Sem9Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

Метод трёхдиагональной прогонки

$$|b_k| \leq |a_k| + |c_k|$$

Хоть одно строгое для какого-то K, значит м.н. устойчив.

Прямой ход

$$b_1x_1 + c_1x_2 = f_1$$

$$a_kx_{k-1} + b_kx_k + c_kx_{k+1} = f_k$$

$$a_nx_{n-1} + b_nx_n = f_n$$

Прогоночные коэффициенты

$p_1 = \frac{c_1}{b_1}$, $r_1 = \frac{f_1}{b_1}$, $p_k = \frac{c_k}{b_k - a_kp_{k-1}}$, $r_k = \frac{f_k - a_kr_{k-1}}{b_k - a_kp_{k-1}}$

$$x_n = r_n = \frac{f_n - a_nr_{n-1}}{b_n - a_np_{n-1}}$$

Рассмотрим полином

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} f_kL_k(x)$$

$$P_n(x, f + \delta f) = P_n(x, f) + P_k(x + \delta f)$$

$$||P_n(x, \delta f)||_1 = ||\delta f(x)||_1 \cdot ||\sum_{k=0}^{n} L_k(x)||_1 = L_n(x)$$

Здесь L_k - коэфф. функции Лебега. L_k будут зависить от интерполяции. Для равномерной сетки Ньютон (Лагранж): $L_n \sim 2^n$

Сплайн интерполяции:

Если $f \in C_{k+1}[a; b], k \in [0; 3]$:

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} |f^{(m)}(x) - S_3^{(m)}(x)| \leq \operatorname{ch} max|f^{k+1-m}(x)|$$

Если $f \in C_4$

$$|f(x) - S_3(x)| \leq \operatorname{ch} M_4$$

$$|f'(x) - S_3(x)| \leq \operatorname{ch} M_4$$

Равномерное приближение

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n^0(x)| = inf\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)|$$

Элементы наилучшего равномерного приближения.

Многочлены Чебышева

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

Приблизительные значения: $T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$ Многочлен Чебышева - наилучшее приближение.
Среди всех алгебраических многочленов $\overline{P_n}(x)$, многочлен $\overline{T}(x)$ на отрезке [-1; 1] наименее отклоняется от 0. Или выполнено следующее

$$\max_{x\in[-1;1]}\overline{T_n}(x) = inf \max x \in [-1;1]|\overline{P_n}(x)| = 2^{1-n}$$

Пример

$$P(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) = ax + b$$

f(x) - налучшим равномерным приближением?

$[-2;4] \longrightarrow [-1;1]$

$$x = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}$$

$$x = 3y$$

$$P(x) - f(x) = R(x)$$

$$P(y) - f(y) = R(y)$$

$$\overline{R}(y) = \overline{T}(y)$$

А отсюда находим a, b.

$$P(x) - f(x) = x^2 + 2x + 1 - ax - b = (3y+1)^2 + (3y+1)(2-a) + 1 - b =$$
$$= 9y^2 + y(12-3a) + 4 - a - b = R(y)$$

$$\overline{R}(y) = \frac{R(y)}{9} = \overline{T}_2(y) = y^2 - \frac{1}{2}$$

Значит, a = 4, b = 4.5, f(x) = 4x + 4.5

Нули полинома Чебышева

$$T_n(x), x \in [-1; 1]$$
$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Как избежать использование сплайна?) Можно просто узлы x_k внедрить в сетку на [a; b].
Напомню, исходная сетка [a; b]: $x_k = k \cdot h$, $k_k - x_{k-1} = h$

Узлы Чебышева:
$$x_{k+1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

Интерполяция по узлам Чебышева:

$$L_n \leq 8 + \frac{4}{91}\ln n + 1$$

С ростом числа n, эта интерполяция более устойчива.

Среднеквадратичное приближение

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x)$$

Здесь $\varphi_0(x), ..., \varphi_n(x)$ - ЛНЗ.
Пусть заданы значения для f в некоторых точках.

$$S(a_0, a_1, ..., a_n) = \sum_{k=0}^{n}(P_m(x_k) - f(x_0))$$

Здесь $S \longrightarrow minimum$

Необходимое условие экстремума

$$gradS(a_0, ..., a_n) = 0 \Leftrightarrow B\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$$

$$B = [(\varphi_k, \varphi_j)]$$
$$\overrightarrow{c} = (f_0, ..., f_m)$$
$$f_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_k(x_i)$$

B - симметричная, положительно определённая матрица. Если бы мы сделали всё то же самое для непрерывной функции, то знак суммы меняется на интеграл $\int$.

Для алгебраической интерполяции: $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$, $\varphi_m = x^m$

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j}$$

$$f_k = \sum_{i=0}^{n} y_i x_j^k$$