Sem6Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

1 Метод Ньютона

Теорема о сходимости итерационного метода Ньютона

Если f(a)f(B) $<$ 0, причём f', f" непрерывны и знакопостоянны на отрезке локализации [a, b], то если выбрать начальное положение $x_0 \in [a, b] \& f(x_0)f"(x_0) > 0$, то можно вычислить

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Порядок сходимости

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M_2|x_n - x^*|^2}{2m_1}$$
$$M_2 = max|f''(x)|$$
$$m_a = min|f'(x)|$$

1.1 Пример

$$f(x) = 32x^3 + 20x^2 - 11x + 3$$

Надо найти число корней, локализацию для хотя бы одной точки и x_n.

1.1.1 Шаг 1

По теореме Декарта,

$$f(-x) = -32x^3 + 20x^2 + 11x + 3$$

Значит, всего один корень.

1.1.2 Шаг 2

Рассмотрим отрезок локализации f(-1) $>$ 0 & f(-2) $<$ 0

1.1.3 Шаг 3

Выпишем первые производные

$$f'(x) = 96x^2 + 40x - 11$$
$$f''(x) = 192x + 40$$

По условию теоремы, они должны быть знакопостоянны и непрерывны на отрезке [-2, -1].
Проверяем, удостоверились.
Значит, $x_0 \in [-2, -1]$ Если бы знак менялся, то нужно было бы отсекать отрезок так, чтобы условия теоремы выполнялись.

1.2 Модифицированный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - J^{-1}(x_n)F(x_n)$$

2 Перекладываем все методы на СНАУ.

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) = 0$$

Для достаточного условия сходимости метода простой итерации для систем нелинейных уравнений достаточно того, чтобы норма матрицы Якоби ≤ 1.

$$J = ||\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}||$$

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = \overrightarrow{x_n} - J^{-1}(x_n)F(x_n)$$

$$J = ||\frac{\partial F_i}{\partial x_i}||$$

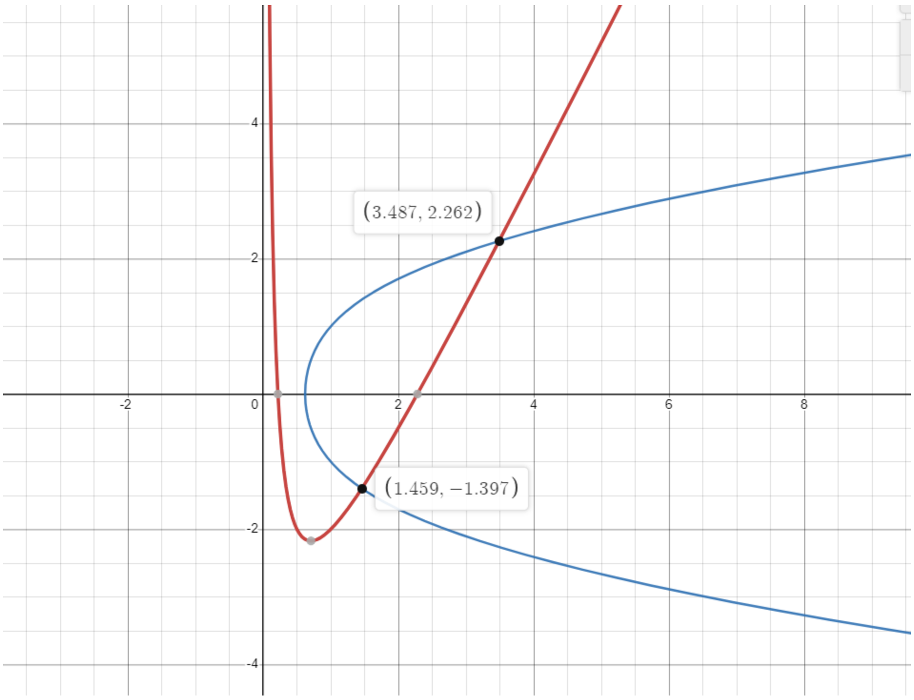
2.1 Пример

Найти корни системы нелинейных уравнений:

$$2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0$$

$$x_1 + 3lgx_1 - x_2^2 = 0$$

Метод простой итерации Что надо сделать? Прежде всего, надо попытаться найти область локализации. С точки зрения локализации нелинейных уравнений. Можно построить графически.



Видим, что есть две точки пересечения. А как? Ведь значений точек пересечений изначально нет. Выразим x_1 и x_2.

$$x_1 = \frac{x_1(x_2 + 5) - 1}{2}$$

$$x_2 = \sqrt{x_1 + 3lgx_1}$$

Мы составляем матрицу Якоби. Берём область локализации корня

$$G = \{|x_1 - 3,5| \leq 0.1, |x_2 - 2,2| \leq 0.1\}$$

Работаем в первой норме.

$$max\{\Sigma|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}|, \Sigma|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}|\} < 1$$

Получим оценки для $\frac{\partial\varphi_i}{x_i}$.
Как видим,

$$max\{\Sigma|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}|, \Sigma|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}|\} = 0.54 + 0.27 = 0.81 < 1$$

Т.о.

$$||J||_1 = 0.81 < 1$$

Т.е. достаточные условия выполнены в области локализации.

А если я захочу решать методом Ньютона?

$$2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0$$

$$x_1 + 3lgx_1 - x_2^2 = 0$$

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = \overrightarrow{x_n} - J^{-1}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{x_n})$$

Якобиан находим из исходной функции.

3