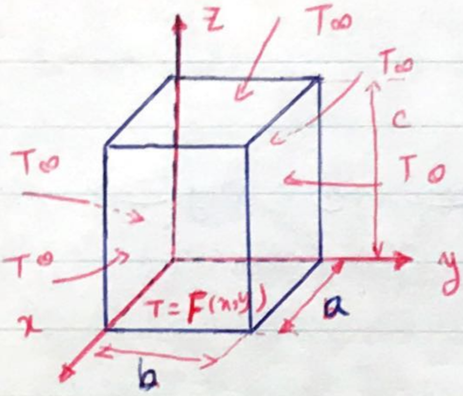
حل معادله لاپلاس در سه بعد



$T(0,y,z)=T_\infty \qquad T(x,0,z)=T_\infty \qquad T(x,y,c)=T_\infty$

$T(a,y,z)=T_\infty \qquad T(x,b,z)=T_\infty \qquad T(x,y,0)=F(x,y)$

متغیر اضافی θ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\theta = T - T_\infty$$

① $\theta(0,y,z)=0$ ③ $\theta(x,0,z)=0$ ⑤ $\theta(x,y,c)=0$

② $\theta(a,y,z)=0$ ④ $\theta(x,b,z)=0$ ⑥ $\theta(x,y,0)=F(x,y)-T_\infty=\bar{F}(x,y)$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0$$

$$\theta(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\lambda^2$$

علامت λ^2 با توجه به همگن بودن شرط در جهت x انتخاب شد.

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0$$

به همین ترتیب در مورد Y و Z داریم

$$-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}-\lambda^2=\beta^2$$

با توجه با اینکه در جهت y همگن است علامت β^2 مثبت شده.

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\beta^2 Y=0$$

$$\frac{d^2Z}{dz}-(\lambda^2+\beta^2)Z=0$$

حل عمومی بصورت زیر است

$$\theta(x,y,z)=(A_1\cos\lambda x+A_2\sin\lambda x)(B_1\cos\beta y+B_2\sin\beta y)$$

$$(C_1 e^{z\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}+C_2 e^{-z\sqrt{\lambda^2+\beta^2}})$$

جلسه سی ام

$$B.C.\ 1,3 \Rightarrow A_1=B_1=0$$

$$B.C.\ 5 \Rightarrow C_2=-C_1 e^{2c\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}$$

$$\theta(x,y,z)=A\sin\lambda x\sin\beta y\sinh\sqrt{\lambda^2+\beta^2}\,(c-z)$$

$$A=2A_2B_2C_1 e^{c\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}$$

$$B.C.\ 2,4 \Rightarrow \begin{cases}\sin\lambda a=0 & \lambda_m=\dfrac{m\pi}{a} & m=1,2\cdots\\[2ex] \sin\beta b=0 & \beta_n=\dfrac{n\pi}{b} & n=1,2\cdots\end{cases}$$

$$\theta(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,(c-z)\right]$$

B.C.6 $\Rightarrow$

$$F(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,c\right]$$

$$B_{mn}=A_{mn}\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,c\right]$$

$$F(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

طرفین را در $\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{b}$ ضرب کرده انتگرال می‌گیریم زیرا معادله مربوط به

x و y از نوع Sturm Liouville است و بنابراین توابع آنها مجموعه متعامد تشکیل می‌دهند

$$\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{b}\,dx\,dy=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\int_0^a\int_0^b\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\int_0^a\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx\int_0^b\sin\frac{q\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

طرف راست صفر است مگر $p=m$ و $n=q$ باشد. در این حالت

انتگرال اول $\frac{a}{2}$ و انتگرال دوم $\frac{b}{2}$ است

بنابراین ضرائب A_{mn} برابرند با

$$\boxed{A_{mn} = \frac{4}{ab}\left\{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\; c\right]\right\}^{-1} \int_0^a\int_0^b \left[f(x,y)-T_\infty\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy}$$

$$\boxed{T(x,y,z)-T_\infty = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \cdot \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\;(c-z)\right]}$$

subject :   date :

حل معادله پوآسون در دو بعد

معادله پوآسون در دو بعد در مختصات کارتزین بصورت زیر است :

$$\nabla^2 u = g(x, y)$$

حالت اوّل :

$$g(x, y) = \text{ثابت}$$

پاسخ را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x)$$

یا

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(y)$$

حالت دوم :

$$g(x, y) = g(x)$$

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x)$$

یا

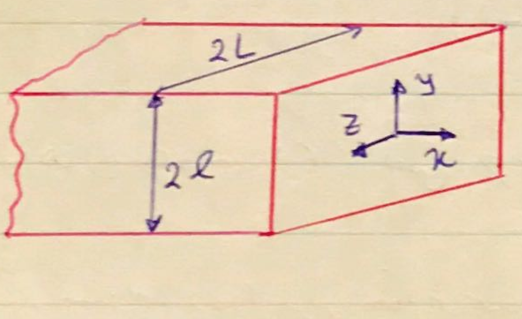
$$g(x, y) = g(y)$$

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(y)$$

حالت سوم - اگر $g(x, y)$ باشد، از روش تبدیلات می توان مسئله را حل کرد.

جریان poiselle در دو بعد

سیالی با دانسیته ρ و ویسکوزیته μ در یک کانال افقی به ارتفاع $2l$ و عرض $2L$ تحت اختلاف فشار در جهت x جریان دارد. مطلوبست توزیع سرعت یکنواخت سیال.



$$v = w = 0$$

$$C: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad u = u(y, z)$$

$$Mx: \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \qquad (11)$$

$$My: \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \qquad (12)$$

$$Mz: \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow P = P(x, y)$$

با استفاده از (12) داریم

$$P = \rho g y + f(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{df(x)}{dx} \qquad (13)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

یکطرف تابع x و یکطرف تابع y و z است لذا

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} = \text{ثابت} = \frac{\Delta P}{\Delta x}$$

بنابراین داریم

$$0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \qquad (14)$$

$$\begin{cases} B.C.1 \quad u(\ell, z) = 0 & B.C.2 \quad \dfrac{\partial u(0, z)}{\partial y} = 0 \\ B.C.3 \quad u(y, L) = 0 & B.C.4 \quad \dfrac{\partial u(y, 0)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

متغیرهای بدون بعد زیر را تعریف می‌کنیم

$$\phi = \frac{u}{\left(-\frac{\Delta P}{\Delta x}\right) \frac{\ell^2}{\mu}} \qquad \xi = \frac{y}{\ell} \qquad \zeta = \frac{z}{\ell}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = -1 \qquad (15)$$

$$\begin{cases} B.C.1 \quad \Phi(1, \zeta) = 0 & B.C.2 \quad \dfrac{\partial \Phi(0, \zeta)}{\partial \xi} = 0 \\ B.C.3 \quad \Phi(\xi, L/\ell) = 0 & B.C.4 \quad \dfrac{\partial \Phi(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(\xi, \zeta) = \Psi(\xi, \zeta) + \Theta(\xi)$$

$$* \begin{cases} \dfrac{d^2 \Theta}{d \xi^2} = -1 \\ \Theta(1) = 0 \qquad \dfrac{d\Theta(0)}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = 0 \\ \Psi(1, \zeta) = 0 \quad (a) \qquad \dfrac{\partial \Psi(0, \zeta)}{\partial \xi} = 0 \quad (b) \\ \Psi(\xi, L/\ell) = -\Theta(\xi) \quad (c) \qquad \dfrac{\partial \Psi(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0 \quad (d) \end{cases}$$

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = -\xi + C_1 \qquad \frac{d\Theta(0)}{d\xi} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Theta = -\frac{1}{2}\xi^2 + C_2 \qquad \Theta(1) = 0 \qquad C_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Theta = \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \qquad (16)$$

$$\Psi(\xi, \zeta) = \Psi_1(\xi)\,\Psi_2(\zeta)$$

$$* \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} + \frac{d^2 \Theta}{d \xi^2} = -1$$

$$\psi_2 \frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} + \psi_1 \frac{d^2\psi_2}{d\zeta^2} = 0$$

$$\frac{1}{\psi_1}\frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} = -\frac{1}{\psi_2}\frac{d^2\psi_2}{d\zeta^2} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_1}{d\xi^2} + \lambda^2\psi_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2\psi_2}{d\zeta^2} - \lambda^2\psi_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_1 = A\sin\lambda\xi + B\cos\lambda\xi \\[2ex] \psi_2 = C\sinh\lambda\zeta + D\cosh\lambda\zeta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{d\xi} = A\lambda\cos\lambda\xi - B\lambda\sin\lambda\xi \\[2ex] \dfrac{d\psi_2}{d\zeta} = C\lambda\cosh\lambda\zeta + D\lambda\sinh\lambda\zeta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1(0)}{d\xi} = 0 \Rightarrow A = 0 & \text{(b)} \\[2ex] \dfrac{d\psi_2(0)}{d\zeta} = 0 \Rightarrow C = 0 & \text{(d)} \end{cases}$$

$$\psi_n = a_n \cos\lambda_n\xi \cosh\lambda_n\zeta \qquad \text{(a)}$$

$$0 = a_n \cos\lambda_n \cosh\lambda_n\zeta$$

$$\cos\lambda_n = 0 \qquad \boxed{\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}} \qquad n = 0, 1, 2 \cdots \qquad (17)$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\lambda_n\xi \cosh\lambda_n\zeta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\lambda_n\xi \cosh\lambda_n L/\ell = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \qquad (*) \qquad \text{شرط مرزی}$$

$$a_n \cosh \lambda_n L/\ell \int_{-1}^{1} \cos^2 \lambda_n \xi \, d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (\xi^2 - 1) \cos \lambda_n \xi \, d\xi$$

$$a_n = -\frac{2}{\lambda_n^3} \frac{\sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n L/\ell} \qquad (18)$$

$$\psi = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n^3} \left(\frac{\cosh \lambda_n \zeta}{\cosh \lambda_n L/\ell} \right) \cos \lambda_n \xi$$

$$\sin \lambda_n = (-1)^n$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(1-\xi^2) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \left(\frac{\cosh \lambda_n \zeta}{\cosh \lambda_n L/\ell} \right) \cos \lambda_n \xi \qquad (19)$$

میتوان (ξ^2-1) را بطور فوریه داد تابع $(1-\xi^2)$ زوج است.

با استفاده از معادله (*) و قرار دادن a_n از (18) در آن داریم

$$\frac{1}{2}(\xi^2-1) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos \lambda_n \xi$$

$$\frac{1}{2}(1-\xi^2) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos \lambda_n \xi \qquad (20)$$

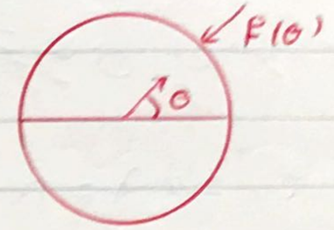
از ترکیب (20) و (19) داریم

$$\Phi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \left[1 - \frac{\cosh \lambda_n \zeta}{\cosh \lambda_n L/\ell} \right] \cos \lambda_n \xi$$

بر حسب متغیرهای اولیه معادله فوق بصورت زیر است

حل معادله لاپلاس برای یک دایره: دیسکی شعاع r_0 در نظر بگیرید. اگر توزیع دما در لبه دیسک $f(\theta)$ باشد توزیع یکنواخت دما را در هر نقطه از دیسک بیابید

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$



B.C.1 $\quad r = 0 \quad T = \text{finite}$

B.C.2 $\quad r = r_0 \quad T = f(\theta)$

B.C.3 $\quad T(r,\theta) = T(r, \theta + 2\pi)$

B.C.4 $\quad \dfrac{\partial T(r,\theta)}{\partial \theta} = \dfrac{\partial T(r, \theta+2\pi)}{\partial \theta}$

$$T(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = +\lambda^2$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0 \\ r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0 \end{cases}$$

$$\Theta = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta$$

$$R(r) = C r^{\lambda} + D r^{-\lambda}$$

B.C.1 $\Rightarrow D = 0 \qquad R(r) = C r^{\lambda} \qquad \lambda > 0$ اگر

B.C.3 $\quad \Theta(\theta) = \Theta(2\pi + \theta)$

B.C.4 $\quad \Theta'(\theta) = \Theta'(2\pi + \theta)$

$$\begin{cases} [\sin\lambda\theta - \sin\lambda(\theta+2\pi)]B + [\cos\lambda\theta - \cos\lambda(\theta+2\pi)]A = 0 \\ [\sin\lambda\theta - \cos\lambda(\theta+2\pi)]B - [\sin\lambda\theta - \sin\lambda(\theta+2\pi)]A = 0 \end{cases}$$

دستگاه فوق زمانی جواب غیر صفر برای A و B دارد که دترمینان آن صفر باشد

$\cos 2\pi\lambda = 1 \qquad \lambda = n \quad n = 0, 1, 2 \ldots$ چون λ مثبت است $n = 0, 1, 2 \ldots$ را در نظر می‌گیریم

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$T(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

از طرفین در فاصله $0 - 2\pi$ انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = a_0 \int_0^{2\pi} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos n\theta\,d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin n\theta\,d\theta$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$$

و اگر یکبار در $\cos n\theta$ و بار دیگر در $\sin n\theta$ ضرب کرده در فاصله فوق انتگرال بگیریم داریم

$$a_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta \qquad n = 1, 2 \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta \qquad n = 1, 2 \ldots$$

اگر بجای a_n و b_n جایگزین کنیم داریم

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\left[\cos n\theta\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi\,d\phi\right.$$
$$\left.+\sin n\theta\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin n\phi\,d\phi\right]$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\,d\phi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n(\theta-\phi)\,d\phi$$

جای انتگرال و Σ را میتوان عوض کرد چون سری همگراست

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\phi)\right]f(\phi)\,d\phi$$

که در آن $\rho=\frac{r}{r_0}$ است.

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho^n\cos n(\theta-\phi)\right]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho^n e^{in(\theta-\phi)}+\rho^n e^{-in(\theta-\phi)}\right]$$

برای یک سری هندسی داریم $|q|<1$

$$a+aq+aq^2+\dots=\frac{a}{1-q}$$

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho^n\cos n(\theta-\phi)\right]=1+\frac{\rho e^{i(\theta-\phi)}}{1-\rho e^{i(\theta-\phi)}}+\frac{\rho e^{-i(\theta-\phi)}}{1-\rho e^{-i(\theta-\phi)}}$$
$$=\frac{1-\rho^2}{1-\rho e^{i(\theta-\phi)}-\rho e^{-i(\theta-\phi)}+\rho^2}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}$$

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\phi)}f(\phi)\,d\phi$$

$$\begin{cases} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{cases}\qquad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$$

اگر بجای $\frac{r}{r_0} = \rho$ قرار دهیم داریم

$$T(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi)\, d\phi$$

انتگرال فوق را انتگرال پواسون گویند

تذکر: میتوان نشان داد که شرط پیوسته بودن تابع و مشتق اش

روی مرز شرایط مرزی مساله اشتورم لیوویل را ارضا می کند. معادله

بصورت زیر

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

$$y(a) = y(b) \qquad a = \theta \qquad b = \theta + 2\pi$$

$$y'(a) = y'(b)$$

قبلاً نشان دادیم که برای خاصیت تعامد لازم است که

$$\Big\{ p(x) \left[\Phi_m(x)\, \Phi_n'(x) - \Phi_m'(x)\, \Phi_n(x) \right] \Big\}_{x=a}^{x=b} = 0$$

برای سیستم فوق $p(x)=1$ است و لذا برای تعامد باید

$$\left[\Phi_m(b)\, \Phi_n'(b) - \Phi_m'(b)\, \Phi_n(b) \right] - \left[\Phi_m(a)\, \Phi_n'(a) - \Phi_m'(a)\, \Phi_n(a) \right] = 0$$

باشد. از طرفی داریم

$$\begin{cases} \Phi_m(a) = \Phi_m(b) \\ \Phi_m'(a) = \Phi_m'(b) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi_n(a) = \Phi_n(b) \\ \Phi_n'(a) = \Phi_n'(b) \end{cases}$$

با توجه به روابط فوق، ترمهای داخل دو براکت فوق برابرند و خاصیت

تعامد اثبات می گردد.