Sem4Synopsis

Александр Мишин, Б01-008а

$$a_2u_{n+1}+a_1u_n+a_0u_{n-1}-\tau(b_2f_{n+1}+b_1f_n+b_0f_{n-1})=0$$
$$a_2=1, a_1=-\frac{7}{8}, a_0=-\frac{1}{8}, b_2=\frac{5}{16}, b_1=\frac{15}{16}, b_0=-\frac{1}{8}$$
$$u_n=\xi^n, u'=\lambda u$$

$$a_2u_{n+1}+a_1u_n+a_0u_{n-1}-\tau\lambda(b_2u_{n+1}+b_1u_n+b_0u_{n-1})=0$$

$$(a_2-zb_2)\xi^2+(a_1-zb_1)\xi+(a_0-zb_2)\cdot 1=0$$

$$|\xi_i(z)|<1 \text{ – область устойчивости}$$

$$(a_2\xi^2+a_1\xi+a_0)-z(b_2\xi^2+b_1\xi+b_0)=0$$

$$(a_2\xi^2+a_1\xi+a_0)=\rho(\xi)$$
$$(b_2\xi^2+b_1\xi+b_0)=\sigma(\xi)$$

$$z=\frac{\rho(\xi)}{\sigma(\xi)}$$

$$\xi=e^{i\varphi}$$

$$z=\frac{\xi^2-\frac{7}{8}\xi-\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}\xi^2+\frac{15}{16}\xi-\frac{1}{8}}$$

Пример 1

$$\frac{y_{m+1}-y_m}{h}=\frac{f(x_{m-1},y_m)-3f(x_m,y_m)}{4}$$

$$\Rightarrow (4-z)y_{m+1}-(4+3z)y_m=0$$

$$(4-z)\xi-(4+3z)\cdot 1=0$$

$$\xi=\frac{4+3z}{4-z}, z=4\frac{\xi-1}{\xi+3}, |\xi|<1$$

$$z(2)=0.8$$

Пример 2

$$\frac{25y_m - 48y_{m-1} + 36y_{m-2} - 16y_{m+3} + 3y_{m-4}}{12h} = f(x_m, y_m)$$

$$y' = \lambda y$$
$$y_m = \xi^m$$

$$(25 - 12z)\xi^4 - 48\xi^3 + 36\xi^2 - 16\xi + 3 = 0$$

$$z = \frac{25 - 48\xi^{-1} + 36\xi^{-2} - 16\xi^{-3} + 3\xi^{-4}}{12}$$

Флешбеки

При построении Ньютоновских итераций:

$$u_{n+1} = u_n - J^{-1}(u_n)F(u_n)$$
$$J(u_n)\Delta u = -F$$
$$u_{n+1} = u_n + \Delta u$$

Линейные краевые задачи

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), x \in [0, L]$$

Левая граница:

$$\mu_0 y(0) + \mu_1 y'(0) = \varphi_0$$

Правая граница:

$$\nu_0 y(L) + \nu_1 y'(L) = \varphi_1$$

Хочу решить краевую задачу, не сводя к задаче Коши. Можно построить метод фундаментальных решений. Но мы смотрим численные методы. Перед нами исходная дифференциальная задача, мы хотим свести её к разностной. Чтобы перейти к разностной, надо ввести сетку. Дальше - строим приближение производных y', y".

$$y' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$
$$y'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$$

Ну погнали

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p(x_n)\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q(x_n)y_n = f(x_n)$$

Надо решить линейную систему. Причём можем использовать метод прогонки.

$$\begin{bmatrix} ... & ... & ... \\ ... & c_n a_n b_n & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$