Spherical Bessel Function معادله بسل کروی

فرم کلی این معادله بصورت زیر است

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + [\beta^2 r^2 - n(n+1)]R = 0$$

از مقایسه با معادله عمومی بسل داریم

$$a = 2,\ b = 0,\ c = -n(n+1),\ d = \beta^2\quad r' = 1$$

$$\nu = \frac{1}{r'}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\frac{1}{4} + n(n+1)} = n + 1/2$$

بنابراین داریم:

$$R = r^{-1/2}\left\{c_1 J_{n+1/2}(\beta r) + c_2 Y_{n+1/2}(\beta r)\right\}$$

اگر توابع $\bar{J}_n$ و $\bar{Y}_n$ را بصورت زیر تعریف کنیم داریم:

$$\begin{cases} \bar{J}_n(\beta r) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\, J_{n+1/2}(\beta r) \\ \bar{Y}_n(\beta r) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\, Y_{n+1/2}(\beta r) \end{cases}$$

$$R = A\bar{J}_n(\beta r) + B\bar{Y}_n(\beta r)$$

معادله شبه بسل کروی

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - [\beta^2 r^2 + n(n+1)]R = 0$$

پاسخ معادله بصورت زیر است

$$R = r^{-1/2}\left\{ c_1\, I_{n+1/2}(\beta r) + c_2\, K_{n+1/2}(\beta r) \right\}$$

اگر

$$\bar{I}_n(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\; I_{n+1/2}(\beta r)$$

$$\bar{K}_n(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\; K_{n+1/2}(\beta r)$$

داریم

$$R = A\,\bar{I}_n(\beta r) + B\,\bar{K}_n(\beta r)$$

حالت خاص $n=0$ - برای بسل کروی داریم

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \beta^2 r^2 R = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \beta^2 r^2 R = 0$$

$$x = \beta r$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dR}{dx}\right) + x^2 R = 0$$

$$R = \frac{U}{x}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} + U = 0$$

$$U = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$R = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}$$

$$R = c_1 \frac{\sin \beta r}{\beta r} + c_2 \frac{\cos \beta r}{\beta r} = A\frac{\sin \beta r}{r} + B\frac{\cos \beta r}{r}$$

بنابراین برای اپراتور کروی $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$ تغییر متغیر $y=\frac{v}{r}$

مفید است. بنابراین

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right)+y=0 \\ y=c_1\frac{\sin r}{r}+c_2\frac{\cos r}{r} \\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right)-y=0 \\ y=c_1\frac{e^{r}}{r}+c_2\frac{e^{-r}}{r} \end{array}\right.$$

تابع لژاندر Legendre Function - معادله دیفرانسیل زیر که در آن

n عدد صحیح است را در نظر بگیرید

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

این معادله را معادله لژاندر گویند و حل آن بصورت زیر است

$$y=AP_n(x)+BQ_n(x)$$

$P_n(x)$ را چند جمله‌ای لژاندر (Legendre Polynomial) گویند که یک سری محدود

است و از معادله زیر بدست می‌آید

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k}} \qquad \begin{array}{l} n \text{ زوج } \; N = n/2 \\ n \text{ فرد } \; N = \frac{n-1}{2} \end{array}$$

که بر حسب مقادیر مختلف n فرق می‌کند و در زیر P_0 تا P_5 داده شده است

$P_0(x) = 1$ $\qquad$ $P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $\qquad$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x + 3)$ $\qquad$ $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

$Q_n(x)$ که آن را تابع لژاندر نوع دوم گویند برای $|x|<1$ بصورت زیر است

$n =$ زوج

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{n/2}\, 2^n \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!} \left\{ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 \cdots \right\}$$

$n =$ فرد

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{(1)(3)(5)\cdots n} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 \cdots \right\}$$

اگر $|x|>1$ باشد سری واگرا است و در این حالت $Q_n(x)$ بصورت زیر تعریف میشود

$$\boxed{Q_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^n (n+r)!\,(n+2r)!}{r!\,(2n+2r+1)!} x^{-n-2r-1}}$$

چنانچه ملاحظه میشود $Q_n(x)$ یک سری است که بی‌نهایت ترم دارد برعکس $P_n(x)$

گرچه $Q_n(x)$ پاسخ معادله دیفرانسیل لژاندر است ولی از نظر فیزیکی در خیلی از موارد جواب قابل قبول نبوده و لذا از بحث بیشتر پیرامون آن صرف نظر می‌گردد.

فقط چند تابع آن ذکر می‌گردد

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - 1$$

$$Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3x}{2}$$

چنانچه ملاحظه می‌گردد در $x=\pm 1$ تابع بینهایت است.

خواص چند جمله‌ای لژاندر

1- $P_n(1) = 1$

2- $P_n(-1) = (-1)^n$

3- $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ Rodrigue's formula

4- $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$

5- $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+2) P_n(x)$

خاصیت عمود بودن دو تابع $P_n(x)$ و $P_m(x)$ در فاصله $-1 \le x \le 1$

بر هم عمودند یعنی

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 & m \neq n \\ \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \dfrac{2}{2n+1} & \end{cases}$$

بسط تابع برحسب تابع لژاندر، تابع $f(x)$ که در فاصله $-1 < x < 1$ تعریف شده را

میتوان در نقطه‌ای که تابع پیوسته است بصورت زیر بسط داد

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$$

که در آن

$$A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_k(x)\, dx$$

تابع لژاندر برحسب $\cos\theta$ - اگر $x = \cos\theta$ باشد چند جمله‌ای‌های لژاندر بصورت

زیرند $\quad 0 \le \theta \le \pi$

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos 2\theta + 1}{4}$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{5\cos 3\theta + 3\cos\theta}{8}$$

$$P_4(\cos\theta) = \frac{35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9}{64}$$

رابطه عمود بودن برحسب θ بصورت زیر است

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)\,.\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

تابع شبه لژاندر، Associated Legendre Function

معادله دیفرانسیل زیر معادله دیفرانسیل شبه لژاندر گویند. m و n اعداد صحیح مثبت هستند

$$\boxed{(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \left[\, n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \,\right] y = 0}$$

که اگر $m=0$ باشد همان معادله دیفرانسیل لژاندر بدست می‌آید.

حل معادله فوق بصورت زیر است

$$y = A\, P_n^m(x) + B\, Q_n^m(x)$$

که $P_n^m(x)$ و $Q_n^m(x)$ را توابع شبه لژاندر نوع اول و دوم می‌گویند. رابطه آنها

با $Q_n(x)$ و $P_n(x)$ بصورت زیر است

$$\begin{cases} P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \dfrac{d^m}{dx^m} P_n(x) \\ Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \dfrac{d^m}{dx^m} Q_n(x) \end{cases}$$

$$P_n^0(x) = P_n(x)$$

$$P_n^m(x) = 0 \quad \text{if } m > n$$

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta \qquad x = \cos\theta$$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} = 3/2 \sin 2\theta$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = \frac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta)$$

خاصیت عمود بودن

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\, P_k^m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ \dfrac{2\,(n+m)!}{(2n+1)\,(n-m)!} & n = k \end{cases}$$

روابط بازگشتی

$$\begin{cases} (n+1-m)\, P_{n+1}^m(x) - (2n+1)\,x\, P_n^m(x) + (n+m)\, P_{n-1}^m(x) = 0 \\ P_n^{m+2}(x) - \dfrac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{1/2}}\, P_n^{m+1}(x) + (n-m)(n+m+1)\, P_n^m(x) = 0 \end{cases}$$

در حل مسائل در سیستم کروی از این توابع استفاده میشود.

مثال: در سطح کره‌ای به شعاع r_0 یک توزیع درجه حرارت به صورت $T=f(\theta)$ که $f(\theta)$ معلوم است اعمال می‌شود. مطلوبست درجه حرارت هر نقطه داخل کره در حالت پایدار.

حل: معادله انتقال حرارت به صورت هدایت در سیستم کروی به صورت زیر است.

تقارن

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}}+\cancel{\frac{\dot{q}}{k}}=\frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0$$

$$\frac{1}{r}\left[r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+2\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\cos\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right]=0$$

$$r^2\sin\theta\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+2r\sin\theta\frac{\partial T}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\cos\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}=0$$

فرض می‌کنیم پاسخ به صورت زیر باشد

$$T(r,\theta)=R(r)\,\Theta(\theta)$$

بعد از مشتق‌گیری و جایگزینی داریم

$$r^2\sin\theta\, R''\Theta + 2r\sin\theta\, R'\Theta + \sin\theta\, R\,\Theta'' + \cos\theta\, R\,\Theta' = 0$$

طرفین را به $\sin\theta\, R\,\Theta$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{r^2R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} = \lambda$$

$$\begin{cases} r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 & (\mathrm{I}) \\ \sin\theta\,\Theta'' + \cos\theta\,\Theta' + \lambda\sin\theta\,\Theta = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

معادله (I) از نوع اویلر است داریم

$$R = r^{\beta}$$

معادله مشخصه $\beta^2 + \beta - \lambda = 0 \qquad \beta(\beta+1) = \lambda$

لذا معادله دوم بصورت زیر در می‌آید

$$\sin\theta\,\Theta'' + \cos\theta\,\Theta' + \beta(\beta+1)\sin\theta\,\Theta = 0$$

اگر $x = \cos\theta$ باشد آنگاه شکل معادله فوق بصورت لژاندر در می‌آید $x = \cos\theta$

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \beta(\beta+1)\Theta = 0$$

می‌دانیم این معادله زمانی جواب کراندار در فاصله $0 \le \theta \le \pi$ دارد که β عدد صحیح مثبت باشد $\beta = n$

یعنی پاسخ در $x = \pm 1$ بایستی معین باشد و فقط P_n جواب مورد قبول است

$$\lambda = n(n+1)$$

$$\beta^2 + \beta - n(n+1) = 0 \qquad \beta_1 = n \qquad \beta_2 = -(n+1)$$

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}$$

P_n

$$R(r) = Ar^n$$

چون دامنه $r=0$ معین است $B = 0$

به ازای هر n یک جواب داریم و جوابها بصورت زیرند

$$A_0 P_0(\cos\theta),\quad A_1 r P_1(\cos\theta),\quad \ldots \quad A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

$$T_n = A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

بنابراین پاسخ بصورت زیراست

$$T = \sum_{0}^{\infty} T_n$$

$$\boxed{T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)}$$

B.C. $\quad r = r_0 \quad T(r_0,\theta) = f(\theta)$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r_0^n P_n(\cos\theta)$$

از خاصیت عمود بودن P_n و P_m میتوان استفاده کرده و ضرائب A_n را

محاسبه کرد. طرفین رابطه فوق را در $\sin\theta\, P_m(\cos\theta)$ ضرب کرده و انتگرال

می‌گیریم

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\, P_m(\cos\theta)\, d\theta = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} A_n r_0^n \sin\theta\, P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r_0^n \int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\, P_n(\cos\theta)\, d\theta = A_n r_0^n \frac{2}{2n+1}$$

$$\boxed{A_n = \frac{2n+1}{2 r_0^n} \int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\, P_n(\cos\theta)\, d\theta}$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خاص

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در مسائل مهندسی پیش می‌آید اکثراً حالات خاصی از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه ۲ است. در زیر تعدادی از آنها ذکر می‌گردد.

1- معادله لاپلاس: Laplace Equation

$$\nabla^2 U = 0$$

2- معادله پواسن Poisson Equation

$$\nabla^2 U = g(x)$$

که در آن

$$g(x) = g(x_1, x_2 \dots x_n)$$

3- معادله هلمهولتز Helmholtz Eq.

$$\nabla^2 U + \lambda U = 0$$

4- معادله شرودینگر Schrodinger Eq.

$$\nabla^2 U + [\lambda - q(x)]\, U = 0$$

5- معادله دیفیوژن Diffusion Equation

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t}$$

6- معادله موج Wave Equation

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

در معادلات فوق اپراتور ∇^2 در مختصات مختلف بصورت زیر است

$$u(x,y,z,t)=\Phi(x,y,z)\,T(t)$$

$$\nabla^2 u = T\nabla^2\Phi \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\Phi T'$$

$$T\nabla^2\Phi=\frac{1}{\alpha}\Phi T'$$

$$\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi}=\frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T}=-\lambda^2$$

$$\nabla^2\Phi+\lambda^2\Phi=0$$
$$T'+\alpha\lambda^2 T=0$$

ملاحظه میشود معادله مربوط به Φ از نوع هلمهولتز است. حال معادله موج را

در نظر میگیریم و به شیوه فوق عمل میکنیم

$$u(x,y,z,t)=\Phi(x,y,z)\,T(t)$$

$$\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi}=\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}=-\lambda^2$$

$$\nabla^2\Phi+\lambda^2\Phi=0$$
$$T''+\lambda^2c^2T=0$$

حال اگر چهار معادله اول را در نظر بگیریم که دیدیم تابعیت مکانی معادله موج و

نفوذ از نوع معادله هلمهولتز است مسئله منجر به یافتن u میشود که در معادله دیفرانسیل

جزئی صدق کرده و یک سری شرط مرزی را نیز برآورده کند. این نوع مسائل را

مسائل شرایط مرزی گویند. از میان معادلات فوق معادله لاپلاس اهمیت خاصی دارد و در حل یک سری از مسائل مهندسی پیش می‌آید. ا معادله موج و نفوذ در حالت تکرارات به معادله لاپلاس تبدیل می‌شوند. تابعی که در معادله لاپلاس صدق می‌کند هارمونیک (Harmonic) گویند. فرض می‌کنیم بخواهیم معادله لاپلاس را در حوزه D که مرز آن B است حل کنیم. انواع شرایط مرزی به صورت زیر است

۱- شرط مرزی نوع اول - مسئله دیریشله: در این حالت هدف بدست آوردن تابع u در حوزه D است که در مرز D یعنی B دارای مقدار معینی باشد یعنی

$$u = f(s) \quad \text{روی } B$$

این نوع مسائل را مسئله دیریشله گویند Dirichlet problem

۲- شرط مرزی نوع دوم: مسئله نویمن: در این حالت مشتق u در مرز D داده شده است یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(s) \quad \text{روی } B$$

که در آن n بردار عمود بر مرز B است. این نوع مسائل را مسئله نویمن Neumann problem گویند. می‌توان نشان داد که f بایستی دارای شرط زیر باشد $\int_B f(s)\, d\sigma = 0$ *

۳- شرط مرزی نوع سوم: در این حالت شرط روی u در مرز D به صورت زیر است

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(s)\,u = f(s) \qquad \text{روی } B$$

که در آن f و h توابع معلومی هستند

شرط مرزی نوع چهارم: ممکن است در قسمتی از مرز B مثلاً B_1 خود تابع u و

در قسمت دیگر مثلاً B_2 مشتق u داده شده باشد، بصورت زیر

$$u = f_1(s) \qquad \text{روی } B_1 \qquad (\text{Robin problem})$$

$$\partial u / \partial n = f_2(s) \qquad \text{روی } B_2$$

مثالهائی از شرط مرزی فوق در بحث انتقال حرارت

1- شرط نوع اول: مشخص بودن دما در مرز جسم

2- شرط نوع دوم: مشخص بودن فلاکس حرارتی در مرز

3- شرط نوع سوم: انتقال حرارت بصورت جابجائی

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=a} = h\,(T - T_\infty)\Big|_{x=a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{h}{k}\,T = \frac{h}{k}\,T_\infty \qquad x = a$$

که دمای محیط T_∞ شده است

4- شرط مرزی نوع چهارم: معین بودن دما در قسمتی از سطح و معین بودن فلاکس در قسمت دیگر