10%，那么从今年起，几年内可以使总产量达到 30 万吨(保留到个位)？

解：由题意可知，这个糖厂从今年起，平均每年的产量(万吨)组成一个等比数列，记为$\{a_n\}$，其中

$$a_1=5,\quad q=1+10\%=1.1,\quad S_n=30,$$

于是得到

$$\frac{5(1-1.1^n)}{1-1.1}=30.$$

整理后，得

$$1.1^n=1.6.$$

两边取对数，得

$$n\lg 1.1=\lg 1.6.$$

$$\therefore\qquad n=\frac{\lg 1.6}{\lg 1.1}=\frac{0.2041}{0.0414}\approx 5.$$

答：5 年内可以使总产量达到 30 万吨.

例6 已知无穷数列

$$10^{\frac{0}{5}},10^{\frac{1}{5}},10^{\frac{2}{5}},\cdots,10^{\frac{n-1}{5}},\cdots,$$

求证：

(1) 这个数列是等比数列；

(2) 这个数列中的任意一项是它后面第 5 项的$\frac{1}{10}$；

(3) 这个数列中任意两项的积仍然在这个数列中.

证明：(1) 这个数列中的第 n 项与第 $n+1$ 项分别是 $10^{\frac{n-1}{5}}$与$10^{\frac{n}{5}}$$(n\geqslant 1)$，于是第 $n+1$ 项与第 n 项的比为

$$\frac{10^{\frac{n}{5}}}{10^{\frac{n-1}{5}}}=10^{\frac{n}{5}-\frac{n-1}{5}}=10^{\frac{1}{5}},$$

即它们的比值是常数$10^{\frac{1}{5}}$. 因此这个数列是以$10^{\frac{1}{5}}$为公比的等比数列。

(2) 这个数列的第 n 项与第 $n+5$ 项分别是 $10^{\frac{n-1}{5}}$ 与 $10^{\frac{n+4}{5}}$ $(n\geq 1)$, 于是,

$$\frac{10^{\frac{n-1}{5}}}{10^{\frac{n+4}{5}}}=10^{\frac{n-1}{5}-\frac{n+4}{5}}=10^{-\frac{5}{5}}=\frac{1}{10}.$$

这说明, 这个数列中的任意一项经过 5 次等比的递增以后, 变大到它本身的10倍. 例如, 数列中第 3 项是$10^{\frac{2}{5}}$, 第 8 项就变大到 $10\times 10^{\frac{2}{5}}$.

(3) 从这个数列中任意取出两项, 假定它们分别是第 n_1 项与第 n_2 项, 即 $10^{\frac{n_1-1}{5}}$ 与$10^{\frac{n_2-1}{5}}$, 这里 $n_1, n_2\in N$, 于是

$$10^{\frac{n_1-1}{5}}\times 10^{\frac{n_2-1}{5}}=10^{\frac{n_1-1}{5}+\frac{n_2-1}{5}}=10^{\frac{(n_1+n_2-1)-1}{5}}.$$

因为 $n_1\geq 1$, $n_2\geq 1$, 所以 $n_1+n_2\geq 2$, 即

$$n_1+n_2-1\geq 1.$$

又因为 $n_1, n_2\in N$, 所以 $n_1+n_2-1\in N$. 这就证明 $10^{\frac{(n_1+n_2-1)-1}{5}}$ 属于上述数列, 而且是数列的第 n_1+n_2-1 项.

练　习

1. 根据下列各题中的条件, 求相应的等比数列$\{a_n\}$的 S_n:

(1) $a_1=3$, $q=2$, $n=6$;

(2) $a_1=2.4$, $q=-1.5$, $n=5$;

(3) $a_1=8$, $q=\frac{1}{2}$, $n=5$;

(4) $a_1=-2.7$, $q=-\frac{1}{3}$, $n=6$.

2. (1) 求等比数列 1, 2, 4, … 从第 5 项到第 10 项的和;

(2) 求等比数列$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \cdots$从第 3 项到第 7 项的和。

习 题 四

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\frac{3}{8}\times 2^n$。

(1) 计算$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_5}{a_4}$;

(2) 计算$\frac{a_{n+1}}{a_n}$;

(3) 这个数列是不是等比数列? 它的首项与公比各是多少?

2. 在等比数列$\{a_n\}$中:

(1) 已知$a_4=27$, $q=-3$, 求 a_7;

(2) 已知$a_2=18$, $a_4=8$, 求 a_1 与 q;

(3) 已知$a_5=4$, $a_7=6$, 求 a_9;

(4) 已知$a_5-a_1=15$, $a_4-a_2=6$, 求 a_3。

3. 求下列各题中两数的等比中项:

(1) 45 与 80; (2) $9\frac{3}{8}$ 与 $1\frac{1}{2}$;

(3) $7+3\sqrt{5}$ 与 $7-3\sqrt{5}$;

(4) $a^4+a^2b^2$ 与 $b^4+a^2b^2$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

4. (1) 在 9 与 243 中间插入两个数，使它们同这两个数成等比数列；

(2) 在 160 与 5 中间插入 4 个数，使它们同这两个数成等比数列。

5. 某林场计划第一年造林 80 亩，以后每年比前一年多造林 20%．第五年造林多少亩(保留到个位)?

6. 从盛满 20 升纯酒精的容器里倒出 1 升，然后用水填满，再倒出 1 升混合溶液，用水填满，这样继续进行，一共倒了 3 次，这时容器里还有多少升纯酒精(保留到个位)?

7. 抽气机的活塞每运动 1 次，从容器里抽出$\frac{1}{8}$的空气，因而使容器里空气的压强降低为原来的$\frac{7}{8}$．已知最初容器里空气的压强是 760 毫米高水银柱，求活塞运动 5 次后容器里空气的压强(保留到个位)．

8. 某种细菌在培养过程中，每 30 分钟分裂一次(一个分裂为两个)，经过 4 小时，这种细菌由 1 个可繁殖成多少个?

9. 电动机轴的直径从小到大共有 5 种尺寸，它们的数值(单位：mm)组成一个等比数列，其中最小的数值为 40，最大的数值为 100，求它们的公比(保留到千分位)．

10. 一个工厂今年生产某种机器 1080 台，计划到后年，把产量提高到每年生产机器 1920 台．如果每一年比上一年增长的百分率相同，这个百分率是多少(精确到 1%)?

11. 在等比数列$\{a_n\}$中：

(1) 已知 $a_1=-1.5$，$a_4=96$，求 q 与 S_4；

(2) 已知$q=\frac{1}{2}$, $S_5=3\frac{7}{8}$, 求 a_1 与 a_5;

(3) 已知$a_1=2$, $S_3=26$, 求 q 与 a_3;

(4) 已知$a_3=1\frac{1}{2}$, $S_3=4\frac{1}{2}$, 求 a_1 与 q.

12. 某工厂去年的产值是138万元，计划在今后5年内每年比上一年产值增长10%. 从今年起，到第5年这个工厂的年产值是多少？这5年的总产值是多少(精确到万元)？

13. 画一个边长2厘米的正方形，再以这个正方形的对角线为边画第2个正方形，以第2个正方形的对角线为边画第3个正方形，这样一共画了10个正方形. 求：

(1) 第10个正方形的面积；

(2) 这10个正方形的面积的和.

14. 一个球从100米高处自由落下，每次着地后又跳回到原高度的一半再落下. 当它第10次着地时，共经过了多少米(保留到个位)？

15. 求和：

(1) $(a-1)+(a^2-2)+(a^3-3)+\cdots+(a^n-n)$;

(2) $$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right).$$

16. 三个数成等比数列，它们的和等于14 它们的积等于64，求这三个数.

17. 设等比数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公比是 q, 求证

$$a_1a_2\cdots a_n=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

18. 一个等比数列的各项都是正数，求证这个数列的各项的对数组成等差数列.

19. 已知 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是等差数列，C 是正的常数，求证 C^{a_1}, $C^{a_2}, C^{a_3}, \cdots$ 是等比数列.

20. 已知无穷数列 $10^{\frac{0}{10}}, 10^{\frac{1}{10}}, 10^{\frac{2}{10}}, \cdots, 10^{\frac{n-1}{10}}, \cdots$，求证：

(1) 这个数列是以 $10^{\frac{1}{10}}$ 为公比的等比数列；

(2) 这个数列中的任意一项是它后面第 10 项的 $\frac{1}{10}$；

(3) 这个数列中的任意两项的积仍然在这个数列中.

二　数学归纳法

2.4　数学归纳法

在第 2.2 节中，我们是这样推导首项为 a_1，公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式的：

$$a_1 = a_1 = a_1 + 0d,$$
$$a_2 = a_1 + d = a_1 + 1d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

由此得到，等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

象这种由一系列有限的特殊事例得出一般结论的推理方法，通常叫做**归纳法**. 用归纳法可以帮助我们从具体事例中发现一般规律. 但是应该注意，仅根据一系列有限的特殊事

例所得出的一般结论有时是不正确的．例如一个数列的通项公式是

$$a_n=(n^2-5n+5)^2,$$

容易验证

$$a_1=1,\qquad a_2=1,\qquad a_3=1,\qquad a_4=1,$$

如果我们由此作出结论——对于任何 $n\in N$, $a_n=(n^2-5n+5)^2=1$ 都成立，那就是错误的．事实上，$a_5=25\neq1$.

对于由归纳法得到的某些与自然数有关的数学命题，我们常常采用下面的方法来证明它们的正确性：先证明当n取第一个值 n_0(例如 $n_0=1$)时命题成立，然后假设当 $n=k$ 时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立(因为证明了这一点，就可以断定这个命题对于 n 取第一个值后面的所有自然数也都成立)．这种证明方法叫做**数学归纳法**.

例如，我们用数学归纳法来证明：如果$\{a_n\}$是一个等差数列，那么

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

对一切 $n\in N$ 都成立.

证明： (1) 当 $n=1$时，左边是 a_1, 右边是 $a_1+0d=a_1$, 等式是成立的.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，就是

$$a_k=a_1+(k-1)d,$$

那么，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+d\\&=a_1+(k-1)d+d\\&=a_1+[(k+1)-1]d.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

根据(1)，$n=1$ 时等式成立，再根据(2)，$n=1+1=2$ 时等式也成立．由于 $n=2$ 时等式成立，再根据(2)，$n=2+1=3$时等式也成立．这样递推下去，就知道 $n=4, 5, 6, \cdots$时等式都成立．因此根据(1)和(2)可以断定，等式对任何 $n\in N$ 都成立。

从上面的例子看到，用数学归纳法证明一个与自然数有关的命题的步骤是：

(1) 证明当 n 取第一个值 n_0(例如 $n_0=1$ 或 2 等)时结论正确；

(2) 假设当 $n=k$($k\in N$，且$k\geqslant n_0$)时结论正确，证明当 $n=k+1$ 时结论也正确．

在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有自然数 n 都正确．

例 用数学归纳法证明

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

证明： (1) 当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1$，等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，就是

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2,$$

那么，

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=k^2+[2(k+1)-1]\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立。

根据(1)和(2)，可知等式对任何 $n\in N$ 都成立。

本例所证明的等式可以用图2-7表示出来.

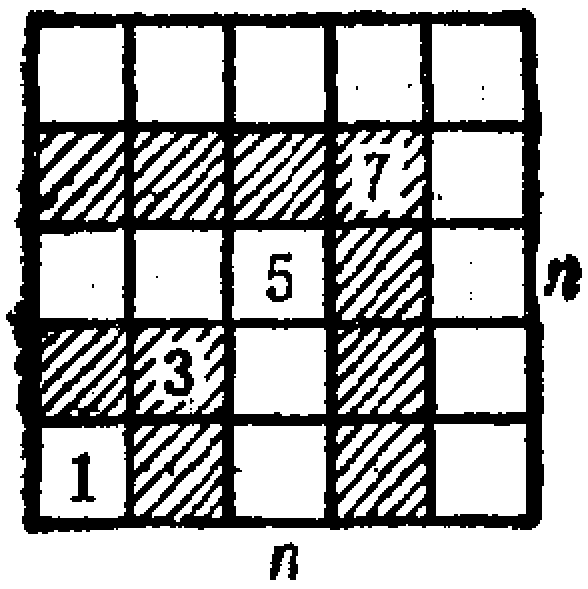


图 2-7

用数学归纳法证明命题的这两个步骤，是缺一不可的. 从上面计算数列$\{a_n\}$（其中$a_n=(n^2-5n+5)^2$）各项的值可以看到，只完成步骤(1)而缺少步骤(2)，就可能得出不正确的结论，因为单靠步骤(1)，我们无法递推下去，所以，对于n取2, 3, 4, 5, …时命题是否正确，我们无法判定. 同样，只有步骤(2)而缺少步骤(1)，也可能得出不正确的结论. 例如，假设$n=k$时，等式

$$2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1$$

成立，就是

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1,$$

那么，

$$\begin{aligned}&2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)\\=&k^2+k+1+2(k+1)\\=&(k+1)^2+(k+1)+1.\end{aligned}$$

这就是说，如果$n=k$时等式成立，那么$n=k+1$时等式也成立. 但如果仅根据这一步就得出等式对于任何$n\in N$都成立的结论，那就错了. 事实上，当$n=1$时，上式左边$=2$，右边$=1^2+1+1=3$，左边$\neq$右边. 这也说明，如果缺少步骤(1)这个基础，步骤(2)就没有意义了.

练　习

用数学归纳法证明：

1. $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

2. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$。

3. 首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是

$$a_n=a_1q^{n-1}。$$

2.5 数学归纳法的应用举例

例 1 用数学归纳法证明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证明：（1）当 $n=1$ 时，左边是 $1^2=1$，右边是 $\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$，等式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时等式成立，就是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

那么，

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.\end{aligned}$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2)，可知等式对任何 $n\in N$ 都成立.

用这个公式可以计算如图 2-8 所示的一堆物品的总数。

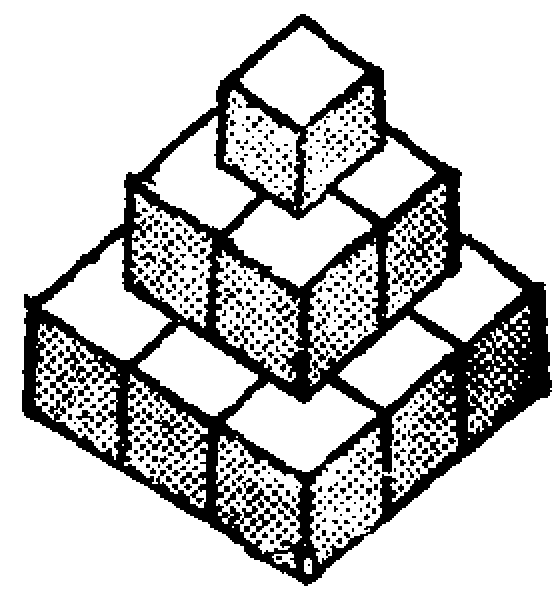


图 2-8

例 2 用数学归纳法证明 $x^{2n}-y^{2n}(n\in N)$ 能被 $x+y$ 整除.

证明: (1) 当 $n=1$ 时，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 能被 $x+y$ 整除.

(2) 假设当 $n=k(k\in N)$ 时，$x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x+y$ 整除，那么

$$
\begin{aligned}
& x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)} \\
& =x^2\cdot x^{2k}-y^2\cdot y^{2k} \\
& =x^2\cdot x^{2k}-x^2\cdot y^{2k}+x^2\cdot y^{2k}-y^2\cdot y^{2k} \\
& =x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2).
\end{aligned}
$$

因为 $x^{2k}-y^{2k}$ 与 x^2-y^2 都能被 $x+y$ 整除，所以它们的和 $x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)$ 也能被 $x+y$ 整除. 这就是说，当 $n=k+1$ 时，$x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}$ 能被 $x+y$ 整除.

根据(1)和(2)，可知命题对任何 $n\in N$ 都成立.

例 3 平面内有 n 条直线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点，证明交点的个数 $f(n)$ 等于 $\frac{1}{2}n(n-1)$.

证明: (1) 当 $n=2$ 时，两条直线的交点只有 1 个，即 $f(2)=1$. 又当 $n=2$ 时，

$$\frac{1}{2}\times 2\times(2-1)=1,$$

因此命题成立.

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立，就是说，平面内满足题设的

任何 k 条直线的交点的个数 $f(k)$ 等于 $\frac{1}{2}k(k-1)$. 现在来考虑平面内有 $k+1$ 条直线的情况. 任取其中的 1 条直线, 记为 l(图2-9). 由上述归纳法的假设, 除 l 以外的其他 k 条直线的交点的个数 $f(k)$ 等于 $\frac{1}{2}k(k-1)$. 另外, 因为已知任何两条直线不平行, 所以直线 l 必与平面内其他 k 条直线都相交; 又因为已知任何三条直线不过同一点, 所以上面的 k 个交点两两不相同, 且与平面内其他的 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个交点也两两不相同, 从而平面内交点的个数是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}k(k-1)+k\\&=\frac{1}{2}k[(k-1)+2]\\&=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1].\end{aligned}$$

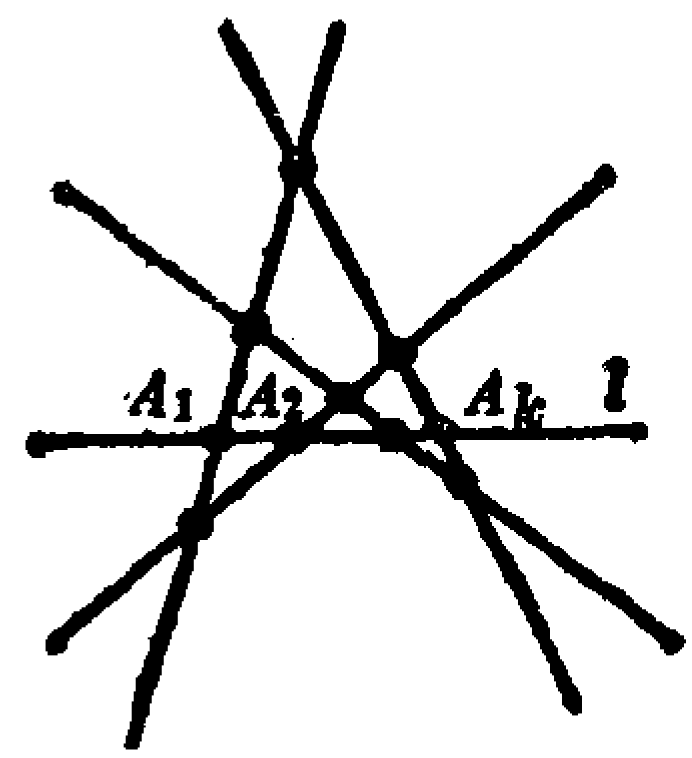


图 2-9

这就是说, 当 $n=k+1$ 时, $k+1$ 条直线的交点的个数 $f(k+1)$ 等于 $\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]$.

根据(1)和(2), 可知命题对任何 $n\geq 2$ 且 $n\in N$ 都成立.

例 4 设 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, 用数学归纳法证明

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha$$

$$=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

证明：（1）当 $n=1$ 时，左边是 $\sin\alpha$，右边是

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha,$$

等式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时等式成立，就是

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin k\alpha$$

$$=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

那么，

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha$$

$$=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\sin(k+1)\alpha$$

$$=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin(k+1)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2k+1}{2}\alpha+\cos\frac{2k+1}{2}\alpha-\cos\frac{2k+3}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2k+3}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{[(k+1)+1]\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立。

根据(1)和(2)，可知等式对任何 $n\in N$ 都成立。

练 习

用数学归纳法证明：

1. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$。
2. $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$。
3. $x^n-y^n(n\in N)$ 能被 $x-y$ 整除。
4. 凸 n 边形的内角和 $f(n)=(n-2)\pi\ \ (n\geqslant3)$。

习 题 五

1. 用数学归纳法证明：

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$;

(2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$;

(3) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

(4) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

2. 用数学归纳法证明等差数列、等比数列前 n 项和的公式。

3. 用数学归纳法证明：

(1) x^n+y^n(n 是正奇数)能被 $x+y$ 整除；

(2) $n^3+5n(n\in N)$ 能被 6 整除；

(3) $3^{4n+2}+5^{2n+1}(n\in N)$ 能被 14 整除；

(4) 三个连续自然数的立方和能被 9 整除。

4. 证明凸 n 边形的对角线的条数

$$f(n)=\frac{1}{2}n(n-3)\quad(n\geqslant 3).$$

5. 用数学归纳法证明：

(1) 如果 $\sin\alpha\neq 0$，那么

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 2^2\alpha\cdots\cos 2^{n-1}\alpha=\frac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}.$$

(2) 如果 $\sin\alpha\neq 0$，那么

$$\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha$$
$$=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

小　结

一、本章主要内容是数列的概念，等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式，数学归纳法及其应用.

二、按照一定的次序排列的一列数叫做数列. 实际上，对于一个定义域为自然数集 N(或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$)的函数来说，数列就是这个函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.

三、等差数列与等比数列是两种较为简单而常用的数列，它们都有通项公式及前 n 项和的公式. 要掌握得出这些公式的方法，并要会运用数学归纳法对这些公式进行严格证

明.

四、数学归纳法是一种证明与自然数 n 有关的数学命题的重要方法. 用数学归纳法证明命题的步骤是:

(1) 证明当 n 取第一个值 n_0(例如 $n_0=1$, $n_0=2$ 等) 时结论正确;

(2) 假设当 $n=k$($k\in N$, 且 $k\geqslant n_0$)时结论正确, 证明当 $n=k+1$ 时结论也正确.

在完成了这两个步骤以后, 就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有自然数 n 都正确.

上面第一步是递推的基础, 第二步是递推的依据, 两者缺一不可.

复习参考题二

A 组

1. 数列与数的集合这两个概念有什么区别与联系?

2. 已知数列的每一项是它的序号的平方减去序号的5倍, 求这个数列的第8项与第15项. 40与66是这个数列中的项吗?

3. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n-2$, 求证这个数列是等差数列, 并写出它的通项公式;

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}$, 求证这个数列是等比数列, 并写出它的通项公式.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中:

(1) 已知 a_1, a_n, n, 求 d;

(2) 已知 a_1, a_n, d, 求 n 与 S_n;

(3) 已知 a_n, n, S_n, 求 a_1 与 d;

(4) 已知 a_1, n, S_n, 求 d 与 a_n.

5. 在等比数列$\{a_n\}$中:

(1) 已知 n, q, a_n, 求 a_1 与 S_n;

(2) 已知 q, n, S_n, 求 a_1 与 a_n;

(3) 已知 a_1, q, S_n, 求 a_n;

(4) 已知 q, a_n, S_n, 求 a_1.

6. 已知 a^2, b^2, c^2 成等差数列, 求证$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$也成等差数列.

7. 已知 a, b, c, d 成等比数列, 求证:

(1) $a+b$, $b+c$, $c+d$成等比数列;

(2) $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$.

8. (1) 在 a 与 b 中间插入 10 个数, 使这 12 个数成等差数列, 求这个数列的第 6 项;

(2) 已知 $b>a>0$, 在 a 与 b 中间插入 10 个数, 使这 12 个数成等比数列, 求这个数列的第 10 项.

9. (1) 已知$\{x_n\}$是等差数列, $y_n=ax_n+b$, 其中 a, b 是常数, $a\neq 0$, 求证 $\{y_n\}$ 是等差数列;

(2) 已知$\{x_n\}$是等比数列, $y_n=ax_n$, 其中 a 是不为零的常数, 求证$\{y_n\}$是等比数列.

10. 解方程 $\lg x+\lg x^2+\cdots+\lg x^n=n^2+n$.

11. 成等差数列的三个正数的和等于 15, 并且这三个数分别加上 1, 3, 9 后又成等比数列. 求这三个数.

12. 有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是 37，第二个数与第三个数的和是 36. 求这四个数.

13. 如果 a, b, c 成等差数列，x, y, z 成等比数列，且 x, y, z 都是正数，求证

$$(b-c)\log_m x+(c-a)\log_m y+(a-b)\log_m z=0.$$

14. 求下面数列的前 n 项的和：

(1) $1\times 4,\ 2\times 5,\ 3\times 6,\ \cdots,\ n(n+3), \cdots$;

(2) $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{8}, \cdots, \left(n+\frac{1}{2^n}\right), \cdots$.

用数学归纳法证明（第 15 题～16 题）：

15. (1) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3);$$

(2) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$$+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n).$$

16. (1) $4^{2n+1}+3^{n+2}\ (n\in N)$ 能被 13 整除；

(2) $6^{2n-1}+1(n\in N)$ 能被 7 整除.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的项满足

$$\begin{cases}a_1=b,\\ a_{n+1}=ca_n+d,\end{cases}$$

其中 $c\neq 1$. 证明这个数列的通项公式是

$$a_n=\frac{bc^n+(d-b)c^{n-1}-d}{c-1}.$$

18. 已知数列

$$\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{3\cdot 4},\quad \cdots,\quad \frac{1}{n(n+1)},\quad \cdots.$$

计算 S_1, S_2, S_3，由此推测计算 S_n 的公式，然后用数学归纳法证明这个公式.

B 组

19. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2, 0, 2, 0;

(2) 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-11n+10$. 从第几项起，这个数列中的项都是正数？都大于 70？

21. 长方体的三条棱的长成等差数列，它的对角线的长是 $\sqrt{14}$cm，全面积是 22cm²，求它的体积.

22. 三角形的三个内角成等差数列，它的面积是 $10\sqrt{3}$ cm²，周长是 20cm，求三角形三边的长.

23. 已知 $\sin\theta, \sin\alpha, \cos\theta$ 成等差数列，$\sin\theta, \sin\beta, \cos\theta$ 成等比数列，求证 $2\cos2\alpha=\cos2\beta$.

24. 求数列 9, 99, 999, 9999, … 的前 n 项的和.

25. 已知 a, b, c 成等比数列，m 是 a, b 的等差中项，n 是 b, c 的等差中项，求证 $\frac{a}{m}+\frac{c}{n}=2$.

26. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，计算数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right\}$ 的前 n 项的和（提示：将各项的分母有理化）.

27. 利用等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式证明

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},$$

这里 n 是自然数，a, b 是不为零的常数，且 $a\neq b$。

28. 用数学归纳法证明：

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$$

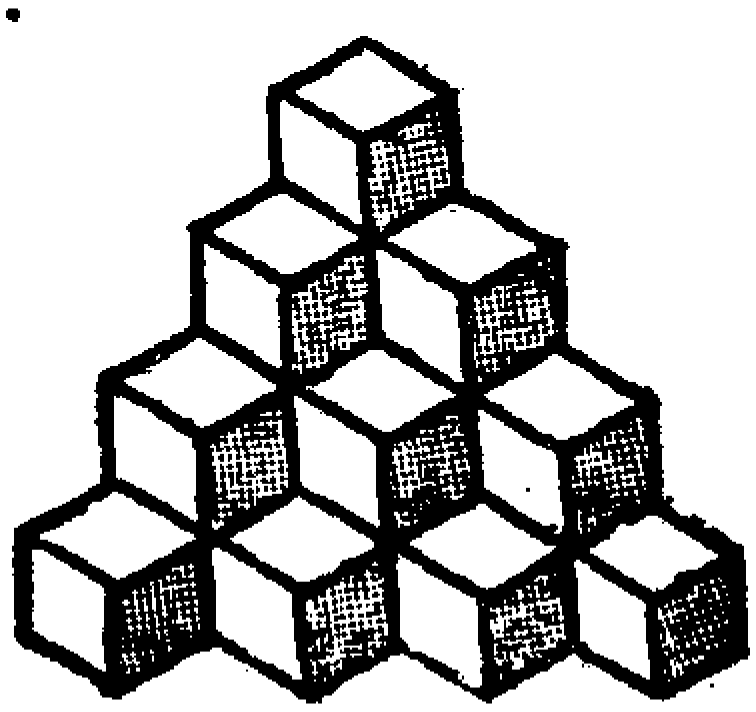
$$=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x\quad(x\neq k\pi,\ k\in Z).$$

29. 用归纳法求数列

$$1,\ (1+2+1),\ (1+2+3+2+1),\cdots,$$
$$(1+2+\cdots+n+\cdots+2+1),\cdots$$

的通项公式及前 n 项和的公式，然后用数学归纳法证明所得公式。

30. 一堆零件堆积如下图，第 1 层 1 个，第 2 层 1+2 个，第 3 层 1+2+3 个，……，求 n 层的总个数，然后用数学归纳法证明所得公式。



（第30题）

第三章 不 等 式

3.1 不等式

我们已经学过一些简单的不等式，例如

$$a+2>a+1, \tag{1}$$

$$a^2+3>3a, \tag{2}$$

$$3x+1<2x+6, \tag{3}$$

$$x^2<a. \tag{4}$$

在两个不等式中，如果每一个的左边都大于右边，如(1)和(2)，或者每一个的左边都小于右边，如(3)和(4)，那么这样的两个不等式就是同向不等式．如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，如(1)和(3)，那么这两个不等式就是异向不等式．

我们知道，实数可以比较大小．在数轴上，两个不同的点A与B分别表示两个不同的实数a与b，右边的点表示的数比左边的点表示的数大．从实数减法在数轴上的表示可以看出，a, b之间具有以下性质：

如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$；如果 $a-b$ 等于零，那么 $a=b$．反过来也对．这就是说：

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b.$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就

可以了.

例1 比较$(x+1)(x+2)$与$(x-3)(x+6)$的大小.

解: $\because$
$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)-(x-3)(x+6)\\&=(x^2+3x+2)-(x^2+3x-18)\\&=20>0,\end{aligned}$$
$\therefore$
$$(x+1)(x+2)>(x-3)(x+6).$$

例2 已知$x\neq0$, 比较$(x^2+1)^2$与x^4+x^2+1的大小.

解:
$$\begin{aligned}&(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)\\&=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1\\&=x^2.\end{aligned}$$
由$x\neq0$, 得$x^2>0$. 从而
$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1.$$

练 习

1. 比较$(x+5)(x+7)$与$(x+6)^2$的大小.
2. 已知$a\neq0$, 比较$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$与$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$的大小.
3. 比较$\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$与2的大小$(n\neq0)$.

3.2 不等式的性质

不等式有下面一些性质.

定理1 **如果$a>b$, 那么$b<a$; 如果$b<a$, 那么$a>b$.** 即
$$a>b\Leftrightarrow b<a.$$

证明： 由正数的相反数是负数，负数的相反数是正数，得

$$a>b \Longrightarrow a-b>0 \Longrightarrow -(a-b)<0 \Longrightarrow b-a<0 \Longrightarrow b<a;$$

$$b<a \Longrightarrow b-a<0 \Longrightarrow -(b-a)>0 \Longrightarrow a-b>0 \Longrightarrow a>b.$$

即

$$a>b \Longleftrightarrow b<a.$$

定理 1 说明，把不等式的左边和右边交换，所得不等式与原不等式异向。

定理 2 如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$。即

$$a>b, b>c \Longrightarrow a>c.$$

证明： 根据两个正数的和仍是正数，得

$$\left.\begin{array}{l} a>b \Longrightarrow a-b>0 \\ b>c \Longrightarrow b-c>0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow (a-b)+(b-c)>0 \Longrightarrow a-c>0 \Longrightarrow a>c.$$

即

$$a>b, b>c \Longrightarrow a>c.$$

根据定理 1，定理 2 还可以表示为

$$c<b, b<a \Longrightarrow c<a.$$

（下面一些定理也可根据定理 1 表示为另一种形式.）

定理 3 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$。即

$$a>b \Longrightarrow a+c>b+c.$$

证明： $a>b \Longrightarrow a-b>0 \Longrightarrow (a+c)-(b+c)>0$

$$\Longrightarrow a+c>b+c.$$

定理 3 说明，不等式的两边都加上同一个实数，所得不等式与原不等式同向．由此很容易得出：

$$a+b>c\Longrightarrow a+b+(-b)>c+(-b)\Longrightarrow a>c-b.$$

一般地说，**不等式中任何一项的符号变成相反的符号后，可以把它从一边移到另一边．**

推论 $\boldsymbol{a>b, c>d\Longrightarrow a+c>b+d.}$

这是因为

$$\left.\begin{aligned}a>b\Longrightarrow a+c>b+c\\ c>d\Longrightarrow b+c>b+d\end{aligned}\right\}\Longrightarrow a+c>b+d.$$

很明显，不等式的这个性质可以推广到任意个同向不等式两边分别相加．这就是说，**两个或者几个同向不等式两边分别相加，所得不等式与原不等式同向．**

定理 4 如果 $\boldsymbol{a>b}$，$\boldsymbol{c>0}$，那么 $\boldsymbol{ac>bc}$；如果 $\boldsymbol{a>b}$，$\boldsymbol{c<0}$，那么 $\boldsymbol{ac<bc}$．即

$$\boldsymbol{a>b, c>0\Longrightarrow ac>bc;\quad a>b, c<0\Longrightarrow ac<bc.}$$

证明：根据同号相乘得正，异号相乘得负，得

$$\left.\begin{aligned}a>b, c>0\Longrightarrow a-b>0\\ c>0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow (a-b)c>0$$

$$\Longrightarrow ac-bc>0\Longrightarrow ac>bc;$$

$$\left.\begin{aligned}a>b, c<0\Longrightarrow a-b>0\\ c<0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow (a-b)c<0$$

$$\Longrightarrow ac-bc<0\Longrightarrow ac<bc.$$

推论 1 $\boldsymbol{a>b>0, c>d>0\Longrightarrow ac>bd.}$

这是因为

$$\left.\begin{array}{l}a>b,\ c>0\Longrightarrow ac>bc\\ c>d,\ b>0\Longrightarrow bc>bd\end{array}\right\}\Longrightarrow ac>bd.$$

很明显，不等式的这个性质可以推广到任意个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘．这就是说，**两个或者几个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向**．由此，我们可以得到

推论 2 $a>b>0\Longrightarrow a^n>b^n$ $(n\in Z$，且 $n>1)$．

定理 5 **如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $(n\in Z$，且 $n>1)$．**即

$$a>b>0\Longrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

证明： 用反证法．

假定 $\sqrt[n]{a}$ 不大于 $\sqrt[n]{b}$．则或者 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，或者 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$．但

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Longrightarrow a<b,$$

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\Longrightarrow a=b.$$

这些都同已知条件 $a>b$ 矛盾，所以 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$．即

$$a>b>0\Longrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

练　习

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由：

   (1) $a>b\Longrightarrow ac>bc$；

   (2) $a>b\Longrightarrow ac^2>bc^2$．

2. (1) 如果 $a>b$，$c<d$，能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小？举例说明．

(2) 如果 $a>b, c>d$, 能否断定 $a-c$ 与 $b-d$ 谁大谁小? 举例说明.

(3) 如果 $a>b, c>d$, 是否一定得出 $ac>bd$? 举例说明.

(4) 如果 $a>b$, $c<d$, c, d 都不是零, 是否一定得出 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$? 举例说明.

3. 求证:

(1) $a>b, c<d \Longrightarrow a-c>b-d$;

(2) $a>b>0, c<d<0 \Longrightarrow ac<bd$;

(3) $a>b, ab>0 \Longrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

3.3 不等式的证明

由于不等式的形式是多种多样的，所以不等式的证明方法也就不同. 下面举例说明一些常用的证明方法.

例 1 求证 $x^2+3>3x$.

我们已经知道, $a-b>0 \Longleftrightarrow a>b$. 因此, 要证明$a>b$, 只要证明 $a-b>0$. 这是证明不等式常用的一种方法，通常叫做**比较法**.

证明: $\because$ $(x^2+3)-3x$

$$=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0,$$

$\therefore$ $x^2+3>3x$.

注意：为了确定不等式两边的差的正负，有时要把这个

差变形为一个常数，或者变形为一个常数与一个或几个平方的和的形式，也可变形为几个因式的积的形式，以便于判断其正负.

例 2 已知 $a, b\in R^+$，并且 $a\neq b$，求证

$$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3.$$

证明： $(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)$

$$=(a^5-a^3b^2)-(a^2b^3-b^5)$$

$$=a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(a^3-b^3)$$

$$=(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2).$$

$\because$ $a, b\in R^+$,

$\therefore$ $a+b>0$,

$$a^2+ab+b^2>0.$$

又因为 $a\neq b$，可知

$$(a-b)^2>0.$$

$\therefore$ $(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0$,

即

$$(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)>0.$$

$\therefore$ $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3.$

练 习

1. 求证 $(x-3)^2>(x-2)(x-4)$.
2. 已知 $a\neq b$，求证 $a^2+3b^2>2b(a+b)$.
3. 已知 $a, b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证

$$a^4+b^4>a^3b+ab^3.$$

4. 已知 $a\neq 2$，求证 $\frac{4a}{4+a^2}<1$.

证明不等式还常常用到下面的定理和推论.

定理 1 如果 a，$b\in R$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

证明：$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$.

当 $a\neq b$ 时，$(a-b)^2>0$，当 $a=b$ 时，$(a-b)^2=0$，所以

$$(a-b)^2\geqslant 0,$$

即

$$a^2+b^2-2ab\geqslant 0.$$

$$\therefore \quad a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

推论 如果 $a,b\in R^+$，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

这是因为

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b}\Longrightarrow a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\Longrightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R^+$，且 $n>1$，那么

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

叫做这 n 个正数的**算术平均数**，

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

叫做这 n 个正数的**几何平均数**.

上面的推论就是：**两个正数的算术平均数不小于（即大于**

或等于)它们的几何平均数.

例 3 已知 $x, y\in R^+$, $x+y=S$, $xy=P$. 求证:

(1) 如果 P 是定值, 那么当且仅当 $x=y$ 时, S 的值最小;

(2) 如果 S 是定值, 那么当且仅当 $x=y$ 时, P 的值最大.

证明: (1) 因为 $x, y\in R^+$, 所以

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

$$x+y\geqslant2\sqrt{xy}.$$

即

$$S\geqslant2\sqrt{P}\text{(当且仅当 } x=y \text{ 时取“=”号)}.$$

这就是说, 如果 P 是定值, 那么当且仅当 $x=y$ 时, S 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2) 从(1)的证明可知 $S\geqslant2\sqrt{P}$. 现将它化成

$$\sqrt{P}\leqslant\frac{S}{2},$$

$$\therefore \quad P\leqslant\frac{S^2}{4}\text{(当且仅当 } x=y \text{ 时取“=”号)}.$$

这就是说, 如果 S 是定值, 那么当且仅当 $x=y$ 时, P 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

定理 2 **如果 $a, b, c\in R^+$, 那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号).**

证明: $\because$ $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$$

$$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]$$
$$-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\times[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$$

很明显，当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号.

推论　如果 $a, b, c\in R^+$，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号）.

这是因为

$$(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3\geqslant 3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$$

$$\Longrightarrow a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\Longrightarrow\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

例 4　已知 a, b, c 是不全相等的正数，求证

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

我们可以利用某些已经证明过的不等式（如上面的定理及其推论）作为基础，再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式. 这种证明方法通常叫做**综合法**.

证明：$\because\quad b^2+c^2\geqslant 2bc,\ a>0,$

$$\therefore\quad a(b^2+c^2)\geqslant 2abc.\tag{1}$$

同理，

$$b(c^2+a^2)\geqslant 2abc,\tag{2}$$

$$c(a^2+b^2)\geqslant 2abc.\tag{3}$$

因为 a, b, c 不全相等，所以(1)，(2)，(3)中至少有一式不能取“$=$”号.

$$\therefore \quad a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

例 5 已知 $a, b, c, d \in R^+$, 求证

$$(ab+cd)(ac+bd) \geqslant 4abcd.$$

证明: 由 $a, b, c, d \in R^+$, 得

$$\frac{ab+cd}{2} \geqslant \sqrt{ab \cdot cd}>0,$$

$$\frac{ac+bd}{2} \geqslant \sqrt{ac \cdot bd}>0.$$

$$\therefore \quad \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4} \geqslant abcd,$$

即

$$(ab+cd)(ac+bd) \geqslant 4abcd.$$

例 6 已知 $x, y, z \in R^+$, 求证

$$(x+y+z)^3 \geqslant 27xyz.$$

证明: $\because \quad \frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}>0,$

$$\therefore \quad \frac{(x+y+z)^3}{27} \geqslant xyz,$$

即

$$(x+y+z)^3 \geqslant 27xyz.$$

练 习

1. 已知 a, b, c 是不全相等的正数, 求证:

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$;

(2) $a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

2. 已知 $x, y, z \in R^+$, 求证:

(1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$;　　　　(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 3$.

3. 求证当 $x>0$ 时，$x+\frac{16}{x}$ 的最小值是 8.

例 7　已知 $a, b, m\in R^{+}$，并且 $a<b$，求证

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

证明不等式时，有时可以从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的条件，把证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题．如果能够肯定这些条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立．这种证明方法通常叫做**分析法**.

证明： 因为 $a, b, m\in R^{+}$，为了要证明

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b},$$

只需证明

$$(a+m)b>a(b+m),$$

即

$$bm>am,$$

因此，只需证明

$$b>a.$$

因为 $b>a$ 成立(题设)，所以

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$$

成立.

例 8　求证　$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

证法一：为了要证明

$$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6};$$

因为$\sqrt{2}+\sqrt{7}$和$\sqrt{3}+\sqrt{6}$都是正数，所以只需证明

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2.$$

展开得

$$9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18},$$

即

$$2\sqrt{14}<2\sqrt{18},$$

$$\sqrt{14}<\sqrt{18},$$

$$14<18.$$

因为 $14<18$ 成立，所以

$$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

成立.

证法二：$\because \quad 14<18,$

$\therefore \quad \sqrt{14}<\sqrt{18},$

$$2\sqrt{14}<2\sqrt{18},$$

$$9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18},$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2,$$

$\therefore \quad \sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}.$

注意：证法二用的是综合法．可以看出，综合过程有时正好是分析过程的逆推．

例 9　如果 $a, b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

证法一：证明

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2,$$

就是证明

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b).$$

因为 $a+b>0$，所以要证明上式，只需证明

$$a^2-ab+b^2>ab,$$

$$a^2-2ab+b^2>0,$$

即

$$(a-b)^2>0.$$

因为 $a\neq b$，最后的不等式 $(a-b)^2>0$ 成立，所以

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2$$

成立.

证法二：因为 $a\neq b$，所以

$$(a-b)^2>0,$$

$$a^2-2ab+b^2>0,$$

$$a^2-ab+b^2>ab.$$

又因为 $a+b>0$，所以

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b),$$

即

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

（证法一是分析法，证法二是综合法．还可用比较法．请同学们自己证明.）

例 10　已知 $x>-1$，且 $x\neq 0$，$n\in N$，且 $n\geqslant 2$，求证

$$(1+x)^n>1+nx.$$

一个不等式如果是关于自然数的命题，可试用数学归纳法来证明.

证明：(1) 当 $n=2$ 时，

左边$=(1+x)^2=1+2x+x^2$,

右边$=1+2x$.

因为$x^2>0$,所以原不等式成立.

(2) 假设当$n=k(k\geqslant 2)$时不等式成立,就是

$$(1+x)^k>1+kx.$$

当$n=k+1$时,因为$x>-1$,所以$1+x>0$,于是

左边$=(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)$

$$>(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2,$$

右边$=1+(k+1)x$.

因为$kx^2>0$,所以左边>右边,即

$$(1+x)^{k+1}>1+(k+1)x.$$

这就是说,原不等式当$n=k+1$时也成立.

根据(1)和(2),原不等式对任何不小于2的自然数都成立.

练 习

1. 求证$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
2. 求证$ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.
3. 求证$2^n>n\ (n\in N)$.

习 题 六

1. 比较$(2a+1)(a-3)$与$(a-6)(2a+7)+45$的大小.
2. 比较$(x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)$与$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$的大小.
3. 设$x>1$,比较x^3与x^2-x+1的大小.

4. 求证：

(1) $a>b \Longrightarrow c-a<c-b$;

(2) $a>b>0, c>0 \Longrightarrow \frac{c}{a}<\frac{c}{b}$;

(3) $a>b>0, c<0 \Longrightarrow \frac{c}{a}>\frac{c}{b}$;

(4) $a>b>0,\ c>d>0 \Longrightarrow \sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

5. 已知 $a>b$，求证

$$a^3-b^3>ab(a-b).$$

6. 已知 $ad \neq bc$ 求证

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2.$$

7. 求证 $a^2+b^2+5 \geqslant 2(2a-b)$.

8. 已知 $a \neq b$，求证 $a^4+6a^2b^2+b^4>4ab(a^2+b^2)$.

9. 求证 $a^2+b^2 \geqslant 2(a-b-1)$.

10. 求证 $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant ab+bc+cd+da$.

11. 求证 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$.

12. 已知 $a, b \in R^+$，且 $a \neq b$，求证

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}.$$

13. 已知 $a, b, c \in R^+$，求证

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c} \geqslant abc.$$

14. 求函数 $y=3x^2+\frac{1}{2x^2}$ 的最小值。

15. 已知$x>0$，求证$2-3x-\dfrac{4}{x}$的最大值是$2-4\sqrt{3}$。

16. 已知$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求证$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta$的最小值是2。

17. 求证在直径等于d的圆的内接矩形中，面积最大的是正方形，它的面积等于$\dfrac{1}{2}d^2$。

18. 求证：

(1) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$；　　(2) $\lg x+\log_x 10\geqslant 2\ (x>1)$。

19. 已知$a, b, c\in R^+$，求证：

(1) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)\geqslant 9$；

(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$。

20. 已知$n>0$，求证$n+\dfrac{4}{n^2}\geqslant 3$。

21. 求证：

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\sqrt{5}-2$。

22. 求证$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}\ (a\geqslant 3)$。

23. 求证：

(1) $2^n>2n+1\ (n\in N$，且$n\geqslant 3)$；

(2) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}\ (n\in N$，且$n\geqslant 2)$。

3.4 不等式的解法

在初中，已经学习过一元一次不等式、一元二次不等式的

解法．我们知道，如果两个不等式的解集相等，那么这两个不等式就叫做**同解不等式**．一个不等式变形为另一个不等式时，如果这两个不等式是同解不等式，那么这种变形叫做**不等式的同解变形**．

我们知道，任何一个一元一次不等式，经过不等式的同解变形后，都可以化成

$$ax>b \quad (a\neq 0)$$

的形式．很明显，如果 $a>0$，那么 $ax>b$ 的解集是$\left\{x\middle|x>\frac{b}{a}\right\}$；如果 $a<0$，那么 $ax>b$ 的解集是$\left\{x\middle|x<\frac{b}{a}\right\}$．

例 1　解不等式$2(x+1)+\frac{x-2}{3}>\frac{7x}{2}-1$．

解： 两边都乘以 6，得

$$12(x+1)+2(x-2)>21x-6,$$

$$14x+8>21x-6.$$

移项，整理后，得

$$-7x>-14.$$

两边都除以 -7，得解集

$$\{x|x<2\}.$$

我们知道，几个不等式可以组成不等式组．这几个不等式的解集的交集就是这个不等式组的解集．

例 2　解不等式组

$$\begin{cases}10+2x\leqslant 11+3x,\\5x-3\leqslant 4x-1,\\7+2x>6+3x.\end{cases}$$

解： 因为各不等式的解集分别是

$$\{x|x\geqslant -1\},$$
$$\{x|x\leqslant 2\},$$
$$\{x|x<1\},$$

所以不等式组的解集是

$$\begin{aligned}&\{x|x\geqslant -1\}\cap\{x|x\leqslant 2\}\cap\{x|x<1\}\\=&\{x|-1\leqslant x<1\}.\end{aligned}$$

我们知道，任何一个一元二次不等式，经过不等式的同解变形后，都可以化成

$$ax^2+bx+c>0,\ \text{或}\ ax^2+bx+c<0\quad(a>0)$$

的形式(这是因为，如果二次项系数小于零，两边乘以 -1，并把不等号改变方向，仍可化成上面两种形式之一，其中$a>0$)。

一元二次不等式的解集与一元二次方程的根以及二次函数的图象密切相关，如第 99 页表中所示.

例 3 解不等式$-x^2+5x>6$.

解： 原不等式可变形为

$$x^2-5x+6<0.$$

因为$\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 6=1>0$，解方程

$$x^2-5x+6=0,$$

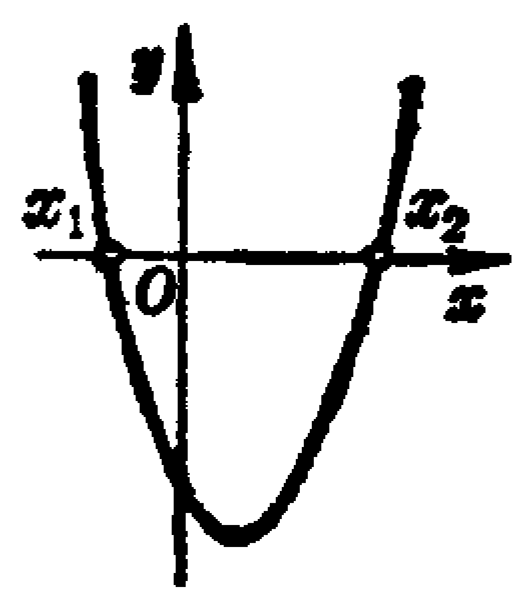
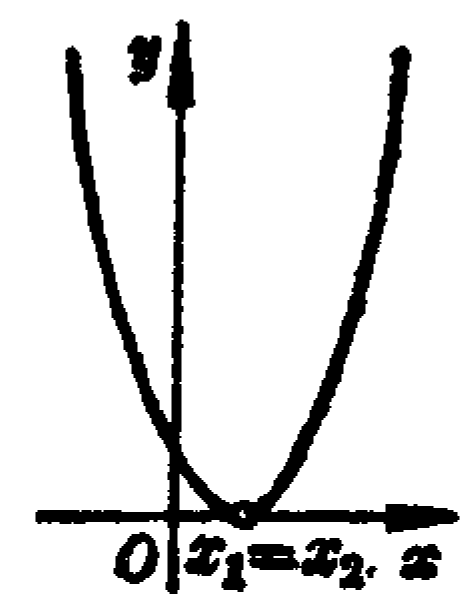
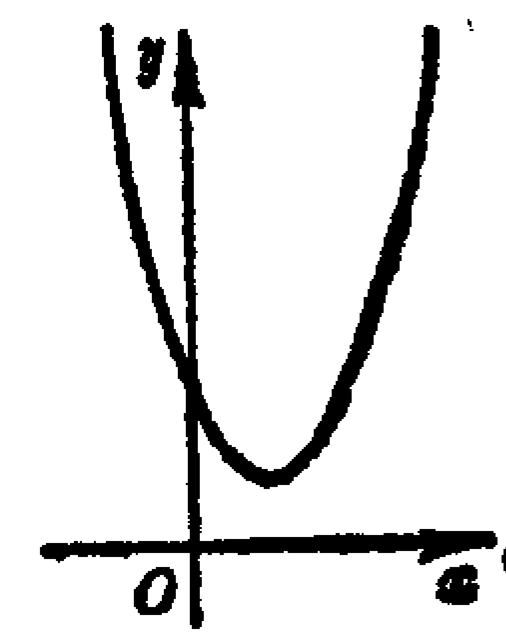
得

$$x_1=2,\quad x_2=3,$$

所以原不等式的解集是$\{x|2<x<3\}$.

例 4 解不等式$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$.

解法一： 这个不等式的解集是下面的不等式组 (I) 及不

$\Delta=b^2-4ac$		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根		有两个相异实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (取$x_1<x_2$)	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
一元二次不等式的解集	$ax^2+bx+c>0(a>0)$	$\{x\mid x<x_1\}\cup\{x\mid x>x_2\}$ $=\{x\mid x<x_1$, 或$x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	实数集 R
	$ax^2+bx+c<0(a>0)$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的图象				

等式组(II)的解集的并集:

(I) $\begin{cases} x^2-3x+2>0, & (1) \\ x^2-2x-3<0; & (2) \end{cases}$

(II) $\begin{cases} x^2-3x+2<0, & (3) \\ x^2-2x-3>0. & (4) \end{cases}$

先解不等式组(I).

解不等式(1),得解集

$$\{x|x<1 \text{ 或 } x>2\},$$

解不等式(2),得解集

$$\{x|-1<x<3\}.$$

因此,不等式组(I)的解集是

$$\{x|x<1,\text{ 或 } x>2\}\cap\{x|-1<x<3\}$$
$$=\{x|-1<x<1,\text{ 或 } 2<x<3\}.$$

这个不等式组的解集可以在数轴上表示如下(图 3-1).

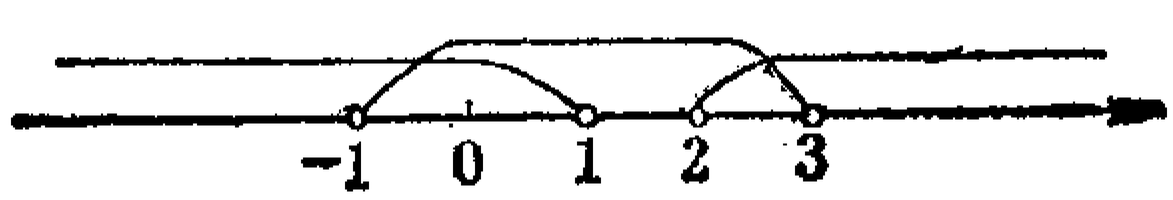


图 3-1

再解不等式组(II).

解不等式(3),得解集

$$\{x|1<x<2\},$$

解不等式(4),得解集

$$\{x|x<-1 \text{ 或 } x>3\}.$$

因此,不等式组(II)的解集是$\varnothing$(图 3-2).

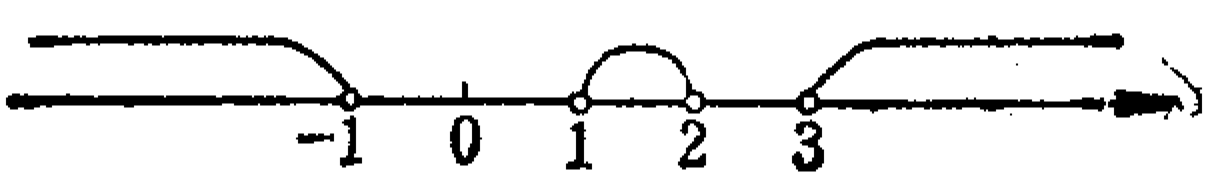


图 3-2

由此可知，原不等式的解集是

$$\{x \mid -1<x<1，或\ 2<x<3\}.$$

解法二： 原不等式可化为$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}<0$.

把分子分母各因式的根按照从小到大的顺序排列，可得下表：

各因式的值的符号 ＼ 根 因式	-1	1	2	3	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

由上表可知，原不等式的解集是

$$\{x \mid -1<x<1，或\ 2<x<3\}.$$

练　习

1. 解下列不等式：

(1) $15-9x<10-4x$;

(2) $3(x+5)-\frac{2}{3}\geqslant 2x-\frac{3}{2}$.

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}4x-4>3x+1,\\3x+1>2x-1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-2>0, \\ x-5<0, \\ 2x+3>0. \end{cases}$

3. 画出 $y=x^2-5x+6$ 的图象，根据图象求满足下列各式的未知数 x 的值的集合：

(1) $x^2-5x+6=0$;　　　(2) $x^2-5x+6>0$;

(3) $x^2-5x+6<0$.

4. 解下列不等式：

(1) $\frac{1}{2}x^2-4x+6<0$;　　　(2) $x^2-x>x(2x-3)+2$.

5. 解不等式 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}>0$.

6. 解不等式 $x(x-3)(x+1)(x-2)<0$.

例 5　解不等式 $\sqrt{3x-4}-\sqrt{x-3}>0$.

解：因为根式必须有意义，所以先解不等式组

$$\begin{cases} 3x-4\geqslant 0, \\ x-3\geqslant 0, \end{cases}$$

解得

$$\{x \mid x\geqslant 3\}. \tag{1}$$

另一方面，原不等式可化为

$$\sqrt{3x-4}>\sqrt{x-3}.$$

两边平方，得

$$3x-4>x-3.$$

移项，整理后解得

$$\left\{x \,\middle|\, x>\frac{1}{2}\right\}. \tag{2}$$

由(1),(2)取交集,得原不等式的解集是

$$\{x|x\geqslant 3\}.$$

例 6 解不等式 $2^{x^2-2x-3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$

解: 原不等式可化为

$$2^{x^2-2x-3}<2^{-3(x-1)}. \tag{1}$$

因为(1)式中所含的以 2($2\in(1, +\infty)$)为底的指数函数是增函数,所以(1)式成立当且仅当

$$x^2-2x-3<-3(x-1) \tag{2}$$

成立。将(2)式整理后,得

$$x^2+x-6<0.$$

解这个不等式,得解集

$$\{x|-3<x<2\}.$$

所以原不等式的解集是

$$\{x|-3<x<2\}.$$

例 7 解不等式

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(2x+10).$$

解: 因为真数应该是正数,所以未知数应满足

$$x^2-3x-4>0,$$
$$2x+10>0.$$

另一方面,因为不等式中所含的以$\frac{1}{3}$$\left(\frac{1}{3}\in(0, 1)\right)$为底的对数函数是减函数,所以原不等式等价于不等式组

$$\begin{cases} x^2-3x-4<2x+10, & (1)\\ x^2-3x-4>0, & (2)\\ 2x+10>0. & (3)\end{cases}$$

解不等式(1)，得解集

$$\{x\mid -2<x<7\};$$

解不等式(2)，得解集

$$\{x\mid x<-1,\ 或\ x>4\};$$

解不等式(3)，得解集

$$\{x\mid x>-5\}.$$

所以原不等式的解集是

$$\{x\mid -2<x<7\}\cap\{x\mid x<-1,\ 或\ x>4\}\cap\{x\mid x>-5\}$$
$$=\{x\mid -2<x<-1,\ 或\ 4<x<7\}.$$

这个不等式的解集可以在数轴上表示如图 3-3.

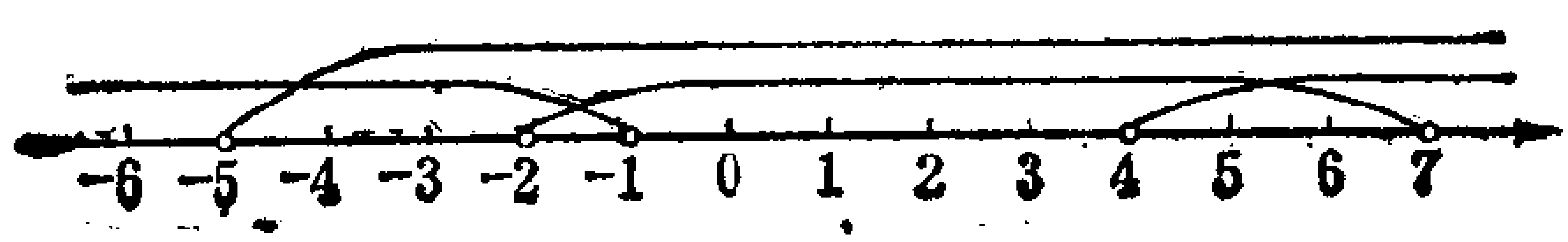


图 3-3

练 习

解下列不等式：

1. $5^x+5^{x-1}<750$.
2. $\sqrt{3x+1}>\sqrt{2x+1}-1$.
3. $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{(\log_2 x)^2-1}<\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2(2+\log_{\sqrt{2}}x)}$.

3.5 含有绝对值的不等式

我们知道，在实数集 R 中：

$$|a|=\begin{cases} a(当\ a>0\ 时), \\ 0(当\ a=0\ 时), \\ -a(当\ a<0\ 时). \end{cases}$$

根据实数的绝对值的定义，我们有

$$|ab|=|a|\cdot|b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad(b\neq0).$$

如果 a 是一个正数，那么

$$|x|<a\Longleftrightarrow x^2<a^2\Longleftrightarrow -a<x<a,$$

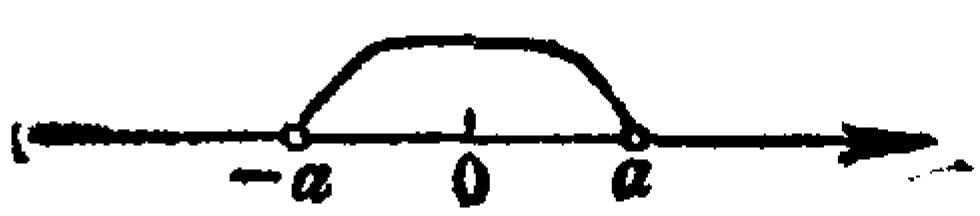
$$|x|>a\Longleftrightarrow x^2>a^2\Longleftrightarrow x>a,\text{ 或 } x<-a.$$

即在 $a>0$ 时，

$$|x|<a\Longleftrightarrow -a<x<a,$$

$$|x|>a\Longleftrightarrow x>a,\text{ 或 } x<-a.$$

这个结果从图 3-4 也可看出。



$|x|<a$

(1)

$|x|>a$

(2)

图 3-4

关于和差的绝对值与绝对值的和差，还有下面的性质：

定理 1 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

证明： $\because$ $-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$

$-|b|\leqslant b\leqslant|b|,$

$\therefore$ $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|,$

即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1}$$

又

$$a=a+b-b,\quad|-b|=|b|,$$

由(1)得

$$|a|=|a+b-b|\leqslant|a+b|+|-b|,$$

即

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|. \tag{2}$$

由(1),(2)得

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

推论 $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

定理 2 $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$

证明: 由定理 1 可知

$$|a|-|-b|\leqslant|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|,$$

即

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

例 1 解不等式$|2x-3|<5$.

解: 这个不等式等价于

$$-5<2x-3<5.$$

解这个不等式,得解集

$$\{x|-1<x<4\}.$$

例 2 解不等式$|x^2-5x|>6$.

解: 这个不等式等价于

$$x^2-5x>6, \tag{1}$$

或

$$x^2-5x<-6. \tag{2}$$

解不等式(1),得 $x<-1$, 或 $x>6$;

解不等式(2),得 $2<x<3$.

因此,原不等式的解集是

$$\{x|x<-1\}\cup\{x|2<x<3\}\cup\{x|x>6\}$$
$$=\{x|x<-1,\text{ 或 }2<x<3,\text{ 或 }x>6\}.$$

例 3 已知 $|x|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|y|<\frac{\varepsilon}{6}$，$|z|<\frac{\varepsilon}{9}$，求证

$$|x+2y-3z|<\varepsilon.$$

证明： $|x+2y-3z|\leqslant|x|+|2y|+|-3z|$

$$=|x|+|2|\cdot|y|+|-3|\cdot|z|=|x|+2|y|+3|z|.$$

$\because$ $$|x|<\frac{\varepsilon}{3},\quad |y|<\frac{\varepsilon}{6},\quad |z|<\frac{\varepsilon}{9},$$

$\therefore$ $$|x|+2|y|+3|z|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{6}+\frac{3\varepsilon}{9}=\varepsilon.$$

$\therefore$ $$|x+2y-3z|<\varepsilon.$$

例 4 已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

证明： $$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1\Longleftrightarrow\frac{(a+b)^2}{(1+ab)^2}<1$$
$$\Longleftrightarrow a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2$$
$$\Longleftrightarrow 1-a^2-b^2+a^2b^2>0$$
$$\Longleftrightarrow (1-a^2)(1-b^2)>0.$$

因为 $|a|<1$，$|b|<1$，$(1-a^2)(1-b^2)>0$ 成立，所以

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

练 习

1. （口答）下列各式是不是恒等式，为什么？

(1) $|-a|=a$; (2) $\sqrt{(-a)^2}=a$;

(3) $|b-a|=|a-b|$; (4) $\left|\frac{1}{a^2}\right|=\frac{1}{a^2}$。

2. (口答)用不带绝对值符号的式子表示下列各式:

(1) $|(-a)^2|$; (2) $|a^2-1|$ $(0<a<1)$;

(3) $\frac{|ab^3+a^3b|}{a^2+b^2}$ $(ab<0)$。

3. 设 $\varepsilon>0$, 解不等式 $|x-A|<\varepsilon$, 并且在数轴上表示出它的解集。

4. 已知 $|A-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}$, 求证:

(1) $|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon$;

(2) $|(A-B)-(a-b)|<\varepsilon$。

5. 解下列不等式:

(1) $|x-2|<5$; (2) $|2x-3|\geqslant 1$;

(3) $|x^2-3x-1|>3$。

习 题 七

1. 解下列不等式:

(1) $(2x-1)^2-7<(x+1)^2+6+3x+3x^2$;

(2) $\frac{5x+7}{5}-\frac{x+7}{5}>\frac{3x+2}{3}-\frac{2x}{7}$。

2. 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases} 2x+3(4-x)>4, \\ x-3>\frac{x}{2}-\frac{1}{4}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x+1)(x+2)>(x-3)(x-4), \\ (2x-1)(x+3)<x(x+1)+x(x+2); \end{cases}$

(3) $\begin{cases}(x^2+1)(x-3)<0,\\3x+4<5x-6;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x-1<0,\\2x+5>0,\\3x-6<0.\end{cases}$

3. 设 $x\in R$, 求证:

(1) $x^2+x+1>0$; (2) $4x^2+1\geqslant 4x$.

4. 解下列不等式:

(1) $12x^2-31x+20>0$; (2) $2x^2-4x+7<0$;

(3) $(3x^2+2x+5)(x-2)>0$;

(4) $\dfrac{x^2-2x-15}{x-2}<0$.

5. 解下列不等式:

(1) $\dfrac{x}{x^2-7x+12}>1$; (2) $2-\dfrac{x-3}{x-2}>\dfrac{x-2}{x-1}$.

6. 解下列不等式:

(1) $(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)<0$;

(2) $(6x-x^2-x^3)(x^2-7x+10)>0$.

7. 解下列不等式:

(1) $\sqrt{9-x}>\sqrt{2x-1}$;

(2) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$.

8. 解下列不等式:

(1) $7^{x^2-3x+2}\leqslant 1$; (2) $\lg(x^2-2x-15)<\lg(x+13)$.

9. 求证:

(1) $|a+b|+|a-b|\geqslant 2|a|$;

(2) $|a+b|-|a-b|\leqslant 2|b|$.

10. (1) 已知$|h|<\sqrt{\varepsilon}$, $|k|<\sqrt{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$, 求证$|hk|<\varepsilon$;

(2) 已知$|h|<c\varepsilon$, $|x|>c$ $(c>0,\ \varepsilon>0)$, 求证$\left|\dfrac{h}{x}\right|<\varepsilon$;

(3) 已知$|x|>r>0$, 求证$\left|\dfrac{1}{ax}\right|<\dfrac{1}{|a|r}$;

(4) 已知$|a_n-l|<1$, 求证$|a_n|<|l|+1$.

11. 求证

$$\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2\quad (x\neq 0).$$

12. 求证

$$\lg\frac{|A|+|B|}{2}\geqslant\frac{\lg|A|+\lg|B|}{2}\quad (AB\neq 0).$$

13. 求下列不等式在自然数集N中的解集:

(1) $|2x-5|<15$;　　(2) $\left|\dfrac{1}{2}x+1\right|<3$.

14. 解下列不等式:

(1) $|x^2-x|<6$;　　(2) $|\sqrt{3x-2}-3|>1$;

(3) $1<|3x+4|\leqslant 6$;　　(4) $3\leqslant|5-2x|<9$.

小　　结

一、本章主要内容是不等式的性质和证明，以及某些不等式的解法.

二、不等式性质中最基本的是:

1. $a>b\Longleftrightarrow b<a$.

2. $a>b,\ b>c\Longrightarrow a>c$.

3. $a>b \Longrightarrow a+c>b+c$.

4. $a>b,\ c>0 \Longrightarrow ac>bc$;

$a>b,\ c<0 \Longrightarrow ac<bc$.

5. $|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$.

不等式的其他性质都可以从这些性质推导得出.

三、证明不等式的主要根据是

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b,$$

$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b,$$

以及不等式的性质. 在证明不等式的过程中，有时还要利用一些重要不等式，如

$$a^2 \geqslant 0,$$

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad (a, b \in R^+),$$

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc \quad (a, b, c \in R^+),$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \quad (a, b, c \in R^+).$$

四、本章在复习一元一次不等式、一元一次不等式组、一元二次不等式解法的基础上，介绍了一些简单的其他不等式的解法.

复习参考题三

A 组

1. 设 $a \neq b$，比较代数式 $a^2(a+1)+b^2(b+1)$ 与 $a(a^2+b)+b(b^2+a)$ 的大小.

2. 设 $ab\neq 0$, $a\neq b$, 比较$(a^4+b^4)(a^2+b^2)$与$(a^3+b^3)^2$的大小。

3. 设 $a>b>0$, 比较$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$与$\frac{a-b}{a+b}$的大小。

4. 已知 a,b,c 是不全相等的正数，求证

$$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)>16abc.$$

5. 已知 $a,b,c\in R^+$，且两两不等，求证

$$2(a^3+b^3+c^3)>a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

6. 已知 $a,b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证

$$(a+b)^2(a^2-ab+b^2)>(a^2+b^2)^2.$$

7. 已知 $a>b>0$，求证：

(1) $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$;

(2) $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$.

8. 求证$\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{10}$。

9. 已知$a>b>c$，求证$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$.

10. 已知 $x\in R^+$，且 $x\neq 1$, $n\in N$，求证

$$(1+x^n)(1+x)^n>2^{n+1}x^n.$$

11. 求证 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\,(n>1)$.

12. 已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1, x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1.$$

13. 求证：当 $a>0$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最小值是 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最大值是 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

14. 如果 $a, b \in R$, 在什么情况下,

$$x^2+2(a-b)x+a^2=0$$

有不相等的实根, 相等的实根, 没有实根?

15. m 是什么数时, 方程

$$x^2+(m-3)x+m=0$$

的两个根都是正数?

16. x 是什么数时, 下列等式成立?

(1) $\dfrac{x-1}{x-2}=\cos\theta,\ 0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $\dfrac{x-2}{x-1}=\operatorname{tg}\phi,\ 0\leqslant\phi<\dfrac{\pi}{2}$.

17. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;　　(2) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(3) $y=\ln(x^2-5x+4)$.

18. 解不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}+1>0,\\ 5(x-2)<3(x-1),\\ x^2-3x<-2.\end{cases}$$

19. 解下列不等式:

(1) $\dfrac{6x^2-17x+12}{2x^2-5x+2}>0$;

(2) $\dfrac{(3x-2)(x-2)}{(x-4)^2}<\dfrac{(2x+2)(x-2)}{(x-4)^2}$.

20. 解下列不等式:

(1) $|\sqrt{x-2}-3|<1$;　　(2) $|2\lg x-3|<1$.

B 组

21. 已知 $a, b, c \in R^+$, $ab+bc+ca=1$, 求证

$$a+b+c \geqslant \sqrt{3}.$$

22. 已知 $a>0$, $b>0$, $c>0$, 求证

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc.$$

23. 已知

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_3}{b_3}<\cdots<\frac{a_n}{b_n},$$

并且所有的字母都表示正数, 求证

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}.$$

24. 已知 $x_1x_2\cdots x_n=1$, 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数, 求证

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 2^n.$$

25. 已知 $a, b, c, d \in R$, 且 $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, 求证

$$-\frac{1}{4} \leqslant abcd \leqslant \frac{1}{4}$$

26. 求证函数 $y=\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$ 的最大值是 $\dfrac{1}{3}$(提示: 根据 $x \in R$ 得出 y 的不等式).

27. 已知 a, b, c 是不全相等的正数, 求证

$$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c.$$

28. 根据 k 的取值范围, 确定方程

$$\frac{x^2}{9-k^2}+\frac{y^2}{k^2-4}=1$$

所表示的曲线.

第四章　行列式和线性方程组

4.1　二阶行列式和二元线性方程组

1. 二阶行列式

在初中，我们学过二元一次方程组和三元一次方程组以及用消元法求它们的解. 一次方程又叫做**线性方程**，一次方程组又叫做**线性方程组**. 在本章中，我们将学习线性方程组的另一种解法，并进一步研究解的情况. 为此，我们先从解二元线性方程组着手来引入一个新的概念——二阶行列式.

一个二元线性方程组，当其中方程的个数与未知数的个数相同时，它的一般形式可以写成

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2, & (2)\end{cases}$$

其中 x，y 是未知数，a_1, a_2, b_1, b_2 是未知数的系数，c_1，c_2 是常数项(在一般形式中，我们把常数项写在方程的右边).

如果当 $x=x_1, y=y_1$ 时，方程组(I)中的每个方程左右两边的值相等，也就是说 $x=x_1$，$y=y_1$ 适合方程组 (I)，那么 $x=x_1, y=y_1$ 叫做**方程组(I)的一个解**，记为

$$\begin{cases} x=x_1,\\ y=y_1,\end{cases}$$

或简记为(x_1, y_1). 方程组(I)的所有的解构成的集合叫做**方程组(I)的解集**.

用加减消元法解这个方程组：

(1) $\times b_2-$ (2) $\times b_1$, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1; \tag{3}$$

(2) $\times a_1-$ (1) $\times a_2$, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{4}$$

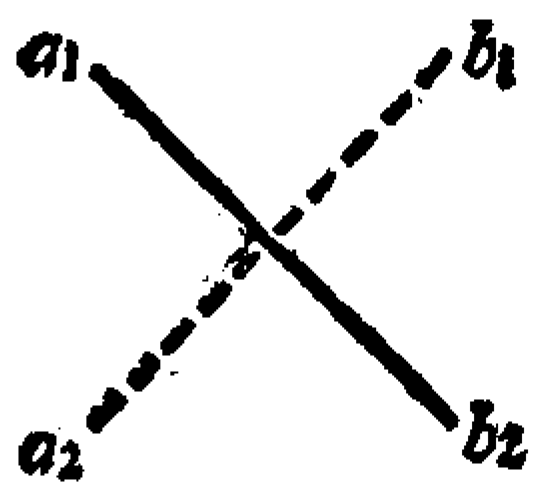
方程组(I)的解一定适合方程(3)和方程(4).

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，可以得出方程组(I)有唯一解，即

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases} \tag{5}$$

为了便于记忆这一结果，我们先来对公式(5)进行分析.

在公式(5)中，两个分母都是 $a_1b_2-a_2b_1$，并且只含有未知数的系数. 把未知数的系数按照它们在方程组中原来的位置排列成正方形，即



可以看出 $a_1b_2-a_2b_1$ 是这样两项的和：一项是正方形中实线表示的对角线(叫做主对角线)上两数的积，再添上正号；一项是虚线表示的对角线(叫做副对角线)上两数的积，再添上负号. 我们在这四个数的两旁各加一条竖线，引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

并且规定它就表示

$$a_1b_2-a_2b_1, \tag{7}$$

这时，符号(6)叫做**二阶行列式**，a_1, a_2, b_1, b_2 叫做行列式(6)的**元素**. 这四个元素排成二行二列(横排叫行，竖排叫列). 例如 a_2 是位于第二行第一列上的元素，b_1 是位于第一行第二列上的元素. 利用对角线把符号(6)表示的二阶行列式展开成(7)式，这种方法叫做二阶行列式展开的**对角线法则**.

例 1 展开下列行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} 10 & -9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 \\ m & m+1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$.

解：(1) $\begin{vmatrix} 10 & -9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}=10\times7-(-3)\times(-9)=43$;

(2) $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 \\ m & m+1 \end{vmatrix}=(m+1)^2-m(m+2)=1$;

(3) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-\sin^2x-\cos^2x=-1$.

练　习

1. 计算：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} -3 & 21 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$.

2. 展开下列行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \log_a x & \log_a x \\ m & n \end{vmatrix}$.

2. 二元线性方程组的解的行列式表示法

利用二阶行列式，我们也可以把公式(5)中的两个分子写成行列式的形式，即

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

这样，当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，二元线性方程组(I)的解可以写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\[2ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{8}$$

为了简便起见，通常用 D, D_x, D_y 分别表示(8)式中作为分母与分子的行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组(I)中未知数 x, y 的系数组成的，叫做这个方程组的**系数行列式**. D 中第一列的元素 a_1, a_2(即 x 的系数)分别换成方程组(I)的常数项 c_1, c_2，就得到行列式 D_x; D 中第二列的元素 b_1, b_2(即 y 的系数)分别换成常数项 c_1, c_2，就得到行列式 D_y.

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(I)的唯一解可以写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\[2ex] y=\dfrac{D_y}{D}, \end{cases} \tag{9}$$

也可以记为$\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$. 方程组(I)的解集是$\left\{\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)\right\}$.

例2 利用行列式解方程组

$$\begin{cases}11x-2y+5=0,\\3x+7y+24=0.\end{cases}$$

解: 先把方程组写成一般形式

$$\begin{cases}11x-2y=-5,\\3x+7y=-24.\end{cases}$$

由

$$D=\begin{vmatrix}11 & -2\\3 & 7\end{vmatrix}=77-(-6)=83\neq 0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-5 & -2\\-24 & 7\end{vmatrix}=-35-48=-83,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}11 & -5\\3 & -24\end{vmatrix}=-264-(-15)=-249,$$

得

$$\frac{D_x}{D}=\frac{-83}{83}=-1,\quad \frac{D_y}{D}=\frac{-249}{83}=-3.$$

所以方程组的解集是$\{(-1,-3)\}$.

练 习

利用二阶行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases}7x-8y=10,\\6x-7y=11;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}14x-6y+1=0,\\3x+7y-6=0.\end{cases}$

3. 二元线性方程组的解的讨论

我们已经知道当系数行列式D不等于零时，方程组(I)的

解可以由公式(9)给出. 公式(9)告诉我们方程组(I)的解是根据方程组的系数与常数项得出的. 在一般情况下, 方程组(I)是不是一定有解, 如果有解, 有多少解, 这些问题是否也可以不经过解方程组而根据方程组的系数与常数项来作出回答呢? 下面, 我们分情况进行讨论.[1]

(1) $D\neq 0$. 方程组(I)有唯一解.

(2) $D=0$, 但 D_x, D_y 不全为零. 不失一般性, 设 $D_x\neq 0$, 即 $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$. 这时, 无论 x 取什么值,

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \tag{3}$$

都不成立, 即方程(3)无解, 因此方程组(I)也无解.

(3) $D=D_x=D_y=0$.

(1°) a_1, a_2, b_1, b_2 不全为零. 不失一般性, 设 $b_1\neq 0$, 则由

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad c_1b_2-c_2b_1=0,$$

可得

$$a_2=\frac{a_1b_2}{b_1},\quad c_2=\frac{c_1b_2}{b_1},$$

因此方程(2)成为

$$\frac{a_1b_2}{b_1}x+b_2y=\frac{c_1b_2}{b_1},$$

即

$$\frac{b_2}{b_1}(a_1x+b_1y)=\frac{b_2}{b_1}\cdot c_1.$$

---

[1] 这里, 我们是对形如

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

的方程组进行讨论, 对其中的系数不加任何限制.

所以方程(1)的解就是方程(2)的解. 因为方程 (1) 有无穷多解,所以方程组(I)有无穷多解.

(2°) $a_1=a_2=b_1=b_2=0$. 这时,如果 c_1,c_2 不全为零,方程组(I)无解;如果 $c_1=c_2=0$,则 x, y 的任意一组值都同时适合方程(1)和方程(2),因此方程组(I)有无穷多解.

归纳以上讨论,可以得出:

二元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

(1) 当 $D\neq 0$ 时有唯一解;

(2) 当 $D=0$,但 D_x, D_y 不全为零时,无解;

(3) 当 $D=D_x=D_y=0$ 时,有以下两种情况:

(1°) a_1, a_2, b_1, b_2 不全为零, 或 $a_1=a_2=b_1=b_2=c_1=c_2=0$ 时,有无穷多解;

(2°) $a_1=a_2=b_1=b_2=0$,但 c_1, c_2 不全为零时, 无解.

例 3 解关于 x, y 的线性方程组,并进行讨论:

$$\begin{cases}mx+y=m+1,\\ x+my=2m.\end{cases}$$

解:
$$D=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m^2-1=(m+1)(m-1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}m+1 & 1\\ 2m & m\end{vmatrix}=m(m+1)-2m=m^2-m=m(m-1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}m & m+1\\ 1 & 2m\end{vmatrix}=2m^2-(m+1)=2m^2-m-1=(2m+1)(m-1).$$

(1) 当 $m\neq -1, m\neq 1$ 时, $D\neq 0$, 方程组有唯一解, 它的解集是$\left\{\left(\frac{m}{m+1}, \frac{2m+1}{m+1}\right)\right\}$.

(2) 当 $m=-1$ 时, $D=0$, $D_x=2\neq 0$, 方程组无解, 它的解集是$\varnothing$.

(3) 当 $m=1$ 时, $D=D_x=D_y=0$, $a_1=1\neq 0$, 方程组有无穷多解.

这时, 方程组是

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=2. \end{cases}$$

如果引进参数 t, 令 $x=t$, 那么 $y=2-t$, 方程组的解集可以表示为$\{(t, 2-t) \mid t \text{ 为任意常数}\}$.

注意: 由于引进参数的方法不同, 上例情况(3)中方程组的解集的表示形式不是唯一的. 例如如果令 $y=t$, 那么方程组的解集就可表示为$\{(2-t, t) \mid t \text{ 为任意常数}\}$, 等等.

练　习

解下列关于 x, y 的方程组, 并进行讨论:

(1) $\begin{cases} x+(m-1)y=1, \\ (m-1)x+y=2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 4x+my=m, \\ mx+y=1. \end{cases}$

习　题　八

1. 展开下列行列式, 并化简:

(1) $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} \sin x-\sin y & \cos x+\cos y \\ \cos x-\cos y & \sin x+\sin y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 2 & \log_b a \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} e^{x+y} & e^x-1 \\ e^x+1 & e^{x-y} \end{vmatrix}$.

2. 求证:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} la_1 & ka_1 \\ la_2 & ka_2 \end{vmatrix} = 0$;

(5) $\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

3. 利用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 13x-7y-10=0, \\ 19x+15y-2=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{7}{s}+\dfrac{9}{t}=3, \\ \dfrac{17}{s}+\dfrac{7}{t}=5. \end{cases}$

4. 利用行列式解下列关于 x, y 的方程组:

(1) $\begin{cases} mx+y=2m+1, \\ x-my=2-m; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x\cos A-y\sin A=\cos B, \\ x\sin A+y\cos A=\sin B; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x\cos A+y\sin A=\sin A, \\ x\sin A+y\cos A=-\cos A \end{cases}$ $\left(A\neq\dfrac{2k+1}{4}\pi, k\in Z\right)$.

5. 不解方程组，判定下列方程组有唯一解，无解，还是有无穷多解：

(1) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 5x-2y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 6x+9y=7, \\ 4x+6y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-3y=5, \\ 8x+6y=22; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 5x-15y=10, \\ 3x-9y=6. \end{cases}$

6. 判断m取什么值时，下列关于x, y的方程组有唯一解：

(1) $\begin{cases} (m^2-1)x-(m+1)y=m+1, \\ m^2x-(m+1)y=m-1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-(m^2-5)y=-1, \\ (m+1)x-(m+1)^2y=1. \end{cases}$

7. 解下列关于x, y的方程组，并进行讨论：

(1) $\begin{cases} ax+(2a-1)y=a^2+2a-1, \\ x+ay=2a; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} mx+y=-1, \\ 3mx-my=2m+3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (a-1)x-(a^2-1)y=1, \\ (a^2-1)x+(a-1)y=2. \end{cases}$

4.2 三阶行列式

把九个数排成三行三列，在这九个数的两旁各加一条竖线，如

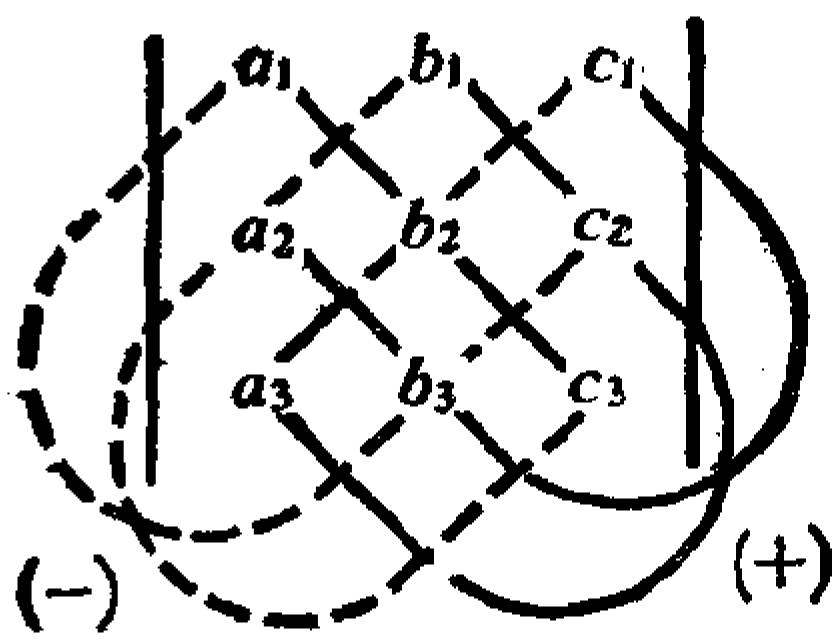
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

并且规定它表示

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2. \tag{2}$$

这时，(1)式叫做**三阶行列式**. 三阶行列式有三行三列.

三阶行列式也可按对角线法则展开. 如图：



图中实线上三个元素的积，添上正号；虚线上三个元素的积，添上负号. 容易看出，三阶行列式就是这六项的和.

例 用对角线法则计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

解： $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$=3\times1\times(-2)+(-2)\times0\times1+2\times(-2)\times3$

$\quad-2\times1\times1-(-2)\times(-2)\times(-2)-3\times0\times3$

$=-6+0-12-2+8-0=-12.$

练　习

1. 用对角线法则计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 用对角线法则展开下列行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & l \end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$.

3. 计算下列各题中的两个行列式；比较计算结果，得出每两个行列式之间的关系式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 11 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ k & k & 2k \\ 5 & -7 & 11 \end{vmatrix}$.

4.3　三阶行列式的性质

为了更好地掌握和运用行列式这一工具，简化行列式的计算，我们以三阶行列式为例，来学习行列式的一些性质.

定理 1　**把行列式的各行变为相应的列**(就是第 i 行变为第 i 列，$i=1, 2, 3$)，**所得行列式与原行列式相等.** 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明: 按对角线法则分别把上式两边的行列式展开.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2$$

$$- a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

$$\therefore \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由定理 1 可知，对于行列式的行成立的定理对于列也一定成立；反过来也对.

定理 2　把行列式的两行(或两列)对调，所得行列式与原行列式绝对值相等，符号相反.

证明: 我们先证明把行列式的第二行与第三行对调时，结论成立，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

用对角线法则展开上式两边的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2$$

$$-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3$$

$$-a_2b_3c_1-a_3b_1c_2-a_1b_2c_3$$

$$=-(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2).$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

其他情况可类似证明.

推论　如果行列式某两行(或两列)的对应元素相同，那么行列式等于零.

证明: 假设行列式D有两行(或两列)的对应元素相同，把这两行(或两列)对调，得出的仍是原行列式D。但根据定理 2，对调后的行列式应等于$-D$。所以有

$$D=-D.$$

由此得出

$$D=0.$$

定理 3　把行列式的某一行(或一列)的所有元素同乘以某个数 k，等于用数 k 乘原行列式.

证明: 我们先证明把行列式第二行的元素乘以k时，结论成立，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

用对角线法则展开上式左边的行列式，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ka_1b_2c_3 + ka_2b_3c_1 + ka_3b_1c_2$$

$$-ka_3b_2c_1 - ka_2b_1c_3 - ka_1b_3c_2$$

$$= k(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)$$

$$= k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

因此结论成立.

其他情况可类似证明。

推论 1　行列式的某一行(或一列)有公因子时，可以把公因子提到行列式外面.

例 1　计算

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}。$$

解:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(定理 3 推论 1)

$$=-\frac{1}{30}\times(2+6+4-8-1-6)$$

$$=-\frac{1}{30}\times(-3)=\frac{1}{10}.$$

从例 1 可以看出，根据定理 3 的推论 1，把行列式中某一行(或一列)的公因子提到行列式外面，往往可以简化行列式的计算。

推论2　如果行列式某一行(或一列)的所有元素都是零，那么行列式等于零.

定理4　如果行列式某两行(或两列)的对应元素成比例，那么行列式等于零.

证明：设行列式的第二列与第一列的对应元素成比例(比例因子为 k)，即行列式有如下形式

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

根据定理 3 的推论 1 和定理 2 的推论，我们有

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

因此结论成立.

其他情况可类似证明.

定理 5　如果行列式的某一行(或一列)的元素都是二项式，那么这个行列式等于把这些二项式各取一项作成相应行(或列)而其余行(或列)不变的两个行列式的和.

证明: 设行列式的第一行元素都是二项式，即行列式有如下形式

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

把行列式用对角线法则展开，得

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+a_1')b_2c_3+a_2b_3(c_1+c_1')$$

$$+a_3(b_1+b_1')c_2-a_3b_2(c_1+c_1')$$

$$-a_2(b_1+b_1')c_3-(a_1+a_1')b_3c_2$$

$$=(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)$$

$$+(a_1'b_2c_3+a_2b_3c_1'+a_3b_1'c_2-a_3b_2c_1'-a_2b_1'c_3-a_1'b_3c_2)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因此结论成立.

其他情况可类似证明.

例 2 求证

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2+x^2 \\ 1 & y^2 & a^2+y^2 \\ 1 & z^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix}=0.$$

证明: $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2+x^2 \\ 1 & y^2 & a^2+y^2 \\ 1 & z^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1 & x^2 & a^2\\1 & y^2 & a^2\\1 & z^2 & a^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^2\\1 & y^2 & y^2\\1 & z^2 & z^2\end{vmatrix} \qquad \text{(定理 5)}$$

$$=0. \qquad \text{(定理 4 和定理 2 推论)}$$

定理 6　把行列式某一行（或一列）的所有元素同乘以一个数 k，加到另一行（或另一列）的对应元素上，所得行列式与原行列式相等。

证明： 把行列式

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

的第二行的元素乘以 k，加到第一行的对应元素上，得

$$\begin{vmatrix}a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

根据定理 5 和定理 4，可以推出：

$$\begin{vmatrix}a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}ka_2 & kb_2 & kc_2\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

因此结论成立。

其他情况可类似证明.

由习题八的第 2 题可知，三阶行列式的上述性质，对二阶行列式同样成立.

例 3 利用行列式的性质，计算:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

解:

(1) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix} = 3\times 2\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(定理 3 推论 1)}$$

$$= 6\times\begin{vmatrix} 3 & 1+2 & 2 \\ 8 & 5+3 & 3 \\ 6 & -1+7 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(定理 6)}$$

$$= 6\times\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 0. \quad \text{(定理 2 推论)}$$

(2) $$\begin{vmatrix} 10 & -2 & 7 \\ -15 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{(定理 3 推论 1)}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 2 & -2+2 & 7 \\ -3 & 3+(-3) & 2 \\ -1 & 4+(-1) & 9 \end{vmatrix} \quad \text{(定理 6)}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=5\times(-63-12)=-375.$$

从上述例题可以看出，在计算行列式时，如果能直接观察出行列式有两行(或两列)的对应元素成比例或能化到成比例的形式，那么立即可以判断这个行列式等于零. 一般地，可以先提出行列式中某一行(或一列)的各元素的公因子，或运用定理 6 把三阶行列式中某一行(或一列)的两个元素变为零，从而简化计算.

例 4 利用行列式的性质，证明:

(1) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=0;$$

(2) $$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}.$$

证明:

(1) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad (定理 1)$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \qquad (定理 3 推论 1)$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=0.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a+b & c & -a \\ a+c & b & -c \\ b+c & a & -b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c & -a \\ a & b & -c \\ c & a & -b \end{vmatrix} \qquad (定理 6)$$

$$=-\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} \qquad \text{(定理3推论1)}$$

$$=\begin{vmatrix} b & a & c \\ a & c & b \\ c & b & a \end{vmatrix}. \qquad \text{(定理2)}$$

练　习

1. 利用行列式的性质，计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 11 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 49 & 4 \\ 2 & 28 & 4 \\ 4 & 35 & 8 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 7 & 5 & 14 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

2. 利用行列式的性质，计算：

(1) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$.

3. 不展开行列式，证明下列等式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & p+q \\ q & p & 0 \end{vmatrix}=0$；

(2) $\begin{vmatrix} -a+b+c & a & -b \\ a-b+c & b & -c \\ a+b-c & c & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{vmatrix}$.

4.4 按一行(或一列)展开三阶行列式

在展开三阶行列式时，如果分别把含 a_1, a_2, a_3 的项结合在一起，并提出公因子，就得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \\ &\quad -a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &\quad + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (1)\end{aligned}$$

我们看到，(1)式中的

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

就是在原三阶行列式中，划去 a_1 所在的行和列，剩下的元素按原行列顺序排列所组成的行列式. 把行列式中某一元素所在的行与列划去后，剩下的元素按原行列顺序排列所组成的行列式，叫做原行列式中对应于这个元素的**余子式**.

例如在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中，对应于元素 a_2 的余子式为

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

设行列式中某一元素位于第 i 行第 j 列，把对应于这个元素的余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 后所得到的式子叫做原行列式中对应于这个元素的**代数余子式**.

例如，在上面的行列式 D 中，元素 a_2 位于第二行第一列，$i+j=2+1=3$，所以对应于 a_2 的代数余子式为

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

即

$$-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

三阶行列式各元素的代数余子式的符号 $(-1)^{i+j}$ 可以用下图来帮助记忆：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

中某个元素的代数余子式常用这个元素相应的大写字母并附加相同的下标来表示，例如元素 a_1, b_1, c_1 的代数余子式分别是 A_1, B_1, C_1，其中

$$A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$B_1=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$C_1=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

这样，上面所得的(1)式就可写成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3, \tag{2}$$

它把一个三阶行列式表示成这个行列式第一列的元素与对应于它们的代数余子式的乘积的和.

一般地，有如下定理：

定理1　行列式等于它的任意一行(或一列)的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积的和.

也就是说，我们可以按任一行（或一列）展开三阶行列式 D:

$$D=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1, \qquad D=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3,$$

$$D=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2, \qquad D=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3,$$

$$D=a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3, \qquad D=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3.$$

等式 $D=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$ 前面已经证明，其他五个等式也可类似证明.

定理2　行列式某一行(或一列)的各元素与另一行（或一列)对应元素的代数余子式的乘积的和等于零.

证明: 我们来证明行列式的第二行的各元素与第一行对应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即

$$a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0.$$

$$\because \quad a_2\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\therefore \quad a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0.$$

其他情况可类似证明.

例 1 把行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

按第一行展开,然后进行计算.

解:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-2)\times\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(-32)-1\times(-11)-2\times 26$$

$$=-137.$$

按一行(或一列)展开行列式来计算时，如果先根据行列式的性质把某一行(或一列)的两个元素变为零，就会使计算简便得多. 如上题,把第二列乘以-3 加到第一列,把第二列乘以 2 加到第三列,可得

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 3 \\ -9 & 4 & 10 \end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -9 & 10 \end{vmatrix}$$

$$=-137。$$

例 2 计算：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 8 & -6 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$.

解：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 0 & 24 \\ 5 & 2 & 7 \\ 10 & 0 & 15 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 19 & 24 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 90;$

(2) $\begin{vmatrix} 8 & -6 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 21 \\ 9 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = 193.$$

例 3 解方程

$$\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

解： $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15-2x & 1 & 10 \\ 11-3x & 1 & 16 \\ 7-x & 1 & 13 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 8-x & 0 & -3 \\ 4-2x & 0 & 3 \\ 7-x & 1 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8-x & -3 \\ 4-2x & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 9x-36 = 9(x-4)。$$

因为方程左边等于 $9(x-4)$，所以原方程为 $9(x-4)=0$，它的解集是$\{4\}$。

例 4 求证

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

证明:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ b-a & c-b & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \\ -1 & -1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

例 5 求证

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (*)$$

是经过不同两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的直线的方程。

证明:
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

因为P_1与P_2是不同的两点，所以x_1与x_2，y_1与y_2不能都相等，也就是

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

不能全为零．因此，方程(*)是关于x, y的一次方程，即平面上的直线方程．又因为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

所以点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$都在方程(*)表示的直线上，即方程(*)是经过点P_1与P_2的直线的方程．

练　习

1. 已知行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix},$$

(1) 求行列式中元素-5的余子式与代数余子式；

(2) 按第三列展开这一行列式；

(3) 验证行列式第一行的各元素与第三行对应元素的代数余子式的乘积的和等于零．

2. 利用行列式的性质和本节的定理1，计算：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \\ -4 & 3 & 9 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} -6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ -3 & 8 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$．

3. 解下列关于 x 的方程：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 6 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}=0$；　(2) $\begin{vmatrix} a & a & x \\ 1 & 1 & 1 \\ b & x & b \end{vmatrix}=0$.

4. 求证：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$；

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$.

4.5 三元线性方程组

一个三元线性方程组，当其中方程的个数与未知数的个数相同时，它的一般形式是

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. & (3) \end{cases}$$

如果当 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ 时，方程组(II)中的每个方程左右两边的值相等，那么 $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ 叫做**方程组(II)的一个解**，简记为 (x_1, y_1, z_1). 方程组(II)的所有的解构成的集合叫做**方程组(II)的解集**.❶

❶ 对一般 n 元线性方程组的解与解集，也可作相应定义.

我们现在利用第 4.4 节的两个定理来导出方程组(II)的解.

用D表示方程组(II)的系数行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

用元素 a_1, a_2, a_3 对应的代数余子式 A_1, A_2, A_3 分别乘方程(1),(2),(3)的两边,得

$$a_1A_1x+b_1A_1y+c_1A_1z=d_1A_1,$$

$$a_2A_2x+b_2A_2y+c_2A_2z=d_2A_2,$$

$$a_3A_3x+b_3A_3y+c_3A_3z=d_3A_3.$$

把上面三式的等号两边分别相加,得

$$\begin{aligned}&(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y\\&\quad+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z\\&=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3.\end{aligned}\tag{4}$$

根据第 4.4 节的定理 1 和定理 2,(4)中 x 的系数是 D,而 y,z 的系数都是零,所以(4)式成为

$$D\cdot x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3.\tag{5}$$

用类似的方法,从方程组(II)中消去 x,z,或者 x,y, 分别得到:

$$D\cdot y=d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3,\tag{6}$$

$$D\cdot z=d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3.\tag{7}$$

令

$$D_x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_z=d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

D_x, D_y, D_z 是把 D 中第一、二、三列分别换成方程组(II)的常数项列而得出的．这时(5)，(6)，(7)式就可写成

$$\begin{cases} D\cdot x=D_x, & (8) \\ D\cdot y=D_y, & (9) \\ D\cdot z=D_z. & (10) \end{cases}$$

从上面的推导过程可知，如果方程组(II)有解，这个解一定适合方程(8)，(9)，(10)．当 $D\neq 0$ 时，方程(8)，(9)，(10)组成的方程组的唯一解是

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \\ z=\dfrac{D_z}{D}. \end{cases} \tag{11}$$

因此，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(II)如果有解，解只能有一个，并且可以写成(11)式的形式．

现在来验证(11)式确是方程组(II)的解．把(11)式代入方程(1)的左边，我们有

$$\begin{aligned} \text{左边}&=a_1\frac{D_x}{D}+b_1\frac{D_y}{D}+c_1\frac{D_z}{D} \\ &=\frac{a_1}{D}(d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3)+\frac{b_1}{D}(d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3) \end{aligned}$$

$$+\frac{c_1}{D}(d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3)$$

$$=\frac{1}{D}[(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)d_1+(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2)d_2+(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3)d_3]$$

$$=\frac{1}{D}[D\cdot d_1+0\cdot d_2+0\cdot d_3]$$

$$=d_1=\text{右边}.$$

即(11)式适合方程(1). 同样可以验证(11)式分别适合方程(2)和方程(3). 因此,(11)式是方程组(II)的解.

综上所述,可得以下结论:

三元线性方程组(II),当它的系数行列式D不等于零时,有唯一解$\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D},\frac{D_z}{D}\right)$,其中 D_x, D_y, D_z 是把系数行列式D中第一,二,三列分别换成方程组(II)的常数项列而得出的三个三阶行列式.

我们已经知道,对二元线性方程组(I)已有类似的结论. 事实上,对 n 元线性方程组都有类似的结论. 这一结论称为**克莱姆法则**❶,上面只是对 $n=3$ 的情况进行了证明.

当方程组(II)的系数行列式 $D=0$ 时,方程组(II)或者无解,或者有无穷多解(证明从略). 例如方程组

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\x+y+2z=2,\\2x+2y+3z=5,\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y+z=1,\\x+y+z=2,\\x+y+z=3\end{cases}$$

❶ 克莱姆(Gabriel Cramer, 1704—1752 年),瑞士数学家.

都没有解，而方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+2z=1, \\ y+z=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=2, \\ 4x+4y+4z=4 \end{cases}$$

都有无穷多解.

例 判断下列方程组是否有唯一解；如果有唯一解，根据克莱姆法则把解求出来.

$$(1)\ \begin{cases} 2x+3y-5z=3, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y+3z=7; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-3y+z=1, \\ 2x+y-z=0, \\ 4x-5y+z=2. \end{cases}$$

解:

$$(1)\quad D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 7 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-49\neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 由

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=-70,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-49,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}=-28,$$

得

$$\frac{D_x}{D}=\frac{-70}{-49}=\frac{10}{7},\ \frac{D_y}{D}=\frac{-49}{-49}=1,\ \frac{D_z}{D}=\frac{-28}{-49}=\frac{4}{7}.$$

方程组的解集是$\left\{\left(\frac{10}{7}, 1, \frac{4}{7}\right)\right\}$.

$$(2)\quad D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 4 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 3 & -2 & 0\end{vmatrix}=0,$$

方程组或者无解，或者有无穷多解．因此，方程组不可能是有唯一解。

练　习

判断下列方程组是否有唯一解；如果有唯一解，根据克莱姆法则把解求出来。

$$(1)\ \begin{cases}x-2y+z=0,\\ 3x+y-2z=0,\\ 7x+6y+7z=100;\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases}3x-2y+3z=11,\\ 4x-3y+2z=9,\\ 5x-4y+z=7;\end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases}2x+3y+4z=2,\\ 3x+5y+7z=-3,\\ x+2y+3z=4;\end{cases}\qquad (4)\ \begin{cases}x-3y+z=6,\\ 2x+y+2z=-2,\\ 4x-5y+6z=10.\end{cases}$$

习　题　九

1. 用对角线法则计算：

$$(1)\ \begin{vmatrix}3 & -5 & 1\\ 2 & 3 & -6\\ -7 & 2 & 4\end{vmatrix};\qquad (2)\ \begin{vmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{vmatrix};$$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & -\cos\alpha & -\cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & -\cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$.

2. 解方程:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ x-1 & 0 & x-2 \\ 1 & x-2 & 0 \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$.

3. 求证:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=2\sin\theta(1-\cos\theta)$;

(2) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$ $(\theta\neq k\pi, k\in Z)$.

4. 利用行列式的性质计算:

(1) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 15 & 12 & -3 \\ 25 & 32 & 7 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 12 & 24 & 36 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 554 & 427 & 327 \\ 586 & 443 & 343 \\ 711 & 504 & 404 \end{vmatrix}$.

5. 利用行列式的性质计算:

(1) $\begin{vmatrix} -ab & bd & bf \\ ac & -cd & cf \\ ae & de & -ef \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+9b+3c \end{vmatrix}$.

6. 下列计算过程中，哪些步骤是对的，哪些不对，应怎样改正？

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 \\ a_2-ha_1 & b_2-hb_1 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1+hc_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2+hc_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3+hc_3 \end{vmatrix}$.

7. 不展开行列式，求证：

(1) $\begin{vmatrix} a & a+3d & a+6d \\ a+d & a+4d & a+7d \\ a+2d & a+5d & a+8d \end{vmatrix} = 0$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_3 & b_3 & a_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_1 & b_1 & a_1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & am & -abn \\ -e & 0 & bn \\ e & -m & 0 \end{vmatrix} = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & (a-b)^3 & (a-c)^3 \\ (b-a)^3 & 0 & (b-c)^3 \\ (c-a)^3 & (c-b)^3 & 0 \end{vmatrix}=0$.

8. 利用行列式的性质和第 4.4 节中的定理1，计算：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 18 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & -4 \\ -9 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

9. 解关于 x 的方程：

(1) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \end{vmatrix}=0 \quad (a\neq b)$;

(2) $\begin{vmatrix} x & a & b+c \\ x & a+b & c \\ a+b & b-c & a+c \end{vmatrix}=0 \quad (b(a+b)\neq 0)$.

10. 求证：

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$;

(2) $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$;

(3) $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}=a(x-y)(y-z)(z-x)$;

(4) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ \cos\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\sin\theta\sin 4\theta$.

11. 已知直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

问点 $P_1\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 与 $P_2(4, 7)$ 是否在这条直线上。

12. 利用克莱姆法则解下列关于 x, y, z 的方程组:

(1) $\begin{cases} 4x-y-2z=4, \\ 2x+y-4z=8, \\ x+2y+z=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x-8y+3z=0, \\ 15x+12y-15z=11, \\ 10x-4y-6z=1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-y+z=a, \\ x+y-z=b, \\ -x+y+z=c; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} bx-ay=-2ab, \\ -2cy+3bz=bc, \\ cx+az=0 \quad (abc\neq 0). \end{cases}$

13. 求下列关于 x, y, z 的方程组有唯一解的条件，并把第(3)题中的方程组在这个条件下的解求出来:

(1) $\begin{cases} \lambda x+y+z=1, \\ x+\lambda y+z=\lambda, \\ x+y+\lambda z=\lambda^2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} ay+bz=c, \\ cx+az=b, \\ bx+cy=a; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax+y+z=a-3, \\ x+ay+z=2, \\ x+y+az=-2. \end{cases}$

*4.6 三元齐次线性方程组 [1]

常数项为零的三元线性方程组

---

[1] 凡标有“*”号的章、节，供第三类型和第一类型选修数学的学生选学.

$$
\text{(III)}\quad\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0, & (1)\\ a_2x+b_2y+c_2z=0, & (2)\\ a_3x+b_3y+c_3z=0 & (3)\end{cases}
$$

叫做**三元齐次线性方程组**．显然，三元齐次线性方程组总有解(0, 0, 0)，它叫做**零解**．下面进一步讨论方程组(III)会不会有非零解的情况．用D表示方程组(III)的系数行列式．

(1) $D\neq0$．方程组(III)有唯一解——零解．

(2) $D=0$．我们来证明方程组(III)除零解外还有无穷多非零解．❶

(1°) D中至少有一个元素的代数余子式不等于零．不失一般性，设

$$
C_3=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq0,
$$

把方程(1)，(2)中含z的项移到等号右边，得

$$
\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1z,\\ a_2x+b_2y=-c_2z.\end{cases}
$$

把这个方程组看成关于x, y的线性方程组，解出

$$
\begin{cases}x=\dfrac{\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}z=\dfrac{A_3}{C_3}z,\\[3ex] y=\dfrac{-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}z=\dfrac{B_3}{C_3}z.\end{cases}
$$

---

❶ 利用第4.5节三元线性方程组(II)当$D=0$时或者无解或者有无穷多解的结论，容易得出三元齐次线性方程组(III)当$D=0$时一定有无穷多非零解．这里我们是从头证明，并同时给出了求解的方法．

令

$$z=C_3t\text{（}t\text{ 为任意常数），}$$

得

$$\begin{cases}x=A_3t,\\ y=B_3t,\\ z=C_3t.\end{cases}\tag{4}$$

(4)式是方程(1)和方程(2)的所有公共解的一般表示形式. 把(4)式代入方程(3)左边，得

$$\begin{aligned}a_3x+b_3y+c_3z&=a_3A_3t+b_3B_3t+c_3C_3t\\&=D\cdot t=0,\end{aligned}$$

这说明(4) 式又同时适合方程(3). 因此，(4)式表示方程组(III)的解，而且包括方程组(III)的所有的解.

对任意的一个 t 值，(4)式都可确定方程组(III) 的一个解，t 值不同，确定的解也不同，而只有 $t=0$时它才是零解，所以方程组(III)有无穷多非零解.

(2°) D 中每一个元素的代数余子式都等于零. 这时，如果方程组(III)的每个系数都等于零，那么任意一组 x, y, z 的值都是方程组(III)的解，当然它有无穷多非零解. 如果系数不全为零，不失一般性，设 $b_1\neq 0$，由

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=0,$$

得

$$a_1b_2=a_2b_1,\quad b_1c_2=b_2c_1.$$

$$\therefore\qquad a_2=\frac{a_1b_2}{b_1},\qquad c_2=\frac{b_2c_1}{b_1}.$$

因此方程(2)就可由方程(1)两边同乘以常数$\frac{b_2}{b_1}$得出. 同样, 方程(3)可由方程(1)两边同乘以常数$\frac{b_3}{b_1}$得出. 因此方程(1)的解就是方程组(III)的解, 所以方程组(III)除零解外还有无穷多非零解.

反过来, 如果方程组(III)有非零解, 那么它的系数行列式$D=0$. 不然的话, 即如果$D\neq 0$, 那么根据克莱姆法则, 可推出方程组(III)只有零解, 这和方程组(III)有非零解相矛盾.

综上所述, 可以得出:

定理　齐次线性方程组(III)有非零解的充要条件是它的系数行列式 D 等于零.

例 1　解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+2y+3z=0, \\ 4x+4y+5z=0. \end{cases}$$

解: 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

所以方程组有无穷多解.

又因为

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

把第一、第二两个方程中含x的项移到等号右边, 得

$$\begin{cases} y+z=-x, \\ 2y+3z=-2x. \end{cases}$$

把这个方程组看成关于 y,z 的线性方程组，解出

$$\begin{cases} y=-x, \\ z=0. \end{cases}$$

令 $x=t$，那么 $y=-t$，$z=0$. 不管 t 取什么值，$(t,-t,0)$ 总适合第三个方程.

因此，原方程组的解集是$\{(t,-t,0)\mid t$ 为任意常数$\}$.

例 2 求方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

有解的必要条件.

解： 如果这个方程组有解，那么至少存在一个有序数组 (x_1,y_1)，使得

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1y_1+c_1=0, \\ a_2x_1+b_2y_1+c_2=0, \\ a_3x_1+b_3y_1+c_3=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1y_1+c\cdot 1=0, \\ a_2x_1+b_2y_1+c_2\cdot 1=0, \\ a_3x_1+b_3y_1+c_3\cdot 1=0. \end{cases}$$

也就是说，三元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

有一个非零解 $(x_1,y_1,1)$. 根据齐次线性方程组有非零解的

必要条件是它的系数行列式等于零，从而推出

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.)$$

因此，原方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$$

有解的必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

想一想，能否把题中的必要条件改为充要条件，为什么？

练　习

下列齐次线性方程组有没有非零解？如果有，把解集求出来。

(1) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x-2y+z=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x-6y-4z=0, \\ x+2y+4z=0, \\ 3x+2y+6z=0. \end{cases}$

*4.7　四阶行列式和四元线性方程组

1. 四阶行列式

一个三阶行列式可以用三个二阶行列式来表示，如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\ a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}\, b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\, c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

所以，我们可以用二阶行列式来定义三阶行列式．仿此，我们可以把四阶行列式定义为：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\, a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}\, b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\, c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+4}\, d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

对这样定义得出的四阶行列式，第 4.3 节中行列式的性质定理和第 4.4 节中的两个定理都成立(证明从略)．

类似地，可以用四阶行列式来定义五阶行列式，……，用 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式．第 4.3 节中行列式的性质定理和第 4.4 节中的两个定理对于任意阶行列式也都成立．

但应注意，用对角线法则展开行列式，仅适用于二阶、三阶行列式，不适用于高于三阶的行列式．

例 1 把行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

按第二列展开.

解: $$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-7)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+8\times(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}-7\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

例 2 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -3 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\text{第二列乘以}(-2)\\\text{加到第一列}}]{\text{第一列加到第四列}} \begin{vmatrix} -5 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二行展开}} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

例 3 求证

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 \\ a_3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

证明:

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 \\ a_3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ a_2 & x & -1 \\ a_3 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=a_0x^3+a_1\begin{vmatrix}x & -1\\ 0 & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_2 & -1\\ a_3 & x\end{vmatrix}$$

$$=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3.$$

例 4 利用行列式的性质计算

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 1 & 1\\ a+3 & a & 1 & 1\\ a+3 & 1 & a & 1\\ a+3 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}$$

$$=(a+3)(a-1)^3.$$

练　习

1. 已知行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5 & 7\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 9 & 9\end{vmatrix},$$

(1) 写出行列式中第三行第二列的元素的余子式及代数余子式;

(2) 把行列式按第二行展开,并进行计算;

(3) 把行列式按第一列展开,并进行计算。

比较以上两种计算结果是否相同.

2. 利用行列式的性质和展开定理,计算

$$\begin{vmatrix} 0 & q & r & s \\ p & 0 & r & s \\ p & q & 0 & s \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 四元线性方程组

对四元线性方程组

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1w=f_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2w=f_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3w=f_3, \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4w=f_4, \end{cases}$$

利用第 4.4 节中的两个定理,仿照第 4.5 节中三元线性方程组(Ⅱ)的求解方法,可以得出:**当系数行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\neq 0$$

时,四元线性方程组(Ⅳ)有唯一解$\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}, \frac{D_w}{D}\right)$,其中 D_x, D_y, D_z, D_w 是将系数行列式 D 中第一、二、三、四列分

别换成方程组(IV)的常数项列而得出的四个四阶行列式.

例5 利用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y+11z+5w=2, \\ x+y+5z+2w=1, \\ 2x+y+3z+2w=-3, \\ x+y+3z+4w=-3. \end{cases}$$

解:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第四行乘以}(-1)\text{加到第三行}]{\substack{\text{第四行乘以}(-3)\text{加到第一行} \\ \text{第四行乘以}(-1)\text{加到第二行}}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=14,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第四行乘以}(-1)\text{加到第三行}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}2&3&11\\1&1&5\\-3&1&3\end{vmatrix}=-28,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&2&11&5\\1&1&5&2\\2&-3&3&2\\1&-3&3&4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第四行乘以}(-1)\text{加到第三行}}\begin{vmatrix}2&2&11&5\\1&1&5&2\\1&0&0&-2\\1&-3&3&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一列乘以 2 加到第四列}}\begin{vmatrix}2&2&11&9\\1&1&5&4\\1&0&0&0\\1&-3&3&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&11&9\\1&5&4\\-3&3&6\end{vmatrix}=0,$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&3&2&5\\1&1&1&2\\2&1&-3&2\\1&1&-3&4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第四行乘以}(-1)\text{加到第三行}}\begin{vmatrix}2&3&2&5\\1&1&1&2\\1&0&0&-2\\1&1&-3&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一列乘以 2 加到第四列}}\begin{vmatrix}2&3&2&9\\1&1&1&4\\1&0&0&0\\1&1&-3&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&2&9\\1&1&4\\1&-3&6\end{vmatrix}=14,$$

$$D_w=\begin{vmatrix}2&3&11&2\\1&1&5&1\\2&1&3&-3\\1&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第四行乘以}(-1)\text{加到第三行}}\begin{vmatrix}2&3&11&2\\1&1&5&1\\1&0&0&0\\1&1&3&-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3 & 11 & 2\\1 & 5 & 1\\1 & 3 & -3\end{vmatrix}=-14.$$

$$\therefore\quad \frac{D_x}{D}=\frac{-28}{14}=-2,\qquad \frac{D_y}{D}=\frac{0}{14}=0,$$

$$\frac{D_z}{D}=\frac{14}{14}=1,\qquad \frac{D_w}{D}=\frac{-14}{14}=-1.$$

所以方程组的解集是$\{(-2, 0, 1, -1)\}$.

练　习

利用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases}2x-y+3z+2w=6,\\3x-3y+3z+2w=5,\\3x-y-z+2w=3,\\3x-y+3z-w=4.\end{cases}$$

习　题　十

1. k取什么值时，下列齐次线性方程组有非零解？

(1) $\begin{cases}kx+\ \ y+\ \ z=0,\\ \ \ x+5y-3z=0,\\2x+\ \ y\qquad\ =0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x-5y-8z=0,\\3x-4y+kz=0,\\7x-9y-5z=0.\end{cases}$

2. 下列方程组有没有非零解？如果有，把解集求出来。

(1) $\begin{cases}2x+3y-\ \ z=0,\\ \ \ x-6y+2z=0,\\3x+3y+\ \ z=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}-x-2y+\ \ z=0,\\ \ \ 2x+4y+2z=0,\\ \ \ \ \ x+2y+3z=0\end{cases}$

3. 已知行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

(1) 把行列式按第三行展开;

(2) 把行列式按第二列展开，并计算出结果。

4. 利用行列式的性质和展开定理，计算:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}$.

5. 求证

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \cos 4\theta.$$

6. 利用克莱姆法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x+2y+3z-2w=6, \\ 2x-y-2z-3w=8, \\ 2y-z+2w=1, \\ 2x-3y+2z+w=-8; \end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x+y+2z-3w=-3,\\ x+y-z+2w=1,\\ 3x-y+4z-w=4,\\ x+2y+z-2w=-5.\end{cases}$

*4.8 用顺序消元法解线性方程组

1. 顺序消元法解线性方程组举例

含 n 个未知数 n 个方程的线性方程组，当它的系数行列式不等于零时，可以利用克莱姆法则得出解的公式. 克莱姆法则在理论上有重要作用，但在具体解题时，要计算$n+1$个 n 阶行列式，计算量较大. 在解三元或四元线性方程组时，计算已经比较麻烦，解多于四元的线性方程组，计算就更复杂. 有没有别的解法呢？

回想起我们学过的消元法（加减消元法和代入消元法），是把一个系数行列式不等于零的三元线性方程组

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3,\end{cases}$$

通过消元，最后化为

$$\begin{cases}1\ x+0\cdot y+0\cdot z=x_1,\\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=y_1,\\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=z_1\end{cases}$$

的形式，从而得出方程组的解(x_1, y_1, z_1). 消元法的基本思想是把方程组中一部分方程化成含较少未知数的方程，在系数行列式不为零的情况下，最终化到每一个方程只含一个未知数. 现在，我们再来学习一种顺序消元法，它的基本思想仍是

消元，但要求按一定的顺序进行消元．下面我们先以解三元线性方程组为例进行说明．

例 1　解线性方程组

$$\begin{cases} \phantom{x+{}}2y+3z=-8, \\ x+3y-2z=2, \\ 2x-3y+7z=-9. \end{cases}$$

解：先把方程组中第一和第二个方程互换，使得互换后得出的方程组中第一个方程中的 x 的系数不等于零，得

$$\begin{cases} x+3y-2z=2, \\ \phantom{x+{}}2y+3z=-8, \\ 2x-3y+7z=-9. \end{cases}$$

从第三个方程减去第一个方程的 2 倍，消去第三个方程中的 x(即使 x 的系数化为零)，得

$$\begin{cases} x+3y-2z=2, \\ \phantom{x+{}}2y+3z=-8, \\ -9y+11z=-13. \end{cases}$$

把第二个方程乘以$\frac{1}{2}$，使其中 y 的系数化为 1，得

$$\begin{cases} x+3y-2z=2, \\ y+\frac{3}{2}z=-4, \\ -9y+11z=-13. \end{cases}$$

把第三个方程加上第二个方程的 9 倍，消去第三个方程中的 y，得

$$\begin{cases} x+3y-2z=2, \\ \quad y+\dfrac{3}{2}z=-4, \\ \qquad \dfrac{49}{2}z=-49. \end{cases}$$

把第三个方程乘以$\frac{2}{49}$，使其中 z 的系数化为 1，得

$$\begin{cases} x+3y-2z=2, \\ \quad y+\dfrac{3}{2}z=-4, \\ \qquad z=-2. \end{cases}$$

从第一及第二个方程分别减去第三个方程的 -2 倍及 $\frac{3}{2}$ 倍，消去前两个方程中的 z，得

$$\begin{cases} x+3y=-2, \\ \quad y=-1, \\ \quad z=-2. \end{cases}$$

从第一个方程减去第二个方程的 3 倍，消去第一个方程中的 y，得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \\ z=-2. \end{cases}$$

所以方程组的解是 $(1, -1, -2)$.

从上面的求解过程可以看出，它是按一定程序来进行的.

第一步：先把第一个方程中 x 的系数化为1，消去后两个方程中的 x（在例 1 中，第一个方程中 x 的系数是 0，因此先把

第一、第二个方程互换)，再把第二个方程中 y 的系数化为 1，消去第三个方程中的 y，然后再把第三个方程中 z 的系数化为 1. 第二步：回过头来，再按相反顺序消去第一、第二个方程中的 z（相当于把 z 的值 z_1 代入第一、第二个方程）和消去第一个方程中的 y（相当于把 y 的值 y_1 代入第一个方程)，从而得出方程组的解(x_1, y_1, z_1).

这种用顺序消元来解线性方程组的方法，看来好象很呆板，但正因为它是按确定的程序进行的，因此有利于用电子计算机进行计算.

2. 顺序消元法解线性方程组的矩阵表示

从解题过程可以看出，在消元过程中，方程组的未知数都不参与运算，参与运算的只是方程组的系数和常数项，因此可以通过方程组的系数和常数项的变化来表示方程组的消元过程. 为此，我们先来学习一个新的概念——矩阵.

设有 $m\times n$ 个数排成一个 m 行 n 列的矩形表，为明确起见，用括弧把它的两侧括起来，这个表叫做**矩阵**. 例如

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

是一个两行三列的矩阵，

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

是一个三行三列的矩阵，也叫三阶**方阵**.

矩阵的行、列与行列式的行、列含义相同，各行、各列上的数叫做矩阵的**元素**.

注意：矩阵与行列式是两个不同的概念. 行列式表示数，当它的元素取定某一组值时，行列式就有一个确定的值；矩阵不表示数，而是某些数按照一定顺序排成的一个矩形表.

把三元线性方程组(II)的系数与常数项按它们原来的位置分别写成下面两个表：

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

前者叫做方程组(II)的**系数矩阵**，后者叫做方程组(II)的**常数项矩阵**. 把上面两个表合写成一个表

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix},$$

它叫做方程组(II)的**增广矩阵**.

方程组的变形，可以用它的增广矩阵的变化来表示. 我们把例1中方程组的消元过程和它的矩阵表示的形式对比地列成表格，如第172—173页所示.

从表格可以看出，在解题过程中，我们只对方程组进行了三种变形：

(1) 用一个非零常数乘某一个方程；

(2) 用一个数乘某一个方程，加到另一个方程上去；

(3) 两个方程互换.

这三种变形叫做**方程组的初等变换**. 方程组经过初等变换，形式变了，但它的解不变.

这时，方程组的增广矩阵也有了变化. 增广矩阵的改变，

方程组的消元过程	矩阵表示的形式
$\begin{cases} 2y+3z=-8, & (1) \\ x+3y-2z=2, & (2) \\ 2x-3y+7z=-9. & (3) \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$
$\xRightarrow{(1),(2)\text{互换}} \begin{cases} x+3y-2z=2, & (1)' \\ 2y+3z=-8, & (2)' \\ 2x-3y+7z=-9. & (3) \end{cases}$	$\xrightarrow{①,②\text{互换}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \\ 2 & -3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$
$\xRightarrow{-2\times(1)'+(3)\ ❶} \begin{cases} x+3y-2z=2, & (1)' \\ 2y+3z=-8, & (2)' \\ -9y+11z=-13. & (3)' \end{cases}$	$\xrightarrow{-2\times①+③\ ❷} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & -9 & 11 & -13 \end{pmatrix}$
$\xRightarrow{\frac{1}{2}\times(2)'} \begin{cases} x+3y-2z=2, & (1)' \\ y+\frac{3}{2}z=-4, & (2)'' \\ -9y+11z=-13. & (3)' \end{cases}$	$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times②} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -4 \\ 0 & -9 & 11 & -13 \end{pmatrix}$

$$\xRightarrow{9\times(2)''+(3)'}\begin{cases}x+3y-2z=2, & (1)'\\ y+\frac{3}{2}z=-4, & (2)''\\ \frac{49}{2}z=-49. & (3)''\end{cases}$$

$$\xRightarrow{\frac{2}{49}\times(3)''}\begin{cases}x+3y-2z=2, & (1)'\\ y+\frac{3}{2}z=-4, & (2)''\\ z=-2. & (3)'''\end{cases}$$

$$\xRightarrow[-\frac{3}{2}\times(3)'''+(2)'']{2\times(3)'''+(1)'}\begin{cases}x+3y=-2, & (1)''\\ y=-1, & (2)'''\\ z=-2. & (3)'''\end{cases}$$

$$\xRightarrow{-3\times(2)'''+(1)''}\begin{cases}x=1, & (1)'''\\ y=-1, & (2)'''\\ z=-2. & (3)'''\end{cases}$$

$$\xrightarrow{9\times②+③}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -4\\ 0 & 0 & \frac{49}{2} & -49\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{49}\times③}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 2\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -4\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{3}{2}\times③+②]{2\times③+①}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3\times②+①}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

❶ $-2\times(1)'+(3)$表示用-2乘方程(1)′的两边，分别加到方程(3)的两边上去.

❷ $-2\times①+③$表示用-2乘矩阵的第一行的所有元素，加到第三行的相应元素上去.

是由于对矩阵相应地进行了以下三种变形:

(1) 用一个非零常数乘矩阵某一行的所有元素;

(2) 用一个数乘矩阵某一行的所有元素，然后加到另一行的对应元素上去;

(3) 两行互换.

这三种变形叫做矩阵的行的初等变换.

这样，三元线性方程组的求解过程，也就是有顺序地利用矩阵的行的初等变换,把方程组的增广矩阵变换为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 \end{pmatrix}$$

的过程. 这时方程组的系数矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

常数项矩阵变为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

(x_1, y_1, z_1)就是这个三元线性方程组的解.

这种解线性方程组的方法也可以推广到四元或多于四元的线性方程组. 当未知数的个数相当多时，利用电子计算机按编好的程序进行运算,可以把解很快求出来.

下面我们再举几个用顺序消元法解题的例子，但只写出它们的矩阵表示的形式.

例 2 用顺序消元法(矩阵表示)解方程组

$$\begin{cases} x-\ \ y+z=4, \\ 4x-4y+z=7, \\ x+2y-z=1. \end{cases}$$

解： $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\times①+③]{-4\times①+②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②,③互换} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\times②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}\times③} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times③+①]{\frac{2}{3}\times③+②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的解是(2, 1, 3).

例 3 用顺序消元法(矩阵表示)解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y+11z+5w=2, \\ x+\ \ y+\ \ 5z+2w=1, \\ 2x+\ \ y+\ \ 3z+2w=-3, \\ x+\ \ y+\ \ 3z+4w=-3. \end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times ①} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times ①+④]{\substack{-1\times ①+②\\ -2\times ①+③}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2\times ②} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -3 & -5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\times ②+④]{2\times ②+③} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{6}\times ③} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\times③+④}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{3}{7}\times④}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{2}\times④+①]{\substack{-\frac{1}{6}\times④+③ \\ -1\times④+②}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{11}{2}\times③+①]{-1\times③+②}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}\times②+①}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组的解是$(-2, 0, 1, -1)$.

上面的做法是严格按照一种规定的程序进行的，但实际

上，根据方程组的初等变换和矩阵的行的初等变换之间的关系，在系数行列式不为零的情况下，只要把系数矩阵化到每一行只有一个元素是 1，其他都是 0，而且取值为 1 的元素各在不同的列时，就可以得出方程组的解来．因此在用笔算解题时，不必严格按照上述规定的程序，可以灵活处理，以使计算简便．

例 4 解方程组

$$\begin{cases}3x-2y+z-w=2,\\2x+y-z-2w=4,\\4x-y-2z+w=10,\\2x+3y+z-3w=3.\end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & -1 & 2\\2 & 1 & -1 & -2 & 4\\4 & -1 & -2 & 1 & 10\\2 & 3 & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2\times②+③]{\substack{-1\times④+①\\④+②}}\begin{pmatrix}1 & -5 & 0 & 2 & -1\\4 & 4 & 0 & -5 & 7\\0 & -3 & 0 & 5 & 2\\2 & 3 & 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2\times①+④]{-4\times①+②}\begin{pmatrix}1 & -5 & 0 & 2 & -1\\0 & 24 & 0 & -13 & 11\\0 & -3 & 0 & 5 & 2\\0 & 13 & 1 & -7 & 5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4\times③+④]{\substack{-1\times③+①\\8\times③+②}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3 & -3\\0 & 0 & 0 & 27 & 27\\0 & -3 & 0 & 5 & 2\\0 & 1 & 1 & 13 & 13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{27}\times②}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3 & -3\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & -3 & 0 & 5 & 2\\0 & 1 & 1 & 13 & 13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-13\times②+④]{\substack{3\times②+①\\-5\times②+③}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & -3 & 0 & 0 & -3\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}\times③}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times③+④]{2\times③+①}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

所以方程组的解是$(2, 1, -1, 1)$.

练　习

1. 根据指定要求对下列矩阵进行行的初等变换:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\times①+③]{-1\times①+②}\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times②}\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\xrightarrow{-4\times②+③}\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\times③}\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

2. 用顺序消元法(矩阵表示)解方程组

$$\begin{cases}x+y-2z=-5,\\x-y+z=1,\\2x+5y+z=0.\end{cases}$$

习题十一

1. 利用矩阵的行的初等变换，把下列矩阵化为主对角线下方的元素全部为零的矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\4 & 1 & -1\\4 & 1 & 3\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\3 & 3 & 1 & 0\\3 & 1 & -1 & 2\\3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. 用顺序消元法(矩阵表示)解方程组：

(1) $\begin{cases}x+2y+3z=-1,\\3x+5y-2z=9,\\2x-y+4z=5;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x-y+2z=8,\\2x+y-6z=-2,\\3x+y-4z=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+2y+2w=4,\\x+y+2z-w=-2,\\2x-y+z-w=-3,\\3x+4y-z+3w=8;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x-y-2z+2w=-3,\\2x-y+3z+2w=6,\\x+y+2z+3w=6,\\x-3y-z-w=-2.\end{cases}$

小　　结

一、本章主要内容是二阶、三阶行列式，行列式的性质和展开，二元线性方程组解的讨论，用克莱姆法则求二元、三元线性方程组的唯一解．选学内容有三元齐次线性方程组，四阶行列式和四元线性方程组，用顺序消元法（矩阵表示）解线性方程组．

二、二阶及三阶行列式的定义是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

对四阶行列式，本章中是借助四个三阶行列式来定义的．一般地，可以用 n 个 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式．

三、行列式中某元素的余子式与代数余子式是两个重要的概念，第 4.3 节中行列式的性质定理和第 4.4 节中的展开定理，是行列式进行恒等变形以及简化行列式的计算的重要依据．这些概念、定理在本章中都是以三阶行列式为例来引入或证明的，但它们对任意阶行列式都适用．

二阶、三阶行列式可以用对角线法则展开，也可按某一行（或一列）展开，对高于三阶的行列式，对角线法则不再适用，但仍可按某一行（或一列）展开，逐次降低行列式的阶．

四、二元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

(1) 当系数行列式 $D\neq0$ 时，有唯一解$\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)$;

(2) 当 $D=0$, 但 D_x,D_y 不全为零时，无解;

(3) 当 $D=D_x=D_y=0$ 时，有以下两种情况:

(1°) a_1,a_2,b_1,b_2 不全为零，或 $a_1=a_2=b_1=b_2=c_1=c_2=0$ 时，有无穷多解;

(2°) $a_1=a_2=b_1=b_2=0$, 但 c_1,c_2 不全为零时，无解。

三元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

(1) 当系数行列式 $D\neq0$ 时，有唯一解 $\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D},\frac{D_z}{D}\right)$;

(2) 当 $D=0$ 时，或者无解或者有无穷多解.

一般地，对含 n 个方程 n 个未知数的线性方程组，利用第 4.4 节中的两个定理，仿照第 4.5 节中三元线性方程组 (III) 的求解方法，可以得出:

当系数行列式 $D\neq0$ 时，n 元线性方程组有唯一解 $\left(\frac{D_1}{D},\frac{D_2}{D},\cdots,\frac{D_n}{D}\right)$，其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 i 列换成方程组的常数项列而得出的 n 阶行列式。

这就是求 n 元线性方程组的解的克莱姆法则。

五、三元齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0,\\a_2x+b_2y+c_2z=0,\\a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$$

(1) 当系数行列式 $D\neq 0$ 时，有唯一解——零解；

(2) 当 $D=0$ 时，除零解外还有无穷多非零解.

这一结论对含 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组也适用.

六、用顺序消元法解 n 元线性方程组，它的基本思想是消元，但强调按一定的程序进行消元. 它的矩阵表示的形式是对方程组的增广矩阵进行矩阵的行的初等变换，当方程组的系数行列式不等于零时，把增广矩阵最终化为

$$\left(\begin{array}{ccccc}1 & 0 & \cdots & 0 & k_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & k_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1}_{n\text{列}} & & & & k_n\end{array}\right)$$

的形式，从而求出方程组的解 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$.

复习参考题四

A 组

1. 讨论关于 x 的方程 $ax=b$ 的解的几种情况.

2. 什么叫做二元线性方程组的一个解？什么叫做二元线性方程组的解集？二元线性方程组的解可能有几种情况？

3. 已知方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}\quad (a_1, b_1 \text{ 不同时为零}, a_2, b_2 \text{ 不同时为零})$$

中的两个方程分别表示两条直线 l_1 与 l_2，求证：

(1) l_1, l_2 相交的充要条件是方程组的系数行列式 $D\neq 0$;

(2) l_1, l_2 平行而不重合的充要条件是 $D=0$，但 D_x, D_y 中至少有一个不等于零；

(3) l_1, l_2 重合的充要条件是 $D=D_x=D_y=0$。

4. a, b 满足什么条件时，直线 $3x-by=a$ 与 $ax+y-3=0$

(1) 相交？　(2) 平行？　(3) 重合？

5. 讨论下列方程组，并画出图象来说明所得的结果：

(1) $\begin{cases}x+y=2,\\4x-y=3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x-y=5,\\2x-2y=7;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+2y=5,\\2x+4y=10;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}y=3x+2,\\y=3x.\end{cases}$

6. 解下列关于 x, y 的方程组，并进行讨论：

(1) $\begin{cases}(a+1)x-(2a-1)y=3a,\\(3a+1)x-(4a-1)y=5a+4;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}(a-1)x+(a+1)y=2(a^2-1),\\(a^2-1)x+(a^2+1)y=2(a^3-1).\end{cases}$

7. 判断下列方程组有没有非零解，如果有，把解求出来：

(1) $\begin{cases}4x-6y=0,\\6x+9y=0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}5x=8y,\\10x-16y=0.\end{cases}$

8. 已知行列式

$$\begin{vmatrix}13 & 22 & 17\\14 & -11 & 16\\10 & 0 & 18\end{vmatrix},$$

(1) 用对角线法则展开行列式并进行计算；

(2) 按某一行(或一列)展开行列式并进行计算;

(3) 利用行列式的性质先化简行列式再展开，然后进行计算。

9. 解下列关于 x 的方程:

(1) $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix}=0$; (2) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 & \sin x \\ \cos x & 0 & \sin x \\ \cos x & 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$.

10. 展开下列行列式，并化简:

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$.

11. 求证:

(1) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & a & d \\ -c & -d & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & -a & d \\ c & -d & -a \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}=0$.

12. 解不等式

$$\begin{vmatrix} x-a & b & -c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix}>0.$$

13. 求证：

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3abc$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$;

(3) 如果$\triangle ABC$的三边a, b, c有$a^3+b^3+c^3=3abc$的关系，那么$\triangle ABC$为等边三角形.

14. 已知三角形的三顶点$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$，求证三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值。}$$

15. 利用上题结论，

(1) 求以$(1, 1), (3, 4), (5, -2)$，$(4, -7)$为顶点的四边形的面积；

(2) 求证以三角形三边中点为顶点的三角形的面积等于原三角形面积的四分之一。

16. 解下列关于x, y, z的方程组：

(1) $\begin{cases} 7x-4\frac{1}{2}y=9\frac{1}{2}, \\ 2x+3y+7\frac{1}{2}z=22, \\ -\frac{2}{3}x+2\frac{1}{2}z=3\frac{2}{3}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \frac{x+2}{y-2}=\frac{3}{2}, \\ \frac{y+1}{z+3}=4, \\ \frac{z+4}{x-1}=-\frac{4}{3}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=11, \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}-\frac{5}{z}=-20, \\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{3}{z}=6; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} lx=my=nz, \\ ax+by+cz=d \end{cases}$
$(amn+bnl+cml\neq 0)$;

(5) $\begin{cases} ax-aby+bz=b, \\ x+ay-z=-1, \\ \quad by+z=1. \end{cases}$

17. 求下列关于 x,y,z 的方程组有唯一解的条件，并把在这个条件下的解求出来：

(1) $\begin{cases} (\lambda+3)x+y+2z=\lambda, \\ \lambda x+(\lambda-1)y+z=2\lambda, \\ 3(\lambda+1)x+\lambda y+(\lambda+3)z=3\lambda; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ ax+by+cz=0, \\ bcx+cay+abz=(b-c)(c-a)(a-b). \end{cases}$

*18. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+3y+z=0, \\ x+2y-3z=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x-5y-z=0, \\ 3x+7y-6z=0. \end{cases}$

*19. 下列方程组在k取什么值时有非零解？并把解集求出来。

(1) $\begin{cases} kx+3y+z=0, \\ x+4y-3z=0, \\ kx+y+3z=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x-2y+kz=0, \\ kx-y+z=0, \\ 6x-3y+(k+1)z=0. \end{cases}$

*20. 已知方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ cx+by+az=0, \\ bx+ay+cz=0 \end{cases}$$

有非零解，求证 $a=b$，或 $a=c$，或 $a+b+c=0$.

*21. 求证：方程 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3=0$ 表示的三直线共点的必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

*22. 计算：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

*23. 求证：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & s+p \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$.

*24. 利用克莱姆法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 2x+y-5z+w=8, \\ x-3y-6w=9, \\ 2y-z+2w=-5, \\ x+4y-7z+6w=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-y+z-w=0, \\ 3x+2y+3z-w=0, \\ x-4y-z+2w=12, \\ 2x+3y-2z-2w=-11. \end{cases}$

*25. 用顺序消元法(矩阵表示)解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 2x-y+2z=4, \\ x-2y-z=1, \\ 4x+y+4z=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y-z+3w=2, \\ 2x-y+3z-2w=7, \\ x+2y-z+w=4, \\ x-y+z+2w=-2. \end{cases}$

B 组

*26. 讨论下列关于 x, y 的方程组当 a 取什么值时有正数解:

(1) $\begin{cases} 3x+4y=3, \\ ax+(a-1)y=5; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} ax+3y=6, \\ x+ay=1. \end{cases}$

*27. 求证平面上三点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

从而检验下列三点是否在同一直线上：

(1) (2,3), (5,7), (11,15)；

(2) (1,4), (2,−2), (6,9).

*28. 求证 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \cos^2 A & \sin A & 1 \\ \cos^2 B & \sin B & 1 \\ \cos^2 C & \sin C & 1 \end{vmatrix}=0.$$

*29. 已知 $2x+5y+4z=0$, $3x+y-7z=0$, 求证 $x+y-z=0$.

*30. 已知

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix},$$

其中 a, b, c 是互不相同的数.

(1) 证明 $P(x)$ 是 x 的三次多项式；

(2) 利用行列式的性质，求 $P(x)$ 的根.

第五章 复　数

一 复数的概念

5.1 数的概念的发展

数的概念是从实践中产生和发展起来的. 早在原始社会末期, 由于计数的需要, 人们就建立起自然数的概念. 自然数的全体构成自然数集 N.

随着生产和科学的发展, 数的概念也得到发展.

为了表示各种具有相反意义的量以及满足记数法的要求, 人们引进了零及负数, 把自然数看作正整数, 把正整数、零、负整数合并在一起, 构成整数集 Z.

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题, 人们又引进了有理数, 规定它们就是一切形如$\frac{m}{n}$的数, 其中 $m\in Z$, $n\in N$. 这样, 就把整数集 Z 扩大为有理数集 Q. 显然, $Z\subset Q$. 如果把整数看作分母为 1 的分数, 那么有理数集实际上就是分数集.

每一个有理数都可以表示成整数、有限小数或循环节不为 0 的循环小数; 反过来, 整数、有限小数或循环节不为 0 的循环小数也都是有理数. 如果把整数、有限小数都看作循环节为 0 的循环小数, 那么有理数集实际上也就是循环小数的集合.

为了解决有些量与量之间的比值(例如用正方形的边长去度量它的对角线所得结果)不能用有理数表示的矛盾,人们又引进了无理数. 所谓无理数,就是无限不循环小数. 有理数集与无理数集合并在一起,构成实数集 R. 因为有理数都可看作循环小数(包括整数、有限小数),无理数都是无限不循环小数,所以实数集就是小数集.

从解方程来看,方程 $x+5=3$ 在自然数集 N 中无解,在整数集 Z 中就有一个解 $x=-2$; 方程 $3x=5$ 在整数集 Z 中无解,在有理数集 Q 中就有一个解 $x=\frac{5}{3}$; 方程 $x^2=2$ 在有理数集 Q 中无解,在实数集 R 中就有两个解 $x=\pm\sqrt{2}$. 但是,数的范围扩充到实数集 R 以后,象 $x^2=-1$ 这样的方程还是无解,因为没有一个实数的平方等于 -1. 在十六世纪,由于解方程的需要,人们开始引进一个新数 i,叫做**虚数单位**,并规定:

(1) 它的平方等于 -1,即

$$i^2=-1;$$

(2) 实数与它进行四则运算时,原有的加、乘运算律仍然成立.

在这种规定下,i 可以与实数 b 相乘,再同实数 a 相加,由于满足乘法交换律及加法交换律,从而可以把结果写成 $a+bi$. 这样,数的范围又扩充了,出现了形如 $a+bi(a, b\in R)$ 的数,人们把它们叫做**复数**. 全体复数所成的集合,一般用字母 C 来表示.❶

在这种规定下,i 就是 -1 的一个平方根. 因此,方程

---

❶ C 是英文词组 Complex numbers(复数)的第一个字母.

$x^2=-1$ 在复数集 C 中就至少有一个解 $x=i$.

十八世纪以后，复数在数学、力学和电学中得到了应用. 从此对它的研究日益展开. 现在复数已成为科学技术中普遍使用的一种数学工具.

5.2 复数的有关概念

复数 $a+bi$($a, b\in R$. 以后说复数 $a+bi$ 时，都有 $a, b\in R$)，当 $b=0$ 时，就是实数；当 $b\neq 0$ 时，叫做**虚数**，当 $a=0$, $b\neq 0$ 时，叫做**纯虚数**；a 与 b 分别叫做复数 $a+bi$ 的**实部与虚部**. 例如，$3+4i$, $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}i$, $-0.5i$ 都是虚数，它们的实部分别是 3, $-\frac{1}{2}$, 0, 虚部分别是 4, $-\sqrt{2}$, -0.5.

显然，实数集 R 是复数集 C 的真子集，即 $R\subset C$.

如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等，我们就说这两个**复数相等**，记作 $a+bi=c+di$. 这就是说，如果 $a, b, c, d\in R$, 那么

$$a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c, b=d,$$

$$a+bi=0\Longleftrightarrow a=b=0.$$

例 已知 $(2x-1)+i=y-(3-y)i$，其中 x, $y\in R$. 求 x 与 y.

解： 根据复数相等的定义，得方程组

$$\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y).\end{cases}$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{2}, \quad y=4.$$

从复数相等的定义，我们知道，任何一个复数 $z=a+bi$，都可以由一个有顺序的实数对 (a, b) 唯一确定．这就使我们能借用平面直角坐标系来表示复数 $z=a+bi$．如图 5-1，点 Z 的横坐标是 a，纵坐标是 b，复数 $z=a+bi$ 可用点 $Z(a, b)$ 来表示．这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做**复平面**，x 轴叫做**实轴**，y 轴除去原点的部分叫做**虚轴**(因为原点表示实数 0，原点不在虚轴上)．表示实数的点都在实轴上，表示纯虚数的点都在虚轴上．

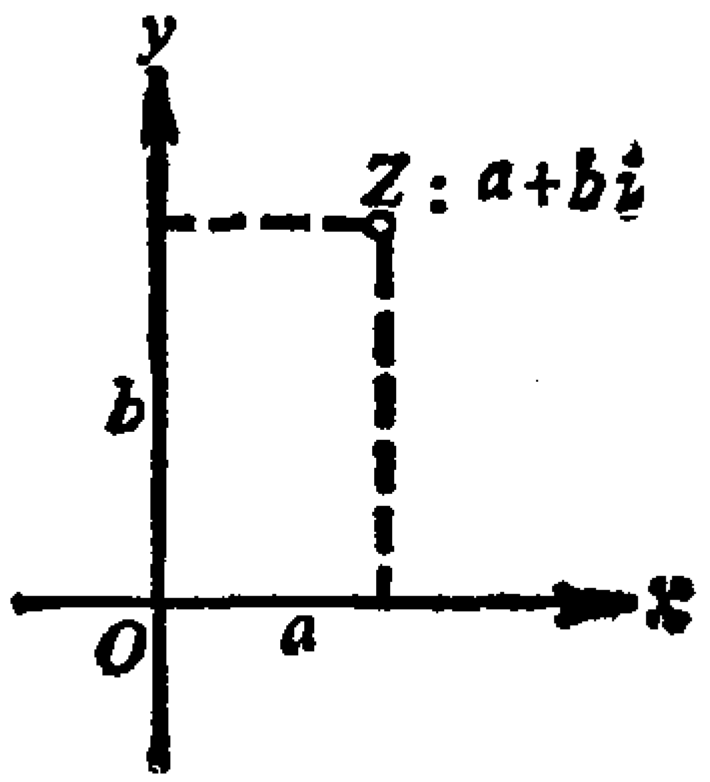


图 5-1

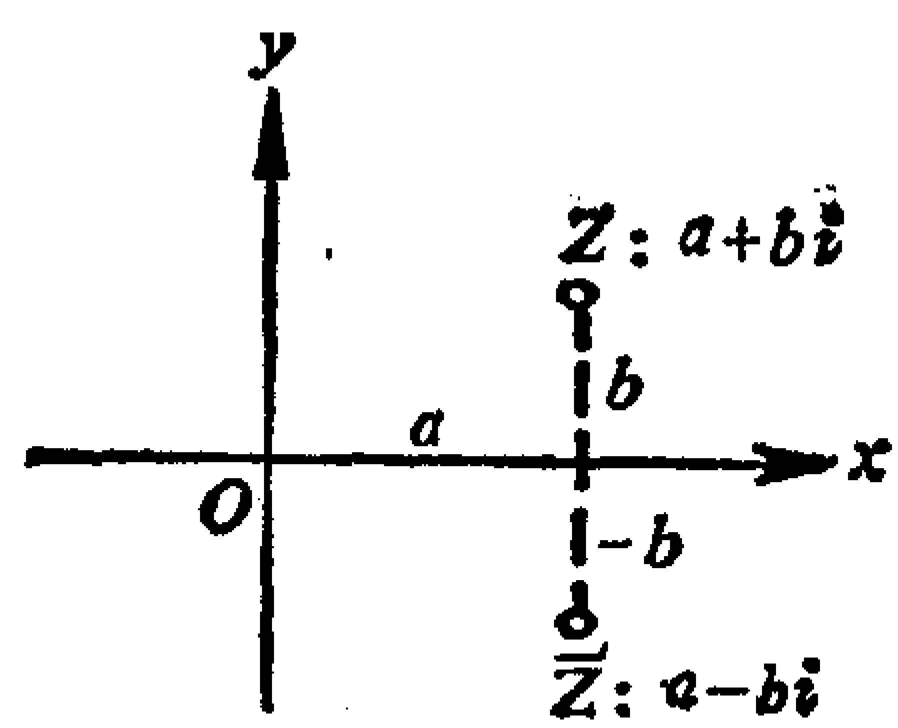


图 5-2

很明显，按照这种表示方法，每一个复数，有复平面内唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点，有唯一的一个复数和它对应．由此可知，复数集 C 和复平面内所有的点所成的集合是一一对应的．这是复数的一个几何意义．

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为**共轭复数**(当虚部不等于0时也叫做互为**共轭虚数**)．复数 z 的共轭复数可以用 $\bar{z}$ 来表示，也就是说，复数 $z=a+bi$ 的共轭复数是 $\bar{z}=a-bi$．显然，复平面内表示两个互为共轭复数的点 Z 与 $\bar{Z}$ 关于实轴对称 (图 5-2)，而实数 a(即虚部为 0 的复数)的共轭复数仍是 a 本身．

两个实数可以比较大小．但两个复数，如果不全是实数，就不能比较它们的大小．关于这个命题的证明，本书从略．

练　习

1. 如果 $a, b \in R$，在什么情况下，$a+bi$ 是实数？是虚数？是纯虚数？各举一些例子．

2. 说出下列数（其中 i 是虚数单位）中，哪些是实数，哪些是纯虚数，哪些是复数：

$$2+\sqrt{7},\quad 0.618,\quad \frac{2}{7}i,\quad 0,\quad i,\quad i^2,$$

$$5i+8,\quad 3-9\sqrt{2}i,\quad i(1-\sqrt{3}),\quad 2-i\sqrt{2}.$$

3. 说出下列复数的实部与虚部：

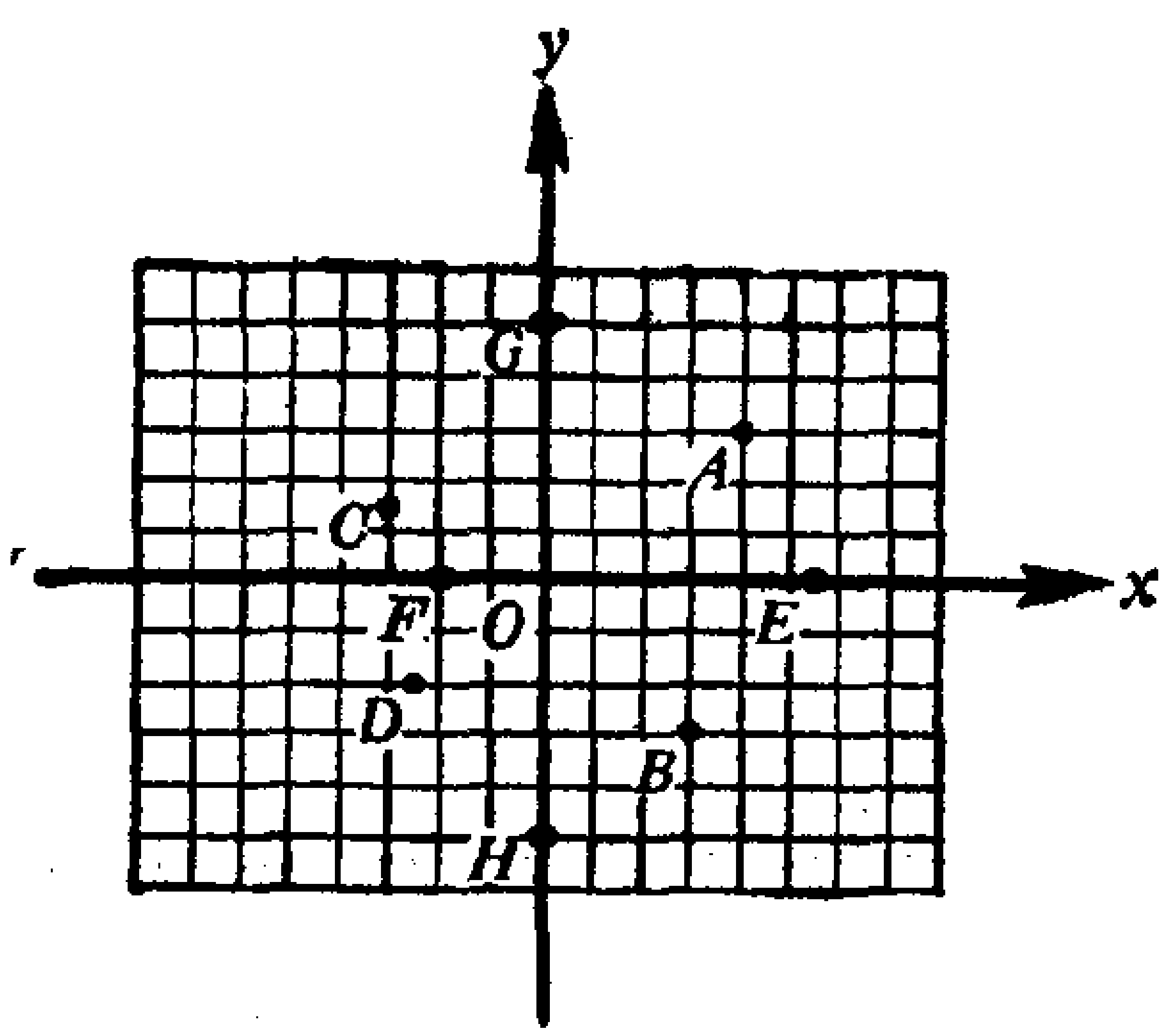
$$-5+6i,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad -\sqrt{3},\quad i,\quad 0.$$

4. 求适合下列方程的 x 与 y（$x, y \in R$）的值：

(1) $(3x+2y)+(5x-y)i=17-2i$；

(2) $(3x-4)+(2y+3)i=0$.

5. 说出图中复平面内各点所表示的复数（每个小正方格子边长为 1）：



（第 5 题）

6. 在复平面内描出表示下列复数的点:

(1) $2+5i$; (2) $-3+2i$;

(3) $\frac{1}{2}-4i$; (4) $-i-3$;

(5) 5; (6) $-3i$;

(7) $6i$; (8) -2;

(9) $1-i\sqrt{2}$; (10) $\sqrt{3}$.

7. 设复数 $z=a+bi$ 和复平面内的点 $Z(a,b)$ 对应, a,b 必须满足什么条件, 才能使点 Z 位于:

(1) 实轴上?

(2) 虚轴上?

(3) 上半平面(不包括实轴)?

(4) 右半平面(不包括原点和虚轴)?

8. 说出下列复数的共轭复数, 并在复平面内把每一对复数表示出来:

$4-3i$, $-1+i$, $-5-12i$, $4i+\frac{1}{2}$, $4i$, $-i\sqrt{5}$.

9. 说出复数$-\frac{1}{3}$, 0, π 的共轭复数.

10. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

(1) $0i$ 是纯虚数;

(2) 原点是复平面内直角坐标系的实轴与虚轴的公共点;

(3) 实数的共轭复数一定是实数, 虚数的共轭复数一定是虚数.

5.3 复数的向量表示

在物理学中，我们经常遇到力、速度、加速度、电场强度等，这些量，除了要考虑它们的绝对值大小以外，还要考虑它们的方向．我们把这种既有绝对值大小又有方向的量叫做**向量**．向量可以用有向线段来表示，线段的长度就是这个向量的绝对值(叫做这个**向量的模**)，线段的方向(用箭头表示)就是这个向量的方向．模相等且方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是**相等的向量**．在这一规定下，向量可以根据需要进行平移．模为零的向量(它的方向是任意的)叫做**零向量**．规定所有零向量相等．

复数可以用向量来表示．如图 5-3，设复平面内的点Z表

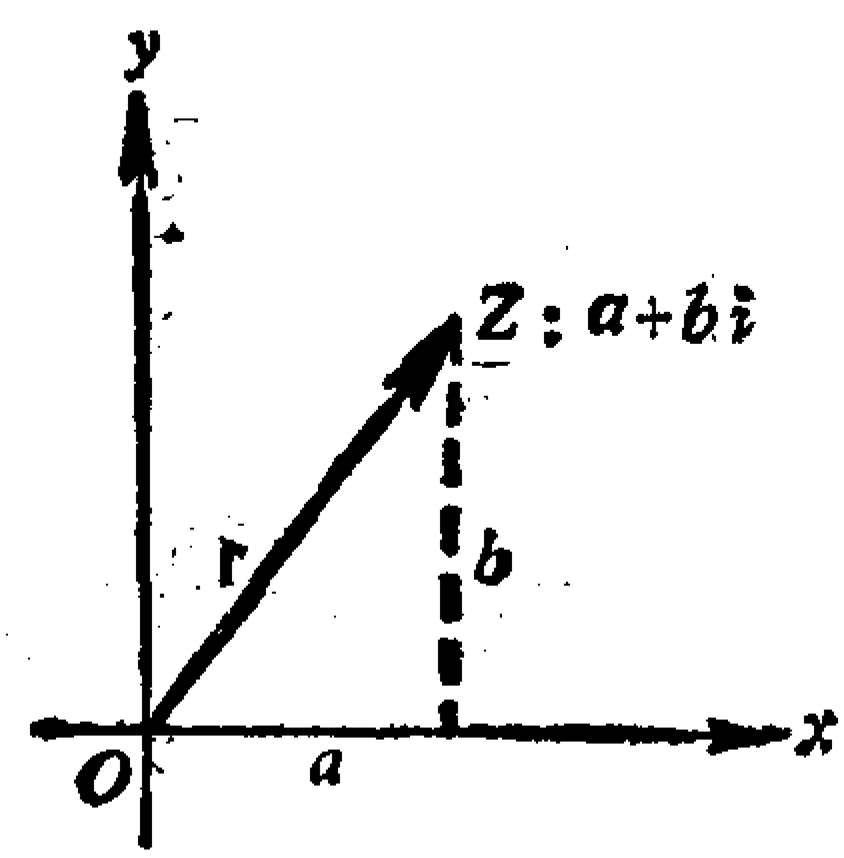


图 5-3

示复数 $z=a+bi$，连结 OZ，如果我们把有向线段 OZ(方向是从点 O 指向点 Z)看成向量，记作 $\overrightarrow{OZ}$，就把复数同向量联系起来了．很明显，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是由点 Z 唯一确定的；反过来，点 Z 也可由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定．因此，复数集 C 与复平面内所有以原点 O 为起点的向量所成的集合也是一一对应的．为方便起见，我们常把复数 $z=a+bi$ 说成点 Z 或说成向量$\overrightarrow{OZ}$．此外，我们还规定，相等的向量表示同一个复数．

图 5-3 中的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模（即有向线段 OZ 的长度）r 叫做**复数 $z=a+bi$ 的模**（或绝对值），记作 $|z|$ 或 $|a+bi|$. 如果 $b=0$, 那么 $z=a+bi$ 是一个实数 a, 它的模就等于 $|a|$（即 a 在实数意义上的绝对值）. 容易看出，

$$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例 1 求复数 $z_1=3+4i$ 及 $z_2=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\,i$ 的模，并且比较它们的模的大小.

解： $|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5,$

$$|z_2|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3}{2}.$$

$\because$ $$5>\frac{3}{2},$$

$\therefore$ $$|z_1|>|z_2|.$$

例 2 设 $z\in C$, 满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $|z|=4$; (2) $2<|z|<4$.

解： (1) 复数 z 的模等于 4, 就是说，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模（即点 Z 与原点 O 的距离）等于 4, 所以满足条件 $|z|=4$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心，以 4 为半径的圆.

(2) 不等式 $2<|z|<4$ 可化为不等式组

$$\begin{cases}|z|<4,\\|z|>2.\end{cases}$$

不等式 $|z|<4$ 的解集是圆 $|z|=4$ 内部所有的点组成的集合，不等式 $|z|>2$ 的解集是圆 $|z|=2$ 外部所有的点组成的集合，这两个集合的交集，就是上述不等式组的解集，也就是满足条件 $2<|z|<4$ 的点 Z 的集合. 容易看出，所求的集合

是以原点 O 为圆心，以 2 及 4 为半径的圆所夹的圆环，但不包括圆环的边界(图 5-4).

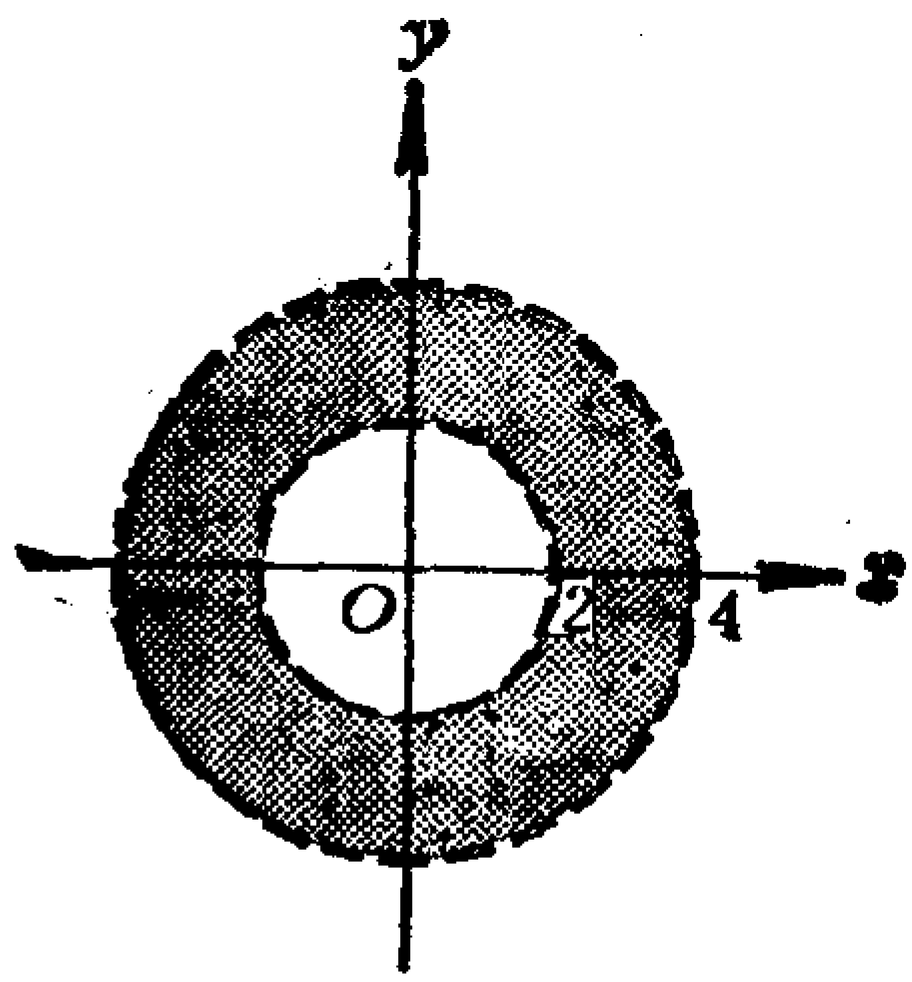


图 5-4

练 习

1. 已知复数 $\sqrt{3}+i, -2+4i, -2i, 4$.

   (1) 在复平面内描出表示这些复数的点;

   (2) 在复平面内画出表示这些复数的向量;

   (3) 求各复数的模.

2. 求证复平面内分别和复数 $z_1=1+2i, z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$, $z_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$, $z_4=-2+i$ 对应的四点 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 共圆.

习题十二

1. 填空:

   (1) 复数集是实数集与虚数集的____;

   (2) 实数集与虚数集的交集是____;

(3) 纯虚数集是虚数集的____；

(4) 设复数集 C 为全集，那么实数集 R 的补集是____。

2. $m(m\in R)$ 取什么值，复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是

(1) 实数？ (2) 纯虚数？ (3) 零？

3. 求适合下列方程的 x 与 $y(x,y\in R)$ 的值：

(1) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)+\left(5x+\frac{2}{3}y\right)i=-4+16i$;

(2) $(x+y)-xyi=24i-5$;

(3) $(x^2-y^2)+2xyi=8+6i$;

(4) $2x^2-5x+2+i(y^2+y-2)=0$.

4. 已知复数

$$1, i, 6-8i, 1+i, 2-\sqrt{2}i, -4-6i, 3\frac{1}{2}, -\sqrt{3}i.$$

(1) 在复平面内描出表示这些复数的点；

(2) 求各数的共轭复数，并且描出和这些共轭复数对应的点。

5. 画出表示第 4 题中各复数及其共轭复数的向量，并求每一对复数及其共轭复数的模.

6. 求证对任何 $z\in C$，有 $|z|=|\bar{z}|$.

7. 比较复数 $z_1=-5+12i$, $z_2=-6-6\sqrt{3}i$ 的模的大小.

8. 已知 $|x+yi|=1$，求表示复数 $x+yi$ 的点的轨迹.

9. 设 $z\in C$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $|z|=3$; (2) $|z|>3$;

(3) $|z|<3$; (4) $2\leqslant|z|<5$.

10. 设 $z=a+bi$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $0<|a|<2$;　　(2) $a>0$, $b>0$, $a^2+b^2<16$.

二　复数的运算

5.4　复数的加法与减法

复数的加法规定按照以下的法则进行：设 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ 是任意两个复数，那么它们的和

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

很明显，两个复数的和仍然是一个复数.

容易验证，复数的加法满足交换律、结合律，即对任何 z_1, z_2, $z_3\in C$, 有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

现在我们来看复数加法的几何意义.

从物理学知道，要求出作用于同一点 O、但不在同一直线上的两个力$\vec{F}_1$与$\vec{F}_2$的合力，只要用表示$\vec{F}_1$与$\vec{F}_2$的向量为相邻的两边画一个平行四边形，那么，平行四边形中，以力的作用点 O 为起点的那条对角线所表示的向量就是合力 $\vec{F}$(图 5-5(1)). 这个法则通常叫做向量加法的平行四边形法则.

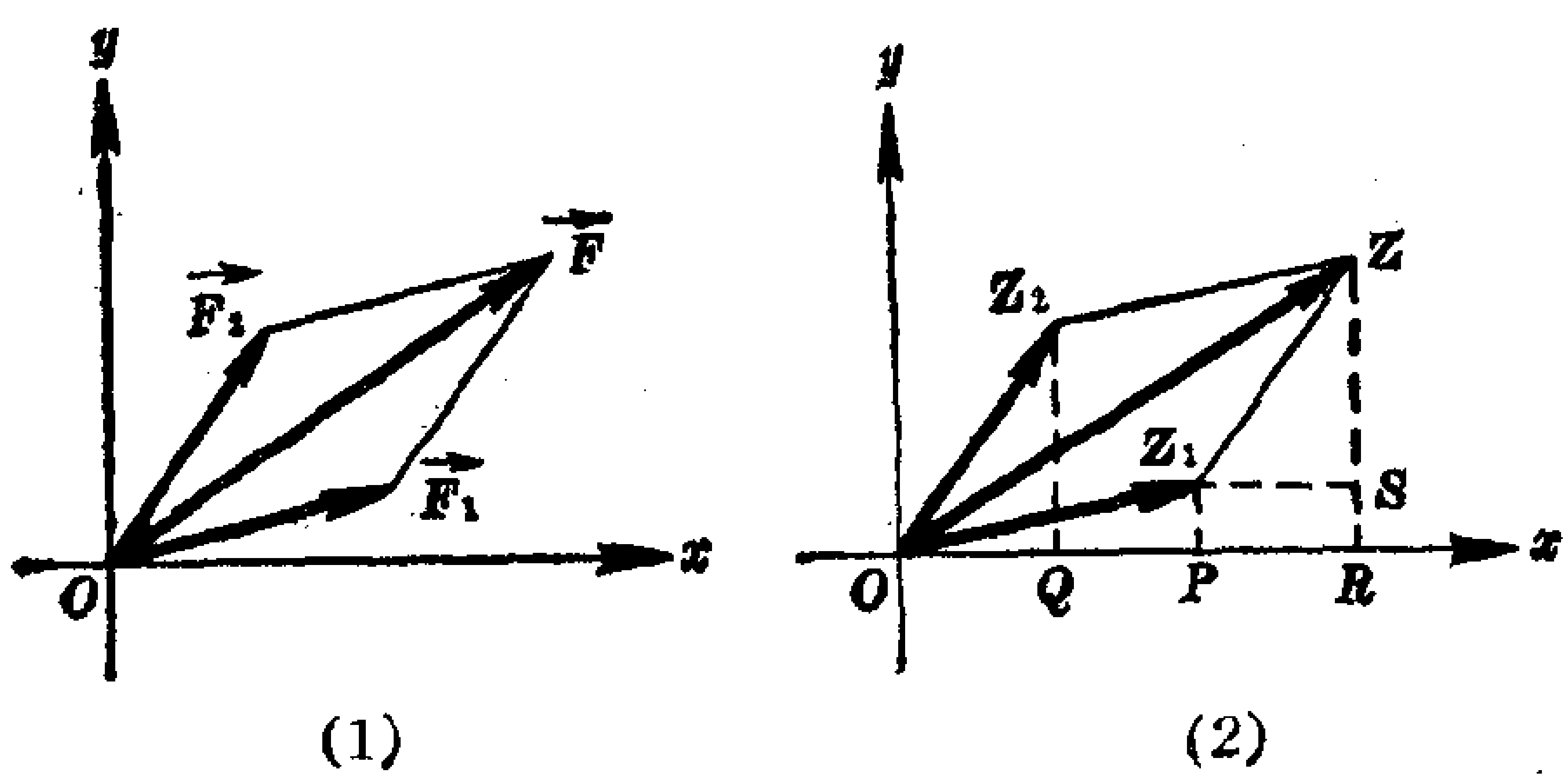


图　5-5

复数用向量来表示，如果与这些复数对应的向量不在同一直线上，那么这些复数的加法就可以按照向量加法的平行四边形法则来进行. 下面我们来证明这个事实.

设$\overrightarrow{OZ_1}$及$\overrightarrow{OZ_2}$分别与复数$a+bi$及$c+di$对应，且$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$不在同一直线上(图 5-5(2))．以$\overrightarrow{OZ_1}$及$\overrightarrow{OZ_2}$为两条邻边画平行四边形OZ_1ZZ_2，画x轴的垂线PZ_1，QZ_2及RZ，并且画$Z_1S\perp RZ$. 容易证明

$$\triangle ZZ_1S\cong\triangle Z_2OQ,$$

并且四边形Z_1PRS是矩形，因此

$$\begin{aligned}OR&=OP+PR=OP+Z_1S\\&=OP+OQ=a+c,\\RZ&=RS+SZ=PZ_1+QZ_2=b+d.\end{aligned}$$

于是，点Z的坐标是$(a+c,b+d)$，这说明$\overrightarrow{OZ}$就是与复数$(a+c)+(b+d)i$对应的向量.

由此可知，求两个复数的和，可以先画出与这两个复数对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，如果$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$不在同一直线上，再以这两个向量为两条邻边画平行四边形，那么与这个平行四边形的对角线OZ所表示的向量$\overrightarrow{OZ}$对应的复数，就是所求两个复数的和.

如果$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$在同一直线上，我们可以画出一个“压扁”了的平行四边形，并据此画出它的对角线来表示$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$的和.

总之，复数的加法可以按照向量的加法法则来进行，这是复数加法的几何意义.

下面再来看复数的减法.

复数的减法规定是加法的逆运算，即把满足

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi$$

的复数 $x+yi$，叫做复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ 的**差**，记作 $(a+bi)-(c+di)$．根据复数相等的定义，有

$$c+x=a, \qquad d+y=b,$$

由此

$$x=a-c, \qquad y=b-d,$$

所以

$$x+yi=(a-c)+(b-d)i,$$

即

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

这就是复数的减法法则．由此可见，两个复数的差是一个唯一确定的复数．

现设 $\overrightarrow{OZ}$ 与复数 $a+bi$ 对应，$\overrightarrow{OZ_1}$ 与复数 $c+di$ 对应（图 5-6）．以 $\overrightarrow{OZ}$ 为一条对角线，$\overrightarrow{OZ_1}$ 为一条边画平行四边形，那么这个平行四边形的另一边 OZ_2 所表示的向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 就与复数 $(a-c)+(b-d)i$ 对应．因为 $Z_1Z \mathrel{\underline{\parallel}} OZ_2$，所以向量 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 也与这个差对应．

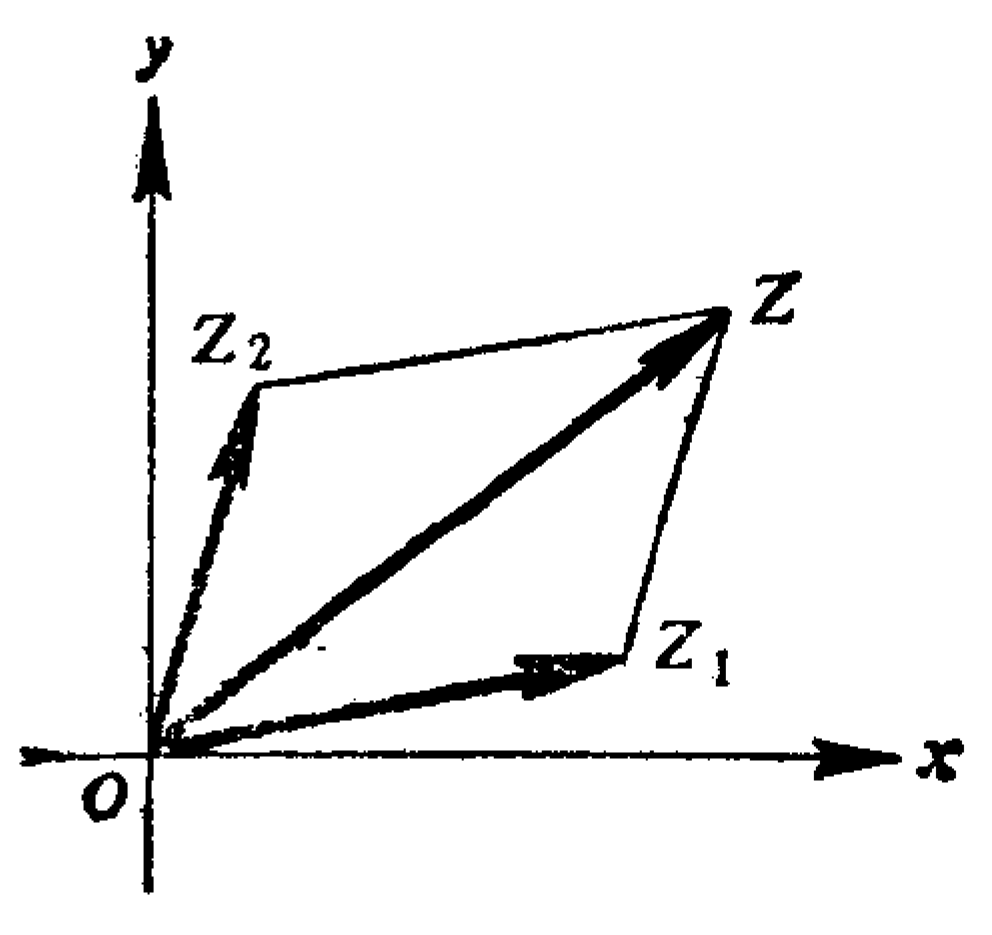


图　5-6

这就是说，两个复数的差 $z-z_1$（即 $\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OZ_1}$）与连结两个向量终点并指向被减数的向量对应．这是复数减法的几何意义．

由上所述，我们可以看出，复数的加（减）法与多项式的加（减）法是类似的，就是把复数的实部与实部、虚部与虚部分别相加（减），即

$$\boxed{(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.}$$

例 1 计算 $(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$．

解： $(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$

$=(5-2-3)+(-6-1-4)i$

$=-11i.$

例 2 根据复数的几何意义及向量表示，求复平面内两点间的距离公式．

解： 如图5-7，设复平面内的任意两点 Z_1，Z_2 分别表示复数 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，那么 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 就是与复数 z_2-z_1 对应的向量．如果用 d 表示点 Z_1，Z_2 之间的距离，那么 d 就是向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 的模，即复数 z_2-z_1 的模，所以

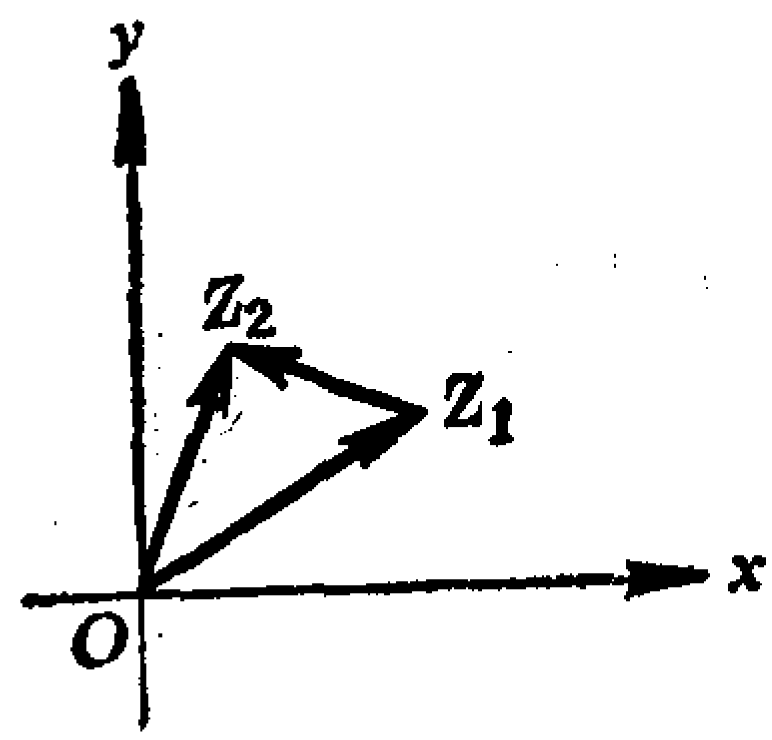


图 5-7

$$d=|z_2-z_1|.$$

这就是复平面内两点间的距离公式．而

$$\begin{aligned} d=|z_2-z_1| &= |(x_2+y_2i)-(x_1+y_1i)| \\ &= |(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i| \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \end{aligned}$$

这与我们以前导出的两点间的距离公式一致.

例3 根据复数的几何意义及向量表示，求复平面内的圆的方程.

解: 如图 5-8, 设圆心为 P, 点 P 与复数 $p=a+bi$ 对应, 圆的半径为 r, 圆上任意一点 Z 与复数 $z=x+yi$ 对应, 那么

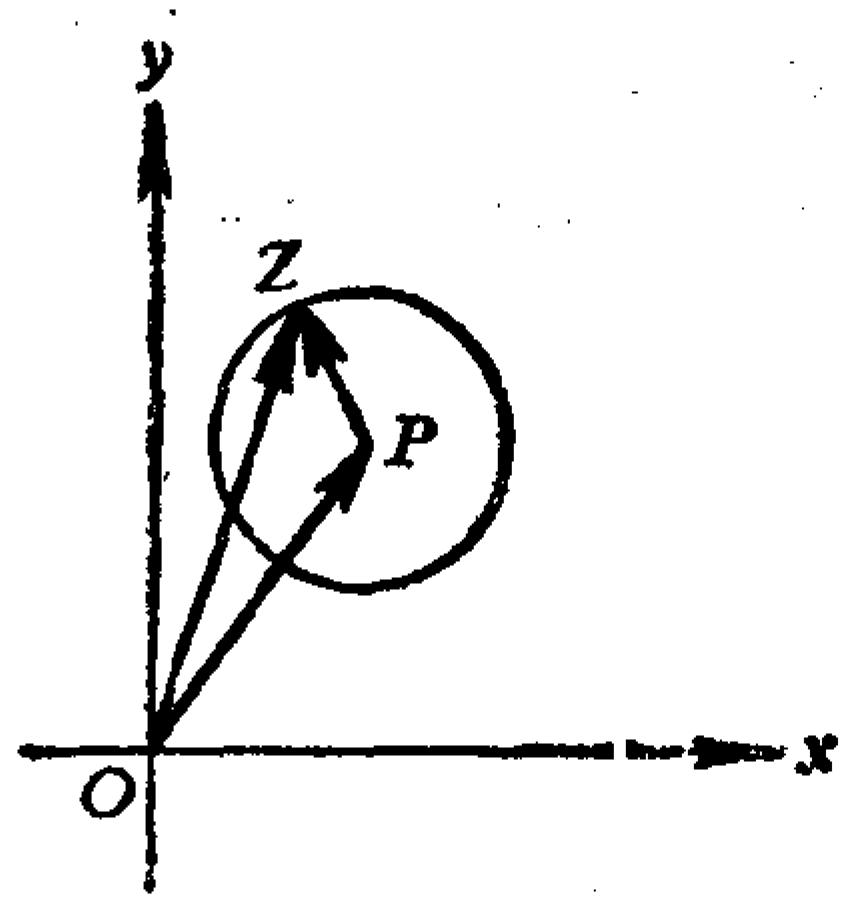


图 5-8

$$|z-p|=r.$$

这就是复平面内的圆的方程. 特别地, 当点 P 在原点时, 圆的方程就成了 $|z|=r$.

请同学们利用复数的减法法则, 把圆的方程 $|z-p|=r$ 化成用实数表示的一般形式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

练　习

1. 证明复数的加法满足交换律与结合律.
2. 分别用代数及几何方法计算:

   (1) $(4+5i)+(2+3i)$;　(2) $(2+4i)+(3-4i)$;

   (3) $(-3-4i)+(-2+i)$;　(4) $-5i+(-i-1)$.
3. 分别用代数及几何方法计算:

   (1) $(4+5i)-(3+2i)$;　(2) $(-3+2i)-(4-5i)$;

   (3) $(6-3i)-(-3i-2)$;　(4) $5-(3+2i)$.
4. 设 $z=a+bi$, 求 $z+\bar{z}$ 与 $z-\bar{z}$.

5. 设复平面内的定点 P 与复数 $p=a+bi$ 对应，动点 Z 与复数 $z=x+yi$ 对应，$\varepsilon\in R^+$，满足不等式

$$|z-p|<\varepsilon$$

的点 Z 的集合是什么图形？

5.5 复数的乘法与除法

复数的乘法规定按照以下的法则进行：设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 是任意两个复数，那么它们的积

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+bci+adi+bdi^2\\&=(ac-bd)+(bc+ad)i.\end{aligned}$$

也就是说，复数的乘法与多项式的乘法是类似的，但必须在所得的结果中把 i^2 换成 -1，并且把实部与虚部分别合并。

很明显，两个复数的积仍然是一个复数.

容易验证，复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，即对任何 $z_1, z_2, z_3\in C$，有

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),$$

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3.$$

根据复数的乘法法则，对于任何复数 $z=a+bi$，有

$$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi)&=a^2+b^2+(ab-ab)i\\&=a^2+b^2,\end{aligned}$$

因此，两个共轭复数 $z, \bar{z}$ 的积是一个实数，这个实数等于每一个复数的模的平方，即

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2.$$

例 1 计算 $(1-2i)(3+4i)(-2+i)$.

解： $(1-2i)(3+4i)(-2+i)$

$=(11-2i)(-2+i)$

$=-20+15i.$

计算复数的乘方，要用到虚数单位 i 的乘方．因为复数的乘法满足交换律与结合律，所以实数集 R 中正整数指数幂的运算律，在复数集 C 中仍然成立，即对任何 $z, z_1, z_2\in C$ 及 m，$n\in N$，有

$$z^m\cdot z^n=z^{m+n},$$

$$(z^m)^n=z^{mn},$$

$$(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n.$$

另一方面，我们有

$$i^1=i,$$

$$i^2=-1,$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i,$$

$$i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=1.$$

从而，对于任何 $n\in N$，我们都有

$$i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=(i^4)^n\cdot i$$

$$=1^n\cdot i=i.$$

同理可证

$$i^{4n+2}=-1,$$

$$i^{4n+3}=-i,$$

$$i^{4n}=1.$$

这就是说，如果 $n\in N$，那么

$$\boxed{i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i,\quad i^{4n}=1.}$$

例 2 计算$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

解: $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

$=\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i=-1.$

复数的除法规定是乘法的逆运算，即把满足

$$(c+di)(x+yi)=a+bi\quad(c+di\neq 0)$$

的复数$x+yi$，叫做复数$a+bi$除以复数$c+di$的**商**，记作$(a+bi)\div(c+di)$或$\frac{a+bi}{c+di}$.

我们知道，两个共轭复数的积是一个实数，因此，两个复数相除，可以先把它们的商写成分式的形式，然后把分子与分母都乘以分母的共轭复数，并且把结果化简，即

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\quad(c+di\neq 0).$$

因为$c+di\neq 0$，所以$c^2+d^2\neq 0$. 由此可见，商$\frac{a+bi}{c+di}$是一个唯一确定的复数.

例 3 计算$(1+2i)\div(3-4i)$.

解: $(1+2i)\div(3-4i)=\frac{1+2i}{3-4i}$

$$=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

练　习

1. 证明复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律。

2. 计算：

(1) $(-8-7i)(-3i)$;　　(2) $(4-3i)(-5-4i)$;

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$;

(4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

3. (口答) i^{11}, i^{25}, i^{26}, i^{36}, i^{70}, i^{101}, i^{355}, i^{400} 各等于什么？

4. 计算：

(1) $\frac{1}{i}$;　　(2) $\frac{1}{i^3}$;　　(3) $\frac{1}{\sqrt{2}i}$;

(4) $\frac{2i}{1-i}$;　　(5) $\frac{2+i}{7+4i}$;　　(6) $\frac{1}{(9+2i)^2}$.

习题十三

1. 计算：

(1) $\left(\frac{2}{3}+i\right)+\left(1-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i\right)$;

(2) $(-\sqrt{2}+\sqrt{3}i)$
$-[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})i]$
$+(-\sqrt{2}i+\sqrt{3})$;

(3) $[(a+b)+(a-b)i]-[(a-b)-(a+b)i]$.

2. 复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 分别表示向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$，求表示向量$\overrightarrow{BA}$与$\overrightarrow{AB}$的复数.

3. 求复平面内和下列各题中两个复数对应的两点之间的距离：

(1) $2+i, 3-i$; (2) $8+5i, 4-2i$.

4. 求证一个复数与它的共轭复数的和，等于这个复数的实部的 2 倍. 用图把这一结论表示出来.

5. 已知 $z=a+bi(a, b\in R)$，$|z-\bar{z}|$ 等于什么？用图把结论表示出来.

6. 设 z_1, z_2 是不等于零的复数，用几何方法证明

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

7. 求证 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

8. 设 Z_1, Z_2 是复平面内两点，写出线段 Z_1Z_2 的垂直平分线的方程.

9. 已知复平面内一椭圆的两个焦点的坐标为$(-\sqrt{5}, 0)$，$(\sqrt{5}, 0)$，椭圆上的点到两焦点的距离之和为 6，写出这个椭圆的方程.

10. 计算：

(1) $(-0.2+0.3i)(0.5-0.4i)$;

(2) $(1-2i)(2+i)(3-4i)$;

(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i)(\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i) \quad (a, b\in R^+)$;

(4) $(a+bi)(a-bi)(-a+bi)(-a-bi)$.

11. 利用公式 $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$，把下列各式分解成一次因式的积：

(1) x^2+4; (2) a^4-b^4;

(3) $a^2+2ab+b^2+c^2$;　　　　(4) x^2+2x+3.

12. 计算:

(1) $(1-i)+(2-i^3)+(3-i^5)+(4-i^7)$;

(2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$;　　　　(3) $(a+bi)^3$.

13. 设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 求证:

(1) $1+\omega+\omega^2=0$;　　　　(2) $\omega^3=1$.

14. 计算:

(1) $\frac{1}{11-5i}$;　　　　(2) $\frac{7-9i}{1+i}$;

(3) $\frac{1-2i}{3+4i}$;　　　　(4) $\frac{1+2i}{2-4i^3}$;

(5) $\frac{(1-2i)^2}{3-4i}-\frac{(2+i)^2}{4-3i}$;

(6) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}$.

15. 设 $z_1, z_2\in C$, 求证:

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;　　(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;

(3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;　　(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$.

16. 已知 $z_1, z_2\in C$, $z_1z_2=0$, 求证 z_1, z_2 中至少有一个是 0.

17. 已知 $z_1=5+10i$, $z_2=3-4i$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$, 求 z.

18. 设 $z=x+yi(x, y\in R)$ 的平方等于 $5-12i$, 求 z.

19. 设 $f(z)=\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$, 求:

(1) $f(2+3i)$;　　　　(2) $f(1-i)$.

20. 规定 i^0 的意义是 1，i^{-m} 的意义是 $\frac{1}{i^m}(m\in N)$，求证

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i$$

对一切 $n\in Z$ 都能成立。

三　复数的三角形式

5.6　复数的三角形式

我们知道，与复数 $z=a+bi$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$（图 5-9）的

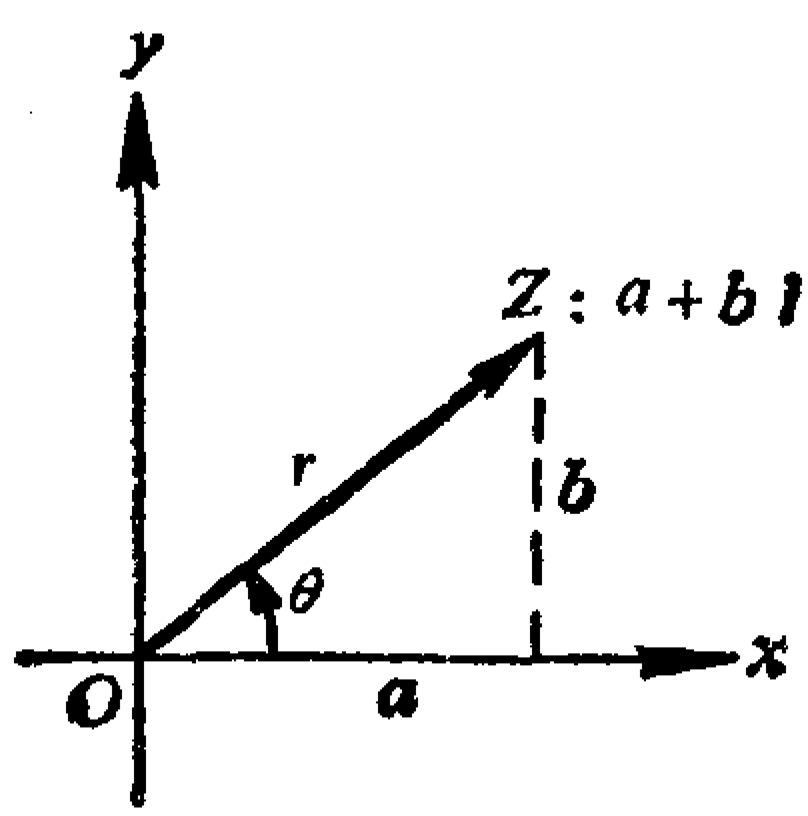


图　5-9

模 r 叫做这个复数的模，并且

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

以 x 轴的正半轴为始边、向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线（起点是 O）为终边的角 θ，叫做**复数 $z=a+bi$ 的辐角**.

不等于零的复数 $z=a+bi$ 的辐角有无限多个值，这些值相差 2π 的整数倍．例如，复数 i 的辐角是 $\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 k 可以取任何整数.

适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的值，叫做**辐角的主值**，通常记作 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$.

每一个不等于零的复数有唯一的模与辐角的主值，并且可由它的模与辐角的主值唯一确定．因此，**两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角的主值分别相等。**

很明显，当 $a\in \boldsymbol{R}^{+}$ 时，

$$\arg a=0,$$

$$\arg(-a)=\pi,$$

$$\arg(ai)=\frac{\pi}{2},$$

$$\arg(-ai)=\frac{3\pi}{2}.$$

如果 $z=0$，那么与它对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 缩成一个点（零向量），这样的向量的方向是任意的，所以复数 0 的辐角也是任意的．

从图 5-9 可以看出：

$$\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta.\end{cases}$$

$$\therefore \quad a+bi=r\cos\theta+ir\sin\theta$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

其中

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}.$$

当与 z 对应的点 Z 不在实轴或虚轴上时，z 的辐角 θ 的终边所在的象限就是点 Z 所在的象限；当点 Z 在实轴或虚轴上时，辐角 θ 的终边就是从原点 O 出发、经过点 Z 的半条坐标轴。

因此我们可以说，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

的形式.

$r(\cos\theta+i\sin\theta)$叫做复数$a+bi$的**三角形式**. 为了同三角形式区别开来,$a+bi$叫做复数的**代数形式**.

例1 把复数$\sqrt{3}+i$表示成三角形式.

解: $r=\sqrt{3+1}=2$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为与$\sqrt{3}+i$对应的点在第一象限,所以$\arg(\sqrt{3}+i)=\frac{\pi}{6}$,于是

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

例2 把复数$1-i$表示成三角形式.

解: $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为与$1-i$对应的点在第四象限,所以$\arg(1-i)=\frac{7\pi}{4}$,于是

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

例3 把复数-1表示成三角形式.

解: $r=\sqrt{1+0}=1$.

因为与-1对应的点在x轴的负半轴上,所以$\arg(-1)=\pi$,于是

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi.$$

当然,把一个复数表示成三角形式时,辐角θ不一定要取主值. 例如,$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$也是复数$1-i$的

三角形式.

练　习

1. 把下列复数表示成三角形式，并且画出与它们对应的向量.

(1) 4;　　(2) -3;　　(3) $2i$;

(4) $-i$;　　(5) $-2+2i$;　　(6) $-1-\sqrt{3}\,i$;

(7) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$;　　(8) $3-4i$;　　(9) $-4+3i$.

2. 下列复数是不是复数的三角形式?如果不是,把它们表示成三角形式.

(1) $\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(2) $-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

(3) $\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}+i\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

(4) $\cos\dfrac{7\pi}{5}+i\sin\dfrac{7\pi}{5}$.

3. 把下列复数表示成代数形式:

(1) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

(2) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

(3) $6\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$;

(4) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

5.7 复数的三角形式的运算

1. 乘法与乘方

如果把复数 z_1, z_2 分别写成三角形式

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

就有

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}$$

即

$$\boxed{\begin{aligned}&r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}}$$

这就是说，**两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和.**

据此，两个复数 z_1, z_2 相乘时，可以先画出分别与 z_1, z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，然后把向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 按逆时针方向旋转一个角 θ_2（如果 $\theta_2<0$，就要把 $\overrightarrow{OP_1}$ 按顺时针方向旋转一个角 $|\theta_2|$），再把它的模变为原来的 r_2 倍，所得的向量 $\overrightarrow{OP}$，就表示积 $z_1\cdot z_2$（图 5-10）．这是复数乘法的几何意义.

用数学归纳法容易证明（请同学们自己证明），上面的结论可以推广到 n 个复数相乘的情况，就是：

$$z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

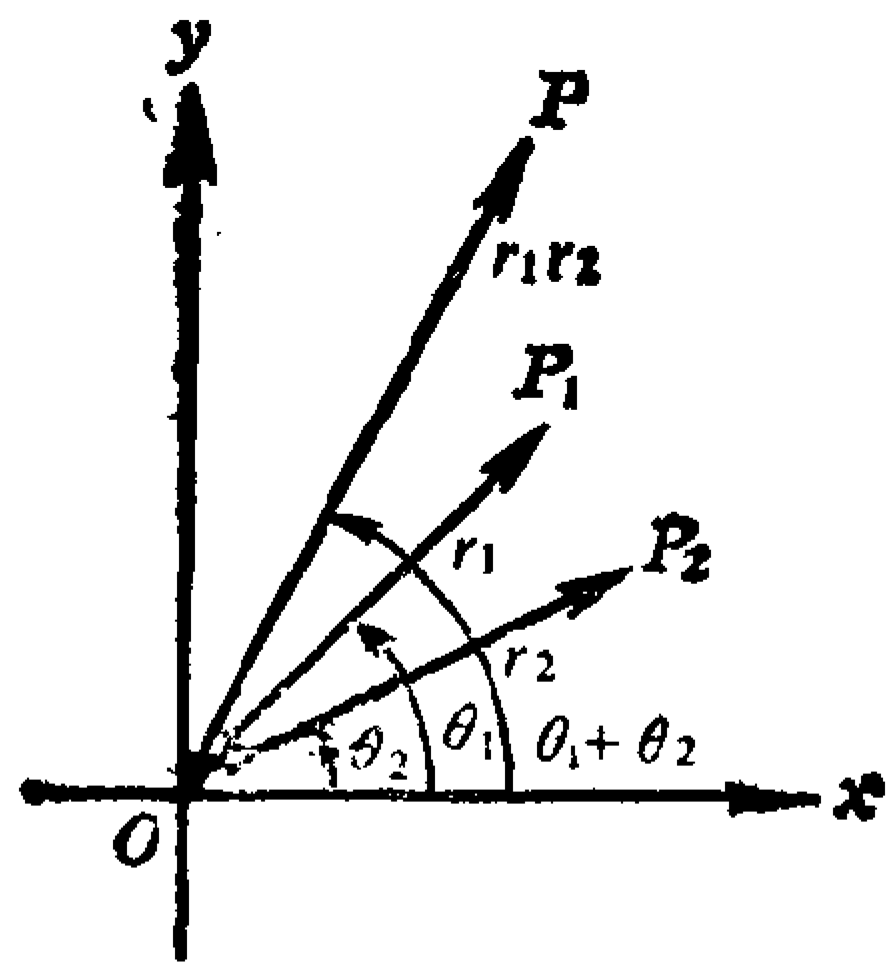


图　5-10

$$=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$$
$$+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].$$

因此，如果

$$r_1=r_2=\cdots=r_n=r,\quad \theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$$

时，就有

$$\boxed{\begin{aligned}&[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n\\&=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad(n\in N).\end{aligned}}$$

这就是说，**复数的 $n(n\in N)$ 次幂的模等于这个复数的模的 n 次幂，它的辐角等于这个复数的辐角的 n 倍．**这个定理叫做**棣莫佛❶定理．**

例 1　计算

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

❶　棣莫佛（Abraham de Moivre，1667—1754年），法国数学家．

解: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i.$$

例 2 计算$(\sqrt{3}-i)^6$.

解: 因为$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, 所以

$$(\sqrt{3}-i)^6=\left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^6$$

$$=2^6(\cos 11\pi+i\sin 11\pi)$$

$$=64(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$=64\cdot(-1)=-64.$$

例 3 如图 5—11, 向量$\overrightarrow{OZ}$与复数$-1+i$对应, 把$\overrightarrow{OZ}$按逆时针方向旋转 120°, 得到$\overrightarrow{OZ'}$. 求与向量$\overrightarrow{OZ'}$对应的复数(用代数形式表示).

解: 所求的复数就是$-1+i$乘以一个复数z_0的积, 这个复数z_0的模是 1, 辐角的主值是 120°. 所以所求的复数是

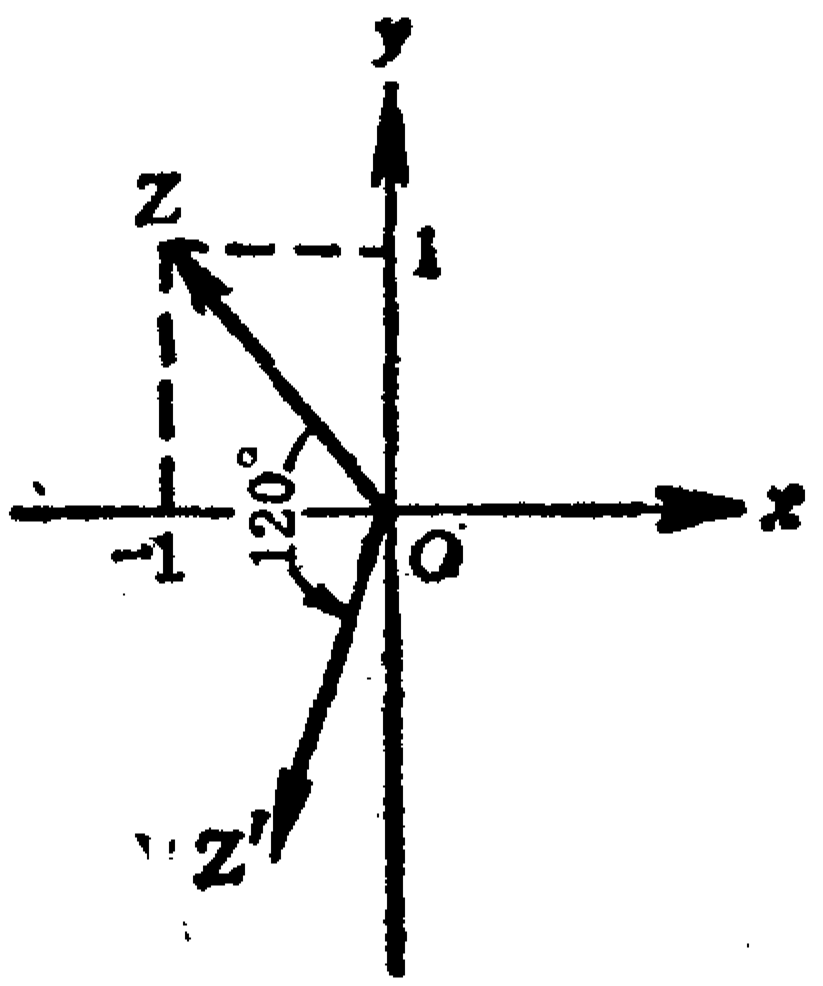


图 5-11

$$(-1+i)\cdot 1(\cos 120°+i\sin 120°)$$

$$=(-1+i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$$

例 4　如图 5-12，已知平面内并列的三个相等的正方形，利用复数证明

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\frac{\pi}{2}.$$

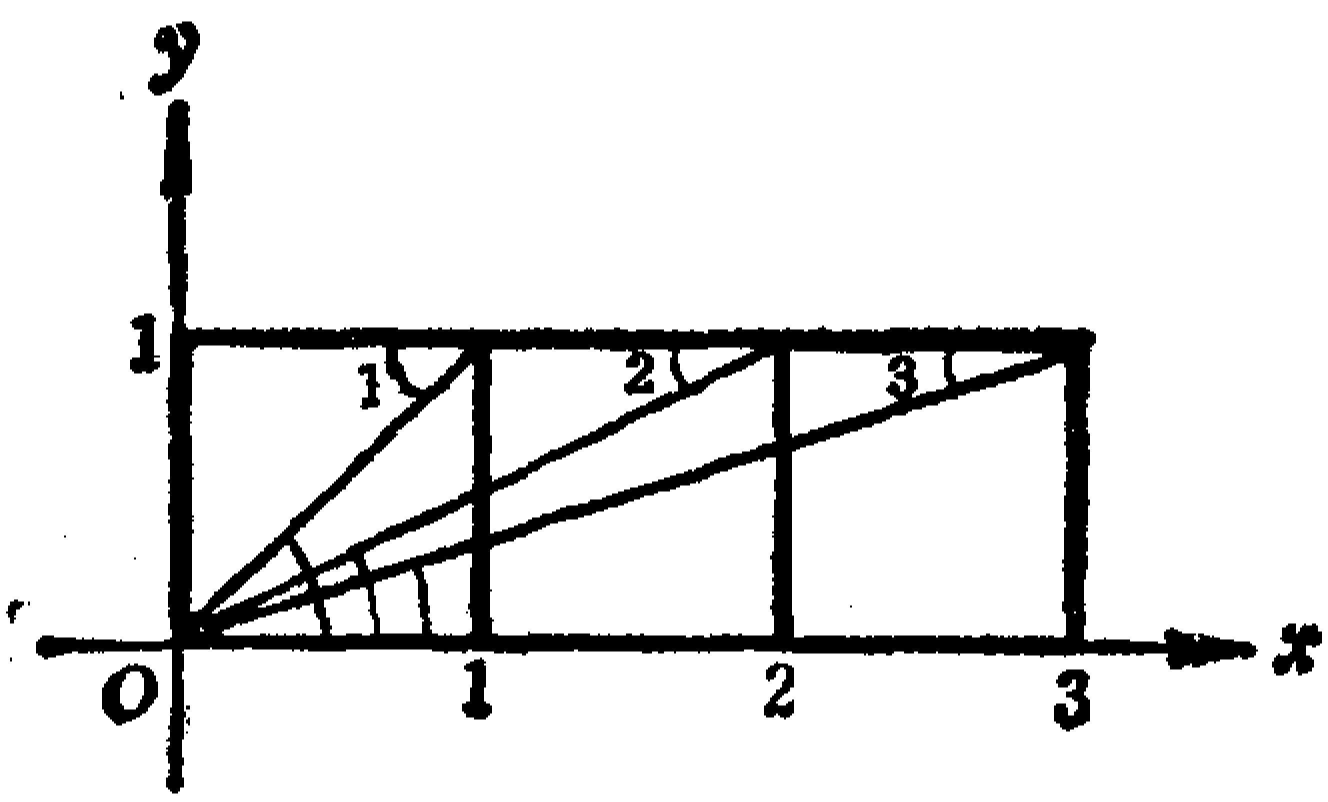


图　5-12

证明：如图建立坐标系（确定复平面），由于平行线的内错角相等，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 分别等于复数 $1+i$，$2+i$，$3+i$ 的辐角的主值，这样$\angle 1+\angle 2+\angle 3$就是积$(1+i)(2+i)(3+i)$的辐角，而

$$(1+i)(2+i)(3+i)=(1+3i)(3+i)=10i,$$

其辐角的主值是$\frac{\pi}{2}$，并且$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 都是锐角，于是

$$0<\angle 1+\angle 2+\angle 3<\frac{3\pi}{2},$$

所以

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\frac{\pi}{2}.$$

练 习

1. 计算:

(1) $8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

(3) $\sqrt{2}(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)$

$$\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ);$$

(4) $3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\cdot 2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)$

$$\cdot 5(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ).$$

2. 用棣莫佛定理计算:

(1) $[3(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)]^5$;

(2) $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$;

(3) $(1-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7$;　　(4) $(-1-i)^6$.

3. 直角三角形 ABC 中, $\angle C=\frac{\pi}{2}$, $BC=\frac{1}{3}AC$, 点 E 在 AC 上, 且 $EC=2AE$. 利用复数证明

$$\angle CBE+\angle CBA=\frac{3\pi}{4}.$$

2. 除法

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, 且 $z_2\neq 0$. 因为

$$r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

所以根据复数的除法的定义，有

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}}$$

这就是说，**两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差.**

例 5 计算

$$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

解： 原式$=\dfrac{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

$$=2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]=2(0+i)=2i.$$

练　习

1. 计算：

(1) $12\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\div 6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

(2) $\sqrt{3}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

$$\div\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ);$$

(3) $2\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

(4) $-i\div 2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$.

2. 复数除法的几何意义是什么？

3. 开方

设 $\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$是复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 $n(n\in N)$ 次方根，那么

$$\begin{aligned} r(\cos\theta+i\sin\theta) &= [\rho(\cos\phi+i\sin\phi)]^n \\ &= \rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi). \end{aligned}$$

因为相等的复数，它们的模相等，辐角可以相差 2π 的整数倍，所以

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\phi = \theta + 2k\pi \quad (k\in \mathrm{Z}). \end{cases}$$

由此可知，

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \phi = \frac{\theta+2k\pi}{n},$$

因此 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的 n 次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

当 k 取 0, 1, $\cdots$, $n-1$ 各值时，就可以得到上式的 n 个值．由于正弦、余弦函数的周期都是 2π，当 k 取 $n, n+1$ 以及其他各个整数值时，又重复出现 k 取 $0, 1, \cdots, n-1$ 时的结果．所以

复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根❶是
$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$
$(k=0,1,\cdots,n-1)$.

这就是说，复数的 $n(n\in N)$ 次方根是 n 个复数，它们的模都等于这个复数的模的 n 次算术根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 $0,1,\cdots,n-1$ 倍的和的 n 分之一.

例 6 求 $1-i$ 的立方根.

解： 因为 $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$，所以 $1-i$ 的立方根是

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$
$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi+8k\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi+8k\pi}{12}\right)$$
$$(k=0,1,2),$$

即 $1-i$ 的立方根是下面三个复数：

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

---

❶ 有的书上用 $\sqrt[n]{z}$ 表示复数 z 的 n 次方根. 采用这个符号时，一定要记住 $\sqrt[n]{z}$ 表示 n 个复数.

例 7 设$a\in R^+$，求$-a$的平方根.

解：因为$-a=a(\cos\pi+i\sin\pi)$，所以$-a$的平方根是

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)\quad (k=0,1),$$

即$-a$的平方根是下面两个复数：

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),\quad \sqrt{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

或

$$\sqrt{a}\,i,\quad -\sqrt{a}\,i.$$

从例 7 可以看到，$a\in R^+$时 $-a$ 的平方根是$\pm\sqrt{a}\,i$.

我们知道，对于实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，如果 $b^2-4ac<0$，那么它在实数集 R 中没有根. 现在我们在复数集C中考察这种情况. 经过变形，原方程可化为

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

$$\therefore\qquad x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\left[\frac{-(b^2-4ac)}{(2a)^2}\right].$$

由于$\dfrac{-(b^2-4ac)}{(2a)^2}\in R^+$，根据例 7，我们得到

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a},$$

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 在复数集C中有两个根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a}\quad (b^2-4ac<0).$$

显然，它们是一对共轭复数.

例 8 在复数集 C 中解方程 $x^2-4x+5=0$.

解： 因为 $b^2-4ac=16-20=-4<0$，所以

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4}\,i}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i,$$

根据以前学过的一元二次方程的有关知识，我们知道，例 8 中方程左边的二次三项式 x^2-4x+5 在复数集 C 中就可以通过求根的方法分解成两个一次因式的积，即

$$\begin{aligned}x^2-4x+5&=[x-(2+i)][x-(2-i)]\\&=(x-2-i)(x-2+i).\end{aligned}$$

形如 $a_nx^n+a_0=0(a_0, a_n\in C$，且 $a_n\neq 0)$ 的方程叫做**二项方程**. 任何一个二项方程都可以化成 $x^n=b(b\in C)$ 的形式，因此，都可以通过复数开方来求根.

例 9 在复数集 C 中解方程 $x^5=32$.

解： 原方程就是

$$x^5=32(\cos 0+i\sin 0).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x&=\sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5}+i\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right)\\&=2\left[\cos\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(k\cdot\frac{2\pi}{5}\right)\right]\\&\qquad(k=0,1,2,3,4),\end{aligned}$$

就是

$$x_1=2(\cos 0+i\sin 0)=2,$$

$$x_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right),$$

$$x_3=2\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$x_4=2\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right),$$

$$x_5=2\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right).$$

这个方程的根的几何意义是复平面内的五个点，这些点均匀分布在以原点为圆心、以 2 为半径的圆上(图 5-13).

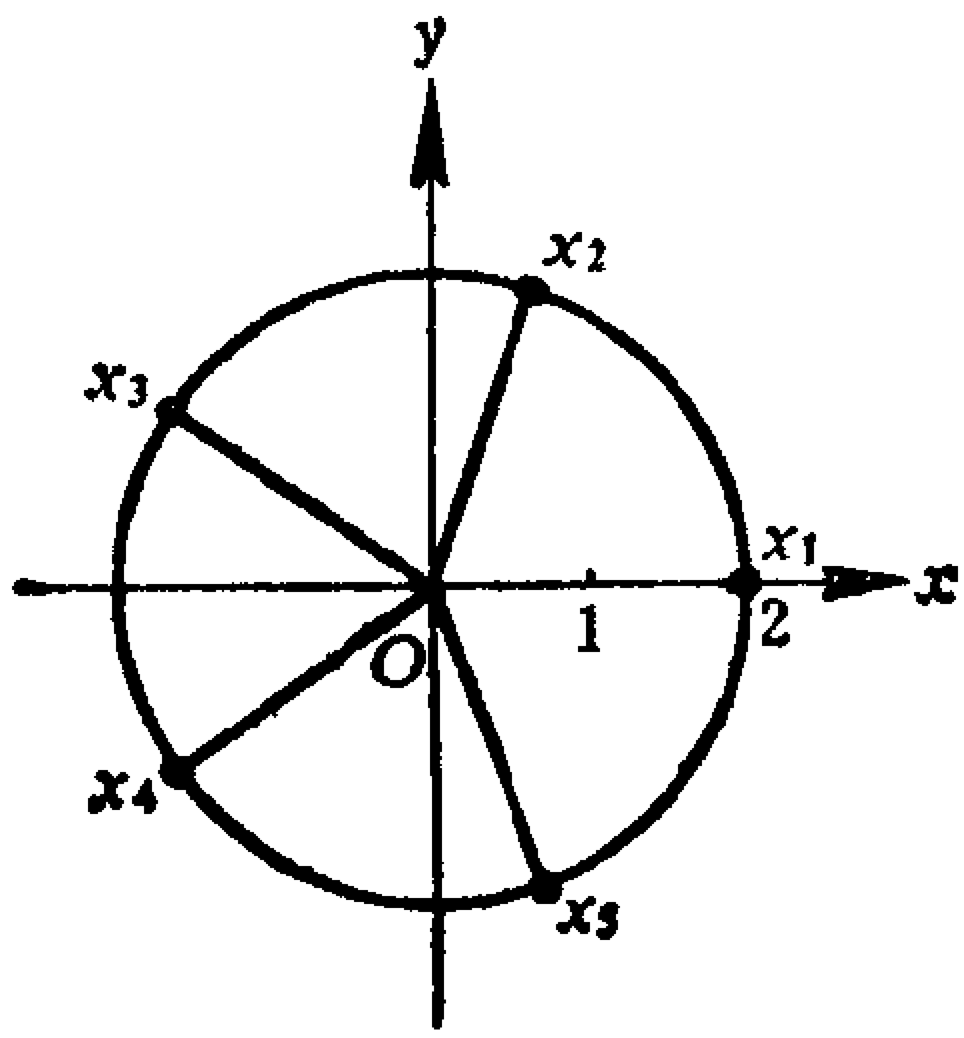


图 5-13

一般地，方程 $x^n=b(b\in C)$ 的根的几何意义是复平面内的 n 个点，这些点均匀分布在以原点为圆心、以$\sqrt[n]{|b|}$为半径的圆上.

练 习

1. (口答)求下列各数的平方根:

   -9, -2.89, -5, $-t\,(t\in R^+)$, $-m^2(m\in R)$,

   $a-b(a, b\in R$, 且 $a<b)$.

2. 在复数集 C 中解下列方程:

   (1) $9x^2+16=0$;　　(2) $-3x^2=5$;

   (3) $x^2+x+6=0$;　　(4) $18x^2-42x+29=0$.

3. 求:

(1) $-i$ 的平方根;

(2) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的平方根;

(3) 1 的立方根;

(4) -16 的四次方根.

4. 在复数集 C 中解下列方程, 并在复平面内把方程的根表示出来:

(1) $x^3-27=0$; (2) $x^3+1=0$;

(3) $x^4-16=0$; (4) $x^4+1=0$.

习题十四

1. 把下列复数表示成三角形式, 并且画出相应的向量:

(1) 6; (2) $1+i$;

(3) $1-\sqrt{3}i$; (4) $5+12i$;

(5) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; (6) $-18.7+8.4i$.

2. 把下列复数表示成代数形式:

(1) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$;

(3) $9(\cos\pi+i\sin\pi)$;

(4) $6\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

(5) $9\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$;

(6) $\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{4}\right)$ $(k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

3. 利用公式 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$, 把复数 $\cos\theta-i\sin\theta$ 表示成三角形式.

4. 计算:

(1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $\sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

5. 求证:

(1) $(\cos75°+i\sin75°)(\cos15°+i\sin15°)=i$;

(2) $(\cos3\theta-i\sin3\theta)(\cos2\theta-i\sin2\theta)$
$=\cos5\theta-i\sin5\theta$.

(提示: 先把三个复数都表示成三角形式.)

6. 用棣莫佛定理计算:

(1) $[3(\cos10°+i\sin10°)]^6$;

(2) $[2(\cos15°+i\sin15°)]^6$;

(3) $(1+\sqrt{3}i)^4$;

(4) $(2-2\sqrt{3}i)^4$.

7. $n(n\in N)$ 是什么值的时候, $(1+\sqrt{3}i)^n$ 是一个实数?

8. 计算:

(1) $10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\div5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $12\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\div6\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

9. 把与复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $60°$, 求与所得的向量对应的复数.

10. (1) 求证

$$\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta.$$

(2) 写出下列复数 z 的倒数 $\frac{1}{z}$ 的模与辐角：

$$z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6},$$

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

11. 化简：

(1) $\dfrac{(\cos7\theta+i\sin7\theta)(\cos2\theta+i\sin2\theta)}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)(\cos3\theta+i\sin3\theta)}$;

(2) $\dfrac{\cos\phi-i\sin\phi}{\cos\phi+i\sin\phi}$.

12. 计算：

(1) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{-1+\sqrt{3}i}$;　　　(2) $\left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^8$.

13. 已知 $z=\dfrac{(4-3i)^2\cdot(-1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^{12}}$，求 $|z|$.

14. 已知 $n\in N$，并且规定式子 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$ 的意义是

$\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$，求证：

(1) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$;

(2) $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$.

15. 利用复数证明余弦定理.

16. 在复数集 C 中解下列方程：

(1) $4x^2+9=0$;　　　(2) $2(x^2+4)=5x$;

(3) $(x-3)(x-5)+2=0$;

(4) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}=1$;

(5) $x^4+3x^2-10=0$;

(6) $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$.

17. 在复数集 C 中解下列方程组:

(1) $\begin{cases}x+y=2,\\ xy=2;\end{cases}$　　　(2) $\begin{cases}a^2+b^2=0,\\ ab=1.\end{cases}$

18. 求 1 的 6 个六次方根，并且把它们用复平面内的点表示出来。

19. 求:

(1) $8(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$的六次方根;

(2) $-i$ 的五次方根.

20. 在复数集 C 中解下列方程:

(1) $y^4+81=0$;　　　(2) $x^3+1=i$;

(3) $x^{12}+63x^6-64=0$;　　　(4) $x^{10}-32x^5+1024=0$.

*5.8 复数的指数形式

前面我们学习了复数的代数形式及三角形式，在科学技术，特别是在电工和无线电计算中，为了简便起见，还采用复数的另一种表示——复数的指数形式.

我们把模为 1，辐角为 θ(以弧度为单位)的复数

$$\cos\theta+i\sin\theta$$

用记号 $e^{i\theta}$ 来表示，即

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.❶ \tag{1}$$

例如，

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

又如，$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$可以写成$e^{i\frac{5\pi}{6}}$，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

可以写成$e^{i\frac{\pi}{4}}$。

引入记号 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 之后，任何一个复数

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

就可以表示成

$$z=re^{i\theta}$$

的形式．我们把这一表达式叫做复数的**指数形式**。

根据复数的指数形式的定义，我们有

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}&=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\\&=e^{i(\theta_1+\theta_2)},\end{aligned}$$

即

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{2}$$

同样可证

---

❶ 这里的 $e=2.71828\cdots$，就是自然对数的底数．公式(1)叫做**欧拉**(Leonhard Euler, 1707—1783 年，瑞士数学家)**公式**．在“复变函数论”中可以证明这个公式。

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (n\in N), \tag{3}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{4}$$

(2),(3),(4)与我们过去学过的实数指数幂的性质一致，所以把复数从三角形式改写成指数形式后，可以运用实数集R中的幂运算律(注意：乘方的指数限于自然数)来进行运算．这里我们仿照实数集R中的说法，把$e^{i\theta}$叫做以e为底、$i\theta$为指数的幂。

对于开方运算，**复数$re^{i\theta}$的$n(n\in N)$次方根是**

$$\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad (k=0,1,\cdots,n-1).$$

例1 把复数$z=2i$表示成指数形式.

解： $z=2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

例2 把$\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$，$\sqrt{5}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$表示成三角形式及代数形式.

解：

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}&=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&=1-i,\\ \sqrt{5}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}&=\sqrt{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\&=-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i.\end{aligned}$$

例3 用$e^{i\theta}$与$e^{-i\theta}$表示$\cos\theta$与$\sin\theta$.

解： $\because$

$$\begin{aligned}e^{i\theta}&=\cos\theta+i\sin\theta,\\ e^{-i\theta}&=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\\&=\cos\theta-i\sin\theta,\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

练　习

1. 把下列复数表示成指数形式：

(1) $1, -1$;

(2) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$,　　$\cos 15°+i\sin 15°$,

$\cos 3+i\sin 3$;

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

(4) $2+2i$, $3-3i$.

2. 把下列复数表示成三角形式及代数形式：

(1) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$;　　(2) $\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

(3) $4e^{i\frac{\pi}{6}}$;　　(4) $3e^{-2i}$.

3. 求与复数 $e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 对应的向量的夹角 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$.

4. 设 $a+bi=re^{i\theta}$，把下列复数表示成指数形式：

$$a-bi,\quad -a+bi,\quad -a-bi.$$

5. 用复数的指数形式计算：

(1) $8\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

6. 已知 $z_1=5e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, 求 $z_1\cdot z_2$, 并在复平面内用向量表示出来。

7. 根据 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 求证

$$e^{i(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}.$$

8. 用复数的指数形式计算:

(1) $\dfrac{\sqrt{3}(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)}{\sqrt{2}(\cos225^\circ+i\sin225^\circ)}$;

(2) $\dfrac{2}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

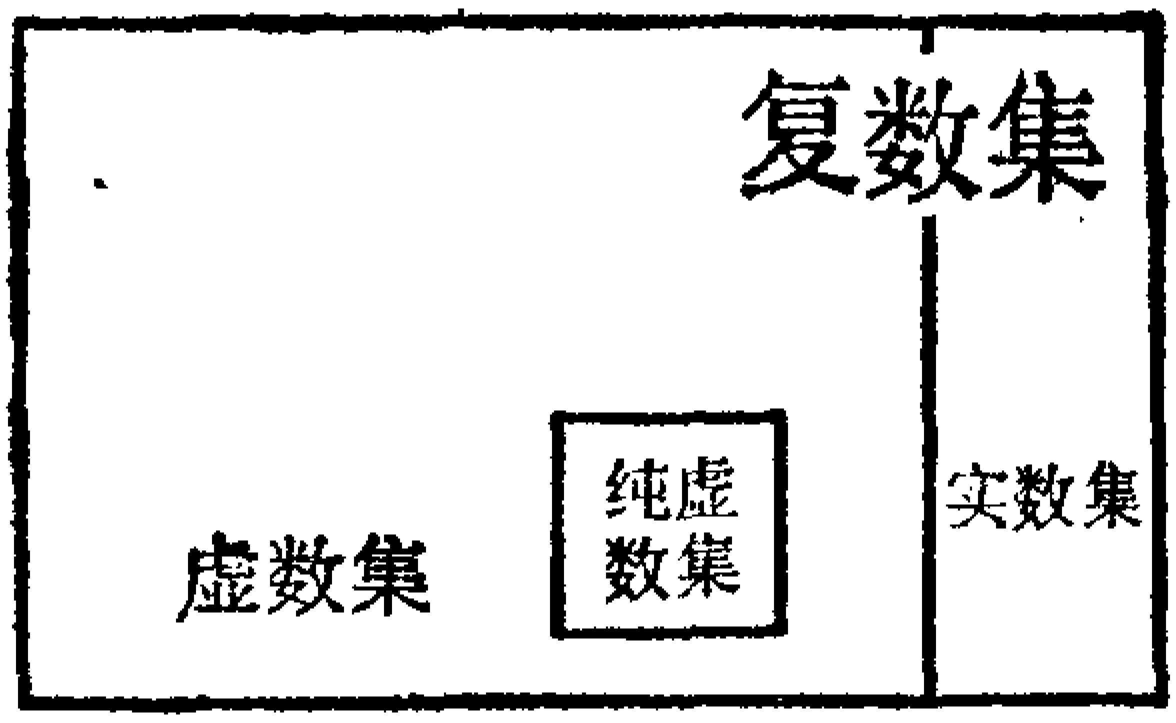
9. 用复数的指数形式计算$(1+\sqrt{3}\,i)^{10}$.

10. 用复数的指数形式求64的四次方根.

小　结

一、本章主要内容是复数的概念,复数的代数、几何、三角表示方法以及复数的代数运算法则.

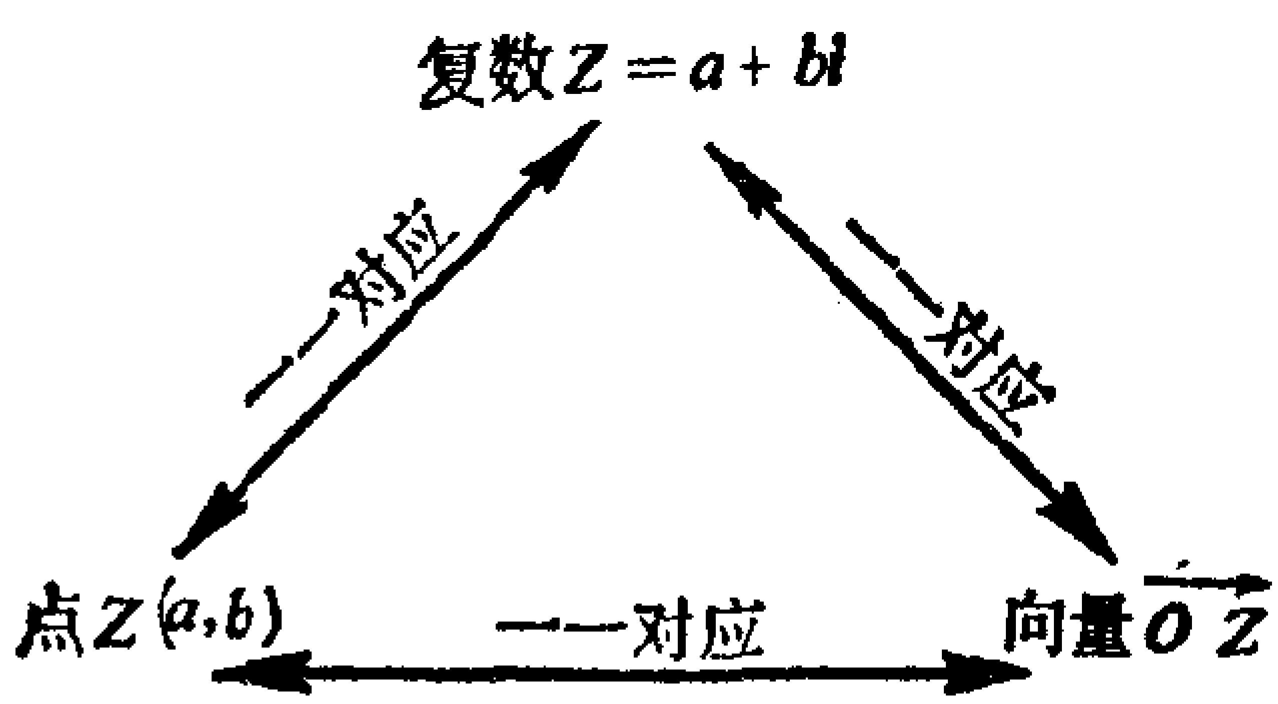
二、要注意实数、虚数、纯虚数、复数之间的区别与联系.复数 $a+bi$ 当 $b=0$ 时为实数,当 $b\neq0$ 时为虚数,当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时为纯虚数. 实数集与虚数集的交集是空集,它们都是复数集的真子集,它们的并集就是复数集;纯虚数集是虚数集的真子集,它可以与非零实数所组成的集合一一对应. 这些集合之间的关系可以用下图表示.



复数的分类表如下：

- 复数
  - 实数
    - 有理数（分数）
      - 正有理数
      - 零
      - 负有理数
      - 循环小数（包括整数、有限小数）
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - 无限不循环小数
    - 小数
  - 虚数

三、任一复数 $z=a+bi$ 和复平面内的一点 $Z(a, b)$ 对应，也可以和以原点为起点、点 $Z(a, b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应。这些对应都是一一对应，即



在这些一一对应下，复数的各种运算，都有特定的几何意义。

四、实数集 R 中的加、乘运算律，在复数集 C 中仍然成立。同实数加、减、乘、除、乘方的结果仍是实数一样，复数加、

减、乘、除、乘方的结果仍是复数．除此以外，复数开$n(n\in N)$次方的结果是n个复数，这却是实数集R所没有的性质（在实数集R中，负数不能开偶次方，或者说，负数没有偶次方根）．

五、复数z的三角形式是 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$．把复数表示成三角形式，可以给复数的乘、除、乘方及开方运算带来很大方便．至于复数的加、减运算，还是用代数形式$z=a+bi$来进行比较方便．

复习参考题五

A　组

1. 求适合下列方程的x与$y(x, y\in R)$的值：

 (1) $(1+2i)x+(3-10i)y=5-6i$;

 (2) $x^2+xi+2-3i=y^2+yi+9-2i$;

 (3) $2x^2-5x+3+(y^2+y-6)i=0$;

 (4) $\dfrac{x}{1-i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{5}{1-3i}$.

2. 判断下列各命题的真假，并说明理由：

 (1) 如果让实数a与纯虚数ai对应，那么实数集R与纯虚数集一一对应；

 (2) 复数集C与复平面内所有向量的集合一一对应．

3. 计算：

 (1) $\dfrac{69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i}{3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i}$;

 (2) $[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i]^3$;

 (3) $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$
 $\cdot(x-2+\sqrt{3}i)(x-2-\sqrt{3}i)$.

4. 已知复数 $z=x+yi\,(x, y\in R)$，求下列各式的实部与虚部：

(1) z^2；　　(2) z^3；

(3) $\frac{1}{z}$；　　(4) $V_0 z+\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{z}\ (V_0, M\in R)$。

5. 已知 $(x+yi)^3=a+bi$，这里 $a, b, x, y\in R$，求证

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4(x^2-y^2).$$

6. 求证：

(1) $(1+i)(1+\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right)\right];$$

(2) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

7. 化简 $$\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)^2}{\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)}$$

$$\times\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^2(\cos 2\phi-i\sin 2\phi)}{\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)}.$$

8. 要把复数 $a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$b(\cos\beta+i\sin\beta)$ 的和写成复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，应该怎样用 a, b, α, β 来表示 r, θ？

9. 设点 Z 表示复数 z，在复平面内如何通过画图的方法，找出表示下列复数的点？

(1) $z+(3+4i)$；　　(2) $0.2z$；

(3) $-\sqrt{2}z$；　　(4) $z(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$；

(5) $-iz$；　　(6) $\frac{a^2}{z}\ (a\in R^+)$。

10. 已知 $n\in N$，求证：

(1) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$；

(2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$ 当 n 是偶数时为 1，当 n 是奇数时为 -1；

(3) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ 当 n 是 3 的倍数时为 2，当 n 不是 3 的倍数时为 -1。

11. 在复数集 C 中分解因式：

(1) x^2+5；　　(2) $2x^2-6x+5$；

(3) $x^2-2x\cos\alpha+1$；　　(4) x^6-1。

12. 解下列方程：

(1) $x^4+24i=0$；　　(2) $(x+1)^9=(1+i)^9$。

13. 设 $a+bi, c+di\in C$，下列命题成立的充要条件是什么？

(1) $(a+bi)+(c+di)\in R$；

(2) $(a+bi)+(c+di)$ 是纯虚数；

(3) $(a+bi)(c+di)\in R$；

(4) $(a+bi)(c+di)$ 是纯虚数；

(5) $\frac{a+bi}{c+di}\in R$；

(6) $\frac{a+bi}{c+di}$ 是纯虚数.

14. 已知 z 是虚数，解下列方程：

(1) $z+|\bar{z}|=2+i$；　　(2) $z^2=\bar{z}$。

15. 求证 $|z|=1(z\in C)$ 的充要条件是 $\frac{1}{z}=\bar{z}$。

16. 求证：

(1) 共轭复数的 $n(n\in N)$ 次幂仍是共轭复数；

(2) 虚数的平方根仍是虚数。

B 组

17. 设 z 是复数，解方程

$$\frac{1}{2}(z-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+z)i.$$

18. 已知复平面内一个等边三角形的两个顶点分别表示复数 $1, 2+i$，求与第三个顶点对应的复数。

19. 已知复平面内一个正方形的两个相邻顶点分别表示复数 $1+2i, 3-5i$，求与另外两个顶点对应的复数。

20. 已知与复数 z 及 z' 对应的向量是 $\overrightarrow{OZ}$ 及 $\overrightarrow{OZ'}$，求证向量 $\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OZ'}$ 所在直线垂直的充要条件是 $\bar{z}z'$ 的实部等于零。

21. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+iy-2z=10, \\ x-y+2iz=20, \\ ix+3iy-(1+i)z=30; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=6, \\ y^2+z^2=0, \\ z^2+x^2=8i. \end{cases}$

22. 在复数集 C 中解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-2xy+3(x+y)-2=0, \\ 2(x^2+y^2)-2xy-2(x+y)+15=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x+y}{1-xy}=3; \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=65, \\ yz=10. \end{cases}$

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝１０９８６９２６＿代数　（甲种本）　第二册
作者＝ＢＥＸＰ
页数＝２３９
下载位置＝ｈｔｔｐ：／／Ｕｗｄ．５ｒｅａｄ．ｃｏｍ／８Ｃ７６３４２Ｂ６Ｃ４ＡＤ３Ａ０ＤＦ３Ａ１５Ａ２０１４Ｂ６Ｆ７ＣＡＡ６１１７Ａ７Ｄ３５ＤＦ０８０４２５００ＤＤ４Ｅ９Ｂ９ＥＤ７Ｅ１０Ｅ６８Ｃ３６ＥＣ０７ＣＥ９０７１２６６３９２／！００００１．ｐｄｇ