ب : محدودیت بصورت معادله دیفرانسیل :

اگر بردار X را بصورت زیر تعریف کنیم

$$X^T = [x_1 \dots x_n]$$

می خواهیم X را طوری تعیین کنیم که انتگرال زیر

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F(X, \dot{X}, t)\, dt$$

با وجود محدودیت های زیر

$$\Phi_j(X, \dot{X}, t) = 0 \qquad j = 1, \dots, m \leq n$$

اکسترمم شود. L را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$L = F(X, \dot{X}, t) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \Phi_j(X, \dot{X}, t)$$

که ملاحظه میشود در این حالت λ_j ها نیز تابع زمان هستند، معادلات اویلر بصورت زیر اند

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0} \qquad i = 1, \dots, n$$

n معادله فوق و m محدودیت برای حل $n+m$ مجهول که x_i و λ_j هستند بکار میروند

اگر در $t = t_i$ و $t = t_f$ ، X معلوم باشد n معادله دیفرانسیل فوق بصورت کامل

حل میشوند. اگر در $t = t_f$ ، X معلوم نباشد n شرط مرزی از رابطه زیر بدست می آید

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_f} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

حالت خاص 1: اگر محدودیت بصورت زیر باشد

$$\Phi_j(X,t) = 0 \qquad j = 1 \dots m$$

$$L = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, \Phi_j(X,t)$$

معادله اویلر مانند گذشته است و اگر x_i ها در t_f معلوم نباشند شرایط

اضافی بصورت زیر بدست می‌آید

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_f} = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_f} = 0 \qquad i = 1, \dots n$$

حالت خاص 2: فرض کنید بخواهیم انتگرال زیر را اکسترمم کنیم

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F(X, U, t)\, dt$$

$$X^T = [x_1 \dots x_n] \qquad U^T = [u_1 \dots u_m]$$

با محدودیت‌های زیر

$$\dot{x}_i = f_i(X, U, t) \qquad i = 1, \dots n \quad (1)$$

با شرایط اولیه $X(t_i) = X_i$

یا $x_i(t_i) = x_i$

شرایط نهایی هم داده شده باشد $X(t_f) = X_0$ یا $x_i(t_f) = x_0$

به کمک حالت کلی حالت خاص فوق قابل حل است . بردار $\bar{x}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\bar{x}^T = [x_1 \cdots x_n, u_1 \cdots u_m] = [x^T, u^T]$$

بنابراین بیان شده بصورت زیر می‌شود

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)\,dt = \int_{t_i}^{t_f} F(x, u, t)\,dt$$

$$\phi_i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) = \phi_i(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) = f_i(x, u, t) - \dot{x}_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

که ملاحظه می‌شود در تابع زیر انتگرال یعنی F مشتق x و u وجود ندارد و در محدودیت هم مشتق u وجود ندارد و لذا حالت خاصی از حالت کلی قبل است و معادلات اویلر را می‌توان برای آن نوشت

$$L = F(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\,[f_i(x, u, t) - \dot{x}_i] \qquad (*)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i} = 0$$

که بر حسب x_i و u_j بصورت زیر اند

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & i = 1 \dots n \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial u_j} = 0 & j = 1, \dots m \end{cases}$$

با استفاده از رابطه برای تابع L (*) داریم (اعمال مشتق گیری از L نسبت به x_i و u_j)

$$\begin{cases} -\dfrac{d\lambda_i}{dt} - \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}\right) = 0 & i = 1 \dots n \quad (I) \\[2ex] -\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_j} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial u_j}\right) = 0 & j = 1 \dots m \quad (II) \end{cases}$$

حال اگر یک تابع H که آنرا Hamiltonian گویند بصورت زیر تعریف کنیم

$$H = F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

معادلات I و II بصورت زیر در می آیند

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} = \dot{\lambda}_i & i = 1 \dots n \quad (2) \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0 & j = 1 \dots m \quad (3) \end{cases}$$

از حل همزمان معادلات سیستم (1) و معادلات فوق که $2n+m$ معادله هستند $x_1 \dots x_n$ ، $\lambda_1 \dots \lambda_n$ و $u_1 \dots u_m$ بدست می آیند.

اگر شرایط اولیه و نهائی داده شده باشند احتیاج به شرط اضافی نیست و اما اگر شرایط نهائی در دست نباشند شرایط اضافی لازم مانند گذشته بدست می آید

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_{t_f} = -\lambda_i(t_f) = 0 \qquad i = 1, \ldots n$$

اگر بعضی از x_i ها در t_f معلوم بوده و تعدادی نامعلوم برای آنهائی که نامعلومند λ مربوطه در t_f صفر میشود. نتایج فوق را میتوان بصورت قضیه زیر بیان کرد.

قضیه شرط لازم برای آنکه انتگرال زیر

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F(x, u, t)\, dt$$

با محدودیت های زیر

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t) \qquad , x(t_i) = x_i$$

اکستریمم شود آنست که تابع H

$$H = F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

در معادلات زیر صدق کند

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} = \dot{\lambda}_i & i = 1, \ldots n \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0 & j = 1 \ldots m \end{cases}$$

اگر در t_f ، x_i ها معلوم باشند احتیاج به شرط اضافی نیست و اگر مقدار نامعلوم باشند شرایط اضافی لازم بصورت زیر است

$$\lambda_i(t_f)=0$$

مثال: مطلوبست u برای آنکه انتگرال زیر حداقل شود

$$I=\int_0^{\theta}(x^2+u^2)\,dt$$

در صورتیکه

$$\dot{x}=u \qquad x(0)=1$$

$$F=x^2+u^2$$
$$f=u$$

$$H=F+\lambda f=x^2+u^2+\lambda u$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial x}=\dot{\lambda} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=\dot{\lambda} & (I) \\ 2u+\lambda=0 & (II) \end{cases}$$

از معادله (II) مشتق می‌گیریم

$$2\dot{u}+\dot{\lambda}=0 \qquad (III)$$

از I و III داریم

$$-2x=\dot{\lambda}=-2\dot{u}$$

معادله سیستم
$$\begin{cases} x = \dot{u} \\ \dot{x} = u \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = x$$

$$\ddot{x} - x = 0 \qquad x = c_1 \sinh t + c_2 \cosh t$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1 \qquad x = c_1 \sinh t + \cosh t$$

چون در دو نقطه $t = \theta$ مقدار x داده نشده داریم

$$\lambda(\theta) = 0$$

$$u = \dot{x} = c_1 \cosh t + \sinh t$$

$$2u(\theta) + \lambda(\theta) = 0$$
$$u(\theta) = 0$$

از معادله (II) داریم

$$0 = c_1 \cosh(\theta) + \sinh(\theta)$$

$$c_1 = -\tanh\theta$$

$$u(t) = \sinh t - \tanh\theta \cosh t$$

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{\sinh(t-\theta)}{\cosh\theta} \\[2ex] x = \dot{u} = \dfrac{\cosh(t-\theta)}{\cosh\theta} \end{cases}$$

کنترل خطی بهینه Linear optimal Control: یک حالت خاص از مسئله قبلی

زمانی است که معادلات دیفرانسیل خطی باشه و تابع هدف بصورت زیر باشه

$$\dot{X} = AX + BU \qquad X(t_0) = X_0$$

$$I = \int_{t_0}^{t_f} (X^T Q X + U^T P U)\, dt$$

Q = symmetric , positive semidefinite

P = symmetric , positive definite

اگر مقدار مطلوب $X_d = 0$ باشه آنوقت X^TQX نشانی از خطاست

و برای اینکه ورودی سیستم از حدی تجاوز نکند ترم U^TPU به تابع هدف اضافه شده است

$$H = X^T Q X + U^T P U + \lambda^T (AX + BU)$$

$$\lambda^T = [\lambda_1 \; \ldots \; \lambda_n]$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^T = -\dfrac{\partial H}{\partial X} & \lambda(t_f) = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial U} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -2QX - A^T\lambda & ** \quad \lambda(t_f) = 0 \\ 2PU + B^T\lambda = 0 \end{cases}$$

$$U = -\frac{1}{2} P^{-1} B^T \lambda$$

برای حل شده λ را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$\lambda(t) = 2R(t)X \quad (\mathrm{I})$$

بنابراین U بهینه برابر است با

$$\boxed{U = -P^{-1} B^T R X} \quad (*)$$

از معادله سیستم داریم

$$\begin{cases} \dot{X} = AX - BP^{-1}B^T R X \\ \dot{\lambda} = 2(R\dot{X} + \dot{R}X) = -2QX - 2A^T R X \rightarrow ** \end{cases}$$

از معادله مربوط به λ داریم (I)

از حذف $\dot{X}$ داریم

$$[\dot{R} + RA + A^T R - RBP^{-1}B^T R + Q]X(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = -RA - A^T R + RBP^{-1}B^T R - Q} \quad \text{Riccati}$$

$$\lambda(t_f) = 0 \Rightarrow R(t_f) = 0$$

از حل معادله فوق میتوان $R(t)$ را بدست آورد و با استفاده از معادله (*) U

بهینه را میتوان بدست آورد. اگر $t_f \to \infty$ گردد $R(t)$ بدست تکرار

مقدار ثابتی میل می کند که از حل معادله Riccati بدست می آید وقتی $\frac{dR}{dt}$ را صفر قرار دهیم.

شکل حل مسئله فوق حل معادله غیرخطی ریکاتی است.

مثال:

$$\dot{x} = -x + u$$

$$I = \int_0^T (x^2 + u^2)\, dt$$

$$A = -1 \quad B = 1 \quad Q = 1 \quad P = 1$$

معادله ریکاتی بصورت زیر است

$$R(t) = r(t)$$

$$\dot{r}(t) = +2r + r^2 - 1$$

$$\dot{r} - 2r - r^2 = -1 \qquad r(T) = 0$$

این معادله ریکاتی است و داریم

$$[\; P_1 = -2 \quad Q_1 = -1 \quad R_1 = 1 \;]$$

$$r = \frac{\bar{U}'}{Q_1 \bar{U}} = -\frac{\bar{U}'}{\bar{U}}$$

$$\bar{U}'' - 2\bar{U}' - 1 = 0$$

$$m^2 - 2m - 1 = 0$$

$$m_1 = 1 + \sqrt{2} \qquad m_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$\bar{U} = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

$$r = -\frac{m_1 C_1 e^{m_1 t} + C_2 m_2 e^{m_2 t}}{C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}} = -\frac{m_1 e^{m_1 t} + a m_2 e^{m_2 t}}{e^{m_1 t} + a e^{m_2 t}}$$

$$r(T) = 0$$

$$a = -\frac{m_1}{m_2} e^{T(m_1 - m_2)}$$

بعد از جایگزینی و تغییر فرم داریم

$$r = \frac{e^{m_1 t} - e^{T(m_1 - m_2) + m_2 t}}{\frac{1}{m_2} e^{T(m_1 - m_2) + m_2 t} - \frac{1}{m_1} e^{m_1 t}}$$

یا

$$r = \frac{e^{m_1 (t-T)} - e^{m_2 (t-T)}}{\frac{1}{m_2} e^{m_2 (t-T)} - \frac{1}{m_1} e^{m_1 (t-T)}}$$

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = -(1-\sqrt{2}) \qquad \frac{1}{m_2} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2})$$

$$r = \frac{-\exp[(1+\sqrt{2})(t-T)] + \exp[(1-\sqrt{2})(t-T)]}{(\sqrt{2}+1)\exp[(1-\sqrt{2})(t-T)] - (1-\sqrt{2})\exp[(1+\sqrt{2})(t-T)]}$$

$$\boxed{r = \frac{\exp[-\sqrt{2}(t-T)] - \exp[\sqrt{2}(t-T)]}{(\sqrt{2}+1)\exp[-\sqrt{2}(t-T)] + (\sqrt{2}-1)\exp[\sqrt{2}(t-T)]}}$$

$$U_{opt} = -P^{-1} B^T R X$$

$$\boxed{U_{opt} = \frac{-\{\exp[-\sqrt{2}(t-T)] - \exp[\sqrt{2}(t-T)]\}\, x}{(\sqrt{2}+1)\exp[-\sqrt{2}(t-T)] + (\sqrt{2}-1)\exp[\sqrt{2}(t-T)]}}$$

که اگر بخواهیم U را مستقل از x بدست آوریم میتوان بجای U در معادله سیستم قرار داد

x را بدست آورده و آنگاه u را می‌توان حساب کرد. اگر تابع هدف بصورت زیر بود

$$I = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2)\,dt$$

آنگاه می‌توانیم با حدگیری از جواب قبلی جواب معادله ریکاتی را بدست آوریم

$$r_0 = \lim_{T\to\infty} r = \lim_{T\to\infty} \frac{\exp[-\sqrt{2}(t-T)] + \exp[\sqrt{2}(t-T)]}{(\sqrt{2}+1)\exp[-\sqrt{2}(t-T)] + (\sqrt{2}-1)\exp[\sqrt{2}(t-T)]}$$

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

$$u_{opt} = -(\sqrt{2}-1)\,x$$

نکته: در این حالت می‌توان r_0 را از حل معادله ریکاتی بدست آورد اگر $\dot{R}=0$ باشد

در این حالت داریم

$$r_0^2 + 2r_0 - 1 = 0$$

$$r_0 = -1 \pm \sqrt{2}$$

با توجه به اینکه r_0 بایستی positive semidef. باشد جواب قابل قبول $\sqrt{2}-1$ است