3- اگر $r_1 > r_2$ باشه و $r_1 - r_2 = N$ باشه داریم

$$F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$$

$$F(r+N) = (r + N - r_1)(r + N - r_2)$$

$$r_1 - r_2 = N \qquad r_2 = r_1 - N \qquad N - r_1 = -r_2$$

$$F(r+N) = (r - r_2)(r + N - r_2)$$

که قطعاً صفر میشه به ازای $r = r_2$ مقدار $F(r_2+N)$ صفر میشه و دو حالت پیش می‌آید

الف
$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \left[ (r_2 + k) p_{N-k} + q_{N-k} \right] = 0$$

از طرفی داشتیم

$$F(r_2 + N) a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left[ (r_2 + k) p_{N-k} + q_{N-k} \right] = 0$$

چون $F(r_2+N) = 0$ است داریم
$$0 \times a_N + 0 = 0$$

که در این حالت $a_N$ اختیاری میشه و با انتخاب $a_0$ و $a_N$ به عنوان ثابت‌های اختیاری جواب عمومی بدست می‌آید

مثال: $xy'' + 2y' + xy = 0$

$x = 0$ نقطه تکین منظم است

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Indicial $\quad r(r+1) = 0 \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = -1$

$$(r+1)(r+2)a_1 = 0$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+r)(n+r+1)} \qquad n \geq 2$$

$r_1 = 0 \qquad a_1 = 0$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!} \qquad a_{2n+1} = 0$$

$$y_1 = a_0 \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$r_2 = -1$

$$(r+1)(r+2)a_1 = 0 \Rightarrow 0 \times a_1 = 0$$

بنابراین $a_1$ اختیاری است

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$$

$$y_2 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

بنابراین جواب کلی بصورت زیر است

$$y = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$y = \frac{1}{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

چون $x=0$ تنها نقطه تکین است شعاع همگرائی $\infty$ است

ب :

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k [(r_2+k) P_{N-k} + q_{N-k}] \neq 0$$

در این حالت در محاسبه $a_N$ دچار اشکال نمی‌شویم و می‌توان نشان داد پاسخ دوم بصورت زیر است

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial r}\left[ (r-r_2)\, \Phi(x,r) \right]\Big|_{r=r_2}$$

مثال: $x(1-x)y'' + (2-5x)y' - 4y = 0$

$$x\,p(x) = \frac{2-5x}{1-x} \qquad x^2 q(x) = \frac{-4x}{1-x}$$

$x=0$ نقطه منفرد منظم است و تنها دیگر نقطه منفرد آن $x=1$ است بنابراین

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad a_0 \neq 0$$

شعاع همگرایی $R=1$ است

Indicial $\quad r(r+1) = 0$

$r_1 = 0 \qquad r_2 = -1$

$$(n+r)(n+r+1)a_n - (n+r+1)^2 a_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

$r_1 = 0 \qquad a_n = (n+1)a_0$

$$y_1 = a_0(1 + 2x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) = \frac{a_0}{(1-x)^2}$$

$r_2 = -1$

$$(n-1)a_n = n\, a_{n-1}$$

$n=1 \qquad 0 \times a_1 = a_0 \qquad a_0 \neq 0$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,\phi(x,r)\right]_{r=r_2}$$

$$a_n = \frac{n+r+1}{n+r}\,a_{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{n+r+1}{r+1}\,a_0$$

$$\phi(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r+1)}{r+1}\,x^{n+r}$$

$$r - r_2 = r+1$$

$$(r-r_2)\,\phi(x,r) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)\,x^{n+r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,\phi(x,r)\right] = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r}\left[(n+r+1)\ln x + 1\right]$$

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_2)\,\phi(x,r)\right]_{r=-1} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1}\left[n\ln x + 1\right]$$

$$y_2 = a_0 \ln x\,(1 + 2x + 3x^2 + \cdots) + a_0\,(x^{-1} + 1 + x + \cdots)$$

$$y_2 = \frac{a_0 \ln x}{(1-x)^2} + \frac{a_0}{x(1-x)}$$

$$y = \frac{c_1}{(1-x)^2} + c_2\left[\frac{\ln x}{(1-x)^2} + \frac{1}{x(1-x)}\right]$$

توابع متعامد orthogonal functions توابع زیر را در نظر بگیرید

$\{\phi_n(x)\}$ $n=1,2,\dots$

اگر در فاصله $(a,b)$ خاصیت زیر برقرار باشد توابع را عمود بر هم گویند

شرط عمود بودن

$$\boxed{\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx \begin{cases} =0 & m\neq n \\ \neq 0 & m=n \end{cases}}$$

توابع عمود بر هم نسبت به تابع $w(x)$ - توابع $\{\phi_n(x)\}$ نسبت به تابع $w(x)$

عمود بر هم گویند اگر

$$\boxed{\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,w(x)\,dx \begin{cases} =0 & m\neq n \\ \neq 0 & m=n \end{cases}}$$

توابع عمود نرمال orthonormal اگر مجموعه توابع متعامد $\{\phi_n(x)\}$

خاصیت زیر را نیز داشته باشند آنها را عمود نرمال گویند

$$\boxed{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx = 1}$$

اگر سری توابع عمود بر هم نرمال نباشند با تقسیم کردن آنها بر نرمال می‌توان آنها را

$$\int_a^b \phi_i^2(x)\,dx = k_i$$

عمود نرمال کرد

پس مجموعه زیر عمود نرمال است

$$\frac{\phi_1(x)}{\sqrt{K_1}}, \quad \frac{\phi_2(x)}{\sqrt{K_2}}, \quad \dots$$

جلسه هفدهم

قضیه Sturm-Liouville. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[-q(x) + \lambda w(x)\right] y = 0}$$

که در آن $p(x)$ و $w(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ پیوسته اند و $q(x)$

در فاصله $a < x < b$ پیوسته است. اگر شرایط مرزی زیر برقرار باشد

$$\begin{cases} a_1 y(a) + b_1 y'(a) = 0 & a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = 0 & a_2^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

که در آن $a_i$ و $b_i$ اعداد ثابت هستند بطوریکه $a_1$ و $b_1$ هر دو صفر نیستند

و $a_2$ و $b_2$ نیز هر دو صفر نیستند. آنوقت جوابهای $\phi_1$ و $\phi_2$ ... $\phi_n$

جوابهای معادله برای مقادیر $\lambda_1$ و $\lambda_2$ ... $\lambda_n$ باشند $\{\phi_n(x)\}$ تشکیل یک مجموعه

متعامد میدهند نسبت به $w(x)$ یعنی

$$\boxed{\int_a^b w(x)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0}$$

$\lambda_i$ ها را مقادیر ویژه eigenvalues و $\phi_i$ ها را توابع ویژه eigenfunctions گویند

$$L = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) - q \qquad L[y] + \lambda w y = 0$$

اثبات قضیه اشتروم لیویل: معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی داده شده را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[-q(x)+\lambda w(x)\right]y=0$$

$$a_1 y(a)+b_1 y'(a)=0 \qquad a_1^2+b_1^2\neq 0$$

$$a_2 y(b)+b_2 y'(b)=0 \qquad a_2^2+b_2^2\neq 0$$

اگر $\Phi_m$ و $\Phi_n$ جوابهای معادله به ازای $\lambda_m$ و $\lambda_n$ باشند داریم

$$\begin{array}{l} \Phi_n \\ \Phi_m \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d\Phi_m}{dx}\right]+\left[-q(x)+\lambda_m w(x)\right]\Phi_m=0 \\ \frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d\Phi_n}{dx}\right]+\left[-q(x)+\lambda_n w(x)\right]\Phi_n=0 \end{array}\right.$$

معادله اول را در $\Phi_n$ و دوم را در $\Phi_m$ ضرب کرده از هم کم می‌کنیم

$$\Phi_n\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d\Phi_m}{dx}\right]-\Phi_m\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d\Phi_n}{dx}\right]+(\lambda_m-\lambda_n)w(x)\Phi_m\Phi_n=0$$

بعد از ساده کردن داریم

$$\frac{d}{dx}\left\{P(x)\left[\Phi_n\frac{d\Phi_m}{dx}-\Phi_m\frac{d\Phi_n}{dx}\right]\right\}=(\lambda_n-\lambda_m)w(x)\Phi_m\Phi_n$$

از طرفین در فاصله a تا b انتگرال می‌گیریم

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)w(x)\,dx=\left\{P(x)\left[\Phi_n\frac{d\Phi_m}{dx}-\Phi_m\frac{d\Phi_n}{dx}\right]\right\}_{x=a}^{x=b}$$

$\Phi_m$ و $\Phi_n$ در شرایط مرزی صدق می‌کنند مثلاً در $x=a$ داریم

$$
\begin{aligned}
\Phi_n &\left\{ a_1 \Phi_m(a) + b_1 \frac{d\Phi_m(a)}{dx} = 0 \right. \qquad (I) \\
\Phi_m &\left| \; a_1 \Phi_n(a) + b_1 \frac{d\Phi_n(a)}{dx} = 0 \right.
\end{aligned}
$$

معادله اول را در $\Phi_n$ و دوم را در $\Phi_m$

ضرب کرده از هم کم می‌کنیم

$$b_1 \left[ \Phi_n(a) \frac{d\Phi_m(a)}{dx} - \Phi_m(a) \frac{d\Phi_n(a)}{dx} \right] = 0$$

اگر $b_1 \neq 0$ باشد باید ترم داخل کروشه صفر باشد اگر $b_1 = 0$ باشد

از دستگاه I معلوم می‌شود $\Phi_n(a) = \Phi_m(a) = 0$ که باز ترم داخل کروشه صفر است. به همین

ترتیب برای $x=b$ داریم

$$\Phi_n(b) \frac{d\Phi_m(b)}{dx} - \Phi_m(b) \frac{d\Phi_n(b)}{dx} = 0$$

با استفاده از نتایج فوق داریم

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \Phi_m(x) \Phi_n(x) w(x)\, dx = 0$$

پس

$$\int_a^b \Phi_m(x) \Phi_n(x) w(x)\, dx = 0$$

قضیه: توابع ویژه هر مسئله از نوع Sturm-Liouville عادی تشکیل یک مجموعه کامل می‌دهند و هر تابعی مانند $f(x)$ که خودش و مشتق اش در فاصله $[a, b]$ بصورت قطعه به قطعه پیوسته باشد و شرایط مرزی مسئله Sturm-Liouville را برآورده کند را میتوان برحسب توابع ویژه بصورت یک سری همگرا بسط داد.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) \quad (*)$$

برای بدست آوردن $c_n$ ها طرفین را در $w(x)\Phi_m$ ضرب کرده و انتگرال می‌گیریم

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, \Phi_m(x)\, dx = \int_a^b \left[ w(x)\, \Phi_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) \right] dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b w(x)\, \Phi_m(x)\, \Phi_n(x)\, dx$$

چون سری همگراست میتوان جای انتگرال و $\sum$ را عوض کرد

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, \Phi_n(x)\, dx = c_n \int_a^b w(x)\, \Phi_n^2(x)\, dx$$

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\, w(x)\, \Phi_n(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, \Phi_n^2(x)\, dx}$$

در نقاطی که $f(x)$ پیوسته نیست در رابطه $(*)$ بجای $f$ بایستی متوسط حد چپ

و راست بین $\frac{1}{2}\left[f(x+)+f(x-)\right]$ قرار دارد

تذکر: اگر در مسئله Sturm-Liouville یکی از حدود یا هر دو حد بی نهایت شود

یا یکی از توابع $p(x)$ یا $w(x)$ صفر شود یا یکی از توابع

$p(x)$ یا $q(x)$ یا $w(x)$ در یک حد یا هر دو حد بی نهایت شوند مسئله را

منفرد یا singular خوانند

# تابع گاما

تابع گاما Gamma Function که بصورت $\Gamma(x)$ نشان داده میشود طبق رابطه زیر تعریف میگردد

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt} \qquad x > 0$$

میتوان نشان داد که

$$\boxed{\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x)}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big]_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2!$$
$$\vdots$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \qquad \Gamma(1) = 0! = 1$$

* تابع گاما برای $x$ های منفی هم وجود دارد ولی وقتی $x$ عدد منفی صحیح باشد مقدار تابع نامشخص است $x = 0, -1, -2, \dots$

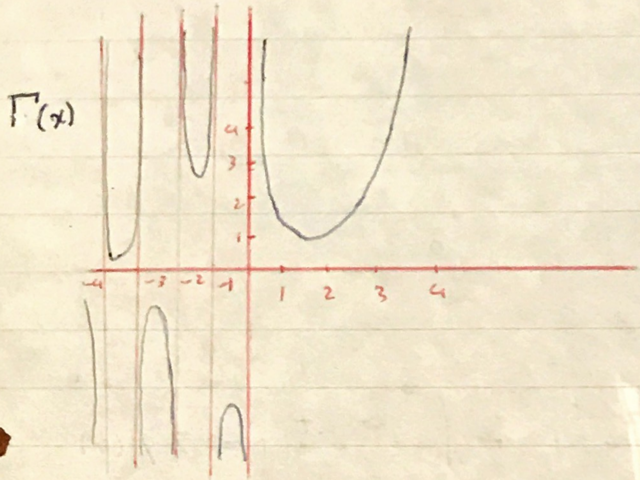
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ میتوان نشان داد

مقادیر تابع $\Gamma(x)$ در زیر نشان داده شده است

| $x$ | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma(x)$ | 1 | 0.951 | 0.918 | 0.897 | 0.887 | 0.886 | 0.893 | 0.908 | 0.931 | 0.961 | 1.0 |

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)} \qquad k = 1, 2, 3 \dots$$

ملاحظه میشود برای $x$ های منفی و عدد صحیح نامعین است.




عدد اویلر بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.577215\ldots$$

میتوان نشان داد

$$\boxed{\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma}$$

و نیز میتوان نشان داد که

$$\boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi} \qquad 0 < x < 1}$$

تابع بتا Beta Function - تابع بتا بصورت زیر تعریف میگردد

$$\boxed{B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx}$$

که برای $m,n>0$ همگرا است.

رابطه بین تابع $\Gamma$ و $B$ بصورت زیر است

$$\boxed{B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}$$

تابع خطا Error Function - تابع خطا که بصورت $erf(x)$ نشان داده

میشود مطابق تعریف برابر است با

$$\boxed{erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt}$$

$$erf(0) = 0$$

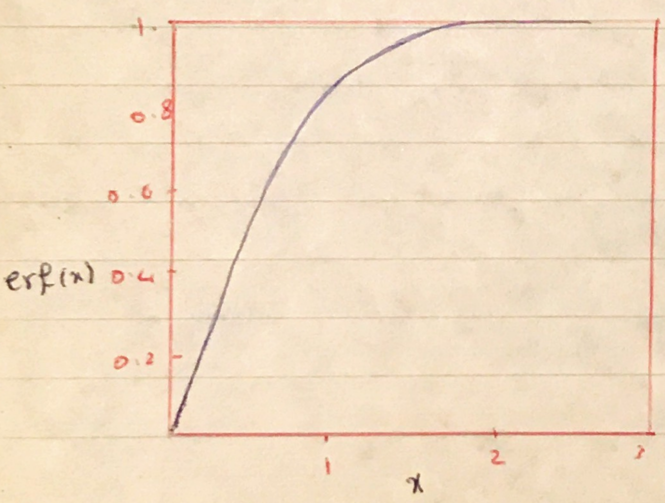
$$erf(\infty) = 1$$

مکمل تابع خطا Complementary Error Func. بصورت زیر تعریف میشود

$$\boxed{erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt}$$

$erfc(0) = 1 \quad erfc(\infty) = 0$

شکل تابع خطا بصورت زیر است



معادلات دیفرانسیل دسته ی خاص: معادله دیفرانسیل دسته ی زیر را در نظر بگیرید

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + g(x)\frac{dy}{dx} + (h_1 + \lambda h_2)\, y = 0 \quad (I)$$

اگر $p(x)$ و $q(x)$ و $w(x)$ را بصورت زیر تعریف کنیم

$$p = \exp\left[\int \frac{g}{f}\, dx\right] \qquad q = -\frac{p h_1}{f} \qquad w = \frac{p h_2}{f}$$

آنگاه معادله $(I)$ را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[-q(x) + \lambda w(x)\right] y = 0 \quad (II)$$

یک سری از مسائل مهم مهندسی و فیزیک جواب معادله $(II)$ هستند. با تغییر $\lambda$ و توابع $w(x)$ ، $p(x)$ و $q(x)$ معادلات دیفرانسیل خاصی بوجود می آیند که این معادلات را بطریق حل سری حل نموده اند و هر یک از معادلات نام خاصی دارد. این معادلات در جدول زیر خلاصه شده و ما حل هر یک و پاره ای از خواص مهم آنها را ذکر خواهیم کرد. از این معادلات در بخش حل معادلات دیفرانسیل پاره ای استفاده زیادی خواهد شد.

| تابع مخصوص | $p(x)$ | $q(x)$ | $\lambda$ | $w(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| مثلثاتی | $1$ | $0$ | $\omega^2$ | $1$ |
| لژاندر | $1-x^2$ | $0$ | $n(n+1)$ | $1$ |
| شبه لژاندر | $1-x^2$ | $-m^2/(1-x^2)$ | $n(n+1)$ | $1$ |
| چبی‌شف نوع اول | $(1-x^2)^{1/2}$ | $0$ | $n^2$ | $(1-x^2)^{-1/2}$ |
| چبی‌شف نوع دوم | $(1-x^2)^{3/2}$ | $0$ | $n(n+2)$ | $(1-x^2)^{1/2}$ |
| بسل | $x$ | $-\nu^2/x$ | $\beta^2$ | $x$ |
| لاگر | $x e^{-x}$ | $0$ | $\alpha$ | $e^{-x}$ |
| شبه لاگر | $x^{k+1} e^{-x}$ | $0$ | $\alpha-k$ | $x^{k} e^{-x}$ |
| هرمیت | $e^{-x^2}$ | $0$ | $2\alpha$ | $e^{-x^2}$ |

در جدول فوق $n$ و $m$ و اعداد صحیح و $\alpha$ و $\beta$ و $\nu$ و $\omega$ و $k$ مقادیر ثابتی هستند.

۱- تابع بسل Bessel Function - معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\boxed{x^2 y'' + x y' + (\beta^2 x^2 - \nu^2) y = 0} \quad (I)$$

این معادله، معادله بسل از درجه $\nu$ با پارامتر $\beta$ می‌باشد

Bessel's equation of order $\nu$ with a parameter $\beta$

تغییر متغیر زیر را انجام دهیم

$t = \beta x \qquad x = \frac{t}{\beta}$

پس از جایگزینی داریم

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - \nu^2) y = 0$$

سعی می کنیم جواب معادله را حول $t=0$ که یک نقطه منفرد منظم است بدست آوریم

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{r+k} \qquad a_0 \neq 0$$

بعد از گرفتن مشتقات و جایگزینی داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1) + (k+r) - \nu^2] a_k t^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{r+k+2} = 0$$

ترم آخر را بصورت زیر می نویسیم

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{r+k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} t^{r+k}$$

برای ترم اول داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1) + (k+r) - \nu^2] a_k t^{r+k} =$$

$$a_0 [r(r-1) + r - \nu^2] t^r + [(r+1)^2 - \nu^2] a_1 t^{r+1} +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(k+r)(k+r-1) + (k+r) - \nu^2] a_k t^{r+k} = 0$$

بنابراین داریم

$$a_0 (r^2 - \nu^2) t^r + [(r+1)^2 - \nu^2] a_1 t^{r+1} +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \{ [(k+r)(k+r-1) + (k+r) - \nu^2] a_k + a_{k-2} \} t^{r+k} = 0$$

$$r^2 - \nu^2 = 0 \qquad r = \pm \nu$$ Indicial معادله

حالت اول : $r = \nu$

$$a_1 [(\nu+1)^2 - \nu^2] = 0 \qquad (2\nu+1) a_1 = 0$$

$$\nu \neq -\frac{1}{2} \qquad a_1 = 0$$

جمله عمومی

$$a_k k(2\nu + k) + a_{k-2} = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{2k+1} = 0$$

میتوان نشان داد که

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}\, k!\, (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+2)(\nu+1)}$$

جلسه نوزدهم

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k (2^{\nu} a_0)}{2^{\nu+2k}\, k!\, (\nu+k)(\nu+k-1)\cdots\cdots(\nu+2)(\nu+1)}$$

اگر $\nu \neq -1, -2, -3 \dots$ باشد میتوان از $\Gamma(\nu+1)$ استفاده کرد

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \left[2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\, a_0\right]}{2^{\nu+2k}\, k!\, (\nu+k)\cdots(\nu+2)(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}$$

$$(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2)$$
$$(\nu+2)\Gamma(\nu+2) = \Gamma(\nu+3)$$
$$\vdots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \left[2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\, a_0\right]}{2^{\nu+2k}\, k!\, \Gamma(\nu+k+1)}$$

$a_0$ عددی اختیاری است و میتوان آنرا بصورت زیر اختیار کرد،

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k}\, k!\, \Gamma(\nu+k+1)}$$

$$\boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{\nu+2k}}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)}}$$

تابع بسل نوع اول از مرتبه $\nu$

و بر حسب متغیر اولیه داریم

$$\boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta x/2)^{\nu+2k}}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)}}$$

حالت خاص $\nu = -\nu$ اگر با شیوه گذشته عمل کنیم پاسخ دیگر بصورت زیر بدست می آید

$$\boxed{y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta x/2)^{2k-\nu}}{k!\, \Gamma(k+1-\nu)}}$$

تابع بسل نوع اول را با $J$ نشان میدهند

$$\boxed{J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{\nu+2k}}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)}}$$

$$\boxed{J_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k-\nu}}{k!\, \Gamma(-\nu+k+1)}}$$