Sem1Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

Так, вспоминаем наше любимое

$$A^q + Y = C^q$$

Мы сейчас находимся в режиме, что хотим знать, как решать систему таких дифф. уравнений:

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = f(\overrightarrow{u}, t)$$

Конечная разностная аппроксимация - то, что было в прошлом году, надо повторить.

Пусть у нас есть временной отрезок от 0 до t. Вводим сетку с шагом τ от 0 до t. Сопоставим исходной дифференциальной задаче некую разностную схему

Семейство линейных многошаговых методов:

$$\frac{\alpha_k y_{n+k} + ...\alpha_0 y_n}{\tau} = \beta_k f_{n+k} + \beta_0 f_n$$

Примечание - в одномерии u превращается в y. (Разные источники, это неважно)

Метод Эйлера (запись неявная, одношаговый)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_{n+1}$$

Метод Эйлера (запись явная, одношаговый)

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f_{n+1}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

Метод Адамса (явный, 3-го порядка)

$$\frac{y_{n+3} - y_{n+2}}{h} = \frac{23}{12} f_{n+2} - \frac{16}{12} f_{n+1} + \frac{5}{12} f_n$$

Метод явный. Пусть у нас есть точки y_0, y_1, y_2. Как найти y_3? Можно применить одношаговый метод! Для того, чтобы посчитать точку y_3, хотелось бы вычислить первые точки, используя одношаговые методы. Метод Эйлера - 1-го порядка. Не очень хорошо, что для 3-го порядка мы пользуемся методами 1-го порядка. Как-то не очень :(. А как повышать порядок для одношаговых методов?

Методы Рунге-Кутты

$$y_{n+1} = y_L + h \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i f_i$$

Здесь $f_i = f(x_L + c_i h, y_L + h \sum_{j=1}^{s_i} a_{ij} f_j), i = \overline{1, s}$

Можем интерпретировать так:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{c}_1 & \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & ... & \mathrm{a}_{33} \\ \mathrm{c}_2 & \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & ... & \mathrm{a}_{33} \\ \mathrm{c}_3 & \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & ... & \mathrm{a}_{33} \\ & \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & ... & \mathrm{b}_3 \end{bmatrix}$$

Таблица Бутчера: $\begin{bmatrix} \mathrm{c}_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \mathrm{c}_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \mathrm{c}_3 & \mathrm{a}_{31} & 0 & ... & 0 \\ & \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & ... & \mathrm{b}_3 \end{bmatrix}$

Рассмотрим пример:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_{L+1} = y_l + h \cdot f_2$$

$$f_1 = f(x_L, y_L)$$

$$f_2 = f(x_L + \frac{1}{2}h, y_L + h \cdot \frac{1}{2} f_1)$$

Метод Хойна 3-го порядка: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ & 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$

Классическая МРК 4-го порядка:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1/6 & 2/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Обычно у нас будет выполняться условие Куты - $c_i = \sum a_{ij}$.

p = 1:

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$$

p = 2:

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = 1/2$$

p = 3:

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = 1/3, \sum_{i,j=1}^{s} b_i a_i j c_j = 1/6$$

p = 4:

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^3 = 1/4, \sum_{i,j=1} b_i c_i a_i j c_j = 1/8$$

$$\sum b_i a_i j c_j^2 = 1/12, \sum b_j a_i j a_j k c_k = 1/24$$

Вывод условия устойчивости системы

Пишем условие задачи Коши:

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$x \in [x_0, x_L]$$

Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет системе Коши. Тогда $\varphi'(x) = f(x', \varphi(x))$

$$y'_x(x) = f(x, y(x)) = f(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y}(y(x) - \varphi(x))$$

$$y'_x - \varphi'_x = \frac{\partial f}{\partial y}(y - \varphi)$$

$$\Delta'_x = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta$$

$$\Delta'_x = J(x)\Delta(x)$$

Используем метод Эйлера:

$$\frac{\Delta_{L+1} - \Delta_L}{h} = J(x_L)\Delta_L$$

$$\Delta_{L+1} = (E + hJ(x_L))\Delta_L$$

$$\Delta_{L+1} = R(z)\Delta_L$$

Здесь $z = Yh$, R(z) - функция устойчивости. В одномерном случае:

$$|R(z)| = |z + 1|, z \in C$$

Условие устойчивости:

$$|R(z)| < 1$$