Sem2Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

1 Комментарии по д/з

Построить график абс. погрешности каждого метода:

$$f'(x) = \sin(x^2)'$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$h = \frac{2}{2^n}$$

В логарифмическом масштабе строим графики $\Delta(h)$. Идейно - должны быть графики прямых.

$$\Delta f'(h) = |f'_a - f'_\tau|, n = \overline{1, n}$$

Что касается оформления?
Питончик - notebook или collab. Ожидается от нас -ФИО, группа
-Вариант(если задание предусматривает)
-Результаты(графики)
-Код

Нормы в конечномерных пространствах.

2 Сам семинар

Мы хотим решить $Ax = f$ в большинстве случаев, где A - матрица. А как численно найти x?
Методом Гаусса, Крамора - неинтересно, потому что алг.сложность n^3. Может быть ошибка в самом начале, в зависимости от начальных данных. А что такое ошибка при подсчёте $\Delta\overline{x}$

Решение - вводить нормы

1)$||x||_1 = \max|x_k| \Leftrightarrow ||A||_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{|a_{ij}|}$

2)$||x||_2 = \Sigma|x_k| \Leftrightarrow ||A||_2 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{|a_{ij}|}$

3)$||x||_3 = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} \Leftrightarrow ||A||_3 = \sqrt{max\lambda_i(A^*A)}$

А что есть норма матрицы?

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

$$||A||_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_1}{||x||_1}$$

$$||\lambda A|| = ||\lambda|| ||A||$$

$$||AB|| \leq ||A|| ||B||$$

$$||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$||Ax|| \leq ||A|| ||x||$$

Норма x согласована с нормой A.

$||A\overrightarrow{x}||_1 = |\Sigma a_{ij}xj| \leq max(\Sigma|a_{ij}||x_j| \leq (max\Sigma|a_{ij}|)max|x_j| = (max\Sigma|a_{ij})||x||_1$

Найдём решение:

$y_k = signa_{k1}, ..., signa_{kn}$

Пусть при i = k достигается максимум.

Со второй нормой всё то же самое.

А зачем мы всё это делали? Для того, чтобы перейти к разговору про погрешности. Оцениваем погрешность

Теорема

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\mu}{1 - \mu_0 \frac{||\Delta A||}{||A||}} (\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta f||}{||f||})$$

Здесь μ - число обусловленности

$$\mu = ||A|| \cdot ||A||^{-1}$$

Если μ находится в пределах от 1 до 100. Если у нас $\mu >> 100$, то задача плохо обусловлена!!!

В большинстве случаев считаем $\Delta A = 0$. Значит,

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} = \mu \frac{||\Delta f||}{||f||}$$

Здесь грубая оценка для μ:

$$\mu = ||A|| \cdot ||A||^{-1}$$

Точная:

$$\nu = \frac{||\overrightarrow{f}||}{||\overrightarrow{x}||} \cdot ||A||^{-1}$$

Пример, задача. Надо найти $\mu_{1,2,3}$ для ||Ax|| = b

A = $\begin{bmatrix} 50 & 70 \\ 70 & 101 \end{bmatrix}$ b = $\begin{bmatrix} 120 \\ 171 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} 50 & 70 \\ 70 & 101 \end{bmatrix}$

$$||A||_1 \cdot ||A||_1^{-1} = 171\frac{171}{150}$$

$$||A||_2 \cdot ||A||_2^{-1} = \frac{171 \cdot 171}{150}$$

Т.к. матрица симметрична, то

$$||A||_3 = \sqrt{\max \lambda(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda(A^2)} = \max_i |\lambda_i(A)|$$

$$\mu_3 = ||A||_3 \cdot ||A||_3^{-1} = \frac{\max \lambda(A)}{\min \lambda(A)} = 150$$