Sem3Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

Пример 1

$$k_1 = f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + h(\beta_{11}k_1 + \beta_{12}k_2))$$

$$k_2 = f(x_n + h\alpha_2, y_n + h(\beta_{21}k_1 + \frac{1}{4}k_2))$$

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{3}{4}k_1 + c_2k_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & \beta_{11} & \beta 12 \\ \alpha_2 & \beta_{21} & 1/4 \\ & 3/4 & \mathrm{c}_2 \end{bmatrix}$$

Условие Кутты:

$$\beta_{11} + \beta_{12} = \frac{1}{3}$$

$$\beta_{21} + \frac{1}{4} = \alpha_2$$

Условие на аппроксимацию:
p = 1:

$$\frac{3}{4} + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}$$

p = 2:

$$\sum b_i c_i = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \alpha \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_2 = 1$$

p = 3:

$$\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3} = \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^2 + 1^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\sum b_i a_j c_i j^2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{4}(\frac{1}{3}\beta_{11} + 1 \cdot \beta_{12}) + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4})$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 5/12 & \text{-}1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Мы пришли к конкретному методу Радо (неявный метод 3-го порядка).

Пример 2

$$R(z) = 1 + zb^T(E - zA)^{-1}\overrightarrow{1}$$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/12 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\text{E - zA} = \begin{bmatrix} \text{1 - z} \cdot \frac{5}{12} & \text{z}\cdot 1/12 \\ \text{-3/4 z} & \text{1 - 1/4 z} \end{bmatrix}$$

$$b^T = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Считаем R(z), учитывая, что $\overrightarrow{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$R(z) = \frac{2z + 6}{(z-2)^2 + 2}$$

Это и есть функция устойчивости.
Проверить на A-устойчивость и L-устойчивость - следующая задача.
A-устойчивость:

$$|R(z)| > 1 > \overline{C}$$

R(z) - регулярная функция для R(z) $<$ 0.

$$|6 + i2y|^2 \leq |6 - y^2 - i4y|^2$$

$$36 + 4y^2 \leq (6 - y^2)^2 + 16y^2$$

$$\Rightarrow y^4 \geq 0$$

$\Rightarrow$ A - устойчивость.
A что по L-устойчивости:
A-устойчивость + $\lim_{z \to +\infty} R(z) = 0$ Всё выполняется $\Rightarrow$ L-устойчива.

Метод Розенброка

$$y' = f(y) \text{ - автономный}$$

Допустим, стадии будут выражаться в следующем виде:

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j + a_{ii}k_i$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

Применяется одноразово метод Ньютона.

$$k_i = hf(g_i) + hf'(g_i)a_{ii}k_i$$

$$g_i = y_0 + \sum_{j=1}^{i=1} a_{ij}k_j$$

Метод Розенброка

$$\overrightarrow{k_i} = h\overrightarrow{f}(\overrightarrow{y_0} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\overrightarrow{k_j}) + hJ\sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}k_j$$

$$\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_0} + \sum_{i=1}^{s} b_i\overrightarrow{k_i}$$

Пример из статьи

(Трёхстадийный метод Розенброка).

$$y_{n+1} = y_n + p_1k_1 + p_2k_2 + p_3k_3 + ...$$

$$D_nk_1 = hf(y_n)$$
$$D_nk_2 = hf(y_n + \beta_{21}k_1)$$
$$D_nk_3 = hf(y_n + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2)$$

Линейные многошаговые методы

$$\alpha_k y_{L+k} + \alpha_{k-1}y_{L+k-1} + ... + \alpha_0 y_L = h(\beta_k f_{L+k} + \beta_{k-1}f_{L+k-1} + ... + \beta_0 f_L$$

Многошаговый метод имееет порядок p

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q = q\sum_{j=0} B_i j^{q-1}, q = 1, ..., p$$

Пример

$$\alpha_2 u_{n+1} + \alpha_1 u_n + \alpha_0 u_{n-1}$$

Здесь $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -7/8, \alpha_0 = -1/8, b_2 = 5/16, b_1 = 15/16, b_0 - -1/8$

q = 0:

$$\sum \alpha_j = 0$$

q = 1:

$$\sum \alpha_j j^1 = 1 \cdot \sum_j = 0^2 B_j j^{1-1}$$

$$\alpha_0 \cdot 0 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 = B_0 \cdot (0)^0 + B_1 \cdot 1 + B_2 \cdot 2$$

q = 2 - выполняется. Для q = 3 - нет.