Sem13Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

ОДУ

Исходная диффференциальная задача:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

Ставится задача Коши, t > 0, u(0) = 0. Можно решать

$$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$

$$\frac{d^m u}{dt^m} = g(t, u, \frac{du}{dt}, ..., \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}})$$

Делаем так: $u_1 = u, u_2 = \frac{du_1}{dt}, u_3 = \frac{du_2}{dt}$
Тогда

$$\frac{du^m}{dt} = g(t, u_1, u_2, ..., u_m$$

Исходную дифференциальную задачу ещё записывают так:

$$L(u) = F$$

Здесь
L(u) = $\begin{cases} du/dt - f(t, u), t > 0 \\ u(0), t = 0 \end{cases}$; F = $\begin{cases} 0, t > 0 \\ \mathrm{u}_0, \mathrm{t} = 0 \end{cases}$

Разностная задача

Разностная задача должна сходиться по сетке

$$L_\tau(y) = F_\tau$$

Здесь y - сеточное решение(сеточная функция).
U^τ - проекция точного решения искомой задачи на сетку.

Сходимость разностной задачи к дифференциальной

$$||y - U^\tau|| \longmapsto 0$$

при $\tau \longmapsto 0$

Пусть сетка [0, 1/3, 2/3]. Тогда проекция нашего решения $u = \sin t$ на сетку:

$$[u]_0 = 0$$

$$[u]_1 = \sin 1/3 = \sin \tau$$

$$[u]_2 = \sin 2/3 = \sin 2\tau$$

Сходимость 2

Ребус

$$A^q + Y = C^q$$

Здесь C - сходимость, A - аппроксимация, Y - устойчивость.
Разностная задача A исходящую на её решении, если невязка $||r_\tau|| \longmapsto 0$, $\tau \longmapsto 0$, где $r_\tau = L_\tau(U^\tau) - F_\tau$. Если оказалось, что $||r_\tau \leq C_1 \tau^q||$, то q - порядок аппроксимации A.
Задача разностная устойчива, если две близкие возмущенные задачи одновременно однозначно разрешимы и

$$L_\tau(y_1) - F_\tau = \xi$$

$$L_\tau(y_2) - F_\tau = \eta$$

Если $||y_1 - y_2|| \leq C_2(||\xi_\tau|| + ||\eta_\tau||)$

Классификация

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), t > 0, u(0) = u_0$$

Используем расчётный метод

$$u_{n+1} = u_n + \tau f(t_n, u_n)$$

Это - явный метод Эйлера первого порядка.

Неявный метод Эйлера первого порядка :

$$u_{n+1} = u_n + \tau f(t_{n+1}, u_{n+1})$$

Особенности явных и неявных методов по устойчивости

Все явные методы условно устойчивые!!!
Условие устойчивости обычно формулируется на шаг интегрирования.

$$\tau \leq M$$

Н.Я. в большинстве случаев безусловно устойчивые или имеют более широкую область устойчивости, чем аналогичные явные методы.

Пример 1

С каким порядком на сетке $D_n = x_l = lh, l = \overline{0, L}, h = \frac{1}{L}$

$$L_\tau(u) = F_\tau$$

$$\begin{cases} \frac{y_{l+1} - 2y_2 + y_{l+1}}{h^2} + 6\frac{y_{l+1} - y_{l-1}}{2h} + 5y_2 = 0, l = \overline{1, L-1} \\ y_0 = 0 \\ y_1 = 2h - 6h^2 \\ \frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'_x(0) = 2 \end{cases}$$

Вешаем [].

$$\begin{cases} \frac{[y]_{l+1} - 2[y]_2 + [y]_{l+1}}{h^2} + 6\frac{[y]_{l+1} - [y]_{l-1}}{2h} + 5[y]_2 - 0, l = \overline{1, L-1} \\ [y]_0 = 0 \\ [y]_1 = 2h - 6h^2 \end{cases}$$

Ряд Тейлора:

$$[y]_{L\pm1} = [y]_L \pm h[y'_x]_L + \frac{h^2}{2}[y''_x]_L \pm \frac{h^3}{6}[y'''_x]_L + \frac{h^4}{24}[y''''_x]_L \pm ...$$

Главные члены погрешности:

$$[y''_{xx}]_L + \frac{h^2}{12}[y^{(4)}] + 6 \cdot ([y'_x] + \frac{h^2}{6}[y''']) + 5[y]_L = \frac{h^2}{12}[y'''']_L + h^2[y''']$$

$$[y]_1 = [y]_0 + h[y']_0 + \frac{h^2}{2}[y'']_0 + \frac{h^3}{6}[y''']_0 + \frac{h^4}{24}[y'''']_0$$

$$[y]_0 + h[y']_0 + \frac{h^2}{2}[y'']_0 + \frac{h^3}{6}[y''']_0 + \frac{h^4}{24}[y'''']_0 - 2h - 6h^2$$

$$0 + h[y']_0 + \frac{h^2}{2}[y'']_0 + \frac{h^3}{6}[y''']_0 + \frac{h^4}{24}[y'''']_0 - 2h - 6h^2$$

$$2 + \frac{h^2}{2}[y'']_0 + \frac{h^3}{6}[y''']_0 + \frac{h^4}{24}[y'''']_0 - 2h - 6h^2$$

$$2 + (-12) + \frac{h^3}{6}[y''']_0 + \frac{h^4}{24}[y'''']_0 - 2h - 6h^2$$

Значит, невязка $\leq C_1h^2$. Значит, итоговый порядок задачи второй. Значит, поставленная задача аппроксимирует исходную задачу с порядком 2.