$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & \frac{-11}{35} & \frac{8}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues and Eigenvectors

ماتریس $(n \times n)$ A را و بردار ستونی X را در نظر بگیرید: معادله $AX = \lambda X$

که در آن λ یک عدد اسکالر را بصورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda) x_n = 0 \end{cases} \quad (*)$$

دستگاه معادلات فوق زمانی جواب غیر صفر دارد که دترمینان آن صفر باشد

یعنی $(A - I\lambda) X = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$|A-\lambda I| = (-1)^n [\lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_n] = 0$$

حاصل عبارت بالا یک چند جمله‌ای درجه n از λ است. جواب‌های این چند جمله‌ای

eigenvalue های ماتریس A نامیده می‌شوند. برای هر λ_i یک جواب

$X \neq 0$ وجود دارد که eigenvector نامیده می‌شود. دستگاه معادلات

(*) می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

معادله فوق معادله مشخصه می‌نامند (characteristic equation).

مثال: مطلوبست Eigenvalue ها و Eigenvector های ماتریس زیر

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$\lambda = 1, 2, 3$

Eigenvectors :

$$AX = \lambda X$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (5-\lambda) x_1 + 7 x_2 - 5 x_3 = 0 \\ (4-\lambda) x_2 - x_3 = 0 \\ 2 x_1 + 8 x_2 - (3+\lambda) x_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{cases} 4 x_1 + 7 x_2 - 5 x_3 = 0 \\ 3 x_2 - x_3 = 0 \\ 2 x_1 + 8 x_2 - 4 x_3 = 0 \end{cases}$$

x_1 و x_3 را بر حسب x_2 بدست می آوریم

$$x_3 = 3 x_2$$

$$x_1 = 2 x_2$$

$$x_2 = k$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ k \\ 3k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

زیرا هر eigenvector ای از ضرب بردار فوق در یک ثابت بدست می آید

به همین ترتیب برای بقیه مقادیر λ عمل می کنیم

$\lambda = 2 \qquad x_3 = 2x_2 \qquad x_1 = x_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3 \qquad x_3 = x_2 \qquad x_1 = -x_2 \qquad x_2 = k$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ k \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

قضیه Cayley-Hamilton هر ماتریسی در معادله مشخصه خودش صدق می کند

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A - I\lambda| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 14 = 0$$

$$A^2 - 7A + 14I = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 14\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 & -14 \\ 7 & -28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ، باشد مطلوبست A^4

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$A^2 - 3A + 2I = 0$$

$$A^2 = 3A - 2I$$

طرفین را در A ضرب می‌کنیم

$$A^3 = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A$$

$$A^3 = 9A - 6I - 2A = 7A - 6I$$

$$A^4 = 7A^2 - 6A = 7(3A - 2I) - 6A$$

$$A^4 = 15A - 14I = \begin{bmatrix} -29 & 45 \\ -30 & 46 \end{bmatrix}$$

محاسبه معکوس یک ماتریس با استفاده از قضیه Cayley-Hamilton

اگر ماتریس $(n \times n)$ A را در نظر بگیریم معادله مشخصه آن بصورت زیر است

$$|A - \lambda I| = (-1)^n [\lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \beta_n] = 0$$

طبق قضیه Cayley-Hamilton داریم

$$A^n + \beta_1 A^{n-1} + \cdots + \beta_n I = 0$$

طرفین را در A^{-1} ضرب می‌کنیم و بر حسب A^{-1} حل می‌کنیم

$$\boxed{A^{-1} = \frac{-1}{\beta_n} [A^{n-1} + \beta_1 A^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} I]}$$

مثال) معکوس ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$$

$$-A^3 + 8A^2 - 13A + 6I = 0$$

$$-A^2 + 8A - 13I + 6A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[A^2 - 8A + 13I\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left[\begin{bmatrix} -34 & 35 & 35 \\ -35 & 36 & 35 \\ -35 & 35 & 36 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 11 & -5 & -5 \\ 5 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

جلسه ششم

Adjoint matrix : ماتریس مربع A را در نظر بگیرید. حاصلضرب

دترمینان A در A^{-1} را adjoint matrix A گوییم $\qquad |A| = \det(A)$

A_{ij} عبارتند از cofactor ها : $\qquad Adj(A) = |A|\,A^{-1} = (A_{ij})^T$

قضیه sylvester اگر ماتریس مربع A دارای n eigenvalue متفاوت

باشد، و P یک چند جمله‌ای از ماتریس A بصورت زیر باشد

$$P(A) = c_0 A^k + c_1 A^{k-1} + \cdots + c_{k-1} A + c_k I$$

میتوان نشان داد که

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) \frac{\operatorname{adj}[I\lambda_i - A]}{\Phi'(\lambda_i)}}$$

که در آن

$$\Phi(\lambda) = |I\lambda - A|$$

$$\Phi'(\lambda) = \frac{d\Phi}{d\lambda}$$

مثال: مطلوبست A^{10} اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$P(A)$ را بصورت زیر در نظر میگیریم

$$P(A) = A^{10}$$

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \qquad \Phi'(\lambda) = 2\lambda - 4$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

$$[I\lambda - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}}{|I\lambda - A|}$$

$$\operatorname{adj}[I\lambda - A] = |I\lambda - A|\,[I\lambda - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$P(A) = A^{10} = P(\lambda_1)\frac{\operatorname{adj}[I\lambda_1 - A]}{\Delta'(\lambda_1)} + P(\lambda_2)\frac{\operatorname{adj}[I\lambda_2 - A]}{\Delta'(\lambda_2)}$$

$$A^{10} = 1^{10}\frac{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{(-2)} + 3^{10}\frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{2}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3^{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$$

نتایج Bocher : اگر ماتریس $(n\times n)$ A را در نظر بگیریم و S_i را بصورت زیر تعریف کنیم.

$S_1 = \operatorname{trace}[A]$

$S_2 = \operatorname{trace}[A]^2$

$S_n = \operatorname{trace}[A]^n$

روابط زیر بین ضرائب معادله مشخصه β_i و S_i وجود دارد

$\beta_1 = -S_1$

$\beta_2 = -\frac{1}{2}(\beta_1 S_1 + S_2)$

$\beta_3 = -\frac{1}{3}(\beta_2 S_1 + \beta_1 S_2 + S_3)$

$\dots$

$\beta_n = -\frac{1}{n}(\beta_{n-1} S_1 + \beta_{n-2} S_2 + \dots + \beta_1 S_{n-1} + S_n)$

مثال: مطلوبست معکوس ماتریس زیر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 2 \\ 8 & 1 & -10 \\ -4 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 6 & 2 \\ 8 & 1 & -10 \\ -4 & 4 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 6 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -42 \end{bmatrix}$$

$S_1 = \mathrm{trace}(A) = -1$

$S_2 = \mathrm{trace}(A^2) = 31$

$S_3 = \mathrm{trace}(A^3) = -25$

$\beta_1 = 1 \qquad \beta_2 = -\frac{1}{2}(-1+31) = -15$

$\beta_3 = -\frac{1}{3}(15+31-25) = -7$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\left[A^2 + A - 15I\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 7 & -14 & -7 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

similarity transformation: اگر ماتریس A دارای ~~eigenvalue~~ بردارهای ویژه

متفاوت (distinct) باشد و در ضمن nonsingular باشد

و T ماتریسی باشد که ستونهای آن eigenvector های A باشد داریم

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس A را تبدیل به ماتریس diagonal نمائید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

قبلاً نشان دادیم که eigenvector های ماتریس فوق عبارتند از

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

اگر مقادیر ویژه تکراری باشند ممکن است T وجود نداشته باشد.

جلسه هفتم

Quadratic Forms : تابع چندمتغیره $y(x)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$
\begin{aligned}
y(x) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots & + 2a_{1n} x_1 x_n \\
+ a_{22} x_2^2 + \cdots & + 2a_{2n} x_2 x_n \\
+ \cdots \cdots \cdots & \\
& + a_{nn} x_n^2
\end{aligned}
$$

برای آنکه بتوان رابطه فوق را بصورت ماتریسی نوشت ترم های مربوط به ضرایب

را بصورت زیر می نویسیم که در آنها $a_{ij} = a_{ji}$

$$
\begin{aligned}
y(x) = \; & a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{1n} x_1 x_n \\
& a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \cdots + a_{2n} x_2 x_n \\
& + \cdots \cdots \cdots \\
& + a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \cdots + a_{nn} x_n^2
\end{aligned}
$$

$a_{ij} = a_{ji}$

یا

$$y(x) = X^T A X$$

که در آن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad X^T = [x_1 \; x_2 \cdots x_n]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

ماتریس متقارن

ماتریس A متقارن است زیرا $a_{ij} = a_{ji}$ ‏ $A = A^T$

اگر عناصر A حقیقی باشند $A = \bar{A}$ و چون A متقارن است $A = \bar{A}^T$

بنابراین ماتریس A یک ماتریس Hermitian است.

الف: $y(x)$ (یا ماتریس A) را positive Definite گویند اگر به ازای همه

مقادیر حقیقی متغیرهای $(x_1, x_2 \cdots x_n)$ مثبت باشد.

ب: اگر $y(x)$ مثبت باشد و فقط به ازای $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ صفر شود

آنگاه $y(x)$ را positive Definite گویند

ج: اگر $y(x)$ مثبت باشد و به ازای یک $X \neq 0$ هم صفر شود آنگاه

$y(x)$ را positive-Semidefinite گویند

د: اگر $y(x)$ با علامت منفی به ازای همه مقادیر حقیقی متغیرها کمتر یا مساوی

صفر باشد آنرا negative گویند

ه: اگر $y(x)$ منفی فقط به ازای $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$ صفر شود آنرا

negative Definite گویند

و- اگر $y(x)$ منفی به ازای یک $x \neq 0$ هم صفر شود آنرا

negative semidefinite گویند.

اگر $y(x)$ به ازای مقادیر حقیقی متغیرها نیز هم منفی و هم مثبت شود آنرا غیر مشخص

یا indefinite گویند

اگر ماتریس A singular باشد $y(x)$ را singular گویند و اگر

A nonsingular باشد $y(x)$ را nonsingular گویند.

هر quadratic فرم definite الزاماً nonsingular است ولی عکس

آن صادق نیست. مثلاً $y(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad |A| = -2$$

nonsingular است چون $|A| \neq 0$ است ولی definite نیست چون برای

$(x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0)$ برابر صفر است.

- Tests for Definiteness ماتریس A $(n \times n)$ را که مقادیر λ_i eigenvalue

آن می باشند در نظر بگیرید. Δ_i را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Δ_i را principal minors گویند. نحوه چک کردن شرط definiteness

در جدول زیر خلاصه شده

نوع	λ_i	Δ_i
1 - Positive definite	all $\lambda_i > 0$	$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \cdots \quad \Delta_n > 0$
2 - Positive Semidefinite	all $\lambda_i \geq 0$	$\Delta_1 \geq 0 \quad \Delta_2 \geq 0 \quad \cdots \quad \Delta_n \geq 0$
3 - Negative definite	all $\lambda_i < 0$	$\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 < 0 \cdots$
4 - Negative Semidefinite	all $\lambda_i \leq 0$	$\Delta_1 \leq 0 \quad \Delta_2 \geq 0 \quad \Delta_3 \leq 0$
5 - Indefinite	some $\lambda_i > 0$ some $\lambda_i < 0$	None of the above

مثال: نشان دهید که تابع زیر positive definite است

$$y(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$$

$$\begin{aligned} y(x) = {} & 10x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 \\ & + x_2x_1 + 4x_2^2 - x_2x_3 \\ & - 2x_3x_1 - x_3x_2 + x_3^2 \end{aligned}$$

$$y(x) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T A X$$

* مقادیر ویژه ماتریس Hermitian حقیقی هستند

$$10 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 39 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 40 + 2 + 2 - 10 - 1 - 16 = 17 > 0$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(10-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda)-1\right] - \left[(1-\lambda)-2\right] + (-2)\left[-1+2(4-\lambda)\right]$$

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 48\lambda - 17 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.403734 \qquad \lambda_2 = 3.95581 \qquad \lambda_3 = 10.63816$$

بنابراین $J(x)$ positive definite است.

از این مطلب بعداً در بحث پایداری یک سیستم و همچنین در بحث

calculus of variations استفاده فراهم کرد.