با داشتن شرایط اولیه $x(0)$ میتوان ثوابت a و b و c را بدست آورد

ماتریس اساسی Fundamental Matrice

معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = A x$$

اگر جوابهای مستقل این معادله $x^{(1)} \dots x^{(n)}$ باشند ماتریسی که ستونهای آن $x^{(i)}$ هستند ماتریس اساسی نامیده میشود.

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix} = [x^{(1)} \dots x^{(n)}]$$

مثال: مطلوبست ماتریس اساسی برای سیستم زیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad -2\xi_1 + \xi_2 = 0 \qquad \xi_2 = 2\xi_1 \qquad \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \xi_2 = -\xi_1 \qquad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)}(t) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} e^{3t} \qquad x^{(2)}(t) = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\Psi(t) \quad \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

حل دستگاه غیرهمگن : دستگاه غیرهمگن زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + g(t)$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و $g(t)$ یک بردار است

اگر ماتریس A دارای n بردار ویژه مستقل باشد ماتریس انتقال T که ستونهایش

بردارهای ویژه A است را در نظر گرفته و انتقال زیر را انجام میدهیم

$$x = Ty$$

از جایگذاری در معادله داریم

$$T\dot{y} = ATy + g(t)$$

چون بردارهای ویژه مستقل اند T^{-1} وجود دارد و داریم

$$\dot{y} = T^{-1}ATy + T^{-1}g(t)$$

ماتریس $T^{-1}AT$ یک ماتریس قطری است که عناصر

قطر آن λ_i ها هستند

$$T^{-1}AT = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$h(t) = T^{-1} g(t)$$

$$\dot{y} = D y + h(t)$$

معادلات دستگاه فوق بصورت زیرند

$$y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) + h_i(t)$$

این معادلات ، معادلات خطی مرتبه اولند داریم

$$\boxed{y_i(t) = e^{\lambda_i t} \int^t e^{-\lambda_i u} h_i(u)\, du + c_i e^{\lambda_i t}} \qquad i = 1, \dots, n$$

مثال: مطلوبست حل دستگاه زیر

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{bmatrix} \qquad t > 0$$

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -5$$

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} g(t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5t^{-1} + 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} y + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5t^{-1} + 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{t} + 8\right) \\ \dot{y}_2 = -5y_2 + \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{5}\left(5\ln t + 8t + c_1\right) \\ y_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5} + c_2 e^{-5t}\right) \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5\ln t + 8t + c_1 \\ \frac{4}{5} + c_2 e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$x = Ty = \begin{bmatrix} \ln t + \frac{8}{5}t - \frac{8}{25} + \frac{1}{5}c_1 - \frac{2}{5}c_2 e^{-5t} \\ 2\ln t + \frac{16}{5}t - \frac{4}{25} + \frac{2c_1}{5} + c_2/5\, e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ln t + \frac{8}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}t + \frac{4}{25}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \hat{c}_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \hat{c}_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-5t}$$

در روش فوق احتیاج به ماتریس T بود که زمانی وجود دارد که n بردار ویژه مستقل داشته باشیم و میدانیم اگر بعضی از λ_i ها تکراری باشند امکان دارد نتوان n بردار مستقل ویژه داشت. در این حالت میتوان از روش زیر استفاده کرد

ماتریس اساسی مربوط به سیستم همگن یعنی $\dot{x}_c = A x_c$ را $\Psi(t)$ در نظر میگیریم.

اگر $x^{(1)} \dots x^{(n)}$ جوابهای مستقل معادله همگن باشند جواب کلی معادله همگن برابر است با

$$x_c = c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

اگر $c^T = [c_1 \cdots c_n]$

باشد داریم

$$x_c = \Psi(t)\, c$$

در اینجا با استفاده از روش تغییر پارامتر جواب غیرهمگن را بدست می‌آوریم

جواب را بصورت زیر حدس می‌زنیم

$$x(t) = \Psi(t)\, u(t) \qquad (*)$$

$$\dot{x} = \dot{\Psi} u + \Psi \dot{u}$$

$$\dot{x} = A x + g$$

از تساوی دو رابطه داریم

$$\dot{\Psi} u + \Psi \dot{u} = A \Psi u + g$$

چون $\Psi(t)$ جواب همگن است

$$\dot{\Psi} = A\Psi \qquad \dot{\Psi} u + \Psi \dot{u} = \dot{\Psi} u + g$$

بنابراین داریم

$$\Psi \dot{u} = g$$

$$\dot{u}(t) = \Psi^{-1}(t)\, g(t)$$

$$u(t) = \int^t \Psi^{-1}(t)\, g(t)\, dt + c$$

c یک بردار ثابت اختیاری است. اگر مقدار $u(t)$ در معادله $(*)$ قرار دهیم داریم

$$\boxed{x(t) = \Psi(t)\, c + \Psi(t) \int^t \Psi^{-1}(t)\, g(t)\, dt}$$

با داشتن $x(0)$ میتوان c را بدست آورد.

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{bmatrix} \qquad t > 0$$

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \lambda^2 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$x = D_1 + D_2 t$$

$$\dot{x} = D_2 = A D_1 + A D_2 t$$

$$\begin{cases} A D_1 = D_2 \\ A D_2 = 0 \end{cases} \qquad D_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad D_1 = \begin{bmatrix} b \\ 2b - \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_c = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b \\ 2b - \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_c = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$x_c = b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} t \\ 2t - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\psi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 4t & 2t \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\psi^{-1}(t)\, g(t) = \begin{bmatrix} t^{-3} - 4t^{-2} - 2t^{-1} \\ 4t^{-3} + 2t^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\int \psi^{-1}(t)g(t)\,dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^{-2} + 4t^{-1} - 2\ln t \\ -2t^{-2} - 2t^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\psi(t)\int \psi^{-1}(t)g(t)\,dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^{-2} + 2t^{-1} - 2\ln t - 2 \\ 5t^{-1} - 4\ln t - 4 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \psi(t)c + \psi(t)\int \psi^{-1}(t)g(t)\,dt$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^{-2} + 2t^{-1} - 2\ln t - 2 \\ 5t^{-1} - 4\ln t - 4 \end{bmatrix}$$

جلسه شانزدهم حل معادله دیفرانسیل رتبه ۲ خطی با ضرائب متغیر به کمک سری

تا حال حالت های خاصی از معادله درجه ۲ خطی با ضرائب متغیر را بررسی کردیم. حالت هائی که x یا y وجود نداشته باشد یا معادله همگن باشد. در این قسمت سعی می‌شود که معادله دیفرانسیل خطی رتبه ۲ با ضرائب متغیر را بصورت کلی توسط حل به کمک سری حل نمود. برای یک معادله غیرهمگن گفته شد که جواب معادله برابر است با حاصل جمع جواب همگن و جواب خاص. نحوه بدست آوردن جواب خاص را قبلاً دیده‌ایم و در این مبحث نحوه بدست آوردن جواب همگن در حالتی که ضرائب متغیر هستند را بررسی می‌کنیم. قبل وارد شدن در بحث مقدماتی ذکر می‌گردد

سری توانی - Power Series - یک سری توانی را بصورت زیر نشان می‌دهند

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

برای مقادیری از x که حد زیر وجود دارد سری را همگرا گویند

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n ,$$

شعاع همگرائی - اگر حد نسبت قدرمطلق جمله $n+1$ ام سری به جمله n ام وقتی $n \to \infty$ میرود

ρ باشد برای $\rho<1$ سری همگرا و برای $\rho>1$ سری واگرا است برای $\rho=1$ این تست عمل نمی کند

در مورد سری توانی داریم

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| = L|x-x_0|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$|x-x_0| < \frac{1}{L}$$ همگرا شعاع همگرائی $R = \frac{1}{L}$

$$|x-x_0| > \frac{1}{L}$$ واگرا

اگر $L=0$ باشد سری به ازای همه x ها همگراست، اگر $L=\infty$ باشد

سری فقط $x=x_0$ همگراست.

مثال: سری زیر را در نظر بگیرید

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

بنابراین سری برای همه مقادیر x همگراست. ولی سری

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

سری برای $|x|<1$ همگراست.

تابع آنالتیک: تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ آنالتیک گویند اگر تابع حول نقطه $x=a$ بسط تیلور داشته باشد. تابع و مشتقات آن در $x=a$ وجود داشته باشند.

نقاط معمولی و منفرد: معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ زیر را در نظر بگیرید

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

1- اگر توابع $P(x)$ و $Q(x)$ در نقطه $x=a$ آنالتیک باشند نقطه $x=a$ را نقطه معمولی ordinary point گویند

2- نقطه ای که نقطه معمولی نیست یعنی توابع $P(x)$ یا $Q(x)$ آنالتیک نیستند را نقطه منفرد singular گویند.

3- اگر برای یک نقطه منفرد $x=a$ توابع $(x-a)^2 Q(x)$ و $(x-a)P(x)$ آنالتیک باشند آن نقطه را منتظم regular گویند و در غیر این صورت غیرمنتظم irregular

خلاصه

مثال در معادله دیفرانسیل زیر

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x(x-1)^3}\,y = 0$$

نقاط $x=0$ و $x=1$ نقاط تکین هستند چون برای $x=0$ هر دو تابع $P(x)$ و $Q(x)$

بی‌نهایت می‌شوند و در $x=1$ $P(x)$ آنالیتیک است ولی $Q(x)$ نیست.

سایر نقاط، نقاط معمولی هستند. نقطه $x=0$ نقطه تکین منتظم است زیرا

$$x\,P(x) = 2$$

$$x^2 Q(x) = \frac{3x}{(x-1)^3} = -3x\,(1+3x+6x^2 - \cdots)$$

در $x=0$ آنالیتیک است، $x=1$ نقطه تکین غیر منتظم است

قضیه: اگر نقطه $x_0=0$ نقطه عادی معادله دیفرانسیل

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

باشد. هر جواب معادله در $x_0=0$ تحلیلی است و میتوان آن را بصورت زیر نوشت

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

تذکر: اگر $x_0\neq 0$ باشد تغییر متغیر $X=x-x_0$ میدهیم و پاسخ را برحسب X می‌نویسیم زیرا در این صورت $X=0$ یک نقطه عادی خواهد بود

شعاع همگرائی سری فوق برابر است با فاصله نزدیکترین نقطه تکین تا نقطه $x_0=0$.

مثال: $y''-xy'-y=0$

نقطه $x=0$ عادیست و لذا داریم

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_n\right]x^n=0$$

$$a_{n+2}=\frac{a_n}{n+2} \qquad n\geq 0$$

$n = 2k \qquad a_{2k} = \dfrac{a_0}{2^k (k!)}$

$n = 2k+1 \qquad a_{2k+1} = \dfrac{a_1 2^k (k!)}{(2k+1)!}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

چون تمام نقاط برای معادله عادی هستند شعاع همگرایی پاسخ ∞ است

حل حول نقطه منفرد منظم : اگر $x=0$ نقطه منفرد منظم باشد پاسخ را بصورت

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad a_0 \neq 0$$ در نظر می‌گیریم

چون $x=0$ نقطه منفرد منظم است $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند داریم

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

مقادیر را جایگزین در معادله و تغییراتی داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \left[(r+n)(r+n-1) + (n+r) p_0 + q_0 \right] + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[(r+k) p_{n-k} + q_{n-k} \right] \right\} x^{n+r} = 0$$

$n = 0 \qquad a_0 \left[r(r-1) + r p_0 + q_0 \right] = 0$

$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ معادله Indicial

$$\boxed{F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)P_{n-k} + q_{n-k}\right] = 0} \qquad n \geqslant 1$$

ریشه‌های معادله Indicial را r_1 و r_2 می‌نامیم.

1- اگر $r_1 \neq r_2$ باشد و $r_1 - r_2 \neq N$ و عدد صحیح نباشد $(r_1 > r_2)$ پاسخ‌ها بصورت زیر است

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)\, x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)\, x^{n+r_2}$$

شعاع همگرایی فاصله نزدیکترین نقطه تکین تا $x=0$ است

مثال:

$$4xy'' + 6y' + y = 0$$

$$y'' + \frac{3}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$$

$x=0$ نقطه تکین منظم است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad a_0 \neq 0$$

Indicial eq. $\quad 2r(2r+1)a_0 = 0$

$$r_1 = 0 \qquad r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$r_1 = 0 \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_0 \qquad y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \qquad a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \qquad y_2 = x^{-1/2} a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$

$$y_1 = a_0\left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} - \cdots\right) = a_0 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$y_2 = a_0 x^{-1/2}\left[1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots\right] = a_0 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$y = (c_1 \sin\sqrt{x} + c_2 \cos\sqrt{x})/\sqrt{x}$$

شعاع همگرایی پاسخ بی‌نهایت است چون تنها نقطه تکین $x=0$ است.

2- اگر $r_1 = r_2$ باشد یک پاسخ مشابه گذشته است

$$\boxed{y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)\, x^{n+r_1}}$$

$$\phi(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

پاسخ دوم برابر است با

$$y_2 = \left.\frac{\partial \phi(x,r)}{\partial r}\right|_{r=r_1}$$

$$\boxed{y_2 = y_1(x)\, \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)\, x^n}$$

$$a_n'(r_1) = \left.\frac{da_n}{dr}\right|_{r=r_1}$$

مثال: $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0 \qquad x_0 = 0$

$$x p(x) = \frac{3x-1}{x-1} \qquad x^2 q(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$x p(x) = (1-3x)(1 + x + x^2 + \cdots)$$

$$x^2 q(x) = -x(1 + x + x^2 + \cdots)$$

$x=0$ نقطه تکین منظم است. شعاع همگرایی پاسخ حول $x=0$ برابر است فاصله

$x=0$ تا نزدیکترین نقطه تکین که $x=1$ است پس شعاع همگرایی 1 است $R=1$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad a_0 \neq 0$$

$$\text{Indicial} \qquad r(r-1)+r=0 \qquad r_1=r_2=0$$

$$(n+r)^2 a_{n-1}-(n+r)^2 a_n=0 \qquad n \geq 1$$

$$a_n=a_{n-1} \qquad a_0=a_1=a_2 \cdots$$

$$y_1=a_0(1+x+x^2+\cdots)=\frac{a_0}{1-x}$$

$$\phi(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$a_0=a_1=\cdots=a_n \qquad \phi(x,r)=a_0\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}=a_0\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r}\ln x=a_0 \ln x\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r}$$

$$y_2=\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=0}=a_0\ln x\sum_{n=0}^{\infty} x^{n}=a_0\frac{\ln x}{1-x}$$

$$y=\frac{c_1}{1-x}+c_2\frac{\ln x}{1-x} \qquad |x|<1$$