بنابراین حل معادله (I) بصورت زیر است

$$y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t)$$

معمولاً بجای $J_{-\nu}(t)$ از تابع $Y_\nu(t)$ که بصورت زیر تعریف میشود برای جواب

دوم استفاده میشود

$$\boxed{Y_\nu(t) = \frac{\cos\nu\pi \, J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi}}$$

تابع بسل نوع دوم از مرتبه ν

که یک ترکیب خطی از $J_\nu(t)$ و $J_{-\nu}(t)$ است. بنابراین پاسخ معادله (I)

را میتوان بصورت زیر نشان داد

$$\boxed{y = A J_\nu(\beta x) + B Y_\nu(\beta x)} \qquad (II)$$

بنابراین اگر ν صفر و عدد صحیح نباشد و β هم هر چی باشه جواب معادله I

معادله (II) است.

ν عدد صحیح یا صفر باشد: در این حالت $J_\nu(\beta x)$ و $J_{-\nu}(\beta x)$ مستقل

خطی نیستند و میتوان نشان داد برای $\nu = n$ تابع بسل نوع اول بصورت

زیر است

$$\boxed{J_n(\beta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{\beta x}{2}\right)^{2k+n}}$$

و در این حالت داریم

$$J_n(\beta x) = (-1)^n J_{-n}(\beta x)$$

$Y_n(\beta x)$ بصورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید که می‌توان از قانون هوپیتال استفاده کرده

و آن را رفع ابهام نمود

$$Y_n(\beta x) = \frac{\left\{\frac{d}{d\nu}\left[J_\nu(\beta x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(\beta x)\right]\right\}_{\nu=n}}{\left\{\frac{d}{d\nu}(\sin \nu\pi)\right\}_{\nu=n}}$$

بعد از رفع ابهام داریم

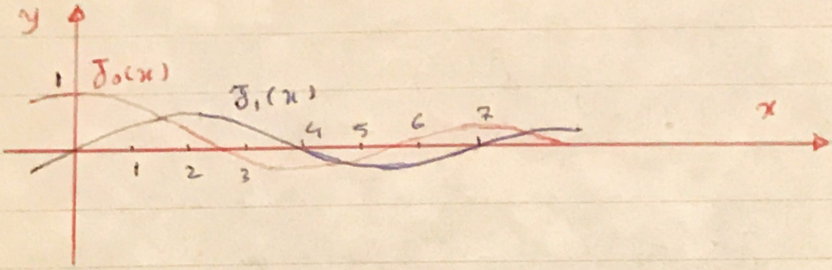
$$Y_n(\beta x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(\beta x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_n(\beta x) = {} & \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\beta x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right] J_n(\beta x) \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^{n+2r}\sum_{p=1}^{r}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p+n}\right] \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^{-n+2r} \end{aligned}}$$

شکل توابع $J_0(x)$ و $J_1(x)$ و همچنین $Y_0(x)$ و $Y_1(x)$ در زیر

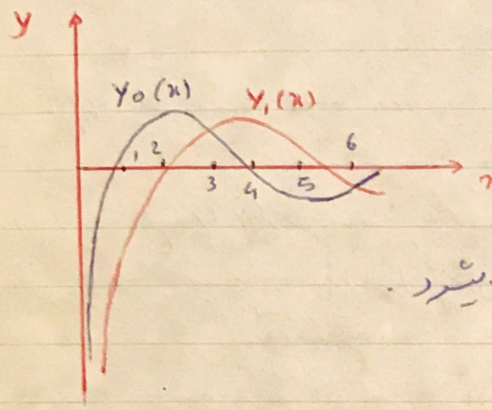
نشان داده شده است.

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$



$J_0(0) = 1$

$J_1(0) = 0$



چنانکه ملاحظه میشود تابع Y_n در صفر بی‌نهایت میشود.

توابع شبه بسل (Modified Bessel Functions) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0 \qquad (\mathrm{III})$$

این معادله حالت خاصی از معادله بسل است که در آن $\beta = i$ باشد. زیرا این معادله را میتوان بصورت زیر نوشت

$$x^2y'' + xy' + (i^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

بنابراین جواب معادله فوق برابر است با

$$y = c_1 J_\nu(ix) + c_2 Y_\nu(ix)$$

$$J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ix)^{\nu+2k}}{2^{\nu+2k}\, k!\, \Gamma(\nu+k+1)}$$

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)}$$

برای آنکه پاسخ را بتوانیم برحسب توابع حقیقی بنویسیم توابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$\boxed{I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)}$$ تابع شبه بسل نوع اول

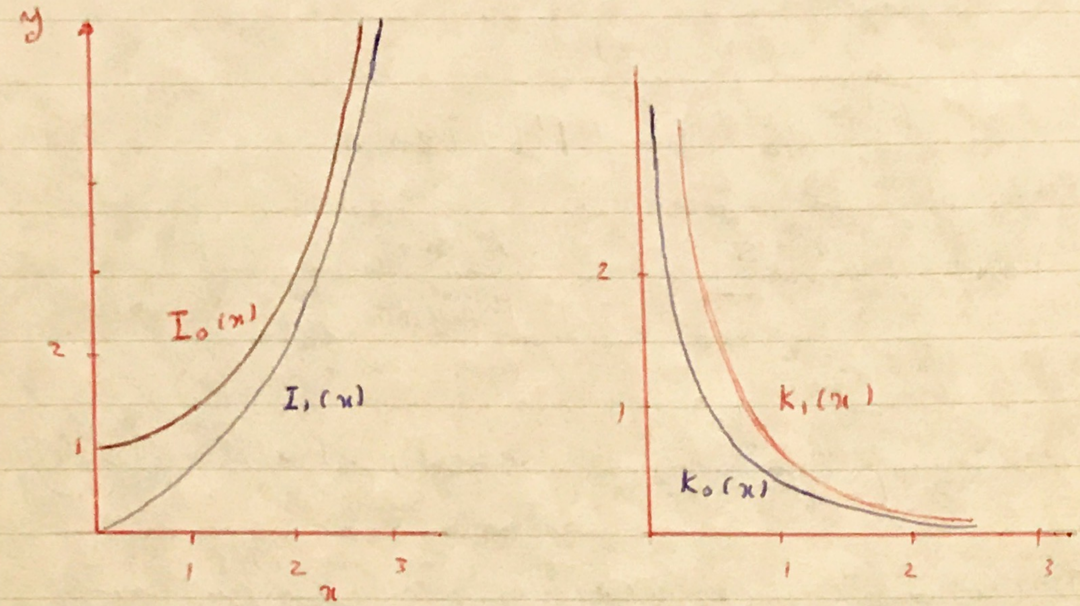
$$\boxed{K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}}$$ تابع شبه بسل نوع دوم

$$\boxed{y = A\, I_\nu(x) + B\, K_\nu(x)}$$

پس بطور کلی بیان معادله دیفرانسیل زیر پاسخ بصورت زیر است

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 y'' + x y' - (\beta^2 x^2 + \nu^2) y = 0 \\ y = A\, I_\nu(\beta x) + B\, K_\nu(\beta x) \end{array}}$$ $\nu \neq$ integer

شکل توابع $I_0(x)$ و $I_1(x)$ و همچنین $K_0(x)$ و $K_1(x)$ در زیر نشان داده شده است.



برای معادله دیفرانسیل شبه بسل (III) وقتی $v = n$ عدد صحیح است تابع شبه بسل

نوع اول برابر است با

$$\boxed{I_n(\beta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta x/2)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}}$$

و

$$I_n(\beta x) = I_{-n}(\beta x)$$

و $K_n(\beta x)$ مبهم است که پس از رفع ابهام داریم

$$\boxed{K_n(\beta x) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta x/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} \left\{ Ln\left(\frac{\beta x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{n+p} \right\} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!\,(\beta x/2)^{-n+k}}{k!}}$$

معادلات قابل حل به کمک معادله بسل

یک سری معادلات دیفرانسیل به کمک معادله بسل قابل حل می باشند که در زیر ذکر شده

۱- معادله بسل تبدیل یافته   Transformed Bessel's equation

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$x^2 y'' + (2p+1) x y' + (\beta^2 x^{2r} - \alpha^2) y = 0$$

می خواهیم نشان دهیم که حل معادله فوق بصورت زیر است

$$\begin{cases} y = x^{-p} \left\{ c_1 J_{q/r}\left(\dfrac{\beta x^r}{r}\right) + c_2 Y_{q/r}\left(\dfrac{\beta x^r}{r}\right) \right\} \\ q = \sqrt{p^2 + \alpha^2} \end{cases}$$

که در آن

حل: اول تغییر تابع زیر را میدهیم

$$y = x^{-p} z$$

$$y' = -p x^{-p-1} z + x^{-p} z'$$

$$y'' = x^{-p} z'' - 2p x^{-p-1} z' + p(p+1) x^{-p-2} z$$

بعد از جایگزینی داریم

$$x^{2-p} z'' + x^{1-p} z' + x^{-p} \left[\beta^2 x^{2r} - (\alpha^2 + p^2) \right] z = 0$$

اگر به x^{-p} تقسیم شود داریم

$$x^2 z'' + x z' + \left[\beta^2 x^{2r} - (\alpha^2 + p^2) \right] z = 0$$

حال تغییر متغیر زیر را میدهیم

$$\frac{x^r}{r} = t$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = x^{r-1} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dt}\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = x^{2r-2}\frac{d^2z}{dt^2} + (r-1)x^{r-2}\frac{dz}{dt}$$

$$x^{2r}\frac{d^2z}{dt^2} + r x^r \frac{dz}{dt} + [\beta^2 x^{2r} - (\alpha^2 + p^2)]z = 0$$

$$r^2 t^2 \frac{d^2z}{dt^2} + r^2 t \frac{dz}{dt} + [\beta^2 r^2 t^2 - (\alpha^2 + p^2)]z = 0$$

$$t^2 \frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + [\beta^2 t^2 - \frac{q^2}{r^2}]z = 0 \qquad q^2 = \alpha^2 + p^2$$

که معادله بسل است و حل آن بصورت زیر است

$$z = c_1 J_{q/r}(\beta t) + c_2 Y_{q/r}(\beta t)$$

$$z = c_1 J_{q/r}\left(\beta \frac{x^r}{r}\right) + c_2 Y_{q/r}\left(\beta \frac{x^r}{r}\right)$$

بنابراین حل معادله (I) بصورت زیر است

$$\begin{cases} y = x^{-p}\left\{c_1 J_{q/r}\left(\beta \frac{x^r}{r}\right) + c_2 Y_{q/r}\left(\beta \frac{x^r}{r}\right)\right\} \\ q = \sqrt{\alpha^2 + p^2} \end{cases}$$

Generalized Bessel's Eq.   معادله عمومی بسل

فرم کلی تری از معادله بسل که حالت قبل را نیز در بر میگیرد بصورت زیر است

$$x^2y'' + (a+2bx^s)xy' + [dx^{2r} + b(-1+a+s)x^s + b^2x^{2s} + c]y = 0$$

حالت اول: اگر $d>0$ باشد جواب معادله فوق بصورت زیر است

$$\begin{cases} y = x^{(1-a)/2}\, e^{-(bx^s/s)}\left[c_1 J_v\left(\frac{\sqrt{d}}{r}x^r\right) + c_2 Y_v\left(\frac{\sqrt{d}}{r}x^r\right)\right] \\ v = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - c} \end{cases}$$

حالت دوم: اگر $d<0$ باشد جواب بصورت زیر است

$$\begin{cases} y = x^{(1-a)/2}\, e^{-(bx^s/s)}\left[c_1 I_v\left(\frac{\sqrt{|d|}}{r}x^r\right) + c_2 K_v\left(\frac{\sqrt{|d|}}{r}x^r\right)\right] \\ v = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - c} \end{cases}$$

به عنوان مثال اگر پارامترهای معادله مقادیر زیر را داشته باشند معادله عمومی تبدیل
به معادله تبدیل یافته میگردد

$a = 2P+1 \qquad b = 0 \qquad d = \beta^2 \qquad c = -\alpha^2$

$$x^2y'' + (2P+1)xy' + (\beta^2x^{2r} - \alpha^2)y = 0$$

خواص توابع بسل

1- صفرهای توابع بسل: توابع $J_\nu(x)=0$ و $Y_\nu(x)=0$ دارای بی نهایت ریشه حقیقی هستند و اختلاف دو ریشه هر چه بزرگتر شوند به سمت عدد π میل می کند.

برای نمونه تعدادی از ریشه های $J_0(x)$ و $Y_0(x)$ را می نویسیم

$$\begin{cases} J_0(x)=0 \\ x_1=2.4048 \quad x_3=8.6537 \quad x_5=14.9303 \\ x_2=5.5201 \quad x_4=11.7915 \quad x_6=18.0711 \end{cases}$$

$$Y_0(x)=0$$

$$x_1=0.8936 \quad x_3=7.0861 \quad x_5=13.3611$$

$$x_2=3.9577 \quad x_4=10.2223 \quad x_6=16.5009$$

$$\lim_{n\to\infty}[x_n - x_{n-1}] = \pi$$

ملاحظه شد که

2 - مقدار تابع بسل برای x های کوچک و بزرگ : برای x های کوچک داریم

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{2^\nu \nu!} x^\nu$$

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{2(\nu-1)!}{\pi} x^{-\nu} \qquad \nu \neq 0$$

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln x$$

x های کوچک

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{2^\nu \nu!} x^\nu$$

$$K_\nu(x) \approx 2^{\nu-1}(\nu-1)!\, x^{-\nu} \qquad \nu \neq 0$$

$$K_0(x) \approx -\ln x$$

برای x های بزرگ داریم

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

$$I_\nu(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x$$

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}$$

3 - روابط جبری

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)$$

$$Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x)$$

$$\begin{cases} I_{\nu+1}(x) = I_{\nu-1}(x) - \dfrac{2\nu}{x} I_\nu(x) \\ K_{\nu+1}(x) = K_{\nu-1}(x) + \dfrac{2\nu}{x} K_\nu(x) \end{cases}$$

4- روابط بین مشتقات:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} Z_\nu(mx)\right] = \begin{cases} m x^{\nu} Z_{\nu-1}(mx) & Z = J, Y, I \\ -m x^{\nu} Z_{\nu-1}(mx) & Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} Z_\nu(mx)\right] = \begin{cases} -m x^{-\nu} Z_{\nu+1}(mx) & Z = J, Y, K \\ m x^{-\nu} Z_{\nu+1}(mx) & Z = I \end{cases}$$

حالت خاص از روابط بالا وقتی $\nu = 0$ است بصورت زیر است

$$\frac{d}{dx}\left[Z_0(mx)\right] = \begin{cases} -m Z_1(mx) & Z = J, Y, K \\ m Z_1(mx) & Z = I \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left[Z_\nu(mx)\right] = \begin{cases} m Z_{\nu-1}(mx) - (\nu/x) Z_\nu(mx) & Z = J, Y, I \\ -m Z_{\nu-1}(mx) - (\nu/x) Z_\nu(mx) & Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left[Z_\nu(mx)\right] = \begin{cases} -m Z_{\nu+1}(mx) + (\nu/x) Z_\nu(mx) & Z = J, Y, K \\ m Z_{\nu+1}(mx) + (\nu/x) Z_\nu(mx) & Z = I \end{cases}$$

5- خاصیت تعامد

کمیت δ_{ij} را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases}$$

1- اگر α_i و α_j ریشه معادله

$$J_\nu(ax) = 0$$

داریم

$$\int_0^a x\, J_\nu(\alpha_i x)\, J_\nu(\alpha_j x)\, dx = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\alpha_i a)\, \delta_{ij} \qquad \nu > -1$$

2- اگر α_i و α_j ریشه‌های معادله

$$J'_\nu(ax) = 0$$

$\nu > -1$

$$\int_0^a x\, J_\nu(\alpha_i x)\, J_\nu(\alpha_j x)\, dx = \left[\frac{\alpha_i^2 a^2 - \nu^2}{2\alpha_i^2} J_\nu^2(\alpha_i a)\right] \delta_{ij}$$

3- اگر α_i و α_j ریشه‌های معادله

$$\frac{dJ_\nu(ax)}{dx} + h\, J_\nu(ax) = 0$$

داریم

$$\int_0^a x\, J_\nu(\alpha_i x)\, J_\nu(\alpha_j x)\, dx = \left[\frac{(\alpha_i^2 + h^2) a^2 - \nu^2}{2\alpha_i^2} J_\nu^2(\alpha_i a)\right] \delta_{ij}$$

$\nu > -1$

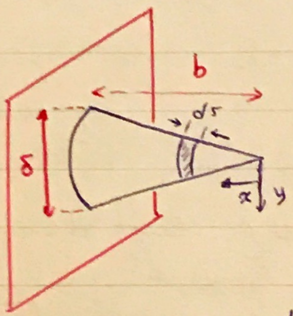
حالت‌های فوق مربوط به سه نوع شرط مرزی است. مثلاً برای انتقال حرارت شرایط فوق بصورت زیر است

$$T = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_0)$$

مثال: یک پره به شکل مخروط با ارتفاع b به پایه‌ای در دمای T_0 نصب شده مطلوبست شدت انتقال حرارت از آن اگر دمای محیط T_∞ و ضریب انتقال حرارت h باشد. h و k ثابت است



$$ds \approx dx \qquad \theta = T - T_\infty$$

$$q_x = q_{x+dx} + q_{con}$$

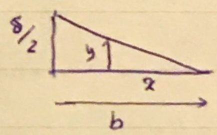
$$q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$q_x - q_{x+dx} = -\frac{dq_x}{dx}dx = k\frac{d}{dx}\left(A\frac{dT}{dx}\right)dx$$

$$q_{con} = 2\pi y\, ds\, h(T-T_\infty) \approx 2\pi y\, dx\, h\theta$$

$$k\frac{d}{dx}\left(A\frac{d\theta}{dx}\right) = 2\pi y h\theta$$

$$y = \frac{\delta}{2}\frac{x}{b} \qquad A = \pi y^2$$



$$\frac{x}{b} = \frac{y}{\delta/2}$$

$$k\frac{d}{dx}\left(y^2\frac{d\theta}{dx}\right) = 2yh\theta$$

$$y^2\frac{d^2\theta}{dx^2} + 2y\frac{dy}{dx}\frac{d\theta}{dx} - \frac{2h}{k}y\theta = 0$$

اگر مشتق y را برحسب x بگیریم داریم

$$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - m^2 x \theta = 0 \qquad m^2 = \frac{4bh}{k\delta}$$

معادله فوق را با معادله عمومی بسل مقایسه می کنیم

$$x^2 y'' + (a + 2bx^s) x y' + [d x^{2r} + b(-1 + a + s) x^s + b^2 x^{2s} + c] y = 0$$

از مقایسه داریم

$$a = 2 \qquad b = 0$$

$$d = -m^2 \qquad c = 0 \qquad r = 1/2$$

چون $d<0$ است پاسخ بصورت زیر است

$$\begin{cases} y = x^{(1-a)/2} e^{-(bx^s/s)} \left[c_1 I_\nu \left(\frac{\sqrt{|d|}}{r} x^r \right) + c_2 K_\nu \left(\frac{\sqrt{|d|}}{r} x^r \right) \right] \\ \nu = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{1-a}{2} \right)^2 - c} \end{cases}$$

$$\nu = 2 \sqrt{\left(\frac{1-2}{2} \right)^2} = 1$$

$$\theta = x^{-1/2} \left[c_1 I_1 (2m\sqrt{x}) + c_2 K_1 (2m\sqrt{x}) \right]$$

$$x = 0 \qquad \theta = \text{finite} \Rightarrow c_2 = 0$$

$$x = b \qquad \theta = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

با شرط مرزی c_1 بدست آمده و داریم

$$\boxed{\theta = \theta_0 \left(\frac{b}{x} \right)^{1/2} \frac{I_1 (2m\sqrt{x})}{J_1 (2m\sqrt{b})}}$$

مقدار انتقال حرارت

$$q_0 = -k\,\pi \delta^2/4 \;\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=b}$$

$$u = 2m\sqrt{x}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{2m^2}{u}\frac{d\theta}{du}$$

$$\theta = \theta_0 \frac{2m\sqrt{b}}{I_1(2m\sqrt{b})}\;\frac{I_1(u)}{u}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} I_\nu(x)\right] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{2m\theta_0\sqrt{b}}{I_1(2m\sqrt{b})}\;\frac{I_2(u)}{u}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2m^2}{u}\frac{d\theta}{du} = \frac{4m^3\theta_0\sqrt{b}}{I_1(2m\sqrt{b})}\;\frac{I_2(u)}{u^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{m\theta_0\sqrt{b}}{I_1(2m\sqrt{b})}\cdot\frac{I_2(2m\sqrt{x})}{x}$$

$$q_0 = -k\,\pi\,\frac{\delta^2}{4}\,\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=b}$$

$$\boxed{q_0 = -\frac{\pi k \delta^2 \theta_0 m}{4\sqrt{b}}\;\frac{I_2(2m\sqrt{b})}{I_1(2m\sqrt{b})}}$$