# Sem5Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

## 1 Методы решения нелинейных уравнений и систем

Примеры того, что мы будем решать:

$$x + \ln x = 0$$

Общий вид нелин. уравнения:

$$f(x) = 0$$

Для решения нелинейного уравнения нужно проделать локализацию корней. А затем только - уже применить численный метод на отрезке локализации. Что имеется в виду? Где находятся корни? Можно делать вывод из ОДЗ. Но на практике - либо графический способ, либо аналитический. Например, что мы знаем, если мы взяли [a, b] и знаем, что f(a) * f(b) < 0. Цель локализации - понять, на каком промежутке искать ответ.

Мы будем искать решение нелинейного уравнения, применив итерацию.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

## 2 Принцип сжимающих отображений, базовые понятия

Метрическое пространство - введено понятие расстояния с соответствующими неравенствами.
Фундаментальная последовательность - последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists h_\varepsilon \forall k \geq \varepsilon \& \forall m \geq n_\varepsilon \longmapsto \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

Полное метр. пространство - метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.
Оператор А осуществляет сжимающее отображение мерт пр-ва K в себя, если $\exists 0 < q < 1$, что $\forall x \& \forall y \in R$ имеет место неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leq qp(x, y)$$

### Метод сжимающих отображений

Пусть R -метрическое пространство и оператор А - осуществляет сж.о. R в себя. Тогда уравнение Ax = x имеет единственное решение, которое может быть получено как предел последовательности $x_{n+1} = Ax_n$.

## Достаточное условие сходимости МПИ(НУ)

$$\rho(x_{n+1}, x) = |x_{n+1} - x^*| = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = |\varphi_x^{'}(\xi)||x_n - x^*| \leq q$$

Вывод - МПИ(НУ) сходится $\forall x_0$, принадлежащей области локализации корня, если $q = |\varphi_x^{'}(\xi)| < 1$, где $\xi$ - любое число из области локализации.

## Порядок сходимости

$$\varphi_x^{'}(x^*) = \varphi_x$$

(x*) = ... = $\varphi_x^s(x^*) = 0$ n - порядок сходимости $\varphi^{(n)}(x^*) \neq 0$

## Условие достижимости точности

$$|x_n - x^n| \leq \frac{x_{n+1} - xn}{1-q} \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

## Пример 1, Полином

$$f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$$

По т.Виетта или т.Декарта понимаем, что всего один отрицательный корень.
В предположении, что есть один корень 1, мы можем предположить, что область локализации от 0.5 до 1.5. Для отрицательного корня предположим, что область локализации [2, 4]. И ещё одна область [1 , 2].
Нам нужно построить какой-нибудь метод для поиска корня.

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n^2 + 9x_n - 9}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{9} - \frac{x_n^2}{9} + 1$$

$$\varphi^{'}(x) = |\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x| < 1$$

Для отрезка [0.5, 1.5] можно применять.

$$\varphi^{'}(x) = \frac{1}{3}\frac{2x+9}{(x^2+9x+9)^2}$$

Можем рассмотреть на отрезке [-4, -2], [2, 4]. Метод пригоден для этих двух участков.

## Пример 2

$$x = \operatorname{ctg} x$$

известен корень $x^* \approx 0.86$. Есть 4 метода:

$$1) x_{n+1} = \operatorname{ctg} x_n$$

$$2) x_{n+1} = \operatorname{arcctg} x_n$$

$$3) x_{n+1} = 2 \operatorname{arcctg} x_n - x_n$$

$$4) x_{n+1} = \frac{2}{7} x_n + \frac{5}{7} \operatorname{arcctg} x_n$$

Ищем производные

$$|\varphi_1| = \frac{1}{\sin^2(x^*)} > 1$$

$$|\varphi_2| = \frac{1}{1+(x^*)^2} \approx 0.57 < 1$$

$$|\varphi_3| = |\frac{-2}{1+(x^*)^2} - 1| = |\frac{-(x^*)^2 - 3}{1+(x^*)^2}| = \frac{3+(x^*)^2}{1+(x^*)^2} > 1$$

$$|\varphi_4| = |\frac{2}{7} - \frac{5}{7}\frac{1}{1+(x^*)^2}| = |\frac{1}{7}\frac{2(x^*)^2 - 3}{1+(x^*)^2}| \approx 0.12 < 1$$

Подходят 2 и 4, выбираем 4. Потому что чем меньше q, тем лучше сжатие.

## Пример 3

$$x^2 - e^{-x} = 0$$

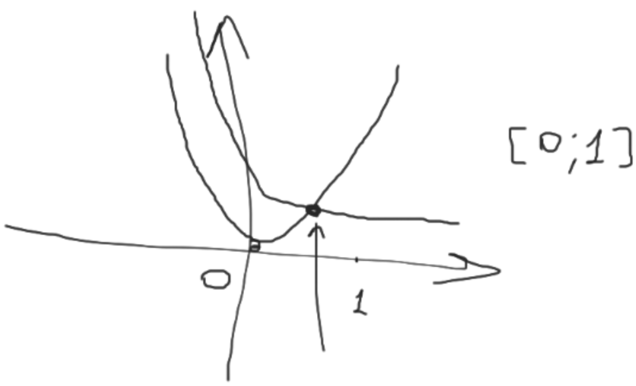


Рис. 1: Схема экспериментальной установки

Какой метод берём? Из производной функции. А локализацию мы получили из графического метода.