# Sem4Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

# 1 Ошибка из прошлого семинара

Было 2 метода - Метод Якоби и Метод Зейделя.

## 1.1 Метод Якоби

$$x_{k+1} = D^{-1}(L+U)x_k + D^{-1}b$$

Теорема [Критерий сходимости метода Якоби:]

$\det \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda \mathrm{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix} = 0$, если $|\lambda| < 1$

## 1.2 Метод Зейделя

$$x_{k+1} = -(L+D)^{-1}Ux_k + (L+D)^{-1}b$$

Теорема [Критерий сходимости метода Зейделя]

$\det \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda \mathrm{a}_{21} & \lambda \mathrm{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \mathrm{a}_{n1} & \lambda \mathrm{a}_{n2} & \dots & \lambda \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix} = 0$, если $|\lambda| < 1$

# 2 Семинар

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$

Найти критерий сходимости МПИ.

МПИ:

$x_{k+1} = Bx_k + f \qquad B = E - A$

$$det|B - \lambda E| = ((1-\alpha) - \lambda)^3 - ((1-\alpha) - \lambda) = 0$$

Отсюда находим $\lambda_i$.

По методу Якоби: $\det \begin{bmatrix} \lambda\alpha & 0 & \beta \\ 0 & \lambda\alpha & 0 \\ \beta & 0 & \lambda\alpha \end{bmatrix} = 0$

По методу Зейделя: $\det \begin{bmatrix} \lambda\alpha & 0 & \beta \\ 0 & \lambda\alpha & 0 \\ \lambda\beta & 0 & \lambda\alpha \end{bmatrix} = 0$

Существует семейство однопараметрических методов, где вводится парамер $\tau$.

$$x_{k+1} = (E - \tau A)x_k + \tau f$$

Необходимое и достаточное условие сходимости : $|\lambda(E - \tau A)| < 1 \Rightarrow |1 - \tau\lambda(A)| < 1.//$
$\tau$ отвечает за скорость сходимости (норма матрицы B, она же норма матрицы итерационного процесса). Существует много частных случаев. Один из таких - если матрица симметрична, то

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

$$\tau_{\text{оптимальное}} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

Задаётся вопрос, а при каких начальных приближениях $x^0$ будет сходиться метод?
A $= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ f $= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Находим собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6$. Отсюда система уравнений $|1 - \tau| < 1, |1 - 6\tau| < 1 \Rightarrow 0 < \tau < \frac{1}{3}$.

Для $\tau = 0.1$ сходимость с любого начального приближения. Для $\tau = 2$ - не будет сходиться с любого начального приближения.

A $= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ f $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Постройте сходящийся однопараметрический метод простой итерациии.

Что будем делать? Можно за два преобразования гарантировать, что метод будет сходящийся. Матрица не симметрична - что же делать для ускорения? Привести матрицу A к симметричной. Матрица A хочет стать в виде матрицы. Вот алгоритм для крафта симметричной матрицы, умножая на транспонированную. $A^T A\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}$

$$B\overrightarrow{u} = F'$$

$$u_{k+1} = (E - \tau B)u_k + \tau F'$$

$$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{max}(B)} = 0.053$$

Ок, оно сходится. А как оценить количество итераций, за которое сходится?

Ловим аптечку, она же формула:

$$N = [\frac{\ln \varepsilon \frac{1-q}{||F||}}{\ln q}]_{\text{целая часть}} + 1$$

здесь $\varepsilon$ - точность, q - норма матрицы итерационного процесса.

$$u^{(0)} = (0,0)^T$$

У нас F будет зависеть от $\tau$: $F = \tau F'$. Количество итераций будет зависить от $\tau$. Посчитаем для оптимального $\tau$ количество итераций. Напоминание, что мы получили B:
B $= \begin{bmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{bmatrix}$

$$\tau_{\text{оптимальное}} = \frac{1}{19}$$

$$F = \tau_{\text{оптимальное}} A^T$$

F $= \frac{1}{19} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$
|E-$\tau B| = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} -6 & -18 \\ -18 & 6 \end{bmatrix}$

$$||F||_1 = \frac{17}{13}$$

$$||F||_2 = \frac{24}{19}$$

Проводим оценку в первой норме:
Достаточное условие сходимости не выполняется для первых двух норм.

$$||F||_3 = \frac{\sqrt{74}}{19}$$

$$||E - \tau B||_3 = max|\lambda_i(E - \tau B)| = \frac{6\sqrt{10}}{19} < 1$$

В итоге если подставить:

$$N = 9155 \text{ итераций.}$$

## 2.1 Метод Релаксации

A = L + D + U Здесь в роли параметра $\omega$:

$$(\omega L u^{k+1} + D u^{k+1}) + (\omega - 1) D u^k + \omega U u^k = \omega f$$

При $\omega = 1$ будет метод Зейделя.

$$u^{k+1} = -(D + \omega L)^{-1}[(\omega - 1)D + \omega L]u^k + \omega(D + \omega L)f$$

Известно, что

$$0 < \omega_{\text{оптимальное}} < 2$$

Для положительно определённой матрицы,

$$1 < \omega_{\text{оптимальное}} < 2$$

- это уже метод верхней релакцсации. Метод нижней релаксации:

$$0 < \omega_{\text{оптимальное}} < 1$$

Если матрица A оказывается симметричной, то параметр релаксации будет выражаться через конечное выражение.

# 3 Полезности для домашней лабораторной работы:

## Степенной метод

$$A = A_{n\times n}$$

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_n|$$

$$y^k = Ay^{k-1}$$

$$\lambda_1 = \frac{y^k}{y^{k-1}}$$

Критерий остановo:

$$\varepsilon^k = |\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}| \geq \varepsilon$$

Невязка:

$$Ax_k = f$$

$$r_k = ||f - Ax_k||$$

$$r_k < \varepsilon \text{ - невязка}$$