بسمه تعالی

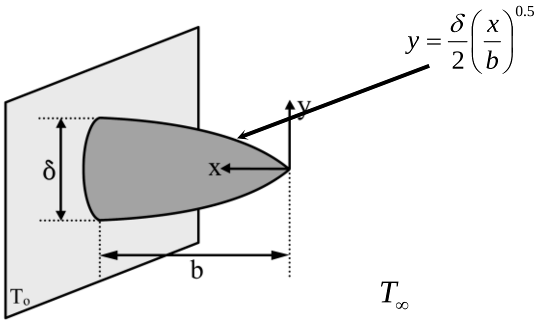
ریاضیات تحلیلی پیشرفته

تکلیف سری سوم

دکتر محمد شاهرخی

دانشکده مهندسی شیمی

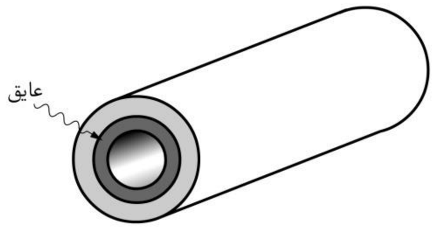
3-1- یک پره‌ی حرارتی مطابق شکل زیر بر پایه‌ای به دمای T_o نصب شده است. دمای محیط T_∞ و ضریب انتقال حرارت بین سطح پره و محیط (h) می‌باشد. مقدار حرارت انتقال یافته را محاسبه کنید.



(شکل 3-1)

3-2- یک لوله به شعاع داخلی λR و شعاع خارجی R در نظر بگیرید. سطح داخلی لوله عایق بوده و دمای سطح خارجی آن T_o است. ضریب هدایتی لوله (k) ثابت فرض می‌شود. نرخ تولید حرارت در واحد حجم لوله برابر است با $\dot{q} = S_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]$ که در این رابطه α و S_o مقادیر ثابتی می‌باشند. مطلوب است توزیع درجه‌ی حرارت در داخل لوله به صورت $\Theta = f\left(\zeta\right)$. برای حل مسئله از تغییر متغیرهای زیر استفاده کنید.

$$\Theta = \frac{T - T_o}{\left(S_o R^2/k\right)} \qquad \zeta = \frac{r}{R} \qquad \beta^2 = \frac{\alpha S_o R^2}{k}$$



(شکل 3-2)

3-3- می‌دانیم توابع گاما و بتا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt \qquad n>0$$

$$\beta\left(m,n\right) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt$$

الف) با استفاده از نتیجه $\int_o^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ نشان دهید: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

بسمه تعالی

ریاضیات تحلیلی پیشرفته

تکلیف سری سوم

دکتر محمد شاهرخی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی شیمی

ب) با توجه به تعریف تابع بتا نشان دهید:

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

ج) با استفاده از نتیجه‌ی قسمت (ب) و اینکه $\int_o^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, $0<p<1$ نشان دهید:

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin(n\pi)} \quad 0<n<1$$