# Sem10Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

## МНК

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j}$$

$$f_k = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k$$

| x | -1 | -0,4 | 0 | 0,5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | -2 | -1 | 0 | 1,2 | 2,05 |

$B\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_0, \varphi_2) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) \\ (\varphi_2, \varphi_0) & (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) \end{bmatrix}$
$\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = x^2$

$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^4 1 = 5$

$c_0 = f_0 = \sum_{i=0}^4 y_i \cdot 1 = 0.25$

$(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^4 x_i = 0.1$

$c_1 = f_1 = \sum_{i=0}^4 y_i x_i^2 = (2 + 0.4 + 2.6 + 2.05) = 5.05$
$\overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0.1 & 2.41 \\ 0.1 & 2.41 & 0.061 \\ 2.41 & 0.61 & 9.0881 \end{bmatrix}$
$\overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 5.05 \\ 0.19 \end{bmatrix}$
Тогда получим полином
$P_2(x) = -0.01410 + 2.03485x + 0,0460x^2$

### Пример 1

$P_2(x) = ax^2 + b$
$\{\varphi_k\} = 1; x^2$

Найти a, b:

[-1; 1] к f(x) = |x|
$B\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx = 2$$

$$(\varphi_1, \varphi_0) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 dx = \frac{2}{3}$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2 dx = \frac{2}{5}$$

$$c_1 = \int_{-1}^{1} |x| \cdot x^2 dx = \frac{1}{2}$$

$$c_0 = \int_{-1}^{1} |x| \cdot 1 dx = 1$$

$\begin{bmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$
Тогда получим b = 3/16, a = 15/16.

## Пример 2

$$P_1 = a_1 x + a_0$$

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

$$Ax = f \to A^T A \overrightarrow{x} = A^T \overrightarrow{f}$$

x - элемент наилучш. среднеквадрат.

f = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^T$ = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^T A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ =A$^T f$ = $\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

Всегда следует проверять $\det B \neq 0$.

Получим ответ x = 3/11, y = 14/11

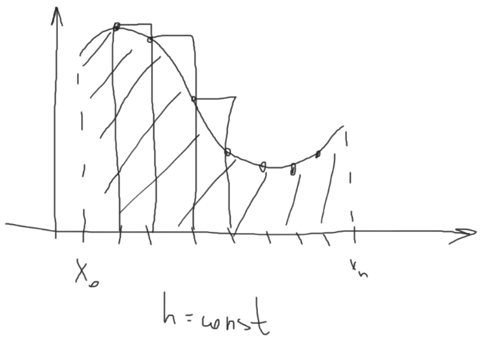
**Пример 3**

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

Хочу привести численное интегрирование.

Формула Ньютона-Котеса
Вспоминаем, что $f(x) = P_m(x) + R_m(x)$ Самое первое, чем можно заменить $P_m(x)$.

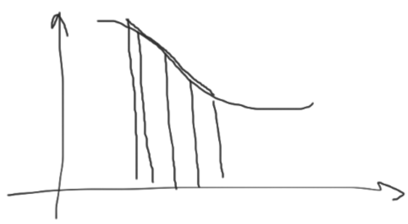
# Метод левых прямоугольников




$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f_i$$

$$|R(f)| \leq \max_{[x0,x_n]} |f'(x)| \frac{(x_n - x_0)\cdot h}{2}$$

# Метод трапеции



$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h[\frac{f_0 + f_n}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f_i]$$

$$|R(f)| \leq \max_{[x0,x_n]} |f''(x)| \frac{(x_n - x_0)\cdot h^2}{12}$$

# Метод средних прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i - 1/2)$$

$$|R(f)| \leq \max_{[x0,x_n]} |f''(x)| \frac{(x_n - x_0) \cdot h^2}{24}$$

# Формула Симпсона

$$\int f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + f_n + 4 \cdot \sum_{i=1} n/2 f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f_2 i]$$

n - чётное число

$$|R(f)| \leq \max_{[x_0,x_n]} |f^{(4)}| \frac{x_n - x_0}{180} \cdot h^4$$

## Пример 4

(Для сравнения методов)

$$\varepsilon \leq 10^{-2}$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{x}{\sqrt{3}})dx$$

промежуточно вычислим $M_2 = 2/3$

$$\Delta I = \frac{M_2 h^2 (1 - (-1))}{12} = \frac{M_2 h^2}{6} \leq \varepsilon$$

$$h \leq 0.3$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} \rightarrow n = [\frac{2}{0.3}] + 1 = 7$$

$$I = \frac{M_4 h^4}{30} \leq \varepsilon$$

$M_4 = 3/10$
$h \leq 1.48$

$$n = [\frac{2}{1.48}] + 1 = 2$$