calculus of variations حساب تغییرات

جلسه سی و نهم

۱- ماکزیمم یا مینیمم یک تابع چند متغیره: تابع چند متغیره $f(x_1 \cdots x_n)$ را

در نظر بگیرید. شرط لازم برای آنکه نقطه $P(a_1 \cdots a_n)$ ماکزیمم یا مینیمم تابع

باشد آنست که مشتقات جزئی مرتبه اول f $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ در این نقطه صفر گردد

یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_P = \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big| = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_P = 0$$

حال سعی می‌کنیم شرط کافی را بدست آورده و تعیین کنیم که نقطه مینیمم است یا ماکزیمم

اگر تابع f را حول نقطه P بسط دهیم داریم

$$f(x_1 \cdots x_n) = f(a_1 \cdots a_n) + \left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right] f(x_1 \cdots x_n)\Big|_{a_1 \cdots a_n} + \frac{1}{2}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(x_1 \cdots x_n)\Big|_{a_1 \cdots a_n} + \cdots$$

از مشتقات مرتبه سه به بالا صرف نظر شده است. چون مشتقات اول f در نقطه

P صفر است اولین جمله غیر صفر را داریم

$$f(x_1 \cdots x_n) - f(a_1 \cdots a_n) = \frac{1}{2}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(x_1 \cdots x_n)\Big|_{a_1 \cdots a_n} + \cdots$$

اگر $\lambda_i = x_i - a_i$ باشد داریم

$$f(x_1 \cdots x_n) - f(a_1 \cdots a_n) = \frac{1}{2}\left[\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(x_1 \cdots x_n)\Big|_{a_1 \cdots a_n} + \cdots$$

اگر ترم های مربوط به رتبه های بالاتر از ۲ صرف نظر کنیم طرف راست تساوی فوق

یک فرم quadratic برای λ ها است که ضرایب حاصل ضرب $\lambda_i \lambda_j$ عبارتند از

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{a_1, \ldots a_n} \qquad i \neq j$$

$$\frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right|_{a_1, \ldots a_n} \qquad i = j$$

ترمهای بالاتر که توان سوم λ را دارند با توجه به کوچک بودن λ ها و (حول نقطه P است)

قابل صرف نظر کردن است.

اگر $f(x_1 \ldots x_n) - f(a_1 \ldots a_n)$ برای همه λ_i های کوچک منفی باشد نقطه P ماکزیمم است

و برای اینکه این حالت پیش آید باید فرم درجه دوم بر حسب λ negative-definite

باشد. و اگر مثبت باشد نقطه P مینیمم است و بر حسب λ باید positive-definite

باشد. شرایط فوق شرایط کافی هستند. اگر تفاضل فوق گاهی مثبت و گاهی

منفی باشد نقطه P نه ماکزیمم است و نه مینیمم. در این حالت فرم درجه دوم بر

حسب λ indefinite است. اگر فرم مربوطه λ semidefinite شد باید

در بسط تیلور مشتقات بالاتر از درجه ۲ را در نظر گرفت و ما در اینجا بررسی نمی‌کنیم.

مثال: تعیین کنید که آیا تابع زیر دارای ماکزیمم یا مینیمم است یا خیر

$$f(x_1, x_2, x_3) = 35 - 6x_1 + 2x_3 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -6 + 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + 2x_2 + 6x_3 = 0$$

از حل دستگاه فوق داریم

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

$$P(8, 5, -2)$$

ماتریس مربوط به فرم درجه دوم λ بصورت زیر است

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|_P & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|_P & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\Big|_P \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|_P & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big|_P & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\Big|_P \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\Big|_P & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\Big|_P & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\Big|_P \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0 \qquad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = 0.268 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3.734$

بنابراین ماتریس A positive-definite است و لذا نقطه P مینیمم است

چون ماتریس A حقیقی و متقارن است λ_i ها موهومی نمی‌شوند

بدست آوردن ماکزیمم یا مینیمم وقتی محدودیت‌هائی روی متغیرهای تابع وجود دارد.

extremum

تابع چند متغیره $f(x_1 \cdots x_n)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید روابط دیگری

بین x_i ها وجود داشته باشد که آنها را بصورت زیر نشان میدهیم

$\phi_1(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad \phi_2(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad \cdots \quad \phi_N(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad N < n$

می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم تابع را با وجود محدودیت‌های فوق بدست آوریم.

یک راه حل مسئله استفاده از Lagrange's multipliers است.

تابع $F(x_1 \cdots x_n)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(x_1 \cdots x_n, \lambda) = f(x_1 \cdots x_n) + \lambda_1 \Phi_1(x_1 \cdots x_n) + \cdots + \lambda_N \Phi_N(x_1 \cdots x_n)$$

λ_i ها را Lagrange's multipliers گویند. اگر مشتقات جزئی درجه اول F را مساوی صفر قرار دهیم

n معادله بدست می‌آید

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \quad (I)$$

حال اگر n معادله فوق را همزمان با N محدودیت زیر حل کنیم ماکزیمم یا مینیمم f

با وجود محدودیت‌های $\Phi_i = 0$ بدست می‌آید $\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \Phi_i = 0$

$$\Phi_1 = 0 \quad \Phi_2 = 0 \cdots \quad \Phi_N = 0$$

مثال: نقطه‌ای روی منحنی $y^2 = 4x$ بیابید که کمترین فاصله را تا نقطه

$A(1,0)$ داشته باشد $\quad A\left|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$

حل: فرض کنیم نقطه $B\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.$ چنین نقطه‌ای باشد

$$S^2 = f = (x-1)^2 + (y-0)^2$$

$$\begin{cases} f = (x-1)^2 + y^2 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

چون نقطه روی منحنی است

یک راه حل حذف x یا y است و مشتق گرفتن

$$f = (x-1)^2 + 4x$$

$$\frac{df}{dx} = 2(x-1) + 4 = 0 \qquad x = -1$$

با توجه به $y^2 = 4x$ نقطه -1 نمی‌تواند روی منحنی باشه. این بار x را حذف می‌کنیم

$$f = (x-1)^2 + 4x = (x+1)^2$$

$$f = \left(\frac{y^2}{4} + 1\right)^2$$

$$\frac{df}{dy} = 0 \qquad 2\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{y^2}{4} + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow y = 0$$

$$y^2 = 4x \Rightarrow x = 0 \qquad B(0,0)$$

حال مسئله را از طریق *Lagrange's multipliers* حل می‌کنیم

$$F = f + \lambda \Phi \qquad \Phi = y^2 - 4x = 0$$

$$F = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(y^2 - 4x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2(x-1) - 4\lambda = 0 & 1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ یا } \lambda = -1 & (2) \\ \Phi = y^2 - 4x = 0 & 3 \end{cases}$$

از معادله (2) داریم $y=0$ یا $\lambda=-1$. چون $\lambda=-1$ میدهد $x=-1$ بنابراین جواب نیست و لذا $y=0$ است. و از (3) داریم $x=0$ و بنابراین $B(0,0,0)$ است. ملاحظه میشود در روش حاضر شکلی که در روش اول وجود داشت وجود ندارد.

مثال: مطلوبست حجم بزرگترین مکعب مستطیل که در بیضوی زیر محاط شود و یالهای آن موازی محورهای مختصات باشد.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$V=(2x)(2y)(2z)=8xyz$$

$$\Phi=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

$$F=V+\lambda\Phi=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$\begin{array}{l} x \\ \\ y \\ \\ z \end{array}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}=8yz+\lambda\dfrac{2x}{a^2}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}=8xz+\lambda\dfrac{2y}{b^2}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z}=8xy+\lambda\dfrac{2z}{c^2}=0 \end{array}\right.$$

اگر معادلات را به ترتیب در x و y و z ضرب کنیم داریم

$$V=-2\lambda\frac{x^2}{a^2}\qquad V=-2\lambda\frac{y^2}{b^2}\qquad V=-2\lambda\frac{z^2}{c^2}$$

یا داریم

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

اگر از سه رابطه فوق در Φ استفاده کنیم داریم

$$3\frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

و به همین ترتیب داریم

$$y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad , \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{V_{max} = 8xyz = \frac{8\sqrt{3}}{9}abc}$$

تعیین نوع پاسخ وقتی محدودیت بصورت مساوی است

تابع $f(x)$ همراه با محدودیت های زیر را درنظر بگیرید:

$$\phi_1(x) = 0$$
$$\vdots$$
$$\phi_m(x) = 0$$

$F(x, \lambda)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T \phi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(x)$$

که در آن

$$\lambda^T = (\lambda_1 \cdots \lambda_m) \quad \phi^T = (\phi_1 \cdots \phi_m)$$

شرط لازم اکسترمم آن است که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 & i = 1 \cdots n \\ \phi_i = 0 & i = 1, m \end{cases}$$

اگر جواب بصورت زیر باشد

$$X_0^T = (x_{10}, \cdots, x_{n0})$$
$$\lambda_0^T = (\lambda_{10}, \cdots, \lambda_{m0})$$

برای تعیین نوع جواب ماتریس زیر را تشکیل می دهیم

H^B = bordered Hessian matrix $(n+m)(n+m)$

$$H^B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & P \\ \hline P^T & Q \end{array}\right]$$

ماتریس P یک ماتریس $m \times n$ است بصورت زیر

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ماتریس Φ یک ماتریس $n \times n$ است دارای درایه‌هایی بصورت زیر است

$$\phi_{ij} = \frac{\partial^2 F(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j}$$

ماکزیمم

شرط کافی برای آنکه x_0 ماکزیمم باشد آن است که minor های اصلی ماتریس $H^B(x_0, \lambda_0)$ که از درجه $(2m+1)$ شروع می‌شوند تا آخر که تعدادشان $n-m$ است علامتشان هر بار تغییر کند و علامت اولین آنها $(-1)^{m+1}$ باشد

مینیمم - شرط کافی برای آنکه x_0 مینیمم باشد آنست که minor های اصلی ماتریس $H^B(x_0, \lambda_0)$ که از درجه $(2m+1)$ شروع می‌شوند تعدادشان $n-m$ است علامتشان $(-1)^m$ باشد

مثال:

$$\text{minimize } f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

subject to

$$\phi_1(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

$$\phi_2(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

146"

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1 (x_1 + x_2 + 3x_2 - 2) + \lambda_2 (5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

جواب دستگاه فوق برابر است با

$$X_0^T = [0.81 , 0.35 , 0.28]$$

$$\lambda_0^T = [-0.0867 , -0.3067]$$

ماتریس H^B در این نقطه:

$$H^B = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$n = 3 \quad m = 2 \quad n - m = 1$

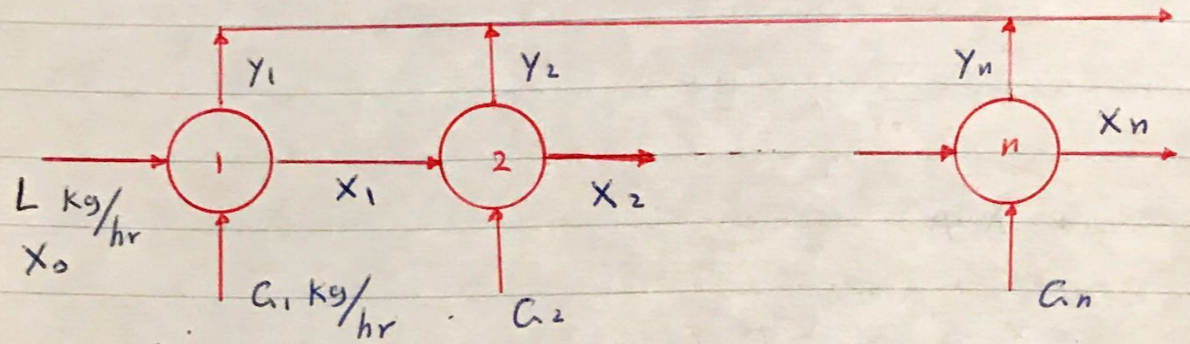
بنابراین minor با درجه $2m+1=5$ که همان دترمینان است باید چک شود

$|H^B| = 460 > 0 \qquad (-1)^2 = +1 > 0$

بنابر این نقطه مینیمم است.

جلسه چهلم

مثال : مطلوبست مقدار حلال در هر مرحله در یک استخراج n مرحله‌ای بصورت جریانهای متقاطع برای آنکه میزان استخراج حداکثر شود.



حلال خالص

$L =$ مقدار حلال در خوراک (ثابت)

$X_i =$ درصد وزنی جزء مورد استخراج در فاز باقیمانده

$Y_i =$ درصد وزنی جزء مورد استخراج در فاز استخراج شده

$Y_i = m X_i$

قبلاً نشان دادیم که بیان ریاضی مسئله بصورت زیر است

Minimize

$$X_n = X_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{L}{L + m G_i} \right)$$

subject to the constraint

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

که در آن G کل حلال ورودی در ساعت است

موازنه روی جزء مورد استخراج در مرحله اول

$$L X_0 = L X_1 + C_1 y_1 = L X_1 + C_1 m X_1$$

$$\boxed{X_1 = \left(\frac{L}{L + m C_1}\right) X_0}$$

به همین ترتیب میتوان برای مراحل بعدی عمل کرد

2) $$X_2 = \frac{L}{L + m C_2} X_1 = \left(\frac{L}{L + m C_2}\right)\left(\frac{L}{L + m C_1}\right) X_0$$

n) $$X_n = \left(\frac{L}{L + m C_n}\right) \cdots\cdots \left(\frac{L}{L + m C_2}\right)\left(\frac{L}{L + m C_1}\right) X_0$$

$$\boxed{X_n = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{L}{L + m C_i}\right) X_0}$$

مقدار کل حلال در هر مرحله را با C_i نشان میدهیم بیان ریاضی

مسئله بصورت زیر خواهد بود

Minimize

$$X_n = X_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{L}{L + m C_i}\right)$$

subject to the constraint

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

کمیات زیر را تعریف می‌کنیم

$$g = \frac{mC}{L} \qquad g_i = \frac{mC_i}{L} \qquad x_i = \frac{X_i}{X_0}$$

لذا داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n(g_1 \cdots g_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+g_i} \\ \\ \Phi(g_1 \cdots g_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i - g = 0 \end{array} \right.$$

$$F = x_n + \lambda \Phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial g_k} = \frac{\partial x_n}{\partial g_k} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial g_k} = 0 \qquad k = 1, 2 \cdots n \\ \\ \Phi = \sum_{i=1}^{n} g_i - g = 0 \end{array} \right.$$

$$x_n = \frac{1}{(1+g_1)(1+g_2) \cdots (1+g_n)}$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial g_k} = - \frac{1}{(1+g_k)^2} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{1+g_i} = - \frac{1}{1+g_k} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+g_i}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g_k} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} - \frac{1}{1+g_k} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+g_i} + \lambda = 0 \qquad k = 1, \cdots n & (1) \\ \\ \Phi = \sum_{i=1}^{n} g_i - g = 0 & (2) \end{array} \right.$$

معادله (1) را در $1+g_k$ ضرب می‌کنیم

$$-\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+g_i} + \lambda (1+g_k) = 0$$

$$-\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+g_i} = P$$

$$P + \lambda (1+g_k) = 0 \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

اگر رابطه را برای هر مقدار k بنویسیم داریم

$$\begin{cases} P + \lambda (1+g_1) = 0 \\ P + \lambda (1+g_2) = 0 \\ \vdots \\ P + \lambda (1+g_n) = 0 \end{cases}$$

از این روابط فوق داریم

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_n$$

یا

$$\frac{mG_1}{L} = \frac{mG_2}{L} = \ldots = \frac{mG_n}{L}$$

بنابراین

$$G_1 = G_2 = \ldots = G_n$$

یعنی وقتی تعداد هلال در تمام مراحل یکی باشد حداکثر استخراج را داریم

(تعداد هلال برابر است با $G_i = \frac{G}{N}$ در هر مرحله)