Sem2Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

Вайбы прошлого семинара

$$\Delta_{L+1} = R(z)\Delta_L$$
$$R(z) = 1 + z$$
$$|R(z)| < 1$$
$$Z = Yh$$
$$z = \lambda_i h$$

Условие устойчивости:

$$|R(\lambda_i, h)| < 1$$

Следовательно,

$$h < const$$

Уравнение Далквиста

$$\frac{du}{dt} = \lambda u = f(t, u) = f(u)$$

Смотрим на λ и понимаем, решение у нас затухающее($\lambda < 0$) или возрастающее.

$$u_{L+1} = u_1 + hk_1$$
$$k_1 = f(t, u_1) = f(u_1)$$
$$u_{L+1} = u_L + h\lambda u_2$$
$$u_{L+1} = (1 + \lambda h)u_2$$

Как заместим, устойчивость это $(1 + \lambda h)$.

Пример

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

Какой здесь порядок метода? Второй (смотреть прошлый семинар, как там p определяется). Метод одностадийный, но порядок второй..
Как найти функцию устойчивости?

$$u_{L+1} = u_L + hk_1$$

$$k_1 = f(t_L + \frac{1}{2}h, u_L + h \cdot \frac{1}{2}k_1)$$

Примениим к уравнению Далквиста. Тогда

$$k_1 = \lambda \cdot (u + h \cdot \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_1 = \frac{\lambda u_2}{1 - \frac{1}{2}\lambda h}$$

$$\Rightarrow u_{L+1} = u_L + h\frac{\lambda u_2}{1 - \frac{1}{2}\lambda h} = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h}{1 - \frac{1}{2}\lambda h} \cdot u_L$$

$$|R(z)| = |\frac{1 + z/2}{1 - z/2}| < 1$$

Здесь $z = x + iy$ Тогда

$$\frac{(1 + x/2)^2 + y^2/4}{(1 - x/2)^2 + y^2/4} \leq 1$$

$$\Rightarrow 2x \leq 0$$

Значит, устойчивой будет вся левая комплексная плоскость.

Неявный метод Эйлера

$$u_{L+1} = u_L + h \cdot f(x_{L+1}, y_{L+1})$$

$$k_1 = \frac{y_{L+1} - y_L}{h}$$

$$k_1 = f(x_L + h, y_L + hk_1)$$

Применяем его к уравнению Далквиста. Тогда

$$k_1 = \lambda(y_L + hk_1)$$

$$k_1 = \frac{y_L}{1 - \lambda h}$$

$$u_L + hk_1 = y_L + h\frac{\lambda y_L}{1 - \lambda h} = \frac{1}{1 - \lambda h}y_L$$

$$R(z) = \frac{1}{1 - z}$$

$$|R(z)| \leq 1$$

Немного определений

А-устойчивость:
Метод, имеющий область устойчивости $|R(z)| < 1 \supset \{z : Rez \leq 0\}$ называются А-устойчивыми.

А-α устойчивость:
α - параметр угла раствора, где выполняется условие $Rez \leq 0$.

L-устойчивость:
Метод называется L-устойчивым, если он А-устойчив и выполнено условие, что

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} R(z) = 0$$

Функции устойчивости

Для явных методов, у которых s = p.

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^p}{p!}$$

Неявные методы:

$$R(z) = 1 + zb^T(E - zA)^{-1}$$

(в старых обозначениях таблицы Бутчера).

Значит, в большинстве случаев,

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

(полиномы степени не выше s). Удобно использовать теорему:
Теорема
Метод Рунге-Кутты с $R(z) = 1 + zb^T(E - zA)^{-1}$ А-устойчив $\Leftrightarrow |R(iy)| \leq 1, \forall y \in R$ и R(z) - аналитиическая функция при Re(z) < 0.

Пример

$$u' = -400u$$
$$v' = 3 \cdot 10^{-2}u - 10v + w$$
$$w' = -4 \cdot 10^{-2} - 12v - 2w$$
$$u(0) = 1, v(0) = -1, w(0) = 0$$

Матрица Якоби здесь будет матрицей системы.

$$\text{J} = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 3{\cdot}10^{-2} & \text{-}10 & 1 \\ \text{-}4 \cdot 10^{-2} & -12 & \text{-}2 \end{bmatrix}$$

Ищем собственные значения для этой матрицы. Они равны

$$\lambda_1 = -400, \lambda_2 = -8, \lambda_3 = -4$$

Жёсткая система

Система
$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = f(t, \overrightarrow{u})$$
называется жёсткой, если для всех t, y(t) собственные значения матрицы J(t) удовлетворяют условиям
$$\text{число жёсткости} = \frac{\max|Re\lambda_j|}{\min|Re\lambda_k|} \gg 1$$
к $Re\lambda_j < 0$, $\max|Im\lambda_j| \ll \max|Re\lambda_k|$
$$u_{L+1} = u_L + hk_1$$
$$k_1 = f(x_L + \frac{1}{2}h, y_L + \frac{1}{2}hk_1 = F(k_1) = 0$$
Метод Ньютона используем:
$$k_1^{s+1} = k_1^s - \frac{F(k_1^s)}{F'_{k_1}(k_1^s)}$$
$$F'_{k_1}(k_1^s) = \frac{F_{k_1+1} - F_{k_1-1}}{2h_{k_1}}$$