Sem3Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

1 Семинар

Из прошлого - мы ввели нормы. Ввели - и хорошо.
Сегодня цель - рассмотреть несколько прямых методов.
Что из себя представляет любой прямой метод? - получим ответ.

1.1 Прямые(точные) методы для решения СЛАО

Компьютер не идеален => компьютер даёт погрешность(из прошлого, к ней - 2 лаба).
Кроме метода Гаусса, в линале мы использовали метод Крамера. Он тоже прямой.

$$Ax = b$$

Давайте посмотрим базовые вещи.

1.1.1 Метод Гаусса

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Прямой метод Гаусса:
итерации:

$$\alpha_i^k = \frac{a_{i1}^{k-1}}{a_{11}^{k-1}}$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \alpha_i^k a_{ij}^{k-1}$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} - \alpha_i^k b_i^{k-1}$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1}; b_i^k = b_i^{k-1}; i \leq k; j = \overline{1, n}$$

Также у нас есть обратный ход:

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}$$

$$x_k = \frac{b_k^{n-1} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{n-1} x_j}{a_{kk}^{n-1}}; k = \overline{(n-1), 1}$$

1.1.2 Метод Гаусса с выбором главного элемента:

Всё то же самое, что м.Г., НО выбирается $\max|a^k_{ii}|$ по всем элементам в строке

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \ \text{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 & -4 & | & 11 \\ 0 & \frac{11}{6} & -\frac{10}{3} & | & \frac{-29}{6} \\ 0 & \frac{23}{6} & -\frac{4}{9} & | & \frac{7}{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1 & -4 & | & 11 \\ & \frac{23}{6} & \frac{4}{3} & | & \frac{7}{6} \\ & \frac{11}{6} & \frac{10}{3} & | & \frac{-29}{6} \end{bmatrix}$$

$$6x_3 + x_1 - 4x_2 = 11$$
$$\frac{23}{6}x_1 - \frac{4}{3}x_2 = \frac{7}{6}$$
$$372x_2 = 744$$

Отсюда обратный метод и находим $x_2 = 2, x_1 = 1, x_3 = 3$

Вспомнили, прослезились.

1.1.3 LU метод

А теперь - хотим сделать так:

$$Ax = b \rightarrow LUx = b$$

$$\text{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & 1 \end{bmatrix} ; \text{U} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & ... & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & ... & d_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} ; \text{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} ; \text{U} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Из этих матриц и предыдущих высказываний находим все l_{ij}, d_{ij}.

$$d_{1i} = a_{1i}$$
$$d_{22} = \frac{39}{10}$$
$$d_{23} = 2$$
$$l_{21} = -0.3$$
$$l_{31} = 0.5$$
$$l_{32} = \frac{25}{39}$$
$$d_{33} = ...$$

Чтобы разложение было возможно, надо проверять, что все главные миноры матрицы А отличны от нуля. Не забываем, что чаще всего подбираются удачные матрицы.

1.1.4 Метод квадратного корня

$Ax = b$. Предположим, что A - симметричная. Тогда мы можем $A = LL^T$.

L = $\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn} \end{bmatrix}$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ik} l_{kj}}{l_{ii}}$$

$$\begin{bmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 & | & 7.5 \\ -1 & 5 & 2.12 & | & -8.68 \\ 0.5 & 2.12 & 3.6 & | & -0.24 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{6.25} = 2.5$$

$$l_{22} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-1}{2.5} = -0.4$$

$$l_{31} = \frac{0.5}{2.5} = 0.2$$

$$l_{22} = \sqrt{5 - (-0.4)^2} = 2.2$$

$$l_{32} = ... = 1$$

$$l_{33} = ... = 1.6$$

$$L^T x = y; Ly = b$$

Получаем решение (0.8, -2, 1)

1.2 Итерационный метод

Итерационные методы для решения СЛАУ.

1.2.1 Метод простой итерации

$Ax = b \to Ax + x = b + x \to x = x - Ax + b \to x_k = (E - A)x_{k-1} + b$
$Ax = b \to x_k = Bx_{k-1} + F$

Теорема[Достаточное условие сходимости:]
Если ||B||= q $<$ 1, то существует единственное решение x^* уравнения $x = Bx + F$ при любомначальном приближении x_0 И.П. сходится, причём

$$||x^{(k)} - x^*|| \leq q^k ||x^0 - x^*||$$

Похоже на геом. прогрессии.

Теорема[Критерий сходимости МПИ]
Необходимо и достаточно $|\lambda(B)| < 1$

1.2.2 Однопараметрический метод простой итерации

$$x_k = (E - \tau A)x_{k-1} + \tau b$$

1.2.3 Метод Якоби

$$A = L + D + U$$

L - нижняя треугольная, D - диагональная, U - верхняя треугольная.

$$Lx + Dx + Ux = b \to Lx_k + Dx_{k+1} + Ux_k = b$$

$$x_{k+1} = D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$$

Теорема [Критерий сходимости метода Якоби:]

$$\det \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{a}_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda \mathrm{a}_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & \lambda \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix} = 0, \text{ если } |\lambda| < 1$$

1.2.4 Метод Зейделя

$$A = L + D + U$$

L - нижняя треугольная, D - диагональная, U - верхняя треугольная.

$$Lx + Dx + Ux = b \to Lx_{k+1} + Dx_{k+1} + Ux_k = b$$

$$x_{k+1} = -(L + D)^{-1}Ux_k + (L + D)^{-1}b$$

Теорема [Критерий сходимости метода Зейделя]

$$\det \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{a}_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \lambda \mathrm{a}_{21} & \lambda \mathrm{a}_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda \mathrm{a}_{n1} & \lambda \mathrm{a}_{n2} & ... & \lambda \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix} = 0, \text{ если } |\lambda| < 1$$