

# Sem5Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

## 1 Методы решения нелинейных уравнений и систем

Примеры того, что мы будем решать:

$$x + \ln x = 0$$

Общий вид нелин. уравнения:

$$f(x) = 0$$

Для решения нелинейного уравнения нужно проделать локализацию корней. А затем только - уже применить численный метод на отрезке локализации. Что имеется в виду? Где находятся корни? Можно делать вывод из ОДЗ. Но на практике - либо графический способ, либо аналитический. Например, что мы знаем, если мы взяли  $[a, b]$  и знаем, что  $f(a) * f(b) < 0$ . Цель локализации - понять, на каком промежутке искать ответ.

Мы будем искать решение нелинейного уравнения, применив итерацию.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

## 2 Принцип сжимающих отображений, базовые понятия

Метрическое пространство - введено понятие расстояния с соответствующими неравенствами.

Фундаментальная последовательность - последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall k \geq n_\varepsilon \forall m \geq n_\varepsilon \mapsto \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

Полное метр. пространство - метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Оператор  $A$  осуществляет сжимающее отображение метр пр-ва  $R$  в себя, если  $\exists 0 < q < 1$ , что  $\forall x, y \in R$  имеет место неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y)$$

### Метод сжимающих отображений

Пусть  $R$  - метрическое пространство и оператор  $A$  - осуществляет сж.о.  $R$  в себя. Тогда уравнение  $Ax = x$  имеет единственное решение, которое может быть получено как предел последовательности  $x_{n+1} = Ax_n$ .

## Достаточное условие сходимости МПИ(НУ)

$$\rho(x_{n+1}, x) = |x_{n+1} - x^*| = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = |\varphi'_x(\xi)| |x_n - x^*| \leq q$$

Вывод - МПИ(НУ) сходится  $\forall x_0$ , принадлежащей области локализации корня, если  $q = |\varphi'_x(\xi)| < 1$ , где  $\xi$  - любое число из области локализации.

## Порядок сходимости

$$\varphi'_x(x^*) = \varphi_x$$

$$(x^*) = \dots = \varphi_x^s(x^*) = 0 \text{ п - порядок сходимости } \varphi^{(n)}(x^*) \neq 0$$

## Условие достижимости точности

$$|x_n - x^n| \leq \frac{x_{n+1} - x^n}{1 - q} \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

## Пример 1, Полином

$$f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$$

По т.Виетта или т.Декарта понимаем, что всего один отрицательный корень.

В предположении, что есть один корень 1, мы можем предположить, что область локализации от 0.5 до 1.5. Для отрицательного корня предположим, что область локализации [2, 4]. И ещё одна область [1, 2].

Нам нужно построить какой-нибудь метод для поиска корня.

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n^2 + 9x_n - 9}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{9} - \frac{x_n^2}{9} + 1$$

$$\varphi'(x) = \left| \frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x \right| < 1$$

Для отрезка [0.5, 1.5] можно применять.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3} \frac{2x + 9}{(x^2 + 9x + 9)^2}$$

Можем рассмотреть на отрезке [-4, -2], [2, 4]. Метод пригоден для этих двух участков.

## Пример 2

$$x = \operatorname{ctg} x$$

известен корень  $x^* \approx 0.86$ . Есть 4 метода:

$$1) x_{n+1} = \operatorname{ctg} x_n$$

$$2) x_{n+1} = \operatorname{arcctg} x_n$$

$$3) x_{n+1} = 2 \operatorname{arctg} x_n - x_n$$

$$4) x_{n+1} = \frac{2}{7} x_n + \frac{5}{7} \operatorname{arctg} x_n$$

Ищем производные

$$|\varphi_1| = \frac{1}{\sin^2(x^*)} > 1$$

$$|\varphi_2| = \frac{1}{1 + (x^*)^2} \approx 0.57 < 1$$

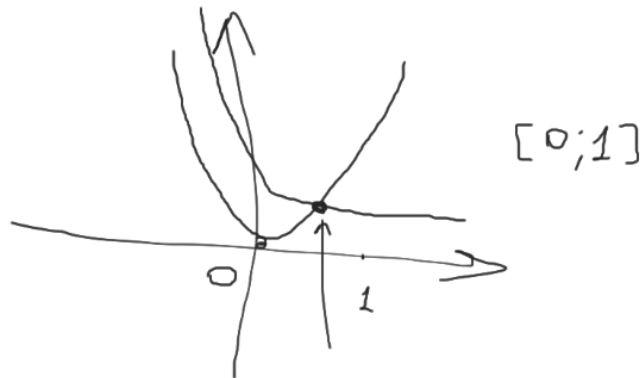
$$|\varphi_3| = \left| \frac{-2}{1 + (x^*)^2} - 1 \right| = \left| \frac{-(x^*)^2 - 3}{1 + (x^*)^2} \right| = \frac{3 + (x^*)^2}{1 + (x^*)^2} > 1$$

$$|\varphi_4| = \left| \frac{2}{7} - \frac{5}{7} \frac{1}{1 + (x^*)^2} \right| = \left| \frac{1}{7} \frac{2(x^*)^2 - 3}{1 + (x^*)^2} \right| \approx 0.12 < 1$$

Подходят 2 и 4, выбираем 4. Потому что чем меньше q, тем лучше сжатие.

### Пример 3

$$x^2 - e^{-x} = 0$$



Какой метод берём? Из производной функции. А локализацию мы получили из графического метода.