subject :   date :

حل معادله دیفیوژن در مختصات کارتزین

در یک بعد

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \alpha = \text{ضریب نفوذ حرارتی}$$

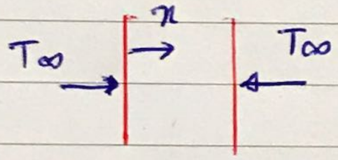
$$\nabla^2 C = \frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} \qquad D = \text{ضریب نفوذ جرمی}$$

* شرط حل مسئله آن است که شرایط مرزی همگن باشند

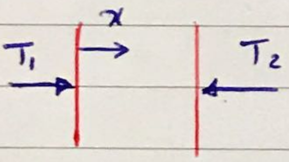
در یک بعد معادله انتقال حرارت در جامدات بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

۱- در مرزها دما داده شده باشد.



- با تغییر تابع $\theta = T - T_\infty$ شرایط مرزی همگن می‌شود



- پاسخ را دو قسمتی گرفته و ناهمگنی را به قسمت تابعیت مکان منتقل می‌کنیم

$$T(x,t) = T_t(x,t) + T_s(x)$$

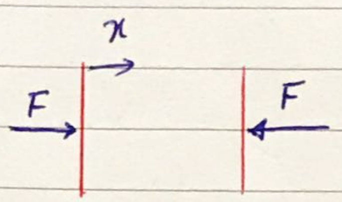
2- وجود ناهمگنی در معادله

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}(x)}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}$$

چون $\dot{q}$ فقط تابع x است می‌توان ناهمگنی را در تابعیت مکان فرض قرار داد.

subject : date :

3- فلاکس حرارتی در مرزها داده شده باشد.



در این حالت پاسخ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x) + T_3(t)$$

تذکر: اگر پاسخ را دو قسمتی در نظر بگیریم با فیزیک مسئله همخوانی نخواهد داشت

$$T(x,t) = T_t(x,t) + T_s(x)$$

$$\frac{\partial^2 T_t}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial t}$$

$$T_t(x,t) = X(x)\Gamma(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma'}{\Gamma} = -\lambda^2$$

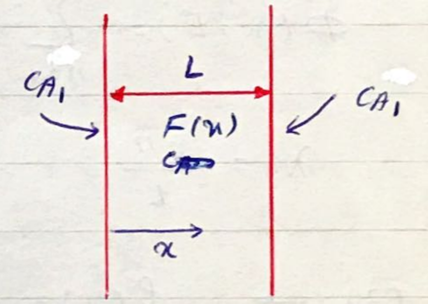
$$\Gamma = A e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$t \to \infty \quad T_t(x,t) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{t \to \infty} T(x,t) = T_s(x)$$

اگر فلاکس حرارتی مداوم به تیغه وارد شود با گذشت زمان دما به سمت بی‌نهایت می‌رود که پاسخ فوق این را نشان نمی‌دهد.

مثال: غلظت اولیه جزء A در تیغه ای از جامد B برابر $F(x)$ است. ضخامت تیغه L می باشد. تیغه ناگهان در محیطی قرار می گیرد که غلظت A در سطح تیغه برابر C_{A_1} می گردد و این غلظت تعادلی ثابت باقی می ماند. مطلوبست توزیع گذرای جزء A در جامد B



$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

$$C_A(x,0) = F(x)$$
$$C_A(0,t) = C_{A_1}$$
$$C_A(L,t) = C_{A_1}$$

$$\Phi = C_A - C_{A_1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} \Phi(x,0) = F(x) - C_{A_1} = f(x) & (1) \\ \Phi(0,t) = 0 & (2) \\ \Phi(L,0) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Phi(x,t) = X(x)\,\Gamma(t) \qquad \frac{1}{D}\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} + D\lambda^2\Gamma = 0$$

ت

علامت λ^2 طوری اختیار شده که وقتی $t \to \infty$ میرود پاسخ محدود باشد

$$\Phi = e^{-D\lambda^2 t}\left(A \sin \lambda x + B \cos \lambda x\right)$$

با استفاده از شرایط مرزی (2) و (3) داریم

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-D\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$(3) \longrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\boxed{C_A - C_{A_1} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi}{L} x \int_0^L \left(F(x') - C_{A_1}\right) \sin \frac{n\pi}{L} x' \, dx'}$$

$F(x) = C_{A0}$ حالت خاص

$$\frac{C_A - C_{A1}}{C_{A0} - C_{A1}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\begin{cases} n = 2k & 1 - \cos n\pi = 0 \\ n = 2k+1 & 1 - \cos n\pi = 2 \end{cases}$$

$$\frac{C_A - C_{A1}}{C_{A0} - C_{A1}} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 - (-1)^n\right]}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\frac{C_A - C_{A1}}{C_{A0} - C_{A1}} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x \, \exp\left[\frac{D(2n+1)^2 \pi^2 t}{L^2}\right]$$

مثال: مسئله قبل را برای شرایط زیر حل کنید

$$\begin{cases} C_A(x,0) = F(x) \\ C_A(0,t) = C_{A1} \\ C_A(L,t) = C_{A2} \end{cases}$$

چون هر دو شرط مرزی غیر همگن هستند پاسخ را مجموع پاسخ پایدار و گذرا می‌گیریم

$$C_A(x,t) = C_{At}(x,t) + C_{As}(x)$$

که C_{As} جواب معادله زیر است

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 C_{As}}{dx^2} = 0 \\ C_{As}(0) = C_{A1} \qquad C_{As}(L) = C_{A2} \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

$$C_{At}(x,t) = C_A(x,t) - C_{As}(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial C_{At}}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 C_{At}}{\partial x^2} \\ C_{At}(x,0) = F(x) - C_{As}(x) \\ C_{At}(0,t) = C_{At}(L,t) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

از حل (I) داریم

$$C_{As}(x) = (C_{A2} - C_{A1})\frac{x}{L} + C_{A1}$$

از حل (II) داریم

$$C_{At}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$C_A(x,t) = C_{A1} + (C_{A2} - C_{A1})\frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin\frac{n\pi}{L}x$$

از شرط اولیه داریم

$$F(x) = C_{A1} + (C_{A2} - C_{A1})\frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

اگر

$$f(x) = F(x) - C_{A1} - \frac{(C_{A2} - C_{A1})}{L} x$$

داریم

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

زیرا

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \left[(\cos n\pi) C_{A2} - C_{A1} \right] + \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{\pi n} \left[(-1)^n C_{A2} - C_{A1} \right] + \frac{2}{L} \int_0^L F(x') \sin \frac{n\pi}{L} x' \, dx'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_A = {} & C_{A1} + (C_{A2} - C_{A1}) \frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n C_{A2} - C_{A1}}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ & + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi}{L} x \int_0^L F(x') \sin \frac{n\pi}{L} x' \, dx' \end{aligned}} \quad (*)$$

حالتی که شرایط مرزی تابع زمان باشند. در حالت کلی تر شرایط مرزی می توانند تابع زمان باشند. از قضیه زیر میتوان برای حل این نوع مسائل استفاده کرد.

قضیه Duhamel: معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\nabla^2 U = \frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial t}$$

B.C. $U = \Phi(x, y, z, t)$ روی B

I.C. $U(x, y, z, 0) = 0$

اگر $U = F(x, y, z, \tau, t)$ حل معادله دیفرانسیل فوق باشد برای حالتی که شرط مرزی

تابع زمان نباشد یعنی بصورت $\Phi(x,y,z,\tau)$ باشد آنگاه جواب

معادله برای حالتی که شرایط مرزی تابع زمان است یعنی بصورت $\Phi(x,y,z,t)$

است بصورت زیر است

$$U = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} F(x,y,z,\tau,t-\tau)\, d\tau$$

مثال: مسئله قبل را برای شرایط مرزی زیر حل کنید

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} C_A(x,0) = F(x) \\ C_A(0,t) = \Phi_1(t) \\ C_A(L,t) = \Phi_2(t) \end{cases}$$

برای آنکه بتوانیم از قضیه فوق استفاده کنیم بایستی شرط اولیه صفر باشد لذا مسئله را

به مسئله زیر تفکیک می کنیم

$$C_A = U + V$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = D_A \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial V}{\partial t} = D_A \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ U(x,0) = F(x) & V(x,0) = 0 \\ U(0,t) = 0 & V(0,t) = \Phi_1(t) \\ U(L,t) = 0 & V(L,t) = \Phi_2(t) \end{cases}$$

هر دو مسئله را قبلاً حل کرده ایم

$$U = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t} \sin \frac{n\pi}{L} x \int_0^L F(x') \sin \frac{n\pi}{L} x' \, dx$$

برای پاسخ v کافی در معادله (*) بجای $F(x')=0$ قرار دهیم

$$v_\tau = \phi_1(\tau) + [\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)]\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)}{n} \times e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$v = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v_\tau(x, t-\tau)\, d\tau$$

$$v_\tau(x, t-\tau) = \phi_1(\tau) + [\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)]\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)}{n} \times e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D (t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\frac{\partial v_\tau(x, t-\tau)}{\partial t} = -\frac{2\pi D}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\phi_2(\tau) - \phi_1(\tau)\right] n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D (t-\tau)}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$v = \frac{2\pi D}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t}\sin\frac{n\pi x}{L}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D \tau}\left[\phi_1(\tau) - (-1)^n\phi_2(\tau)\right] d\tau$$

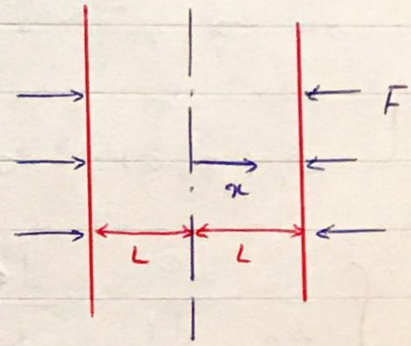
بنابراین پاسخ کلی بصورت زیر است

$$\boxed{C_A = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D t}\sin\frac{n\pi x}{L}\left[\int_0^L F(x')\sin\frac{n\pi x'}{L}\,dx' + \frac{n\pi D}{L}\int_0^t e^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D\tau}\left[\phi_1(\tau) - (-1)^n\phi_2(\tau)\right]d\tau\right]}$$

مثال: فلاکس ثابت F_0 به طرفین تیغه ای به ضخامت $2L$ اعمال میشود.

غلظت اولیه در تیغه C_{A0} است. مطلوبست توزیع غیر پایدار غلظت در تیغه

$$\frac{1}{D}\frac{\partial C_A}{\partial t} = \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2}$$



$$C_A(x,0) = C_{A0}$$

$$\frac{\partial C_A(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$-D\frac{\partial C_A(L,t)}{\partial x} = -F_0 \quad \text{(در } x = L \text{ فلاکس } F_0 \text{ در جهت منفی } x \text{ است)}$$

$$\Phi(x,t) = C_A - C_{A0}$$

(ضرورتی برای تغییر تابع نیست)

$$\frac{1}{D}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\Phi(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$D\frac{\partial \Phi(L,t)}{\partial x} = F_0$$

چون ناهمگنی بصورت غیر صفر بودن فلاکس است داریم

$$\Phi(x,t) = \Phi_1(x,t) + \Phi_2(x) + \Phi_3(t)$$

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{d\Phi_3}{dt}\right) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 \Phi_2}{dx^2}$$

مسئله را بصورت زیر تحلیل می کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D_A}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} & (I) \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi_1(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi_1(L,t)}{\partial x} = 0 & \text{چون می‌خواهیم همگن باشند (2) و (1)} \\[2ex] 0 = \Phi_1(x,0) + \Phi_2(x) + \Phi_3(0) & \\[2ex] \Phi_1(x,0) = -\Phi_2(x) - \Phi_3(0) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D_A}\dfrac{d\Phi_3}{dt} = \dfrac{d^2\Phi_2}{dx^2} & (II) \\[2ex] \dfrac{d\Phi_2(0)}{dx} = 0 \quad (4) & D\,\dfrac{d\Phi_2(L)}{dx} = F_0 \quad (5) \end{cases}$$

یک طرف معادله (II) تابع x و طرف دیگر تابع t است بنابراین

$$\frac{1}{D_A}\frac{d\Phi_3}{dt} = \frac{d^2\Phi}{dx^2} = c \qquad \text{ثابت}$$

$$\begin{cases} \Phi_3(t) = D\,c\,t + c_1 \\[2ex] \Phi_2(x) = \frac{1}{2}c\,x^2 + c_2 x + c_3 \end{cases}$$

با استفاده از (4) و (5) داریم

$$\begin{cases} c = \dfrac{F_0}{DL} \\[2ex] c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_3(t) = \dfrac{F_0}{L}\,t + c_1 \\[2ex] \Phi_2(x) = \dfrac{F_0}{2DL}\,x^2 + c_3 \end{cases}$$

چون Φ_1 شکلی به $\Phi_3(t)$ و $\Phi_2(x)$ دارد می‌توانیم c_1 و c_3 را صفر قرار دهیم
در واقع c_1 و c_3 در ثابت Φ_1 جذب شده و ثابت جدیدی را
تشکیل می‌دهند

$$\begin{cases} \Phi_3(t) = \dfrac{F_0}{L} t \\[2ex] \Phi_2(x) = \dfrac{F_0}{2 D L} x^2 \end{cases}$$

برای حل (I) داریم

$$\Phi_1 = X(x)\, T(t)$$

$$\Phi_1 = e^{-D \lambda^2 t} (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)$$

از اعمال شرایط (1) و (2) داریم

$$\begin{cases} A \lambda \cos(0) - B \lambda \sin(0) = 0 \\ A \lambda \cos \lambda L - B \lambda \sin L \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ \lambda_n = \dfrac{n\pi}{L} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

$$\Phi_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-D \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$$

از شرط (3) داریم

$$-\frac{F_0}{2 D_A L} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$$

$$-\frac{F_0}{2 D L} \int_0^L x^2 \cos \lambda_n x \, dx = a_n \int_0^L \cos^2 \lambda_n x \, dx = \frac{L}{2} a_n$$

$$a_n = -\frac{F_0}{D L^2} \int_0^L x^2 \cos \lambda_n x \, dx$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax \qquad a \neq 0$$

لذا داریم

$$a_n = -\frac{F_0}{D_A L^2} \frac{2}{\lambda_n^2} \left[x \cos \lambda_n x \right]_0^L$$

$$a_n = -\frac{2F_0}{D_A L^2 \lambda_n^2} \left[L \cos n\pi \right]$$

$$a_n = \frac{-2 F_0 L (-1)^n}{D_A (L \lambda_n)^2} \qquad n \neq 0$$

$$n = 0 \qquad \lambda = 0 \qquad \cos \lambda_n x = 1$$

$$\frac{-F_0}{2 D_A L} \int_0^L x^2 dx = a_0 \int_0^L dx = \frac{a_0}{L}$$

$$a_0 = \frac{-F_0 L}{6 D_A}$$

بعد از جایگزینی داریم

$$\boxed{C_A - C_{A_0} = \frac{F_0 L}{D_A} \left\{ \frac{D_A t}{L^2} + \frac{3x^2 - L^2}{6L^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-D_A n^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}}$$

اگر c_1 و c_3 را صفر قرار نداده بودیم داشتیم

$$-\frac{F_0}{2DL}x^2 - c_1 - c_3 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\lambda_n x$$

$$A_0 = a_0 + c_1 + c_3$$

$$A_0 = -\frac{F_0 L}{6D} \qquad a_n = \frac{-2F_0 L(-1)^n}{D(L\lambda_n)^2}$$

$$-\frac{F_0 L}{6D} = a_0 + c_1 + c_3$$

$$\Phi(x,t) = \Phi_1(x,t) + \Phi_2(x) + \Phi_3(t)$$

$$a_0 = -\frac{F_0 L}{6D} - c_1 - c_3$$

$$\Phi_1(x,t) = -\frac{F_0 L}{6D} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{D\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x - c_1 - c_3$$

$$\Phi(x,t) = -\frac{F_0 L}{6D} - \cancel{c_1} - \cancel{c_3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{D\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x$$

$$+ \frac{F_0}{2DL}x^2 + \cancel{c_3} + \frac{F_0}{t} + \cancel{c_1}$$