تبدیل نامحدود فوریه

Infinite Fourier Transform

اگر $F(x)$ و $F'(x)$ در فاصله $0<x<\infty$ به صورت قطعه به قطعه پیوسته باشند و $\int_0^\infty |F(x)|\,dx$ وجود داشته باشد تبدیل نامحدود سینوسی و کسینوسی وجود داشته و داریم

$$\begin{cases} f_s(\lambda) = \int_0^\infty F(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi \\ F(x) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_c(\lambda) = \int_0^\infty F(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi \\ F(x) = \dfrac{2}{\pi} \int_0^\infty f_c(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda \end{cases}$$

کرنل مناسب

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \,, \\ a_1 X(0) + b_1 X'(0) = 0 \end{cases}$$

نوع شرط مرزی	$K(\lambda, x)$
$a_1 \neq 0 \,,\, b_1 \neq 0$	$\dfrac{\lambda \cos \lambda x - H \sin \lambda x}{\sqrt{H^2+\lambda^2}}$ $H = \dfrac{a_1}{b_1}$
$a_1 = 0$	$\cos \lambda x$
$b_1 = 0$	$\sin \lambda x$

تبدیل نامحدود هنکل

Infinite Hankel Transform

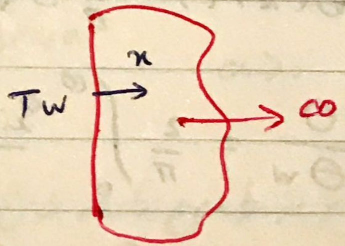
$$
\begin{cases}
H_\nu\{f(r)\} = F_\nu(\lambda) = \int_0^\infty r\, J_\nu(\lambda r) f(r)\, dr \\
f(r) = \int_0^\infty \lambda\, J_\nu(\lambda r) F_\nu(\lambda)\, d\lambda
\end{cases}
$$

چون حد پایین انتگرال صفر است کرنل بر حسب $J_\nu(\lambda r)$ می‌باشه

مثال: یک قطعه یکنواخت نامحدود که در ابتدا در دمای T_i است در نظر بگیرید. ناگهان

دمای سطح آن را به T_w تغییر دهیم. مطلوبست توزیع درجه حرارت گذرا در قطعه

$$\theta = T - T_i$$



برحسب θ بیان ریاضی مسئله بصورت زیر است

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\theta(x,0) = 0$$

$$\theta(0,t) = T_w - T_i = \theta_w$$

$$\lim_{x\to\infty} \theta(x,t) = 0$$

از طرفین معادله دیفرانسیل سینوسی فوریه می‌گیریم چون $x=0$ است و دما داده شده

$$\int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin \lambda x \, dx = \alpha \int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \sin \lambda x \, dx \; *$$

$$\frac{d\theta_s(\lambda,t)}{dt} = \alpha \left[\lambda \theta_w - \lambda^2 \int_0^\infty \theta(x,t) \sin \lambda x \, dx \right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_s}{dt} + \alpha \lambda^2 \theta_s = \alpha \lambda \theta_w \\ \theta_s(\lambda,0) = 0 \end{cases}$$

از حل این معادله دیفرانسیل داریم

$$\theta_s(\lambda,t) = \theta_w \left(\frac{1 - e^{-\alpha \lambda^2 t}}{\lambda} \right)$$

با استفاده از رابطه عکس داریم

$$\theta(x,t) = \frac{2}{\pi} \theta_w \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \left(1 - e^{-\alpha \lambda^2 t}\right) d\lambda$$

$$\frac{\theta}{\theta_w} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda^2 t} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda$$

* از $\frac{\partial \theta(\infty,t)}{\partial x} = 0$ استفاده شده که معنی آن این است که نرخ تغییرات دما در بی‌نهایت صفر است که فرض معقولی است

چون $x>0$ است با استفاده از کتاب ریاضی ص ۹۶ داریم

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda}\, d\lambda = 1$$

برای محاسبه انتگرال ۲ام بصورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا سعی می‌کنیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tx)\, dt$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = -2\int_0^\infty t e^{-t^2} \sin(2tx)\, dt$$

با انتگرال جزء به جزء داریم

$$\frac{d\Phi}{dx} = \left[e^{-t^2} \cancel{\sin 2tx} \right]_0^\infty - 2x\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tx)\, dt$$

$$\frac{d\Phi}{dx} + 2x\Phi = 0 \qquad \Phi(x) = c\,e^{-x^2}$$

$$\Phi(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = c$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tx)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$$

اگر بگیریم $t = a\lambda$ و بعد $x = \frac{y}{2a}$ داریم

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2} \cos y\lambda\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-y^2/4a^2} \qquad a>0$$

حال اگر از طرفین رابطه فوق وقتی y از صفر تا β تغییر می‌کند انتگرال بگیریم داریم

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2}\,\frac{\sin\beta\lambda}{\lambda}\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^\beta e^{-y^2/4a^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\,\operatorname{erf}\frac{\beta}{2a}$$

با استفاده از رابطه فوق داریم

$\beta = x \qquad a^2 = \alpha t$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2 t}\,\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}\,\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda^2 t}\,\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda = \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{\theta}{\theta_w} = 1-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

که همان نتیجه است که از روش تبدیل لاپلاس به دست آمد.

Infinite Hankel Transform

تبدیل نامحدود هنکل

تبدیل هنکل نامحدود تابع $f(r)$ بصورت زیر است

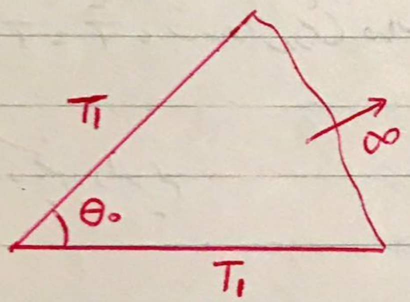
$$\boxed{H_\nu\{f(r)\} = F_\nu(\lambda) = \int_0^\infty r\, J_\nu(\lambda r)\, f(r)\, dr}$$

با توجه به خواص توابع بسل میتوان نشان داد که معکوس تبدیل فوق بصورت زیر است

$$\boxed{f(r) = \int_0^\infty \lambda\, J_\nu(\lambda r)\, F_\nu(\lambda)\, d\lambda}$$

از این تبدیل میتوان در حل مسئله لاپلاس یا دیفرانسیل در مختصات قطبی که در آن r نامحدود است استفاده کرد.

مثال: مطلوبست توزیع دما در قطعه زیر



$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(r, \theta, 0) = 0$$

$$T(r, 0, t) = T(r, \theta_0, t) = T_1$$

$$T(\infty, \theta, t) = 0$$

$$\frac{\partial T(\infty, \theta, t)}{\partial r} = 0$$

چون در ابتدا دما صفر بوده

مفهوم فیزیکی این شرط آخر این است که حرارت به بی نهایت نفوذ نمی کند. اگر دما در بی نهایت صفر نباشد و مثلاً T_∞ باشد با تغییر متغیر $\theta = T - T_\infty$ ابتدا آن را صفر کرد و در بی نهایت نرخ تغییرات صفر است

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و اینکه J_ν جواب معادله بسل است می‌توان

نشان داد که اگر $rf'(r)$ و $rf(r)$ وقتی $r \to 0$ و $r \to \infty$ میرود صفر شوند داریم

$$H_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{\nu^2 f}{r^2}\right] = \int_0^\infty r\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{\nu^2}{r^2}f\right] J_\nu(\lambda r)\,dr$$

$$= -\lambda^2 F_\nu(\lambda)$$

$$H_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{\nu^2 f}{r^2}\right] = H_\nu\left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} - \frac{\nu^2 f}{r^2}\right] = -\lambda^2 F_\nu(\lambda)$$

چون دما در دو وجه معلوم است از معادله تبدیل سینوسی می گیریم. اگر

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \nu^2\Theta = 0$$

$\bar{T} = T - T_1$ باشد و از روش جداسازی متغیرها استفاده کنیم داریم

$$\Theta = A\sin\nu\theta + B\cos\nu\theta$$

$$\Theta(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Theta(\theta_0) = 0 \qquad \nu\theta_0 = n\pi \qquad \nu = \frac{n\pi}{\theta_0}$$

بنابراین کرنل مناسب $\sin\nu\theta$ است. بعد از تبدیل داریم

$$F_s\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right\} = -\nu^2 T_s + \nu\left[T_1 - (-1)^n T_1\right]$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} T_s - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_s}{\partial t} = -\frac{T_1 \nu [1-(-1)^n]}{r^2}$$

$$T_s(r, \nu, 0) = 0$$

$$T_s(\infty, \nu, t) = 0$$

$$\frac{\partial T_s(\infty, \nu, t)}{\partial r} = 0$$

حال از معادله تبدیل نامحدود هنکل می‌گیریم داریم

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT_{s\nu}}{dt} + \lambda^2 T_{s\nu} = T_1 \nu [1-(-1)^n] \int_0^\infty \frac{J_\nu(\lambda r)}{r} dr$$

با استفاده از هندبوک ص 143 داریم

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\lambda r)}{r} dr = \frac{1}{\nu} \qquad (*)$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dT_{s\nu}}{dt} + \lambda^2 T_{s\nu} = T_1 [1-(-1)^n]$$

$$\begin{cases} \dfrac{dT_{s\nu}}{dt} + \alpha\lambda^2 T_{s\nu} = \alpha T_1 [1-(-1)^n] \\ T_{s\nu}(\lambda, \nu, 0) = 0 \end{cases}$$

$$T_{s\nu} = \frac{T_1[1-(-1)^n]}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\alpha\lambda^2 t}\right)$$

حال معکوس تبدیل هنکل می‌گیریم

$$T_s = \int_0^\infty \lambda J_\nu(\lambda r) T_{s\nu}(\lambda, \nu, t) d\lambda$$

$$T_s = T_1\left[1-(-1)^n\right]\int_0^{\infty} \frac{(1-e^{-\alpha\lambda^2 t})J_\nu(\lambda r)}{\lambda}\,d\lambda$$

$$= T_1\left[1-(-1)^n\right]\left\{\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(\lambda r)}{\lambda}\,d\lambda - \int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha\lambda^2 t}J_\nu(\lambda r)}{\lambda}\,d\lambda\right\}$$

با استفاده از (*) داریم

$$T_s = \frac{T_1\left[1-(-1)^n\right]}{\nu} - T_1\left[1-(-1)^n\right]\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\alpha\lambda^2 t}J_\nu(\lambda r)\,d\lambda$$

حال تبدیل سینوسی می‌گیریم.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\nu\theta$$

$$\int_0^{\theta_0} T\sin\nu\theta\,d\theta = b_n\int_0^{\theta_0}\sin^2\nu\theta\,d\theta = \frac{\theta_0}{2}b_n$$

$$b_n = \frac{2T_s}{\theta_0}$$

$$T = \frac{2}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty} T_s\sin\nu\theta$$

بعد از جایگذاری برای T_s داریم

$$T = \frac{2T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n}\sin\frac{n\pi\theta}{\theta_0}$$

$$-\frac{2T_1}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi\theta}{\theta_0}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\alpha\lambda^2 t}J_\nu(\lambda r)\,d\lambda$$

اگر از بسط فوریه سینوسی برای 1 استفاده کنیم داریم

$$1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^n]}{n} \sin \frac{n\pi\theta}{\theta_0}$$

$$\boxed{T(r,\theta,t)/T_1 = 1 - \frac{4}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi\theta}{\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\alpha\lambda^2 t} J_{(2n+1)\pi/\theta_0}(\lambda r)\, d\lambda}$$