Sem5Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

Пример

Пусть есть система

$$y'' - \frac{1+x}{1+x^2}y' - \cos xy = \frac{1}{1+x^2}, 0 \le x \le 1$$

$$2y'(0) + y(0) = 3$$

$$y'_x(1) = 2$$

Решение

$$h^2 \sim \frac{y_{n+1} - 2y_N + y_{n-1}}{h^2} - \frac{1+x_n}{1+x_n^2}\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - \cos x_n y_n = \frac{1}{1+x_n^2}, 1 \le n \le L-1$$

$$h \sim 2\frac{y_1 - y_0}{h} + y_0 = 3, n = 0$$

$$h \sim \frac{y_L - y_{L-1}}{h} = 2, n = L$$

$$[y_1] = [y]_0 + h[y']_0 + \frac{h^2}{2}[y"]_0$$

$$y = \sin x$$

$$[y']_0 = \frac{3 - [y]_0}{2}$$

$$[y"]_0 = [y']_0 + \cos 0[y]_0 + 1$$

Опускаем квадратные скобки, понимая под ними то же самое. (Формализм нам не интересен)

$$y_1 = y_0 + h\frac{3 - y_0}{2} + \frac{h^2}{2}(\frac{3 - y_0}{2} + y_0 + 1), n = 0$$

Итого

$$y_1 = (1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2)y" + \frac{5}{4}h^2 + \frac{3}{2}h, n = 0$$

Для правого граничного условия:

$$y_{L-1} = y_L - 2h + \frac{h^2}{2}(\frac{5}{2} + \cos 1 + y_L), n = L$$

Но что будет, если мы будем использовать разностную задачу, а не Тейлора?

Со вторым порядком точности:

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$$

Расписываем разностное уравнение относительно нулевой точки:

$$\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - \frac{1 + x_0}{1 + x_0^2}\frac{y_1 - y_{-1}}{h} - \cos x_0 y_0 = \frac{1}{1 + x_0^2}$$

$$2\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + y_0 = 3$$

Что такое y_{-1} это фиктивный узел . Ну и сам по себе, это - метод фиктивного узла.

Продолжение

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_{n-1} = d_n$$

$$a_L y_{L-1} + b_L y_L = d_L$$

$$y_0 = \frac{-c_0}{b_0} y_1 + \frac{d_0}{b_0}$$

Переобозначим, теперь

$$y_0 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$a_1 y_0 + b_1 y_1 + c_1 y_2 = d_1$$

$$(-\alpha_1 y_1 + \beta_1) + b_1 y_1 + c_1 y_2 = d_1$$

$$y_1 = \frac{-c_1}{b_1 - a\alpha_1} y_2 + \frac{d_1 - a_1\beta_1}{b_1 - a\alpha_1} = \alpha_2 + \beta_2$$

$$y_1 = -\alpha_2 y_2 + \beta_2$$

$$y_i = -\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i\alpha_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{d_1 - a_i\beta_i}{b_i - a_i\alpha_i}$$

$$y_{L-1} = -\alpha_L y_L + \beta_L$$

$$y_{L-1} + b_L y_L = d_L$$

$$a_L(-\alpha_L y_L + \beta_2) + \beta_L y_L = d_L$$

$$y_L = \frac{d_L - a_L\beta_L}{b_L - a_L\alpha_L} = \beta_{L+1}$$

На этом метод прогонки заканчивается.