مثال: یک کابل تحت تنش بین دو نقطه $x=0$ و $x=L$ قرار گرفته. اگر انحراف

اولیه $f(x)$ و سرعت اولیه $g(x)$ باشد، مطلوب تغییر مکان هر نقطه از ~~[illegible]~~ کابل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1 $u(x,0) = f(x)$

2 $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$

3 $u(0,t) = 0$ چون دو انتها ثابت هستند

4 $u(L,t) = 0$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda^2$$

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$3,4 \Rightarrow \quad A = 0 \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2\ldots$$

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$$

$$T = C\cos\lambda c t + D\sin\lambda_n c t$$

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + D_n\sin\frac{n\pi c}{L}t$$

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = B_n C_n \qquad b_n = B_n D_n$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

با استفاده از خاصیت عمود بودن توابع سینوسی داریم

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

2 - استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

به کمک تبدیل لاپلاس مشتق زمان را از معادله دیفرانسیل حذف کرد و پس معادله دیفرانسیل را نسبت به مکان حل کرد. اگر مسئله غیر یکنواخت یک بعدی باشد معادله دیفرانسیل حاصله نسبت به مکان دیفرانسیل عادی است ولی اگر چند بعدی باشد معادله دیفرانسیل نسبت به مکان پاره‌ای است. قبل از استفاده از این روش مروری بر خواص تبدیل لاپلاس می‌کنیم

تعریف: تبدیل لاپلاس $f(t)$ بصورت زیر تعریف میشود

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

خواص تبدیل لاپلاس: در زیر بعضی از خواص مهم تبدیل لاپلاس ذکر می‌گردد

1 - تبدیل لاپلاس خطی است یعنی

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \bar{f}(s) + c_2 \bar{g}(s)$$

2 -

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n \bar{f}(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

3 - تبدیل لاپلاس از مشتق n ام یک تابع چنین میشود

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^n f(x_i,t)}{\partial x_i^n}\right\} = \frac{\partial^n \bar{f}(x_i,s)}{\partial x_i^n}$$

اثبات :

$$\int_0^\infty \frac{\partial^n f(x_i,t)}{\partial x_i^n} e^{-st}\,dt = \frac{\partial^n}{\partial x_i^n}\int_0^\infty f(x_i,t)\,e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{\partial^n \bar{f}(x_i,s)}{\partial x_i^n}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\bar{f}(s)$$ -4

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}\bar{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$ -5

-6
$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s+a)$$

-7
$$\mathcal{L}\left\{\begin{matrix} 0 & t<a \\ f(t-a) & t\geq a\end{matrix}\right\} = e^{-as}\bar{f}(s)$$

-8
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right\} = \bar{f}(s)\,\bar{g}(s)$$

Heaviside expansion theorem -9

معکوس تبدیل لاپلاس : با استفاده از جداول تبدیل لاپلاس میتوان بازائی $\bar{f}(s)$ مقدار $f(t)$ را بدست آورد. اگر بخواهیم معکوس $\frac{P(s)}{Q(s)}$ را بدست آوریم و s_k ، $k=1,2,\dots,n$ ریشه های مختلف Q باشد داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}$$

که در آن

$$Q' = \frac{dQ}{ds}$$

مثال، مطلوبست تبدیل معکوس زیر

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right\}$$

$$s_1 = 2 \qquad s_2 = -1 \qquad s_3 = 3$$

$$Q(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6 \qquad Q'(s) = 3s^2 - 8s + 1$$

$$P(s) = 2s^2 - 4$$

$$\frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{4}{-3} \qquad \frac{P(-1)}{Q(-1)} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6} \qquad \frac{P(3)}{Q'(3)} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right\} = -\frac{4}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

قضیه Heaviside's expansion برای حالتی که $\varphi(s)$ ریشه‌ی r تکرار دارد.

اگر $\varphi(s)$ دارای ریشه مکرر مرتبه r ام a باشد یعنی ترم $(s-a)^r$

در مخرج ظاهر شود $f(t)$ مربوط به این ترم از رابطه زیر بدست می‌آید

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(s-a)^r}\right\}$$

$$\boxed{f(t)=\left[\frac{\Phi^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}+\frac{\Phi^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\frac{t}{1!}+\cdots+\frac{\Phi'(a)}{1!}\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}+\Phi(a)\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right]e^{at}}$$

که در آن

$$\boxed{\Phi(s)=\frac{(s-a)^r P(s)}{\varphi(s)}}$$

مثال:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$$

$$\Phi(s)=\frac{2s^2-9s+19}{s+3}\qquad \Phi'(s)=\frac{2s^2+12s-46}{(s+3)^2}$$

$$\Phi(1)=3\qquad \Phi'(1)=-2$$

$$\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}=\frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2}{(s-1)^2}+\frac{B}{s+3}$$

$$B=\lim_{s\to-3}\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2}=4$$

$$A_{r-k} = \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}(a)$$

$$A_1 = \Phi'(1) = -2 \qquad A_2 = \Phi(1) = 3$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{2s^2 - 9s + 19}{(s-1)^2 (s+3)} \right\} = \frac{-2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{4}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{2s^2 - 9s + 19}{(s-1)^2 (s+3)} \right\} = \underline{-2e^{t} + 3te^{t} + 4e^{-3t}}$$

$$\Phi(s) = (s-1)^2 (s+3)$$

$$\Phi'(s) = 2(s-1)(s+3) + (s-1)^2$$

$$\Phi'(-3) = 16 \qquad P(s) = 2s^2 - 9s + 19$$

$$P(-3) = 64$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{2s^2 - 9s + 19}{(s-1)^2 (s+3)} \right\} = \frac{64}{16} e^{-3t} + \left(\frac{-2}{1!} \times \frac{t^0}{0!} + 3\frac{t}{1!} \right) e^{t}$$

$$= 4e^{-3t} - 2e^{t} + 3te^{t}$$

حل معادله دیفرانسیل در یک بعد

Differential Equation
B.C. + I.C $f(x,t)$

↓

Laplace Tran. respect to t

↓

ordinary diff. equ. B.C. $\bar{f}(x,s)$

↓

Solve for $\bar{f}(x,s)$

↓

Inversion of $\bar{f}(x,s)$

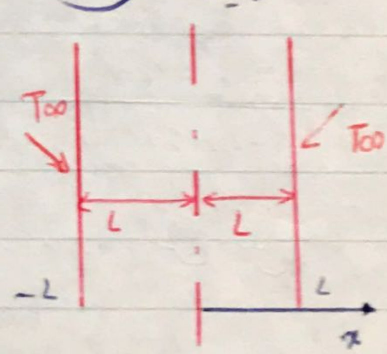
↓

Solution for $f(x,t)$

مثال: یک تیغه به ضخامت $2L$ که ابتدا در T_i است بطور ناگهانی در سیالی با دمای T_∞ که ضریب انتقال حرارت خیلی بالاست قرار می‌گیرد.

مطلوبست تغییر دمای تیغه با زمان در نقاط مختلفش

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



$$T(x,0) = T_i$$

$$T(L,t) = T_\infty \qquad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right\} = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 \bar{T}}{d x^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} = s\bar{T}(x,s) - T_i$$

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d x^2} = \frac{s}{\alpha}\bar{T} - \frac{T_i}{\alpha}$$

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d x^2} - \frac{s}{\alpha}\bar{T} = \frac{-T_i}{\alpha} \quad (I)$$

از شرایط مرزی تبدیل لاپلاس می‌گیریم

B.C.1 $\frac{d\bar{T}(0,s)}{dx} = 0$ $\qquad \bar{T}(L,s) = \frac{T_\infty}{s}$ ← B.C.2

معادله (I) یک معادله دیفرانسیل معمولی است که حلش بصورت زیر است

$$\bar{T}(x,s) = c_1 \cosh mx + c_2 \sinh mx + \frac{T_i}{s}$$

که در آن $m^2 = \frac{s}{\alpha}$ است.

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = m c_1 \sinh mx + c_2 m \cosh mx$$

B.C.1 $\left.\frac{d\bar{T}}{dx}\right|_{x=0} = c_2 = 0$

B.C.2 $c_1 \cosh mL + \frac{T_i}{s} = \frac{T_\infty}{s}$

$$C_1 = -\frac{T_i - T_\infty}{s \cosh mL}$$

جلسه سی و چهارم

$$\bar{T}(x,s) = \frac{T_i}{s} - (T_i - T_\infty)\frac{\cosh\sqrt{s/\alpha}\,x}{s\cosh\sqrt{s/\alpha}\,L} \qquad (II)$$

برای بدست آوردن $T(x,t)$ باید تبدیل معکوس $\bar{T}(x,s)$ را با استفاده

از جدول بدست آورد. با استفاده از هندبوک ریاضی ص 171 داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

با استفاده از خاصیت

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}\bar{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

داریم

$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s/\alpha}}{\frac{s}{\alpha}\cosh a\sqrt{s/\alpha}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha t/4a^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

با این اطلاعات میتوان از معادله (II) معکوس گرفت

$$\boxed{T(x,t) = T_i - (T_i - T_\infty)\left\{1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha t/4L^2}\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\frac{x}{L}\right]\right\}}$$

یا

$$\boxed{\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2\alpha t/4L^2}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}\frac{x}{L}\right]}$$

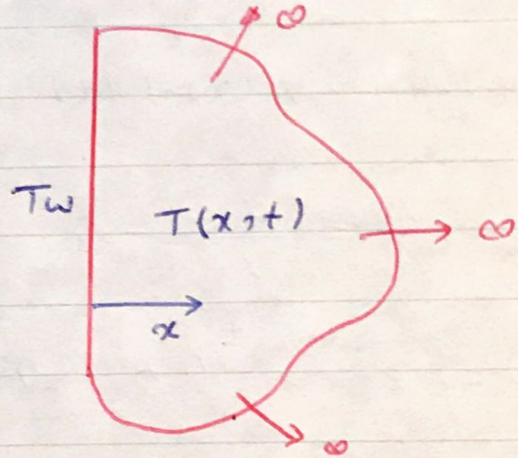
مثال: یک قطعه یکطرف نامحدود که در ابتدا در دمای T_i است را در نظر بگیرید

دمای سطح آنرا ناگهان به T_w تغییر می دهیم مطلوبست توزیع درجه حرارت

غیر یکنواخت در قطعه (این مسئله با روش جداسازی متغیرها قابل حل نیست)

حل: برحسب متغیر اضافی

$\theta = T - T_i$



بیان ریاضی مسئله بصورت زیر است

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad (I)$$

$$\theta(x,0) = 0$$

$$\theta(0,t) = T_w - T_i = \theta_w$$

$$\lim_{x \to \infty} \theta(x,t) \to 0$$

از معادله (I) تبدیل لاپلاس میگیریم

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} - \frac{s}{\alpha}\bar{\theta} = 0 \qquad (II)$$

همچنین از شرایط مرزی

1) $\bar{\theta}(0,s) = \frac{\theta_w}{s}$ 2) $\lim_{x\to\infty} \bar{\theta}(x,s) \to 0$

از حل (II) داریم

$$\bar{\theta}(x,s) = c_1 e^{-mx} + c_2 e^{mx}$$

که در آن

$$m = \sqrt{s/\alpha}$$

از شرط مرزی (2) داریم

$$\bar{\theta}(\infty,s) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

از شرط مرزی (1) داریم

$$c_1 = \theta_w/s$$

$$\frac{\bar{\theta}}{\theta_w} = \frac{e^{-x\sqrt{s/\alpha}}}{s} \qquad (III)$$

از هندبوک ریاضی داریم ص 169

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t}) \qquad \operatorname{erfc} = 1-\operatorname{erf}$$

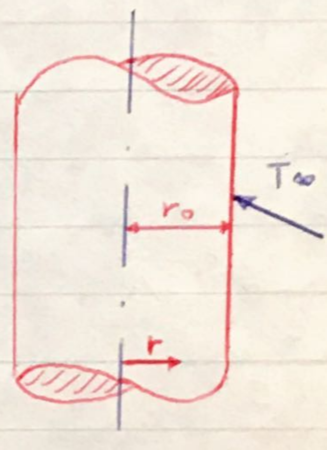
$$\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s/\alpha}}}{s/\alpha}\right\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

با استفاده از رابطه فوق میتوان معکوس تبدیل لاپلاس معادله III را بدست آورد.

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_w} = \frac{T-T_i}{T_w-T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}$$

مثال: یک میله طویل به شعاع r_0 که در ابتدا در دمای T_i است بطور ناگهان در جایی به دمای T_∞ قرار داده میشود. اگر ضریب انتقال حرارت خیلی زیاد باشد توزیع غیر یکنواخت درجه حرارت را بدست آورید

حل: بر حسب تغییر افزایشی زیر معادله دیفرانسیل چنین است



$$\theta(r,t) = T(r,t) - T_i$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (I)$$

1) $\theta(r,0) = 0$

2) $\theta(r_0,t) = T_\infty - T_i = \theta_\infty$ 3) $\theta(0,t) =$ معین

از معادله و شرایط مرزی تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\frac{d^2\bar\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar\theta}{dr} - \frac{s}{\alpha}\cdot\bar\theta = 0 \quad (II)$$

3 $\bar\theta(0,s) =$ معین 2 $\bar\theta(r_0,s) = \dfrac{\theta_\infty}{s}$

طرفین معادله (II) را در r^2 ضرب می‌کنیم

$$r^2 \frac{d^2\bar{\theta}}{dr^2} + r\frac{d\bar{\theta}}{dr} - \frac{s}{\alpha} r^2 \bar{\theta} = 0$$

که معادله شبه بسل است

$$x^2 y'' + x y' - (\beta^2 x^2 + v^2) y = 0$$

$$\bar{\theta}(r,s) = C_1 I_0\left(r\sqrt{s/\alpha}\right) + C_2 K_0\left(r\sqrt{s/\alpha}\right)$$

B.C. 3 : $K_0(0) = \infty \Rightarrow C_2 = 0$

B.C. 2 : $\dfrac{\theta_\infty}{s} = C_1 I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right)$

$$\frac{\bar{\theta}(r,s)}{\theta_\infty} = \frac{I_0\left(r\sqrt{s/\alpha}\right)}{s I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right)}$$

با استفاده از قضیه Heaviside expansion داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{I_0\left(r\sqrt{s/\alpha}\right)}{s I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right)} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}$$

که در آن s_k ریشه‌های $Q(s)$ هستند

$$s I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right) = 0$$

$$s_0 = 0$$

$$I_0\left(r_0\sqrt{s_k/\alpha}\right) = 0 \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

در جداول معمولاً صفرهای J_n و Y_n داده شده و با توجه به رابطه زیر داریم

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \qquad (+)$$

$$J_0\left(i r_0 \sqrt{s_k/\alpha}\right) = 0 \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

اگر λ_k ریشه‌های J_0 باشند داریم

$$i r_0 \sqrt{s_k/\alpha} = \lambda_k \qquad (*)$$

$$\boxed{s_k = -\frac{\alpha \lambda_k^2}{r_0^2}} \qquad k = 1, 2 \ldots$$

λ_k را میتوان از هندبوک بدست آورد ص 250

$$J_0(\lambda_k) = 0$$

$$\lambda_1 = 2.408 \qquad \lambda_2 = 5.201 \qquad \lambda_3 = 8.6537 \quad \ldots$$

حال میتوان $P(s_k)$ را حساب کرد

$$P(0) = I_0(0) = 1$$

$$P(s_k) = I_0\left(r \sqrt{s_k/\alpha}\right)$$

از $(*)$ داریم

$$\sqrt{s_k/\alpha} = \frac{\lambda_k}{i r_0} = -\frac{i \lambda_k}{r_0}$$

$$P(s_k) = I_0\left(-i r \lambda_k / r_0\right)$$

از معادله (+) برای $n=0$ داریم

$$I_0(x) = J_0(ix)$$

یا

$$I_0(-ix) = J_0(x)$$

$$P(s_k) = I_0(-ir\lambda_k/r_0) = J_0\left(\lambda_k \frac{r}{r_0}\right)$$

$$Q(s) = s\, I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right)$$

با توجه به رابطه و یک تغییر متغیر داریم

$$\frac{d I_0(mx)}{dx} = m\, I_1(mx)$$

$$\frac{dQ}{ds} = I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right) + \frac{r_0}{2}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\, I_1\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right)$$

به ازای s_k صفر می‌شود

تذکر:

$$\frac{r_0}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{s} = x$$

$$\frac{r_0}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{ds}{2\sqrt{s}} = dx \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{r_0}{2\sqrt{\alpha s}}$$

$$\frac{dI_0}{ds} = \frac{dI_0}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}$$

$$I_0\left(r_0\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right) = I_0(x)$$

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$$

$$\frac{dI_0}{ds} = I_1(x)\frac{dx}{ds} = I_1\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right)\frac{r_0}{2\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$Q'(s) = I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right) + s\,\frac{d}{ds}I_0\left(r_0\sqrt{s/\alpha}\right)$$

$$\frac{d\Phi(0)}{ds} = I_0(0) = 1$$

$$\frac{d\Phi(s_k)}{ds} = \frac{r_0}{2}\sqrt{\frac{s_k}{\alpha}}\; I_1\left(r_0\sqrt{s_k/\alpha}\right)$$

$$r_0\sqrt{s_k/\alpha} = -i\lambda_k$$

$$\frac{d\Phi(s_k)}{ds} = -\frac{i\lambda_k}{2}\, I_1(-i\lambda_k)$$

با استفاده از رابطه (۴) داریم

$$i\, I_1(-ix) = J_1(x)$$

$$\frac{d\Phi(s_k)}{ds} = -\frac{\lambda_k}{2}\, J_1(\lambda_k) \qquad k = 1, 2, \dots$$

جلسه سی و پنجم

بنابراین پاسخ نهائی بصورت زیر است

$$\boxed{\frac{\theta(r,t)}{\theta_\infty} = \frac{T(r,t)-T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r/r_0)}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} \exp\left(\frac{-\alpha\lambda_k^2}{r_0^2}t\right)}$$

$$\boxed{J_0(\lambda_k) = 0}$$

عبارت فوق را میتوان بصورت زیر نیز نوشت

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r/r_0)}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} \exp\left(\frac{-\alpha\lambda_k^2}{r_0^2}t\right)}$$

$$\boxed{J_0(\lambda_k) = 0}$$