معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم

Partial Differential Equation

اکثر مسائل پدیده‌های انتقال منجر به حل یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌گردد.

در این بخش روش‌های حل این معادلات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی رسته دو - فرم کلی معادله دیفرانسیل رسته دوم پاره‌ای و خطی بصورت زیر است.

$$\boxed{a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+d\frac{\partial z}{\partial x}+e\frac{\partial z}{\partial y}+fz=g}$$

که a و b ... g فقط تابع x و y هستند.

1- اگر $b^2-4ac>0$ باشد معادله دیفرانسیل را هذلولی گویند

2- اگر $b^2-4ac=0$ باشد معادله دیفرانسیل را سهموی گویند

3- اگر $b^2-4ac<0$ باشد معادله دیفرانسیل را بیضوی گویند

معادلات دیفرانسیلی که در مسائل مهندسی ظاهر می‌شوند حالت‌های خاصی از معادله کلی فوق است.

۱- حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای با استفاده از روش جداسازی متغیرها

در این روش فرض می‌شود که پاسخ به صورت حاصل‌ضرب توابعی از متغیرهای مستقل می‌باشد. این روش برای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای همگن به صورت زیر با یک شرط مرزی غیرهمگن قابل استفاده است.

$$a_1(x)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + a_2(x)\frac{\partial Z}{\partial x} + a_3(x) Z + b_1(y)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + b_2(y)\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$+ b_3(y) Z = 0$$

$$Z(x,y) = X(x)\, Y(y)$$

$$\frac{1}{X}\left[a_1(x)\frac{d^2X}{dx^2} + a_2(x)\frac{dX}{dx} + a_3(x) X\right] = -\left[b_1(y)\frac{d^2Y}{dy^2} + b_2(y)\frac{dY}{dy} + b_3(y) Y\right]\frac{1}{Y}$$

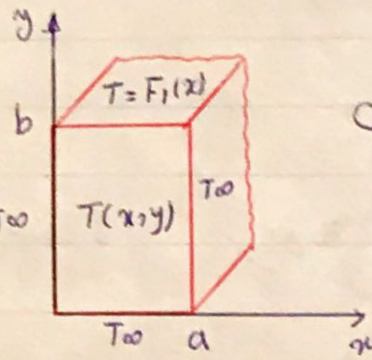
یک طرف معادله تابع x و طرف دیگر تابع y است و این امر زمانی می‌تواند تحقق پیدا کند که مساوی مقدار ثابتی باشد. اگر این مقدار را λ^2 یا $-\lambda^2$ فرض کنیم داریم

$$\begin{cases} a_1(x)\dfrac{d^2X}{dx^2} + a_2(x)\dfrac{dX}{dx} + \left[a_3(x) \pm \lambda^2\right] X = 0 \\ b_1(y)\dfrac{d^2Y}{dy^2} + b_2(y)\dfrac{dY}{dy} + \left[b_3(y) \mp \lambda^2\right] Y = 0 \end{cases}$$

علامت مثبت یا منفی را می‌توان از شرایط مرزی یا شرایط فیزیکی تعیین کرد.

حل معادله لاپلاس

مثال - یک بره به صورت زیر در نظر بگیرید. در جهت z تغییر درجه حرارتی وجود ندارد. شرایط مرزی در شکل داده شده است.



توزیع درجه حرارت را برای حالت یکنواخت و بدون منبع حرارتی بدست آورید.

$$\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \left(\cancel{v_x}\frac{\partial T}{\partial x} + \cancel{v_y}\frac{\partial T}{\partial y} + \cancel{v_z}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \alpha\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right] + \cancel{S_R}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} T(0,y) = T_\infty & 0 < y < b \\ T(a,y) = T_\infty & 0 < y < b \\ T(x,0) = T_\infty & 0 < x < a \\ T(x,b) = F_1(x) & 0 < x < a \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که شرایط مرزی غیرهمگن می‌باشند با تغییر متغیر زیر می‌توان سه تای آنها را همگن نمود

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} \theta(0, y) = 0 & a \\ \theta(a, y) = 0 & b \\ \theta(x, 0) = 0 & c \\ \theta(x, b) = F_1(x) - T_\infty = f_1(x) & d \end{cases}$$

حال شرایط جدا پذیری وجود دارد. یک شرط مرزی غیر همگن و معادله دیفرانسیل همگن

$$\theta(x, y) = X(x)\, Y(y)$$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \gamma$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} + \gamma X(x) = 0 \\ \dfrac{d^2 Y}{dy^2} - \gamma Y(y) = 0 \end{cases}$$

حالت اول - اگر $\gamma = 0$ باشد داریم

$X(x) = Ax + B \qquad X(0) = X(a) = 0$

$Y(y) = Cy + D$

$$T(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$$

از شرط چهارم پیداست که $Y(y)$ نمی تواند همواره صفر باشد. از شرط اول و دوم

داریم
$A = B = 0$

که نتیجه میدهد $\theta(x,y) = 0$ بنابراین $\gamma \neq 0$ است.

حالت دوم - $\gamma < 0$ از حل دو معادله دیفرانسیل داریم $\gamma = -\lambda^2$

$$\begin{cases} X(x) = A \sinh \lambda x + B \cosh \lambda x \\ Y(y) = C \sin \lambda y + D \cos \lambda y \end{cases}$$

$$\theta(x,y) = (A \sinh \lambda x + B \cosh \lambda x)(C \sin \lambda y + D \cos \lambda y)$$

با توجه به اعمال شرایط a و b داریم $A = 0 = B$

حالت سوم - $\gamma > 0$ یا $\gamma = \lambda^2$

$$\begin{cases} X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \\ Y(y) = C \sinh \lambda y + D \cosh \lambda y \end{cases}$$

$$\theta = (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)(C \sinh \lambda y + D \cosh \lambda y)$$

شرط a $X(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$B(C \sinh y + D \cosh \lambda y) = 0$

$B = 0$

شرط c

$Y(0) = 0 \Rightarrow D = 0$

$A \sin \lambda x \, (D) = 0 \qquad D = 0$

$A \neq 0$ وگرنه جواب ما trivial است
چون B هم صفر است

$$\theta(x,y) = E \sin \lambda x \sinh \lambda y \qquad E = AC$$

شرط b :

$$0 = E \sin \lambda a \sinh \lambda y \qquad X(a) = 0$$

$$\sin \lambda a = 0 \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{a} \qquad n = 1, 2 \ldots \qquad \lambda_n \neq 0$$

$$\theta_n(x,y) = E_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

چون هر θ_n در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند و در سه شرط مرزی نیز صادق است

ترکیب خطی آنها هم جواب است

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y$$

شرط d از اعمال این شرط داریم

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi b}{a} \qquad (*)$$

بنابراین E_n بایستی طوری انتخاب شود که رابطه فوق برقرار باشد. اگر شرایط

(a) و (b) را در نظر بگیریم داریم

$$\theta(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$\theta(a,y) = X(a)Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$$

حال معادله دیفرانسیل مربوط به X و شرایط مرزی آنرا در نظر بگیرید

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases}$$

اگر مسئله strum-Liouville را در نظر بگیرید

$$\frac{d}{dx}\left[u(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[-v(x) + \lambda w(x) \right] y = 0$$

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

مثلا خط پیشرو معادله مربوط X از نوع strum-Liouville است و داریم

$$p(x) = 1 \quad q(x) = 0 \quad w(x) = 1$$

و برای λ مقدار λ^2 داریم بنابراین

$$\int_0^a X_n(x)\, X_m(x)\, dx = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \, \sin\frac{m\pi}{a}x \, dx = 0 \qquad (I)$$

بنابراین برای بدست آوردن E_n ها طرفین معادله $(*)$ را در $\sin\frac{m\pi}{a}x$ ضرب

کرده و از طرفین در فاصله $(0 - a)$ انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}x \, f_1(x)\, dx = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\frac{n\pi b}{a} \sin\frac{n\pi}{a}x \, \sin\frac{m\pi}{a}x \, dx$$

با استفاده از رابطه (I) داریم

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\, f_1(x)\,dx = E_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\int_0^a \left(\sin\frac{n\pi}{a}x\right)^2 dx$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin\frac{2n\pi}{a}x}{\frac{4n\pi}{a}}\right]_0^a = \frac{a}{2}$$

بنابراین داریم

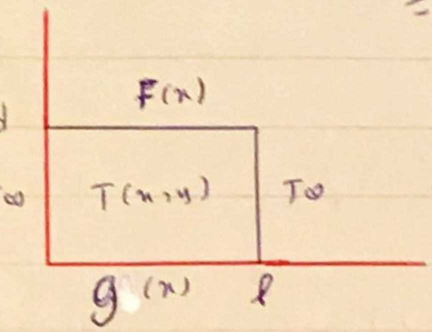
$$E_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

لذا حل نهائی بصورت زیر است

$$\boxed{\theta(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sinh\frac{n\pi}{a}y}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f_1(x')\sin\frac{n\pi}{a}x'\,dx'}$$

تذکر: در حل معادله لاپلاس از طریق جداسازی متغیرها شرط لازم این است که دو شرط مرزی همگن باشند زیرا نکته مهم این است که در یک جهت حل شد از نوع Sturm Liouville شود. ولی اگر هر شرط مرزی ناهمگن باشند و مسئله را به مسئله جداگانه که هر یک تنها یک شرط مرزی ناهمگن دارند تجزیه کنیم حل ساده‌تر است. در مثال زیر این مطلب نشان داده شده است.

مثال: مطلوبست توزیع دمای یکنواخت برای شکل زیر



$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\[2ex]
T(0,y) = T(l,y) = T_\infty \\
T(x,0) = G(x) \qquad T(x,d) = F(x)
\end{cases}
$$

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\theta(0,y) = \theta(l,y) = 0$$

$$\theta(x,0) = G(x) - T_\infty = g(x)$$

$$\theta(x,d) = F(x) - T_\infty = f(x)$$

$$\theta = X(x)\,Y(y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{cases}$$

$$\theta = (A\sin\lambda x + B\cos\lambda x)(C\sinh\lambda y + D\cosh\lambda y)$$

$\theta(0,y) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\theta(\ell,y) = 0 \qquad A\sin\lambda\ell = 0 \qquad \lambda_n = \dfrac{n\pi}{\ell} \qquad n = 1, 2, \ldots$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sinh\lambda_n y + b_n \cosh\lambda_n y)\sin\lambda_n x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\lambda_n x \qquad \theta(x,0) = g(x)$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell g(x')\sin\lambda_n x'\,dx'} \qquad (\mathrm{I})$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sinh\lambda_n d + b_n \cosh\lambda_n d)\sin\lambda_n x \qquad \theta(x,d) = f(x)$$

$$\int_0^\ell f(x)\sin\lambda_n x\,dx = (a_n \sinh\lambda_n d + b_n\cosh\lambda_n d)\int_0^\ell \sin^2\lambda_n x\,dx$$

$$\boxed{a_n \sinh\lambda_n d + b_n \cosh\lambda_n d = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x')\sin\lambda_n x'\,dx'} \qquad (\mathrm{II})$$

البته در این مورد چون در معادله (I) a_n ظاهر نشده می‌توان b_n را در (II) جایگزین کرد و a_n را بدست آورد ولی معمولاً حل مسئله بصورت حل دستگاه درمی‌آید

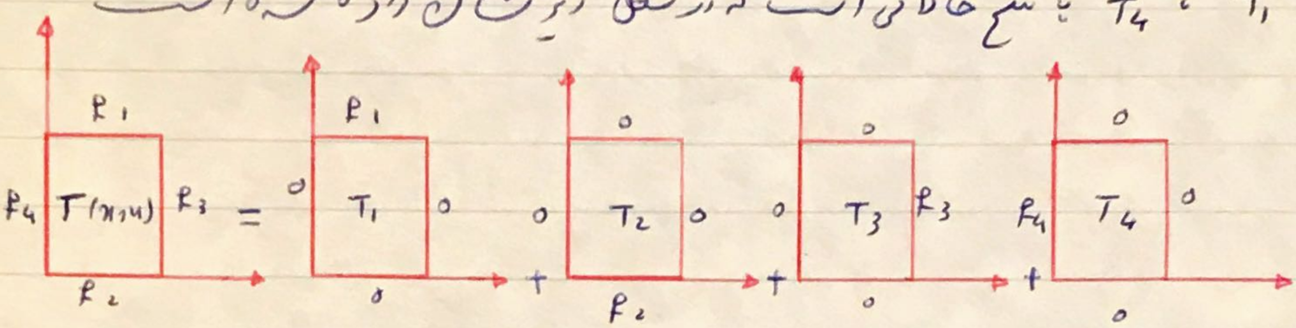
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T(0,y) = f_4(y) \qquad 0<y<b$$
$$T(a,y) = f_3(y) \qquad 0<y<b$$
$$T(x,0) = f_2(x) \qquad 0<x<a$$
$$T(x,b) = f_1(x) \qquad 0<x<a$$

جواب مسئله بصورت زیر است

$$T(x,y) = T_1(x,y) + T_2(x,y) + T_3(x,y) + T_4(x,y)$$

که T_1 تا T_4 پاسخ حالاتی است که در شکل زیر نشان داده شده است



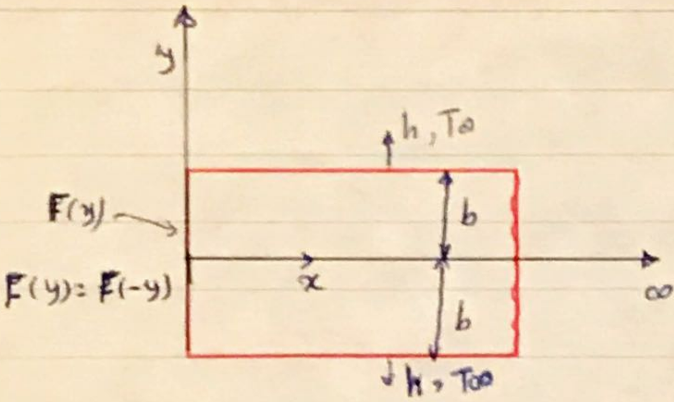
شرایط مرزی روی مشتق تابع: در بعضی از مواقع شرط مرزی روی مشتق تابع است

باشد مثال زیر

مثال: یک پره به شکل مکعب مستطیل که خیلی طویل است مطابق شکل

زیر در نظر بگیرید. اطراف پره سیالی در دمای T_∞ با ضریب انتقال حرارت

h قرار دارد. مطلوبست توزیع دما حرارت در پره



در حالت کلی معادله سیستم بصورت زیر است

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

1) $T(0,y)=F(y)$ 2) $T(\infty,y)=T_\infty$

3) $\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0$ 4) $-k\frac{\partial T(x,b)}{\partial y}=h\left[T(x,b)-T_\infty\right]$

شرط سوم بدین دلیل است که چون سیستم متقارن است یعنی اگر y به -y

تبدیل شود فرقی نمی کند $\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0$ است.

برای آنکه دو شرط مرزی دیگر همگن شود تغییر متغیر زیر را میدهیم

$$\theta(x,y)=T(x,y)-T_\infty$$

بر حسب متغیر جدید داریم

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0\\[2mm] \theta(0,y)=F(y)-T_\infty=f(y) \quad ①\\ \theta(\infty,y)=0 \quad ②\\ \frac{\partial\theta(x,0)}{\partial y}=0 \quad ③ \qquad -k\frac{\partial\theta(x,b)}{\partial y}=h\,\theta(x,b) \quad ④\end{cases}$$

$$\theta(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \\ \dfrac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

$$\theta(x,y) = (A_1 e^{-\lambda x} + A_2 e^{\lambda x})(B_1 \cos \lambda y + B_2 \sin \lambda y)$$

علامت λ^2 طوری اختیار شده که معادله دیفرانسیل عادی در جهت y از نوع معادله Sturm-Liouville شود. زیرا میدانیم توابع هیپربولیک یک مجموعه متعامد تشکیل نمی‌دهند و لذا داریم

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \\ \dfrac{dY(0)}{dy} = 0 \\ k\dfrac{dY(b)}{dy} + hY(b) = 0 \end{cases}$$

$$Y = B_2 \sin \lambda y + B_1 \cos \lambda y$$

$$\frac{dY}{dy} = \lambda B_2 \cos \lambda y - \lambda B_1 \sin \lambda y$$

$dY(0)/dy = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 0$ شرط سوم

$$K \frac{dY(b)}{dy} + hY(b) = 0$$ شرط چهارم

$$hB_1 \cos \lambda b - K \lambda B_1 \sin \lambda b = 0$$

$$\lambda \sin \lambda b = \frac{h}{k} \cos \lambda b$$

$$\lambda \tan \lambda b = \frac{h}{k}$$

پاسخ های این معادله λ_n می نامیم

$$\boxed{\lambda_n \tan \lambda_n b = \frac{h}{k}} \qquad n = 1, 2, \dots \qquad \lambda_n \neq 0$$

دسته بسته ششم

$$X(x) = A_1 e^{-\lambda x} + A_2 e^{\lambda x}$$

$X(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0$ شرط پنجم

$$\theta_n = a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y \qquad a_n = A_n B_n$$

$$\boxed{\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y}$$

برای بدست آوردن a_n ها از شرط مرزی 1 استفاده می کنیم

$$f(y) = F(y) - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y$$

طرفین را در $\cos \lambda_m y$ ضرب کرده و از ۰ تا b انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^b f(y)\cos\lambda_m y\,dy = \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\lambda_n y \cos\lambda_m y\,dy$$

با استفاده از قضیه Sturm-Liouville داریم

$$\int_0^b \cos\lambda_n y \cos\lambda_m y\,dy = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_0^b f(y)\cos\lambda_n y\,dy = \int_0^b a_n \cos^2\lambda_n y\,dy$$

$$\int_0^b f(y)\cos\lambda_n y\,dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{\sin 2\lambda_n y}{4\lambda_n}\right]_0^b a_n$$

$$\int_0^b f(y)\cos\lambda_n y\,dy = a_n\left[\frac{b}{2} + \frac{\sin b\lambda_n \cos b\lambda_n}{2\lambda_n}\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{2\lambda_n}{\lambda_n b + \sin\lambda_n b\cos\lambda_n b}\int_0^b f(y)\cos\lambda_n y\,dy}$$

$$T(0, y) = F(y) = T_0$$ حالت خاص

$$f(y) = F(y) - T_\infty = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

$$\boxed{\frac{\theta(x,y)}{\theta_0} = \frac{T(x,y) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n b}{\lambda_n b + \sin \lambda_n b \cos \lambda_n b} e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y}$$

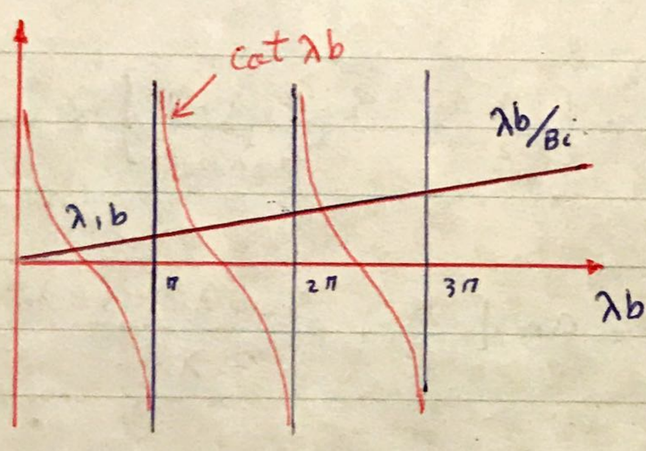
که λ_n ریشه های معادله زیرند

$$\boxed{\tan \lambda_n b = \frac{Bi}{\lambda_n b}} \quad *$$

که در آن

$$Bi = \frac{hb}{k}$$ عدد بیو است

معادله * دارای بی نهایت ریشه است که بصورت عددی یا ترسیمی بدست می آید



معادله * را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\boxed{\cot \lambda_n b = \frac{\lambda_n b}{Bi}}$$