مینیمم یا ماکزیمم یک انتگرال . در بعضی از مسائل هدف بدست آوردن تابعی است که یک انتگرال را مینیمم یا ماکزیمم کند . به عنوان مثال انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

می خواهیم تابع $y(x)$ که شرایط مرزی $y_1 = y(a)$ و $y_2 = y(b)$ را برآورده می کند و در ضمن مقدار I را حداقل یا حداکثر کند بدست آوریم

میتوان نشان داد که شرط لازم برای آنکه $y(x)$ انتگرال فوق را ماکزیمم یا مینیمم کند آن است که

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0}$$ Euler equation

معادله فوق را معادله اولر گویند . اگرچه شرط فوق شرط لازم است ولی در مسائل حساب تغییرات بیشتر اوقات تابع $y(x)$ که در شرط فوق صدق می کند انتگرال I را حداقل یا حداکثر می سازد . معادله اولر را میتوان بصورت زیر نیز نشان داد

$$\frac{d}{dx}\left[F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]-\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

اثبات :

$$F=F(x,y,y')$$

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial y'}dy'$$

$$\text{I)}\quad \frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''$$

از طرفی داریم

$$\text{II)}\quad \frac{d}{dx}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]=y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\partial F}{\partial y'}y''$$

رابطه (II) از (I) کم می کنیم

از معادله اولر ۰

$$\frac{d}{dx}\left[F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]=\frac{\partial F}{\partial x}+y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]-\frac{\partial F}{\partial x}=0}$$

اگر F مستقیماً تابع x نباشد داریم

$$F = F(y, y')$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

و از رابطه قبل نتیجه می‌گیرد

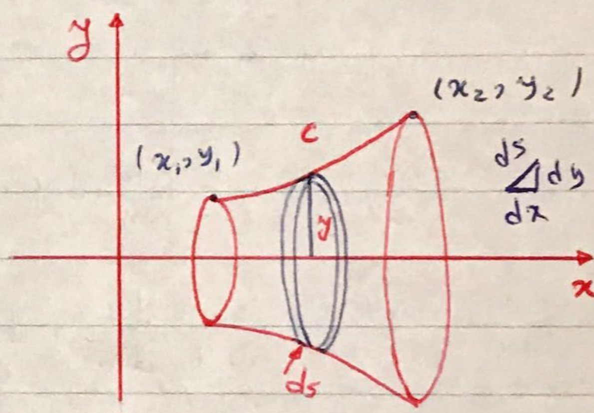
$$\frac{d}{dx}\left[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right] = 0$$

$$\boxed{F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c}$$

مثال: مطلوبست معادله منحنی‌ای که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) گذشته

و سطح حاصل از دوران آن حول محور x ها حداقل باشد.

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\, ds$$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$F = y\sqrt{1 + y'^2} = F(y, y')$$

چون F مستقل از x است داریم

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c \qquad (I)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'y}{2\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y'y}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

پس از جایگزینی در (I) داریم

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \qquad \frac{y^2}{1+y'^2} = c^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-c^2}}{c}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \frac{1}{c}\int dx$$

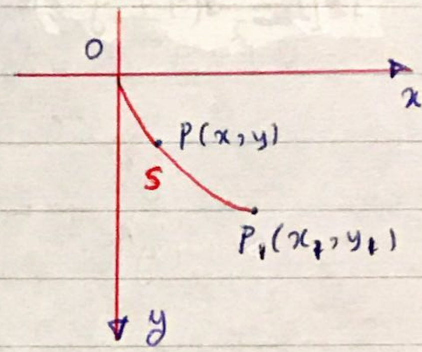
$$\boxed{y = c\cosh\left(\frac{x+k}{c}\right)}$$

ثوابت c و k را میتوان با استفاده از مختصات نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بدست آورد. منحنی فوق را catenary گویند که لاتین است و به معنی chain یا زنجیر است چون اگر یک زنجیر از دو نقطه آویخته شود شکل آن بصورت تابع cosh است.

مثال: جرم m تحت اثر جاذبه روی مسیری که مبدا مختصات را به نقطه $P_1(x_1, y_1)$

کمترین

وصل می کند می لغزد. مطلوبست شکل مسیر برای آنکه زمان سقوط حداقل شود.



حل: اگر اصل بقای انرژی را بین نقطه O و نقطه P(x,y) بنویسیم داریم

با فرض بدون اصطکاک

$$\Delta \vec{U} + \Delta KE + \Delta PE = \vec{Q} - W$$

$$\Delta KE + \Delta PE = 0 \qquad \Delta KE = -\Delta PE$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

$$\int_0^T dt = T = \int_{x=0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

طبق جمل دیلم

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = F(y, y')$$

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c$$

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - y' \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$0 + m g y_1 = \frac{1}{2} m v^2 + m g (y_1 - y) \qquad \frac{1}{2} m v^2 = m g y$$

$$\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{c} = \sqrt{a}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{y}{a-y}}\, dy \qquad 0<y<a$$

$$y = a\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{a}{2}(1-\cos\theta)$$ تغییر متغیر زیر را می‌دهیم

$$dy = a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$\sqrt{\frac{y}{a-y}} = \sqrt{\frac{a\sin^2\theta/2}{a(1-\sin^2\theta/2)}} = \frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}$$

$$\int\sqrt{\frac{y}{a-y}}\,dy = \int a\sin^2\theta/2\, d\theta = \frac{a}{2}\int(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$\int_0^x dx = \frac{a}{2}\int_0^\theta (1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$x = \frac{a}{2}(\theta-\sin\theta)$$

$$y = \frac{a}{2}(1-\cos\theta) \qquad a=2b$$

$$\begin{cases} x = b(\theta-\sin\theta) \\ y = b(1-\cos\theta) \end{cases}$$

b را می‌توان از مختصات $P_1(x_1, y_1)$ که یک نقطه از منحنی است بدست آورد.

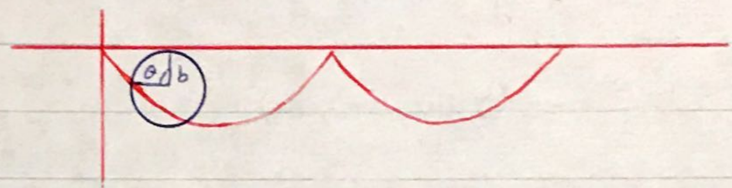
منحنی فوق یک سیکلوئید است cycloid که اگر یک نقطه روی دایره‌ای

شعاع b در نظر بگیریم وقتی دایره می غلطد این نقطه مسیر سیکلوئید طی می کند

این مسئله را brachistochrone گویند زیرا به یونانی

brachistos = shortest

chronos = time



مثال: می خواهیم تعداد y_0 از محصولی را در طول زمان θ بفروش برسانیم. قیمت

فروش بستگی به نرخ خرید محصول دارد و

تعداد محصولات فروخته شده $= y$ در زمان t

سود حاصل از فروش هر واحد از محصول $= \dfrac{c_2}{1+\alpha y'}$

$y' = \dfrac{dy}{dt}$ نرخ فروش

c_2 و α ثابت

اگر هزینه انبارداری را در نظر بگیریم سود خالص کل برابر است با

$$P = \int_0^{\theta} \frac{c_2 y'}{1+\alpha y'}\,dt - \int_0^{\theta} c_1 (y_0 - y)\,dt$$

که در آن

$c_1 =$ هزینه انبارداری برای واحد محصول در واحد زمان

مطلوبست بهترین نرخ فروش کالا برای بدست آوردن حداکثر سود خالص

$$F = \frac{c_2 y'}{1+\alpha y'} - c_1(y_0 - y)$$

از معادله اویلر داریم

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{c_2}{(1+\alpha y')^2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = c_1$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{c_2}{(1+\alpha y')^2}\right] - c_1 = 0$$

$$\frac{c_2}{(1+\alpha y')^2} = c_1 t + A$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{c_2}}{\alpha\sqrt{c_1 t + A}} - \frac{1}{\alpha}$$

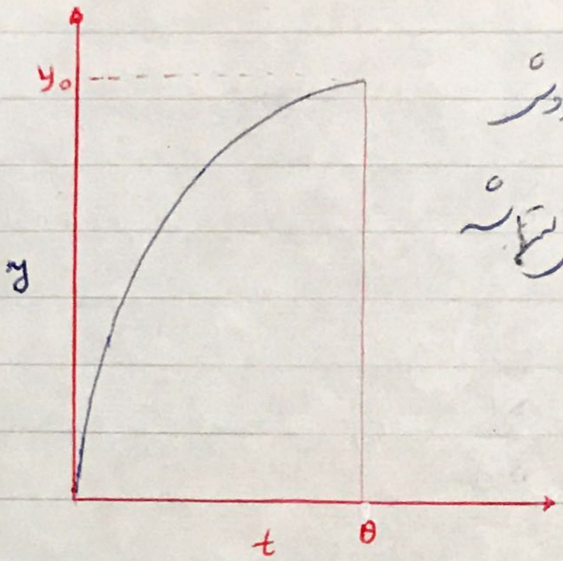
$$\int_0^y dy = \frac{\sqrt{c_2}}{\alpha}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{c_1 t + A}} - \frac{1}{\alpha}\int_0^t dt$$

$$\boxed{y = \frac{2\sqrt{c_2}}{\alpha c_1}\left[\sqrt{c_1 t + A} - \sqrt{A}\right] - \frac{t}{\alpha}}$$

$$t = \theta \Rightarrow y = y_0$$

ولذا میتوان A را بدست آورد

$$\boxed{y_0 = \frac{2\sqrt{c_2}}{\alpha c_1}\left[\sqrt{c_1\theta + A} - \sqrt{A}\right] - \frac{\theta}{\alpha}}$$



همانگونه که از شکل پیداست سرعت خودش

در ابتدا بیشتر است تا هرچه به انتها دارد کمتر شود

تعمیم قضیه اول برای حالتی که بیش از یک تابع وجود دارد. فرض کنید می‌خواهیم توابع

$x_1 = x_1(t)$ ، $x_2 = x_2(t)$ ... $x_n = x_n(t)$ را طوری بدست آوریم که انتگرال زیر

حداقل یا حداکثر شود:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x_1, x_2 \cdots x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2 \cdots \dot{x}_n)\, dt$$

که در آن

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$$

قضیه اول که البته شرط لازم است بصورت زیر است

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \qquad k = 1, 2 \cdots n}$$

دستگاه فوق با داشتن دو شرط برای هر یک از x_i حل می‌شود:

بدست آوردن ماکزیمم یا مینیمم یک انتگرال با وجود محدودیت: در بسیاری از

مسائل هدف بدست آوردن حداقل یا حداکثر یک انتگرال است وقتی که

محدودیت هائی نیز وجود دارد.

الف: محدودیت بصورت انتگرال فرض کنید می خواهیم انتگرال زیر را

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

با وجود محدودیت زیر حداقل یا حداکثر کنیم

$$\int_a^b G(x, y, y')\,dx = K$$

که در آن K مقدار ثابتی است

این نوع مسائل را میتوان با استفاده از روش Lagrange multipliers حل کرد.

مسئله شکل این می ماند که بخواهیم $\int_a^b (F + \lambda G)\,dx$ را ماکزیمم یا مینیمم کنیم

$$\boxed{H = F + \lambda G}$$

$$\int_a^b H\,dx$$

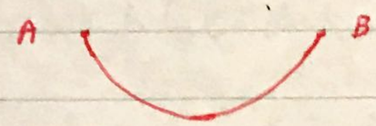
شرط قضیه اویلر را برای H می نویسیم

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right) - \frac{\partial H}{\partial y} = 0}$$

مثال: سیم همگن بطول $2L$ که دانسیته آن در تمام نقاط یکسان است به دو نقطه

$A\left|\begin{matrix}-a\\ b\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right.$ متصل شده است. میدانیم سیم طوری قرار می گیرد که

حداقل انرژی پتانسیل را داشته باشه یعنی مرکز ثقل آن پائین ترین مقدار را
داشته باشه. مطلوبست معادله‌ای که شکل سیم را نشان بدهد



$$\bar{y} = \frac{\int_{-a}^{a} y\,ds}{\int_{-a}^{a} ds} = \frac{1}{2L}\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

چون طول سیم $2L$ است داریم

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2L$$

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2L}\, y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-a}^{a} F(y, y')\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} G\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2L}\sqrt{1+y'^2}\,dx = 1 \qquad H = F + \lambda G$$

$$H = \frac{1}{2L}\left[y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} \right] = \frac{(y+\lambda)}{2L}\sqrt{1+y'^2}$$

چون H تابع x نیست میتوان شرط اویلر را بصورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}\left[H - y'\frac{\partial H}{\partial y'} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2L}(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{1}{2L}(y+\lambda)\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0$$

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

یا

$$\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}{c}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} = \frac{1}{c}\,dx$$

$$\cosh^{-1}\frac{y+\lambda}{c} = \frac{x}{c} + k$$

$$y+\lambda = c\cosh\left(\frac{x}{c}+k\right)$$

چون در $x=\pm a$ می‌شود $y=b$ بنابراین

$$\begin{cases} b+\lambda = c\cosh\left(-\frac{a}{c}+k\right) \\ b+\lambda = c\cosh\left(\frac{a}{c}+k\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ \lambda = c\cosh\frac{a}{c} - b \end{cases}$$

برای بدست آوردن c داریم

$$\int_{-a}^{a} ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2L$$

$$y' = \sinh\frac{x}{c} \qquad y'^2 = \sinh^2\frac{x}{c}$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{c}}\,dx = \int_{-a}^{a}\cosh\frac{x}{c}\,dx = c\sinh\frac{x}{c}\Big|_{-a}^{a}$$

$$= 2c\sinh\frac{a}{c} = 2L$$

$$\boxed{c \sinh \frac{a}{c} = L}$$

$$x = c \cosh \frac{a}{c} - b = c\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{a}{c}} = \sqrt{c^2 + L^2} - b$$

$$\boxed{x = \sqrt{c^2 + L^2} - b}$$

$$\boxed{y = c \cosh \frac{x}{a} + b - \sqrt{c^2 + L^2}}$$