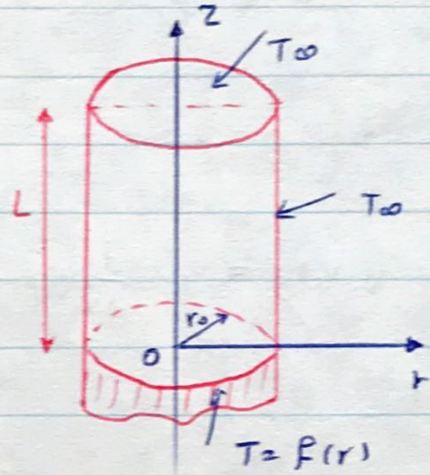
یک پره استوانه‌ای که شعاع سطح مقطع آن $r_0$ است و طولش L می‌باشد در نظر بگیرید. درجه حرارت پایه بصورت تابعی از r داده شده $f(r)$ . درجه حرارت سیال مجاور اطراف پره $T_\infty$ است و فرض می‌کنیم ضریب انتقال حرارت خیلی زیاد باشد بطوریکه درجه حرارت در سطح پره $T_\infty$ است. مطلوبست توزیع درجه حرارت در پره

$\theta = T - T_\infty$




$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$$

$\theta(0, z) =$ معین (1) $\dfrac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0$

$\theta(r_0, z) = 0$ (2)

$\theta(r, L) = 0$ (3)

$\theta(r, 0) = f(r) - T_\infty = F(r)$ (4)

$\theta(r, z) = R(r)\, Z(z)$

چون در جهت z همگن نیست و در جهت r همگن است علامت $\lambda^2$ را بصورت

زیر انتخاب می‌کنیم

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\lambda^2 rR=0 & (I) \\ \dfrac{d^2Z}{dz^2}-\lambda^2 Z=0 & (II) \end{cases}$$

معادله (I) معادله بسل است زیرا داشتیم

$$x^2y''+xy'+(\beta^2x^2-\nu^2)y=0$$

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(\beta^2x^2-\nu^2)y=0 \qquad \frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(\beta^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)y=0$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

یا

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)y=0$$

$$\nu=0 \qquad y=AJ_0(\beta r)+Y_0(\beta r)$$

بنابراین داریم

$$\theta(r,z)=\left[A_1J_0(\lambda r)+A_2Y_0(\lambda r)\right]\left[B_1\sinh\lambda z+B_2\cosh\lambda z\right]$$

B.C.1 چون $Y_0(0)=\infty$ $\quad A_2=0$

B.C.3 $0=A_1J_0(\lambda r)\left[B_1\sinh\lambda L+B_2\cosh\lambda L\right]=0$

$$B_1\sinh\lambda L+B_2\cosh\lambda L=0$$

چون $P(1)=2$ و $P(0)=0$ شرط مرزی $r=0$ بدست آورده نمی‌شود و فقط

مبنی بر آن پاسخ شده است

$$B_2 = \frac{-B_1 \sinh \lambda L}{\cosh \lambda L}$$

$$B_1 \sinh \lambda z - B_1 \frac{\sinh \lambda L}{\cosh \lambda L} \cosh \lambda z = \frac{-B_1}{\cosh \lambda L} \sinh \lambda (L-z)$$

$$= B_3 \sinh \lambda (L-z)$$

B.C. 2 $\quad 0 = A_1 J_0(\lambda r_0) B_3 \sinh \lambda (L-z)$

$$J_0(\lambda r_0) = 0 \qquad a_1 = A_1 B_3$$

$$\theta_n = a_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n (L-z)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \sinh \lambda_n (L-z)$$

به بینهایت داشتیم

$$J_0(\lambda_n r_0) = 0 \qquad n = 1, 2, 3 \dots$$

B.C. 4 $\quad F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \lambda_n L \, J_0(\lambda_n r)$

از خاصیت عمود بودن توابع بسل استفاده می‌کنیم. داشتیم که اگر $\alpha_i$ و $\alpha_j$ ریشه‌های

معادله $J_n(x)=0$ باشند داریم

$$\int_0^1 x J_n(\alpha_i x) J_n(\alpha_j x) \, dx = \frac{1}{2} [J_n'(\alpha_i)]^2 \delta_{ij}$$

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases}$$

کلاً میتوان نشان داد که

$$\int_0^{r_0} r J_\nu^2(\lambda_n r)\,dr = \frac{1}{2\lambda_n^2}\left\{(\lambda_n^2 r^2-\nu^2)J_\nu^2(\lambda_n r) + \left[r\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right]^2\right\}_{r=r_0}$$

چون $J_\nu$ جواب معادله بسل است داریم

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_\nu}{dr}\right) + (\lambda_n^2 r^2-\nu^2)J_\nu = 0$$

طرفین را در $2\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}$ ضرب میکنیم

$$2r\frac{dJ_\nu}{dr}\,\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_\nu}{dr}\right) = -(\lambda_n^2 r^2-\nu^2)\,2J_\nu\frac{dJ_\nu}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_\nu}{dr}\right)^2 = -(\lambda_n^2 r^2-\nu^2)\frac{dJ_\nu^2}{dr}$$

از طرفین انتگرال میگیریم

$$\left[r\frac{dJ_\nu}{dr}\right]^2 = -\int(\lambda_n^2 r^2-\nu^2)\frac{dJ_\nu^2}{dr}dr = \nu^2 J_\nu^2 - \lambda_n^2\int r^2\frac{dJ_\nu^2}{dr}dr$$

$$\int v\,du = uv - \int u\,dv \qquad v = r^2 \qquad u = J_\nu^2$$

$$\int r^2\frac{dJ_\nu^2}{dr}dr = r^2 J_\nu^2 - 2\int r J_\nu^2\,dr$$

$$\left(r\frac{dJ_\nu}{dr}\right)^2 = \nu^2 J_\nu^2 - \lambda_n^2 r^2 J_\nu^2 + 2\lambda_n^2\int r J_\nu^2\,dr$$

$$\int_0^{r_0} r J_\nu^2\,dr = \frac{1}{2\lambda_n^2}\left\{(\lambda_n^2 r^2-\nu^2)J_\nu^2 + \left[r\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right]^2\right\}_0^{r_0}$$

حد پائینی انتگرال به دلائل زیر صفر است

$$J_\nu(0) = 0 \qquad \nu > 0$$

$$r \left.\frac{dJ_\nu}{dr}\right|_{r=0} = 0$$

$$\int_0^{r_0} r J_\nu^2(\lambda_n r)\,dr = \frac{1}{2\lambda_n^2}\left\{(\lambda_n^2 r^2 - \nu^2) J_\nu^2(\lambda_n r) + \left[r \frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right]^2\right\}_{r=r_0}$$

حالت اوّل $J_\nu(\lambda_n r_0) = 0$ با توجه به رابطه زیر داریم

$$\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr} = -\lambda_n J_{\nu+1}(\lambda_n r) + \frac{\nu}{r} J_\nu(\lambda_n r)$$

$$\boxed{\int_0^{r_0} r J_\nu^2(\lambda_n r)\,dr = \frac{r_0^2}{2} J_{\nu+1}^2(\lambda_n r_0)}$$

$$\boxed{J_\nu(\lambda_n r_0) = 0}$$

حالت دوم $J'_\nu(\lambda_n r_0) = 0$ داریم

$$\boxed{\int_0^{r_0} r J_\nu^2(\lambda_n r)\,dr = \frac{\lambda_n^2 r_0^2 - \nu^2}{2\lambda_n^2} J_\nu^2(\lambda_n r_0)}$$

$$\boxed{J'_\nu(\lambda_n r_0) = 0}$$

حالت سوم : $J'_\nu(\lambda_n r_0) + B J_\nu(\lambda_n r_0) = 0$

$$\int_0^{r_0} r J_\nu^2(\lambda_n r)\,dr = \frac{1}{2\lambda_n^2}\left[(\lambda_n^2 r_0^2 - \nu^2) J_\nu^2(\lambda_n r_0) + r_0^2 J_\nu'^2(\lambda_n r_0)\right]$$

$$J_\nu'^2(\lambda_n r_0) = B^2 J_\nu^2(\lambda_n r_0)$$

$$\boxed{\int_0^{r_0} r J_\nu^2(\lambda_n r)\,dr = \frac{(\lambda_n^2+B^2)r_0^2-\nu^2}{2\lambda_n^2} J_\nu^2(\lambda_n r_0)}$$

$$\boxed{J'_\nu(\lambda_n r_0) + B J_\nu(\lambda_n r_0) = 0}$$

با استفاده از این نتایج داریم

$$\int_0^{r_0} F(r) J_0(\lambda_n r) r\,dr = a_n \sinh \lambda_n L \int_0^{r_0} r J_0^2(\lambda_n r)\,dr$$

$$= a_n \sinh \lambda_n L \left[\frac{r_0^2}{2} J_1^2(\lambda_n r_0)\right]$$

$$a_n \sinh \lambda_n L = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\lambda_n r_0)} \int_0^{r_0} F(r) J_0(\lambda_n r) r\,dr$$

پس از جایگذاری داریم

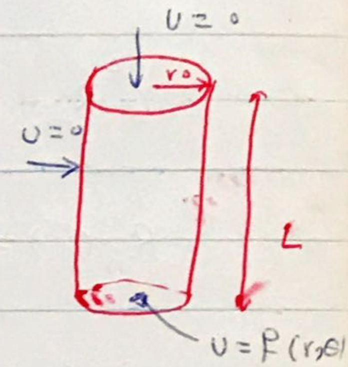
$$\boxed{\theta(r,z) = \frac{2}{r_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n r_0)} \frac{\sinh \lambda_n (L-z)}{\sinh \lambda_n L} \int_0^{r_0} F(r') J_0(\lambda_n r') r'\,dr'}$$

حل معادله لاپلاس در سیستم استوانه ای سه بعدی: استوانه ای به طول L و شعاع $r_0$ در نظر بگیرید. پتانسیل الکتریکی در استوانه را می خواهیم که پتانسیل در سطح جانبی استوانه و سطح فوقانی صفر نگهداشته شود (اتصال زمین) و در سطح پائینی توزیع پتانسیل بصورت $f(r,\theta)$ باشد.

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

B.C.1 $\quad r = 0 \quad U = \text{finite}$

B.C.2 $\quad r = r_0 \quad U = 0$




B.C.3 $\quad U(r,\theta,z) = U(r,\theta+2\pi,z)$

B.C.4 $\quad \dfrac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial \theta} = \dfrac{\partial U(r,\theta+2\pi,z)}{\partial \theta}$

B.C.5 $\quad U(r,\theta,0) = f(r,\theta)$

B.C.6 $\quad U(r,\theta,L) = 0$

$$U(r,\theta,z) = R(r)\,\Theta(\theta)\,Z(z)$$

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} + r^2\lambda^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2$$

بنابراین داریم

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0$$

$$\Theta'' + \mu^2 \Theta = 0$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0$$

قبلاً نشان داده‌ایم که شرایط 3 و 4 سبب میشوند $\mu = n \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

$$\Theta(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta$$

از حل در جهت $z$ و شرط (6) داریم

$$Z(z) = C\sinh\lambda(L-z)$$

معادله در جهت $R$ بصورت زیر است

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0$$

که معادله بسل است

$$R_n(r) = D J_n(\lambda r) + E Y_n(\lambda r)$$

$$B.C.1 \Rightarrow E = 0$$

$$B.C.2 \Rightarrow J_n(\lambda r_0) = 0$$

به ازای هر $n$ معادله فوق یک سری ریشه دارد، بنابراین $\lambda$ های معادله

فوق را اگر با $\lambda_{nm}$ نشان دهیم داریم

$$J_n(\lambda_{nm} r_0) = 0 \qquad m = 1, 2 \ldots \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$R_n(r) = D J_n(\lambda_{nm} r)$$

بنابراین داریم

$$u(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r)(a_{nm}\cos n\theta + b_{nm}\sin n\theta)$$

$$\sinh[\lambda_{nm}(L-z)]$$

از شرط 5 داریم

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r)(a_{nm}\cos n\theta + b_{nm}\sin n\theta)\sinh \lambda_{nm} L$$

با استفاده از خاصیت عمود بودن توابع سینوس و کسینوس و توابع بسل داریم

$$a_{0m}=\frac{1}{\pi r_0^2 \sinh(\lambda_{0m} L)\, J_1^2(\lambda_{0m} r_0)}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\, J_0(\lambda_{0m} r)\, r\, dr\, d\theta$$

$$a_{nm}=\frac{2}{\pi r_0^2 \sinh(\lambda_{nm} L)\, J_{n+1}^2(\lambda_{nm} r_0)}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r f(r,\theta)\, J_n(\lambda_{nm} r)\cos n\theta\, dr\, d\theta$$

$$b_{nm}=\frac{2}{\pi r_0^2 \sinh(\lambda_{nm} L)\, J_{n+1}^2(\lambda_{nm} r_0)}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r f(r,\theta)\, J_n(\lambda_{nm} r)\sin n\theta\, dr\, d\theta$$

# حل معادله لاپلاس در مختصات کروی

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}=0$$

**مثال:** یک پوسته کروی که شعاع داخلی آن $r_0$ است و توزیع درجه روی سطح داخلی $f_1(\theta)$ است و شعاع خارجی آن $r_1$ بوده و توزیع درجه حرارت روی سطح خارجی $f_2(\theta)$ است در نظر بگیرید. مطلوبست توزیع درجه حرارت در نقاط مختلف این پوسته در حالت یکنواخت

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}}+\cancel{\frac{q'''}{k}}=\frac{1}{\alpha}\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0$$

$$\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\cos\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right]=0$$

$$r^2\sin\theta\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+2r\sin\theta\frac{\partial T}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\cos\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}=0$$

$$T(r,\theta)=R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$\frac{r^2R''}{R}+\frac{2rR'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\Theta'}{\Theta}=\lambda=n(n+1)$$

در معادله لژاندر $P(x)=1-x^2$ که در $x=\pm1$ صفر می‌شود و لذا جایی که $x=\pm1$ جزء فیزیک مسئله باشد کافی است که جواب معین باشد. $\pi>\theta>0$ می‌دهد $1>x>-1$

$$\begin{cases} r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 & (1) \\ \sin\theta\, \Theta'' + \cos\theta\, \Theta' + n(n+1)\sin\theta\, \Theta = 0 & (2) \end{cases}$$

$$R = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}$$

معادله (2) معادله لژاندر است و اگر $n$ صحیح نباشد در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$

جواب معین ندارد و تنها حالتی که جواب در این فاصله معین است حالتی است که

عدد صحیح باشد و جواب $P_n(\cos\theta)$ باشد

$$\boxed{T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)}$$

$$\begin{cases} \text{B.C.1} \quad T(r_0,\theta) = f_1(\theta) \\ \text{B.C.2} \quad T(r_1,\theta) = f_2(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(\theta) = \sum_{0}^{\infty} \left( A_n r_0^n + \frac{B_n}{r_0^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \\ f_2(\theta) = \sum_{0}^{\infty} \left( A_n r_1^n + \frac{B_n}{r_1^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \end{cases}$$

از خاصیت عمود بودن $P_n$ و $P_m$ استفاده و طرفین معادلات فوق را $\sin\theta\, P_m(\cos\theta)$

ضرب کرده در فاصله $0 - \pi$ انتگرال می گیریم

$$\int_0^\pi f_1(\theta)\sin\theta\, P_m(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r_0^n + \frac{B_n}{r_0^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$\int_0^\pi f_1(\theta)\sin\theta\, P_n(\cos\theta)\,d\theta = \left(A_n r_0^n + \frac{B_n}{r_0^{n+1}}\right)\int_0^\pi P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \left(A_n r_0^n + \frac{B_n}{r_0^{n+1}}\right)\frac{2}{2n+1}$$

به همین ترتیب برای $r_1$ در مورد انتگرال گیری عمل کردو خواهیم داشت

$$\boxed{\begin{cases} A_n r_0^n + \dfrac{B_n}{r_0^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f_1(\theta)\sin\theta\, P_n(\cos\theta)\,d\theta \\ A_n r_1^n + \dfrac{B_n}{r_1^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f_2(\theta)\sin\theta\, P_n(\cos\theta)\,d\theta \end{cases}}$$