ب - حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با استفاده از اپراتور D

دستگاه مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} (a_{11}D^2 + b_{11}D + c_{11})x + (a_{12}D^2 + b_{12}D + c_{12})y = \Phi_1(t) \\ (a_{21}D^2 + b_{21}D + c_{21})x + (a_{22}D^2 + b_{22}D + c_{22})y = \Phi_2(t) \end{cases}$$

$$D = \frac{d}{dt}$$

یا بصورت ساده‌تر

$$\begin{cases} P_{11}(D)x + P_{12}(D)y = \Phi_1(t) \\ P_{21}(D)x + P_{22}(D)y = \Phi_2(t) \end{cases}$$

اگر x را حذف کنیم داریم

$$\left[P_{11}(D)P_{22}(D) - P_{12}(D)P_{21}(D)\right]y = P_{11}(D)\Phi_2(t) - P_{21}(D)\Phi_1(t)$$

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & \Phi_1(t) \\ P_{21}(D) & \Phi_2(t) \end{vmatrix}$$

به همین ترتیب

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \Phi_1(t) & P_{12}(D) \\ \Phi_2(t) & P_{22}(D) \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر دترمینال اپراتورهای یک سیستم که شامل n معادله دیفرانسیل است صفر نباشد تعداد ثوابتی که در پاسخ ظاهر میشود برابر است با درجه D که از دترمینال بدست می‌آید

مثال. مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 3x = e^{-t} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 3y = \sin 2t \end{cases}$$

حل

$$\begin{cases} (D^2+3)x + Dy = e^{-t} \\ -4Dx + (D^2+3)y = \sin 2t \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & D \\ \sin 2t & D^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^2+3 & D \\ -4D & D^2+3 \end{vmatrix}} = \frac{(D^2+3)(e^{-t}) - D(\sin 2t)}{D^4+10D^2+9}$$

$$x = \frac{4e^{-t} - 2\cos 2t}{(D^2+1)(D^2+9)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D^2+3 & e^{-t} \\ -4D & \sin 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^2+3 & D \\ -4D & D^2+3 \end{vmatrix}} = \frac{(D^2+3)(\sin 2t) - (-4D)(e^{-t})}{D^4+10D^2+9}$$

$$y = \frac{-\sin 2t - 4e^{-t}}{(D^2+1)(D^2+9)}$$

$$\begin{cases} (D^2+1)(D^2+9)x = 4e^{-t} - 2\cos 2t \\ (D^2+1)(D^2+9)y = -\sin 2t - 4e^{-t} \end{cases}$$

با روش هایی که قبلاً گفته شد داریم

$$\begin{cases} x = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3\cos 3t + c_4\sin 3t + \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{2}{15}\sin 2t \\ y = c_5\cos t + c_6\sin t + c_7\cos 3t + c_8\sin 3t - \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{15}\sin 2t \end{cases}$$

تعداد ثوابت بایستی برابر باشد با درجه ترمینال زیر

$$\begin{vmatrix} D^2+3 & D \\ -4D & D^2+3 \end{vmatrix} = D^4 + 10D^2 + 9$$

چون بزرگترین توان D ،4 است. بنابراین بین 8 ثابت فوق رابطه وجود دارد. برای تعیین رابطه بین آنها پاسخ در معادله دیفرانسیل قرار میدهیم خواهیم داشت

$c_5 = 2c_2$

$c_6 = -2c_1$

$c_7 = -2c_4$

$c_8 = 2c_3$

و بنابراین پاسخ بصورت زیر است

$$\begin{cases} x = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3\cos 3t + c_4\sin 3t + \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{2}{15}\sin 2t \\ y = 2c_2\cos t - 2c_1\sin t - 2c_4\cos 3t + 2c_3\sin 3t - \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{15}\sin 2t \end{cases}$$

ج- استفاده از تبدیل لاپلاس: بنا به تعریف تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که آنرا با $F(s)$ نشان می‌دهند برابر است با

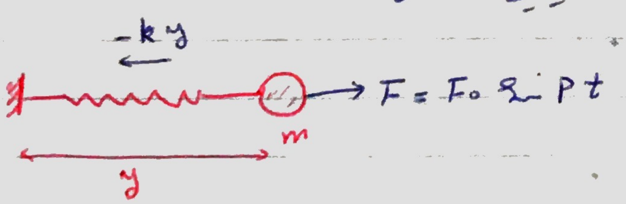
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

تبدیل لاپلاس توابع مختلف در جداول تبدیل لاپلاس داده شده است:
می‌توان نشان داد که تبدیل لاپلاس مشتق رتبه n ام یک تابع از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

که در آن $f^{(n)}(0)$ مشتق درجه n ام تابع f است. از تبدیل لاپلاس می‌توان برای حل معادله دیفرانسیل درجه n ام خطی و نیز دستگاه معادلات استفاده کرد

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید. در لحظه $t=0$ نیروی F که بصورت سینوسی تغییر می‌کند به وزنه اعمال می‌شود مطلوبست معادله تغییرات y با زمان



حل: $my'' = -ky + F_0 \sin pt \qquad y'(0) = y(0) = 0$

$$y'' + \frac{k}{m} y = \frac{F_0}{m} \sin pt$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad \frac{F_0}{m} = K$$

$$y'' + \omega^2 y = K \sin pt$$

$$s^2 Y(s) + \omega^2 Y(s) = K \frac{p}{s^2 + p^2}$$

$$Y(s) = \frac{Kp}{(s^2+\omega^2)(s^2+p^2)} = \frac{As+B}{s^2+\omega^2} + \frac{Cs+D}{s^2+p^2}$$

$$A = C = 0 \qquad B = -D = \frac{Kp}{p^2-\omega^2}$$

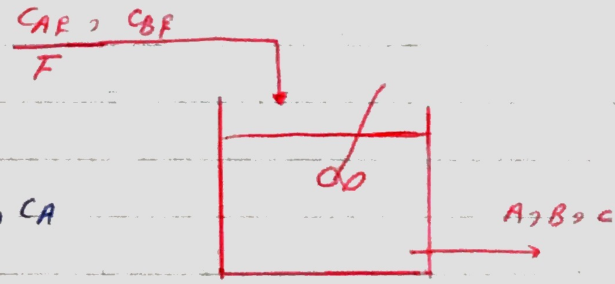
$$Y(s) = \frac{Kp}{p^2-\omega^2}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2} - \frac{1}{s^2+p^2}\right]$$

$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1} Y(s) = \frac{K}{p^2-\omega^2}\left[\frac{p}{\omega}\sin \omega t - \sin pt\right]}$$

مثال: واکنش $C \xrightarrow{k_3}$ $A \xrightarrow{k_1} B$ را که در یک راکتور CSTR که بصورت
ایزوترم کار می‌کند در نظر بگیرید.

$$r_1 = k_1 C_A$$
$$r_2 = k_3 C_B$$

مطلوبست نحوه تغییرات غلظت C_A و C_B در اثر تغییرات غلظت A و B ورودی که



$$\begin{cases} V\dfrac{dC_A}{dt'} = F(C_{Af}-C_A) - Vk_1C_A \\ V\dfrac{dC_B}{dt'} = F(C_{Bf}-C_B) + V(k_1C_A - k_3C_B) \end{cases}$$

$C_A(0) = C_{A0}$

$C_B(0) = C_{B0}$

برای سهولت کمیات زیر را تعریف می‌کنیم

$$Da_1 = \frac{k_1 V}{F} \qquad Da_3 = \frac{k_3 V}{F} \qquad t = \frac{t'F}{V}$$

$$x_1 = \frac{C_A}{C_{Aref}} \qquad x_2 = \frac{C_B}{C_{Aref}} \qquad U_1 = \frac{C_{Af}}{C_{Aref}} \qquad U_2 = \frac{C_{Bf}}{C_{Aref}}$$

که در آن C_{Aref} یک غلظت دلخواه A به عنوان غلظت مرجع است

بر حسب متغیرهای فوق داریم

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -(1+Da_1)x_1 + U_1 & x_1(0) = x_{1s} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = Da_1x_1 - (1+Da_3)x_2 + U_2 & x_2(0) = x_{2s} \end{cases}$$

در حالت پایدار داریم

$$0 = -(1+Da_1)x_{1s} + U_{1s}$$

$$0 = Da_1x_{1s} - (1+Da_3)x_2 + U_{2s}$$

برحسب متغیرهای انحرافی داریم

$$\bar{x}_1 = x_1 - x_{1s} \qquad \bar{U}_1 = U_1 - U_{1s}$$

$$\bar{x}_2 = x_2 - x_{2s} \qquad \bar{U}_2 = U_2 - U_{2s}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}_1}{dt} = -(1+Da_1)\bar{x}_1 + \bar{U}_1 \\[2ex] \dfrac{d\bar{x}_2}{dt} = Da_1 \bar{x}_1 - (1+Da_3)\bar{x}_2 + \bar{U}_2 \end{cases}$$

حال از معادلات تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{cases} s\bar{X}_1(s) = -(1+Da_1)\bar{X}_1(s) + \bar{U}_1(s) \\[2ex] s\bar{X}_2(s) = Da_1\bar{X}_1(s) - (1+Da_3)\bar{X}_2(s) + \bar{U}_2(s) \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق داریم

$$\begin{cases} \bar{X}_1(s) = \dfrac{\bar{U}_1(s)}{s+(1+Da_1)} \\[3ex] \bar{X}_2(s) = \dfrac{Da_1}{(s+1+Da_3)(s+1+Da_1)}\bar{U}_1(s) + \dfrac{1}{s+1+Da_3}\bar{U}_2(s) \end{cases}$$

با داشتن $\bar{U}_1(t)$ و $\bar{U}_2(t)$ میزان تغییرات $\bar{x}_1(t)$ و $\bar{x}_2(t)$ را با استفاده

از معادلات فوق بدست آورد.

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل رسته یک خطی به کمک تبدیل لاپلاس :

خیلی از سیستم های فیزیکی را میتوان بصورت زیر نمایش داد.

$$\dot{x} = Ax + BU$$

اگر از معادله فوق تبدیل لاپلاس بگیریم داریم

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\boxed{X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B\,U(s)}$$

مثال: مسئله قبل را با استفاده از روش فوق حل کنید

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+Da_1) & 0 \\ Da_1 & -(1+Da_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}(0) = 0$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(1+Da_1) & 0 \\ +Da_1 & -(1+Da_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s+1+Da_1 & 0 \\ -Da_1 & s+1+Da_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{(s+1+Da_1)(s+1+Da_3)} \begin{bmatrix} s+1+Da_3 & 0 \\ Da_1 & s+1+Da_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}(s) = \frac{1}{(s+1+Da_1)(s+1+Da_3)} \begin{bmatrix} s+1+Da_3 & 0 \\ Da_1 & s+1+Da_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1(s) \\ \bar{U}_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1(s) \\ \bar{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{U}_1(s)}{s+1+Da_1} \\ \dfrac{Da_1}{(s+1+Da_3)(s+1+Da_1)} \bar{U}_1(s) + \dfrac{1}{s+1+Da_3} \bar{U}_2(s) \end{bmatrix}$$

که حل قطعه پیشرو همان پاسخ قبلی است .

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی رسته اول با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

ابتدا معادله همگن زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{X} = AX$$

سه حالت ممکن است پیش آید

1- تمام مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی و متفاوت باشند

2- بعضی از مقادیر ویژه تکراری باشند

3- بعضی از مقادیر ویژه تکراری باشند

حالت اول: اگر تمام مقادیر ویژه حقیقی و متفاوت باشند و تعداد آنها n باشد

n بردار ویژه مستقل خواهیم داشت. اگر $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ مقادیر ویژه باشند و

$\xi^{(1)} \ldots \xi^{(n)}$ بردارهای ویژه آنها جوابهای معادله بفرم $\xi^{(i)} e^{\lambda_i t}$ بوده و جواب

کلی ترکیب خطی این جوابها است یعنی

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \xi^{(i)} e^{\lambda_i t}$$

ثوابت c_i را با دانستن شرایط اولیه میتوان بدست آورد.

مثال: مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} x \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = 4$$

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \xi^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 6 \qquad c_2 = 3 \qquad c_3 = -1$

$$x(t) = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} e^{4t}$$

حالت دوم: اگر بعضی از مقادیر ویژه موهومی باشند و ماتریس A حقیقی باشد

مقادیر ویژه موهومی بصورت مزدوج خواهند بود. یعنی اگر λ_1 مقدار ویژه باشد

$\bar{\lambda}_1$ هم مقدار ویژه است

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$

اگر بردار ویژه مربوط به λ_1 را با ξ_1 نشان دهیم بردار ویژه مربوط به $\bar{\lambda}_1$ مزدوج

$\xi^{(1)}$ است یعنی $\bar{\xi}_1$.

$\xi^{(1)} = a + ib \qquad a , b$ بردارند

$\bar{\xi}^{(1)} = a - ib$

جوابهای مربوط به این مقادیر ویژه عبارتند از:

$$x_1(t) = \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} , \quad x_2(t) = \bar{\xi}^{(1)}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$$

از طرفی داریم

$$x_1(t) = (a+ib)e^{(\alpha+i\beta)t} = (a+ib)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$x_1(t) = e^{\alpha t}(a\cos\beta t - b\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(a\sin\beta t + b\cos\beta t)$$

$$x_1(t) = u(t) + i\,v(t)$$

که در آن

$$u(t) = e^{\alpha t}(a\cos\beta t - b\sin\beta t)$$
$$v(t) = e^{\alpha t}(a\sin\beta t + b\cos\beta t)$$

چون $x_1(t)$ جواب دستگاه است داریم

$$\dot{u}(t) + i\,\dot{v}(t) = A[u(t) + i\,v(t)]$$

چون A حقیقی است

$$\dot{u}(t) = A\,u(t)$$
$$\dot{v}(t) = A\,v(t)$$

یعنی $u(t)$ و $v(t)$ جوابهای معادله $\dot{x} = Ax$ هستند. در ضمن میتوان نشان داد که این دو مستقل هستند بنابراین ترکیب خطی آنها جواب است

بنابراین اگر فقط λ_1 و λ_2 مختلط باشند و بقیه λ_i ها حقیقی و متمایز

جواب کلی معادله بصورت زیر است

$$x(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t) + \sum_{i=3}^{n} c_i \xi^{(i)} e^{\lambda_i t}$$

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\lambda_1 = -1+i \qquad \bar{\lambda}_1 = -1-i \qquad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \quad \bar{\xi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t}$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} e^{-t}(\cos t + i \sin t)$$

$$x_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} + i e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{bmatrix}$$

حالت سوم: بعضی از مقادیر ویژه تکراری باشند. در این حالت ممکن است

نتوان n بردار ویژه مستقل بدست آورد که در آن صورت حل مسئله

حالت ژردن است

مثال: مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$x_1 = k_1$

$x_2 = k_2$

$x_3 = -k_1 - k_2$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -k_1-k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = -1 \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \xi^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

قضیه: برای سیستم معادلات $\dot{x} = Ax$ اگر λ_i ها مقادیر ویژه باشند و λ_1، λ_2 $\ldots$ λ_m به ترتیب m_1، m_2 $\ldots$ m_k بار تکرار شده باشند داریم

$$x = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m_j} D_{ij} t^{i-1} e^{\lambda_j t}$$

تعداد λ ها $= k$

که بردارهای ثابت D_{ij} را میتوان با جایگزین کردن پاسخ در معادله دیفرانسیل بدست آورد

مثال: مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad -(\lambda+1)^3 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

در این حالت فقط یک بردار ویژه که بصورت $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ است بدست می آید

$$x = D_1 e^{-t} + D_2 t e^{-t} + D_3 t^2 e^{-t}$$

پاسخ را در معادله جایگزین میکنیم

$$AX=\lambda X \qquad (A-I\lambda)X=0$$

$$(A-I\lambda)=(A+I) \qquad \lambda=1$$

$$e^{-t}(-D_1+D_2)+te^{-t}(-D_2+2D_3)+t^2e^{-t}(-D_3)=$$

$$e^{-t}AD_1+te^{-t}AD_2+t^2e^{-t}AD_3$$

$$\begin{cases} AD_1=-D_1+D_2 & (1) \\ AD_2=-D_2+2D_3 & (2) \\ AD_3=-D_3 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} (A+I)D_1=D_2 \\ (A+I)D_2=2D_3 \\ (A+I)D_3=0 \end{cases}$$

از سطر (3) داریم $(A-I\lambda)D_3=0$

$\lambda=-1$

$$D_3=\begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

از سطر (2) داریم

$$(A-I\lambda)D_2=2D_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}D_2=\begin{bmatrix} 2a \\ -2a \\ 2a \end{bmatrix} \qquad D_2=\begin{bmatrix} b \\ 2a-b \\ -4a+b \end{bmatrix}$$

از سطر (1) داریم

$$(A-I\lambda)D_1=D_2$$

$$D_1=\begin{bmatrix} c \\ b-c \\ 2a-2b+c \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} c \\ b-c \\ 2a-2b+c \end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix} b \\ 2a-b \\ -4a+b \end{bmatrix}te^{-t}+\begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix}t^2e^{-t}$$