subject :   date :

معادلات دیفرانسیل عادی

یک معادله دیفرانسیل خطی درجه nام بصورت زیر است:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)\, y = f(x)$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول - حالت خاصی از معادله فوق است

برای $n=1$

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)\, y = f(x) \qquad a_0(x) \neq 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$$

می توان نشان داد که حل معادله فوق بصورت زیر است:

$$y(x) = e^{-\int P dx}\left[\int Q e^{\int P dx} dx + c\right]$$

معادله برنولی   Bernoulli's Eq این معادله بصورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n \qquad n \neq 0, 1$$

اگر تغییر تابع زیر را بدهیم داریم

$$z = y^{1-n}$$

معادله برحسب z بصورت زیر در می آید

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x) = (1-n)Q(x$$

معادله فوق خطی مرتبه اول است و از حل آن داریم

subject :

date :

$$z = e^{-(1-n)\int P\,dx}\left[(1-n)\int Q\, e^{(1-n)\int P\,dx}\,dx + c\right]$$

معادله ریکاتی Riccati's Eq - معادله غیرخطی مرتبه اول

بصورت زیر است

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y + Q(x)\,y^2 = R(x)$$

با تغییر تابع زیر به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ با ضرائب متغیر تبدیل می شود که حل آن بعداً بررسی خواهد شد.

$$y = \frac{dv/dx}{v\,Q(x)} = \frac{v'}{vQ}$$

معادله برحسب v بصورت زیر است:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(P - \frac{Q'}{Q}\right)\frac{dv}{dx} - RQv = 0$$

معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی و همگن:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

فرض کنیم حل بصورت $y = e^{mx}$ باشد بعد از جایگزینی داریم

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

$am^2 + bm + c = 0$ characteristic equation معادله مشخصه

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y_1 = e^{m_1 x} \qquad y_2 = e^{m_2 x}$$

حل کلی بصورت زیر است

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

برحسب اینکه $\Delta = b^2 - 4ac$ چقدر باشد پاسخ متفاوت است. نتیجه در جدول زیر خلاصه شده

$m_1 \neq m_2$	$b^2 - 4ac > 0$	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
$m_1 = m_2$	$b^2 - 4ac = 0$	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$
$m_1 = p + iq$ $m_2 = p - iq$	$b^2 - 4ac < 0$	$y = e^{px}(A \sin qx + B \cos qx)$

معادله دیفرانسیل رتبه دو خطی غیرهمگن فرم کلی این معادلات با ضرایب ثابت

بصورت زیر است

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

جواب معادله بصورت زیر است

$$y = \text{جواب همگن} + \text{جواب خاص}$$

بر حسب فرم $f(x)$ میتوان جواب خاص معادله را حدس زد. از جدول

زیر میتوان برای تعیین فرم جواب خاص استفاده کرد.

$f(x)$	فرم جواب خاص
$P_n(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$	$x^s(A_0 x^n + \cdots + A_n)$
$P_n(x)\, e^{\alpha x}$	$x^s(A_0 x^n + \cdots + A_n)\, e^{\alpha x}$
$P_n(x)\, e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases}$	$x^s[(A_0 x^n + \cdots + A_n)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + (B_0 x^n + \cdots + B_n)\, e^{\alpha x} \sin \beta x]$

s کوچکترین عدد مثبت صحیح است که باعث میشود جواب معادله همگن در جواب خاص ظاهر نشود.

در مورد $\cosh \beta x$ یا $\sinh \beta x$ میتوان از توابع $\exp$ استفاده کرد و عیناً مانند توابع $\cos \beta x$ و $\sin \beta x$ در جدول فوق عمل کرد و بجای سینوس و کسینوس معادل توابع هیپربولیک جایگزین کرد. اگر y_1 جواب خاص معادله $ay''+by'+cy=R_1(x)$ باشد و y_2 جواب خاص $ay''+by'+cy=R_2(x)$ آنگاه y_1+y_2 جواب خاص معادله زیر است

$$ay''+by'+cy=R_1(x)+R_2(x)$$

مثال: مطلوبست حل معادله زیر

$$y''+3y'+2y=5e^{-x}+4x^2$$

اول جواب معادله همگن را بدست می‌آوریم

$$y''+3y'+2y=0$$

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$(m+2)(m+1) = 0$$

$$m_1 = -2 \qquad m_2 = -1$$

$$y_c = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$ جواب همگن

$$y'' + 3y' + 2y = 5e^{-x}$$

چون e^{-x} در جواب همگن ظاهر شده جواب خاص را بصورت زیر حدس می‌زنیم

$$Y_1 = Axe^{-x}$$

$$Y_1' = A(e^{-x} - xe^{-x})$$

$$Y_1'' = A(-e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x}) = A(xe^{-x} - 2e^{-x})$$

$$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} + 3Ae^{-x} - 3Axe^{-x} + 2Axe^{-x} = 5e^{-x}$$

$$A = 5 \qquad Y_1 = 5xe^{-x}$$

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

$$Y_2 = Bx^2 + Cx + D$$

$$2B + 3(2Bx + C) + 2(Bx^2 + Cx + D) = 4x^2$$

$$2Bx^2 + (6B + 2C)x + (2B + 3C + 2D) = 4x^2$$

از اتحاد طرفین داریم

$$\begin{cases} 2B = 4 \\ 6B + 2C = 0 \\ 2B + 3C + 2D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2 \\ C = -6 \\ D = 7 \end{cases}$$

$$\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + 5xe^{-x} + 2x^3 - 6x + 7}$$

معادله دیفرانسیل درجه n خطی با ضرایب ثابت، فرم کلی این معادلات دیفرانسیل بصورت زیر است

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

جواب این معادله دیفرانسیل بصورت زیر است

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{m_k x} + \text{جواب خاص} = y_c + y_p$$

که m_k ریشه‌های معادله مشخصه زیر است

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

جواب خاص را مانند گذشته بدست می‌آوریم

حل معادله اویلر مرتبه دوم همگن

$$L[y] = a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$$

$$y = x^r \qquad L[x^r] = x^r [a_0 r(r-1) + a_1 r + a_2] = x^r F(r)$$

حالت اول

$$F(r) = 0 \qquad r_1 \neq r_2$$

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

حالت دوم $r_1 = r_2$

$$L[x^r] = x^r F(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = L\left[\frac{\partial}{\partial r} x^r\right] = L[x^r \ln x] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r F(r)]$$

$$F(r) = a_0 (r - r_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r}[x^r a_0 (r - r_1)^2] = a_0 (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2 a_0 (r - r_1) x^r$$

$$L[x^r \ln x] = a_0 (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2 (r - r_1) x^r a_0$$

$$L[x^{r_1} \ln x] = 0$$

بنابراین

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x$$

حالت سوم

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

$$x^r = e^{r \ln x}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$x^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta)\ln x} = e^{\alpha \ln x}\, e^{i\beta \ln x}$$

$$x^{\alpha+i\beta} = x^{\alpha}\left[\cos(\beta \ln x) + i\sin(\beta \ln x)\right]$$

$$x^{\alpha-i\beta} = x^{\alpha}\left[\cos(\beta \ln x) - i\sin(\beta \ln x)\right]$$

$$y = x^{\alpha}\left[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right]$$

راه دوم:

$$t = \ln x$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

$$a_0\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

$$a_0 m^2 + (a_1 - a_0)m + a_2 = 0$$

$$y = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} = c_1 e^{m_1 \ln x} + c_2 e^{m_2 \ln x}$$

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

$m_1 = r_1$ $\quad m_2 = r_2$ $\quad y = c\, x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$

معادله اولر یا کوشی Cauchy or Euler's equation - معادله دیفرانسیل با ضرائب

متغیر معمولاً برحسب توابع معمولی غیرقابل حل است ولی معادله زیر که معادله اولر نامیده

میشود قابل حل است

$$\boxed{a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0}$$ معادله اولر

اگر تغییر متغیر $x = e^z$ یا $z = \ln x$ داده شود معادله جدید برحسب y و z معادله

دیفرانسیل با ضرائب ثابت است ومیتوان آنرا حل کرد

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$$

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dz}\right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dz^2} \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz} - 1\right) y$$

به همین ترتیب میتوان نشان داد

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3} - 3 \frac{d^2y}{dz^2} + 2 \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz} - 1\right)\left(\frac{d}{dz} - 2\right) y$$

و در حالت کلی

$$x^m \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}-1\right)\left(\frac{d}{dz}-2\right)\cdots\left(\frac{d}{dz}-m+1\right)y$$

مثال: مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2$$

$$z = \ln x$$

برحسب z معادله دیفرانسیل بصورت زیر میشود

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - 3\frac{dy}{dz} + 2y = e^{2z} + 2$$

با روش های گفته شده حل این معادله برابر است با

$$y = c_1 e^{z} + C_2 e^{2z} + z e^{2z} + 1$$

برحسب x برابر است با

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + x^2 \ln x + 1$$

The method of variation of parameters : روش تغییر پارامتر

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x) \qquad (*)$$

اگر y_1 و y_2 جواب‌های معادله همگن باشند جواب خاص را بصورت زیر فرض می‌کنیم

$$y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$$

$$y_p'(x) = (u_1'\,y_1 + u_2'\,y_2) + (u_1\,y_1' + u_2\,y_2')$$

برای ساده‌تر شدن حل مسئله شرط زیر را روی u_1 و u_2 اعمال می‌کنیم

$$u_1'\,y_1 + u_2'\,y_2 = 0$$

تحت این شرایط داریم

$$y_p'' = u_1'\,y_1' + u_2'\,y_2' + u_1\,y_1'' + u_2\,y_2''$$

بعد از جایگزینی y_p و مشتقاتش در معادله (*) داریم

$$u_1(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1) + u_2(y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2) + u_1'\,y_1' + u_2'\,y_2' = g$$

چون y_1 و y_2 جواب همگن هستند ترم‌های داخل پرانتز صفرند و داریم

$$\begin{cases} u_1'\,y_1' + u_2'\,y_2' = g \\ u_1'\,y_1 + u_2'\,y_2 = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق داریم

$$u_1' = \frac{-y_2 g}{W(y_1, y_2)} \qquad u_2' = \frac{y_1 g}{W(y_1, y_2)}$$

که در آن $W(y_1, y_2)$ رانسکین y_1 و y_2 است و برابر است با

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

چون y_1 و y_2 دو جواب مستقل اند $W \neq 0$ است ولذا میتوان

u_1' و u_2' را بدست آورده و بعد از انتگرال گیری و وارد کردن در فرمول y_p داریم

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

از روش فوق میتوان برای حالتی که ضرائب معادله دیفرانسیل متغیر نیز استفاده کرد

و همچنین برای مواردی که فرمول $g(x)$ در جدول نیست.

مثال

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \qquad 0 < x < \pi/2$$

$$m^2 + 1 = 0 \qquad m = \pm i$$

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$$

$$W = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$y_p(x) = -\cos x \int \tan x\, dx + \sin x \int dx = \cos x \operatorname{Ln} \cos x + x \sin x$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \operatorname{Ln} \cos x + x \sin x$$

روش تغییر پارامتر برای معادله درجه n ام با ضرایب متغیر. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = g(x)$$

فرض می کنیم $y_1 \cdots y_n$ جوابهای همگن باشند. جواب خاص را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

$$y_p' = (u_1 y_1' + \cdots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n)$$

برای سهولت تعیین $u_1 \cdots u_n$ شرط زیر را روی آنها می گذاریم

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم داریم

$$y_p^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + \cdots + u_n y_n^{(m)} \qquad m = 0, 1, 2 \cdots n-1$$

با $(n-1)$ شرط بصورت زیر

$$u_1' y_1^{(m-1)} + u_2' y_2^{(m-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(m-1)} = 0 \qquad m = 1, \cdots n-1$$

$$y_p^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)})$$

آخرین شرط را با جایگزینی y_p در معادله اصلی بدست می آوریم که بصورت زیر است

$$u_1' y_1^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g$$

حال از حل n معادله دیفرانسیل $u_1' \dots u_n'$ را بدست آورد.

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \dots + y_n u_n' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \dots + y_n' u_n' = 0 \\ y_1^{(n-1)} u_1' + \dots + y_n^{(n-1)} u_n' = g \end{cases}$$

چون $y_1 \dots y_n$ مستقلند دترمینان معادله فوق مخالف صفر است و از حل معادله فوق مثلاً با استفاده از روش کرامر میتوان u_m' را بدست آورده و سپس جواب خاص را بدست آورد.

$$u_m'(x) = \frac{W_m(x)}{W(x)}$$

که در آن $W(x)$ دترمینان دستگاه است و $W_m(x)$ دترمینان دستگاه است که ستون m ام آن با B که بصورت زیر تعریف شده عوض شده است

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g \end{bmatrix}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال: مطلوبست حل معادله زیر

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2x y' + 2y = 2x^4 \qquad x>0$$

اول جواب همگن را بدست می آوریم

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0$$

$$y = x^r \quad y' = r x^{r-1} \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \quad y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

$$x^r\left[r(r-1)(r-2) + r(r-1) - 2r + 2\right] = 0$$

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$$

$$(r-1)(r-2)(r+1) = 0$$

$$r_1 = 1 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = -1$$

$$y_1 = x \quad y_2 = x^2 \quad y_3 = \frac{1}{x} \qquad g = 2x$$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix}$$

$W(x) = 6x^{-1}$

$W_1(x) = -6x$ $\quad$ $W_2(x) = 4$ $\quad$ $W_3(x) = 2x^3$

$$\begin{cases} u_1' = -x^2 \\ u_2' = \frac{2}{3}x \\ u_3' = \frac{1}{3}x^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{3}x^3 \\ u_2 = \frac{1}{3}x^2 \\ u_3 = \frac{1}{15}x^5 \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{15}x^4$$

$$y_p = \frac{1}{15}x^4$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1} + \frac{1}{15}x^4$$