Matrices ماتریس ها

جلسه چهارم

تعریف: یک ماتریس $m \times n$ دارای m ردیف و n ستون است و بصورت

زیر نشان داده میشود

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} را المانهای ماتریس می نامند $(i = 1, \ldots, n \; , \; j = 1, \ldots, m)$

دو ماتریس مساوی: شرط مساوی بودن دو ماتریس هم درجه (تعداد ردیف و ستون آنها یکی است)

آن است که تمام المانهای آنها مساوی باشد یعنی $A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$

جمع ماتریسها: در جمع یا کم کردن دو ماتریس عمل جبری مربوط روی المانهای نظیر هم صورت

می گیرد

$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ضرب کمیت در یک ماتریس: تمام اعداد ماتریس در آن عدد ضرب میشود $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

مثال: $\lambda = 4$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها: از ضرب ماتریس A $m \times n$ در ماتریس $B\ (n \times p)$

ماتریس $C\ (m \times p)$ حاصل میشود که المان‌های آن برابر است با

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AD = \begin{bmatrix} 2\times3 + 1\times2 + 4\times4 & 2\times5 + (-1)(1) + 4\times2 \\ -3\times3 + (0)2 + 2\times4 & (-3)(5) + (0)(-1) + 2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 17 \\ -1 & -11 \end{bmatrix}$$

در حالت کلی $AB \neq BA$ است و روابط زیر را داریم

$A(BC) = (AB)C$

برای ضرب کردن یک ماتریس در خودش باید آن مربع باشه یعنی سطر و ستونش

برابر باشه. حاصل ضرب $A \cdot A$ را بصورت زیر نشان میدیم $\quad A \cdot A = A^2$

Transpose یک ماتریس: اگر جای سطر و ستون ماتریس عوض شود ماتریس حاصل را

Transpose ماتریس اولیه گویند

$A = (a_{ij})$

$A^T = (a_{ji})$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

روابط زیر را میتوان نشان داد

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (A^T)^T = A$$

ماتریس متقارن (Symmetric) ماتریس مربع A متقارن است اگر

$$A^T = A \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Complex Conjugate of a matrix: اگر المان یک ماتریس یعنی a_{ij} با

conjugate آنها یعنی $\bar{a}_{ij}$ تعویض شود ماتریس حاصل را conjugate گویند

$$a_{ij} = \alpha + i\beta \qquad \bar{a}_{ij} = \alpha - i\beta$$

Conjugate ماتریس A را با $\bar{A}$ نشان میدهیم

Hermitian Matrix اگر ماتریس مربع A با Transpose ماتریس Conjugate

آن برابر شد ماتریس Hermitian نامیده میشود یعنی

$$A = \bar{A}^T$$

مثال: نشان دهید ماتریس A ، Hermitian است

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Trace of a matrix مجموع عناصر قطری ماتریس مربع A را trace آن گویند

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad trace = 5+1+2 = 8 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Diagonal matrix: ماتریس قطری ماتریسی است که غیراز عناصر قطری آن بقیه عناصر صفرند $a_{ij} = 0$ برای $i \neq j$

Unit matrix: ماتریس واحد ماتریس قطری است که عناصر قطری آن 1 باشد و آنرا با I نشان میدهند

$$AI = IA$$
$$I^n = I \quad n = 1, 2 \ldots$$

Zero or Null matrix ماتریسی است که تمام المانهای آن صفر است.

$$A + 0 = A$$

Determinant دترمینان ماتریس مربع A را بصورت زیر نشان میدهیم

A $(n \times n)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

برای محاسبه دترمینان یک ماتریس ابتدا چند تعریف می‌کنیم.

Minor: اگر a_{ij} المان Δ باشد یک دترمینان با یک مرتبه کمتر (n-1) که از حذف سطر و ستون مربوطه به a_{ij} بدست می‌آید، آنرا Minor المان a_{ij} گویند.

مثال: Minor مربوط به a_{23} را در دترمینان زیر بدست آورید

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{Minor } a_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Cofactor: اگر Minor المان a_{ij} را در $(-1)^{i+j}$ ضرب کنیم نتیجه را Cofactor المان a_{ij} گویند که آنرا با A_{ij} نشان می‌دهیم. در مثال بالا $(-1)^{i+j} = (-1)^5 = -1$ است

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \text{Minor } a_{ij}$$

دترمینان: برای بدست آوردن دترمینان یک ماتریس یک ردیف (یا ستون) انتخاب کرده و مجموع حاصل ضرب المان‌های آن ردیف در Cofactor مربوطه‌اشان را بدست می‌آوریم

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

مثال: محاسبه دترمینان یک ماتریس 2x2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |a_{22}| = a_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |a_{21}| = -a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

مثال: محاسبه دترمینان یک ماتریس 3×3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j} A_{1j} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + a_{12} (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33})$$

$$+ a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$- a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

اگر تمام عناصر یک ستون یا سطر صفر شد دترمینان ماتریس صفر است

subject : date :

خواص دترمینان

- اگر اعداد هر سطر یا ستون در یک عدد ضرب شوند، دترمینان در آن عدد ضرب می‌شود

- اگر اعداد یک سطر (یا ستون) مضربی از اعداد سطر دیگر باشند دترمینان صفر است

- اگر اعداد یک سطر یا ستون را در یک عدد ضرب کنیم و حاصل را با اعداد یک سطر دیگر جمع کنیم، در دترمینان تغییری حاصل نمی‌شود. از این خاصیت می‌توان برای ساده کردن محاسبه دترمینان استفاده کرد.

مثال: مطلوبست محاسبه دترمینان زیر

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

سطر دوم را در -3 ضرب کرده با سطر اوّل جمع می‌کنیم و آنرا جایگزین سطر اوّل می‌کنیم

سطر دوم را در -4 ضرب کرده با سطر سوم جمع می‌کنیم و آنرا جایگزین سطر سوم می‌کنیم.

خواهیم داشت:

$$\det A = \Delta \begin{vmatrix} 0 & -8 & 11 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 14 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -8 & 11 \\ -7 & 14 \end{vmatrix} = 35$$

معکوس یک ماتریس: اگر برای ماتریس مربع A ماتریس B وجود داشته باشد بطوریکه $AB = I$ ، B را معکوس A گویند و با A^{-1} نشان می‌دهند.

قضیه: اگر A یک ماتریس مربع nonsingular باشد $(\det(A) \neq 0)$ وجود دارد یک ماتریس منحصر بفرد A^{-1} بطوریکه $AA^{-1} = I$ است و

$$A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{\det(A)} \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

که در آن (A_{ij}) ماتریس cofactor های A_{ij} است و

$$(A_{ij})^T = (A_{ji})$$

مثال: محاسبه معکوس ماتریس زیر

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

به همین ترتیب بقیه را عمل کرده و داریم

$$(A_{ij}) = \begin{bmatrix} 7 & -14 & -7 \\ 6 & -2 & -11 \\ 2 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A_{ij})^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{\det(A)} = \frac{1}{35}(A_{ij})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35} \end{bmatrix}$$

* orthogonal matrix، ماتریس حقیقی A را orthogonal گویند اگر A^T برابر A^{-1} باشد یعنی

$$A^T = A^{-1} \Rightarrow A^T A = I$$

جلسه پنجم

دستگاه معادلات خطی

سیستم معادلات بصورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

اگر تمام $b_i = 0$ باشد سیستم را همگن (homogeneous) گویند

* اگر $AA^H = A^HA = I$ ماتریس A را Unitary گویند. اگر A حقیقی باشد حالت

و اگر تمام bها صفر نباشند غیر همگن (nonhomogeneous) گویند. بصورت

ماتریسی معادلات فوق بصورت زیر است

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (I)$$

یا

$$AX = B$$

حل دستگاه n معادله n مجهول: اگر $m=n$ باشد و ماتریس A nonsingular

باشد حل دستگاه فوق بصورت زیر است

$$X = A^{-1}B$$

حالت اول: اگر $\Delta \neq 0$ و $B \neq 0$ یک جواب منحصر بفرد که تمام x_i صفر نیستند

وجود دارد.

حالت دوم: اگر $\Delta \neq 0$ و $B = 0$ باشد تنها جواب $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

است که آنرا جواب trivial گویند

حالت سوم: اگر $\Delta = 0$ و $B = 0$ باشد غیر از جواب trivial بی نهایت جواب

وجود دارد. در این حالت حداقل یکی از معادلات را میتوان از ترکیب سایر معادلات

بدست آورد.

حالت چهارم: اگر $\Delta = 0$ و $B \neq 0$ باشد معادله جواب ندارد.

* اگر تمام Δ_i ها که در قبل تعریف شده صفر باشد که در آن صورت بی‌نهایت جواب داریم

روش Cramer یک روش حل سیستم معادلات (I) بصورت زیر است

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \cdots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

که در آن Δ_k دترمینان Δ است که ستون k ام آن با B عوض شده است

مثال: مطلوبست حل سیستم معادلات زیر از دو روش Cramer و روش معکوس کردن

ماتریس

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

الف: روش کرامر

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$\Delta = 35$ قبلاً نشان دادیم

اگر سایر دترمینان‌ها هم حساب شود داریم

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -3$

$x_3 = -1$