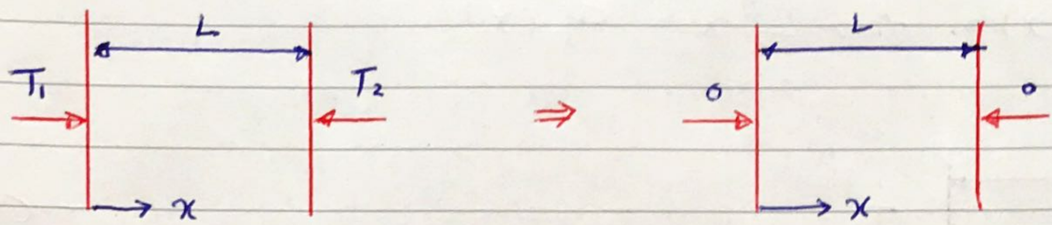
بدست آوردن کرنل مناسب

برای بدست آوردن کرنل مناسب شرایط مرزی را با حفظ فرم همگن می‌کنیم. در زیر مثال هائی در خصوص این امر زده می‌شود

الف -



$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

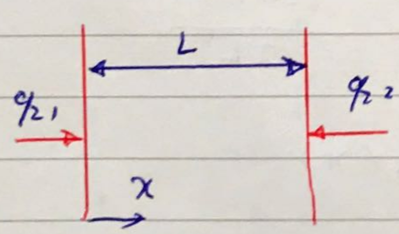
$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$X(L) = 0 \qquad \sin\lambda L = 0 \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

کرنل مناسب $\quad K(\lambda_n, x) = \sin\frac{n\pi}{L}x = \Phi_n(x)$

ب -



$$\begin{cases} -k\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_1 \\ -k\dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=L} = -q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

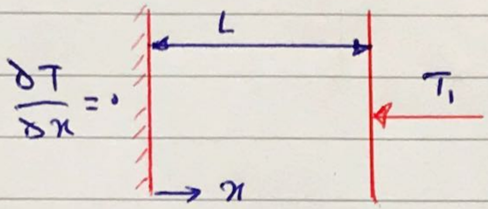
$$X' = -\lambda A\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x$$

$X'(0) = 0 \qquad B = 0$

$X'(L) = 0 \qquad \sin \lambda_n L = 0 \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} x$

$K(\lambda_n, x) = \cos \frac{n\pi}{L} x = \Phi_n(x)$

ج -



$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X'(0) = 0 \qquad X(L) = 0 \end{cases}$$

$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$

$X' = -A\lambda \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x$

$X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$X(L) = 0 \qquad \cos \lambda L = 0 \qquad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$

$K(\lambda_n, x) = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2L} = \Phi_n(x)$

بدست آوردن رابطه معکوس تبدیل

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$

$\int_0^L F(x) \Phi_n(x)\, dx = a_n \int_0^L \Phi_n^2(x)\, dx$

subject : date :

از طرفی داریم

$$f(n) = \int_0^L F(x)\,\Phi_n(x)\,dx$$

ولذا داریم

$$a_n = \frac{f(n)}{\int_0^L \Phi_n^2(x)\,dx}$$

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)\,\Phi_n(x)}{\int_0^L \Phi_n^2(x)\,dx}}$$

برای مورد الف داریم:

$$\Phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\int_0^L \Phi_n^2(x)\,dx = \frac{L}{2}$$

$$F(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

برای مورد ب داریم:

$$\Phi_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$n = 0 \qquad \Phi_0(x) = 1$$

$$\int_0^L \Phi_0^2(x)\,dx = L$$

$$n = 1, 2, \cdots \qquad \int_0^L \Phi_n^2(x)\,dx = \frac{L}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{L} f_c(0) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi}{L} x$$

maxnote

Finite Hankel Transform — تبدیل محدود هنکل

این تبدیل که در حل مسائل دیفرانسیل در سیستم استوانه‌ای بکار میرود بر حسب شرایط مرزی بصورت زیر است

1-

$$\boxed{H_\nu\{f(r)\} = F_\nu(\lambda_n) = \int_0^R r f(r) J_\nu(\lambda_n r)\,dr}$$

اگر $f(r)$ را بر حسب $J_\nu(\lambda r)$ بسط دهیم داریم

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_n) J_\nu(\lambda_n r)$$

اگر λ_n ها ریشه معادله زیر باشند

$$\boxed{J_\nu(\lambda_n R) = 0}$$

$$\int_0^R r f(r) J_\nu(\lambda_n r)\,dr = a_n \int_0^R J_\nu^2(\lambda_n r)\, r\,dr = a_n\left\{\frac{R^2}{2} J_{\nu+1}^2(\lambda_n R)\right\}$$

$$a_n(\lambda_n) = \frac{2}{R^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n R)} \int_0^R r f(r) J_\nu(\lambda_n r)\,dr$$

$$a_n(\lambda_n) = \frac{2}{R^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n R)} F_\nu(\lambda_n)$$

$$\boxed{f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_\nu(\lambda_n r)}{R^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n R)} F_\nu(\lambda_n)}$$

از این تبدیل در سیستم استوانه‌ای وقتی دما معین است بیشتر استفاده میشود

2- اگر λ_n ها ریشه‌های معادله زیر باشند

$$J_\nu'(\lambda_n R) + B J_\nu(\lambda_n R) = 0$$

$$\boxed{f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + B^2)R^2 - \nu^2} \frac{J_\nu(\lambda_n r)}{J_\nu^2(\lambda_n R)} F_\nu(\lambda_n)}$$

از تبدیل فوق وقتی استفاده می‌شود که انتقال حرارت در سطح به صورت جابجایی انجام شود.

در حالت خاص که $B=0$ است داریم

$$J'_\nu(\lambda_n R) = 0$$

$$\boxed{f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n^2}{\lambda_n^2 R^2 - \nu^2} \frac{J_\nu(\lambda_n r)}{J_\nu^2(\lambda_n R)} F_\nu(\lambda_n)}$$

از تبدیل فوق زمانی استفاده می‌شود که سطح ایزوله باشد.

3- برای استوانه توخالی که دما در دو سطح آن معلوم باشد تبدیل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\boxed{H_\nu\{f(r)\} = F_\nu(\lambda_n) = \int_{R_1}^{R_2} r f(r) V_\nu(\lambda_n r)\, dr}$$

$$V_\nu(\lambda_n r) = J_\nu(\lambda_n r) Y_\nu(\lambda_n R_1) - Y_\nu(\lambda_n r) J_\nu(\lambda_n R_1)$$

λ_n ها ریشه‌های معادله زیراند

$$\boxed{J_\nu(\lambda_n R_2) Y_\nu(\lambda_n R_1) = Y_\nu(\lambda_n R_2) J_\nu(\lambda_n R_1)}$$

$$\boxed{f(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_\nu(\lambda_n r) \frac{\lambda_n^2 J_\nu^2(\lambda_n R_2)}{J_\nu^2(\lambda_n R_1) - J_\nu^2(\lambda_n R_2)} F_\nu(\lambda_n)}$$

خواص تبدیل هنکل: برای سه حالتی که گفته گردید خواص تبدیل هنکل را بررسی می‌کنیم

حالت اول: اگر λ_n ها ریشه‌های معادله زیر باشند

$$J_\nu(R\lambda_n)=0$$

می‌خواهیم تبدیل زیر را بدست آوریم

$$H_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{\nu^2 f}{r^2}\right]=\int_0^R \frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)J_\nu(\lambda_n r)\,dr-\int_0^R \nu^2\frac{f}{r}J_\nu(\lambda_n r)\,dr \qquad (\mathrm{I})$$

از انتگرال گیری بصورت جزء به جزء داریم

$$\int_0^R \frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)J_\nu(\lambda_n r)\,dr = r\frac{df}{dr}\underbrace{J_\nu(\lambda_n r)}_{0}\Big]_0^R-\int_0^R r\frac{df}{dr}\frac{d}{dr}\left[J_\nu(\lambda_n r)\right]dr$$

مجدداً از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کرده داریم

$$\int_0^R \frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)J_\nu(\lambda_n r)\,dr = -r f\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\Big|_0^R+\int_0^R f\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right)dr \qquad (\mathrm{II})$$

از طرفی $J_\nu(\lambda_n r)$ جواب معادله بسل است و لذا داریم

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)y=0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)=-\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)r y \qquad y(\beta r)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right)=-\left(\lambda_n^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)J_\nu(\lambda_n r)\,r$$

$$\int_0^R f\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right)dr=-\lambda_n^2\int_0^R r f J_\nu(\lambda_n r)\,dr+\int_0^R \nu^2\frac{f}{r}J_\nu(\lambda_n r)\,dr \qquad (\mathrm{III})$$

از جایگزینی (III) در (II) داریم

$$\int_0^R \frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) J_\nu(\lambda_n r)\,dr - \int_0^R \frac{\nu^2}{r} f\, J_\nu(\lambda_n r)\,dr = -r f \left.\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right|_0^R \quad (IV)$$

$$-\lambda_n^2 \int_0^R f\, r\, J_\nu(\lambda_n r)\,dr$$

از مقایسه (I) و IV داریم

$$H_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{\nu^2 f}{r^2}\right] = -r f \left.\frac{dJ_\nu(\lambda_n r)}{dr}\right|_0^R - \lambda_n^2 F_\nu(\lambda_n)$$

$$\boxed{H_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) - \frac{\nu^2 f}{r^2}\right] = -R f(R) \frac{dJ_\nu(R\lambda_n)}{dr} - \lambda_n^2 F_\nu(\lambda_n)}$$

حالت خاص $\nu=0$

$$H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right] = -R f(R) \frac{dJ_0(R\lambda_n)}{dr} - \lambda_n^2 F_0(\lambda_n)$$

$$\frac{dJ_0(r\lambda_n)}{dr} = -\lambda_n J_1(r\lambda_n)$$

$$\boxed{H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right] = R\lambda_n f(R) J_1(R\lambda_n) - \lambda_n^2 F_0(\lambda_n)}$$

$$\boxed{J_0(R\lambda_n)=0}$$

حالت دوم: اگر λ_n ها ریشه‌های معادله زیر باشند

$$J_\nu(\lambda_n R) + B J_\nu(\lambda_n R) = 0$$

یا

$$\frac{dJ_\nu(\lambda_n R)}{dr} + B J_\nu(\lambda_n R) = 0$$

برای حالت خاص $\nu=0$ داریم

$$J_0'(\lambda_n R) + B\, J_0(\lambda_n R) = 0 \quad (*)$$

با دوبار انتگرال جزء به جزء داریم

$$\int_0^R \frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) J_0(\lambda_n r)\,dr = \left[r\frac{df}{dr} J_0(\lambda_n r) - r f \frac{dJ_0(\lambda_n r)}{dr} \right]_0^R$$

$$- \lambda_n^2 \int_0^R r f\, J_0(\lambda_n r)\,dr$$

مقدار داخل براکت در حد پائین صفر میشود. و برای رسیدن به حد بالا از معادله (*) استفاده میکنیم

$$\int_0^R \frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) J_0(\lambda_n r)\,dr = H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right]$$

$$J_0'(\lambda_n R) = -B\, J_0(\lambda_n R)$$

$$\boxed{H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right] = R\, J_0(\lambda_n R)\left[\frac{df}{dr} + Bf\right]_{r=R} - \lambda_n^2 F_0(\lambda_n)}$$

حالت خاص: اگر شرط مرزی طوری باشه که

$$\boxed{\left.\frac{df}{dr} + Bf\right|_{r=R} = 0}$$

در آنصورت داریم

$$\boxed{H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right] = -\lambda_n^2 F_0(\lambda_n)}$$

حالت سوم: اگر λ_n ها ریشه های معادله زیر باشند

$$J_\nu(\lambda_n R_2)\, Y_\nu(\lambda_n R_1) = Y_\nu(\lambda_n R_2)\, J_\nu(\lambda_n R_1)$$

$$V_\nu(\lambda_n r) = J_\nu(\lambda_n r)\, Y_\nu(\lambda_n R_1) - Y_\nu(\lambda_n r)\, J_\nu(\lambda_n R_1)$$

و

می‌توان نشان داد که

$$\boxed{H_\nu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)-\frac{\nu^2 f}{r^2}\right]=\frac{J_\nu(\lambda_n R_1)}{J_\nu(\lambda_n R_2)}f(R_2)-f(R_1)-\lambda_n^2 F_\nu(\lambda_n)}$$

اگر $\nu=0$ باشد داریم

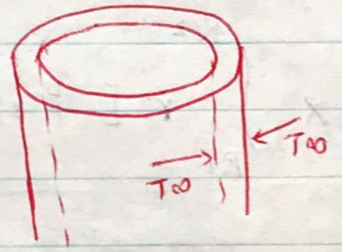
$$\boxed{H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right]=\frac{J_0(\lambda_n R_1)}{J_0(\lambda_n R_2)}f(R_2)-f(R_1)-\lambda_n^2 F_0(\lambda_n)}$$

اگر $f(R_1)=f(R_2)=0$ باشد داریم

$$H_0\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)\right]=-\lambda_n^2 F_0(\lambda_n)$$

مثال: یک استوانه توخالی که شعاع داخلی آن R_1 و شعاع خارجی آن R_2 است را در نظر بگیرید. توزیع دمای اولیه در آن $f(r)$ است. ناگهان دمای سطوح داخلی و خارجی آن T_∞ می‌گردد. مطلوبست توزیع زمانی دما

$$\theta = T - T_\infty$$



$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)$$

$$\theta(r,0) = f(r) - T_\infty = F(r)$$

$$\theta(R_1,t) = \theta(R_2,t) = 0$$

از طرفین تبدیل هنکل می‌گیریم

$$* \quad \frac{1}{\alpha}\frac{d\theta_0(\lambda_n,t)}{dt} = -\lambda_n^2\,\theta_0(\lambda_n,t)$$

که در آن λ_n ها ریشه‌های معادله زیرند

$$J_0(\lambda_n R_2)\,Y_0(\lambda_n R_1) = Y_0(\lambda_n R_2)\,J_0(\lambda_n R_1)$$

$$\theta_0(\lambda_n,t) = C(\lambda_n)\,e^{-\alpha\lambda_n^2 t}$$

از شرط اولیه تبدیل هنکل می‌گیریم

$$\theta_0(\lambda_n,0) = C(\lambda_n) = \int_{R_1}^{R_2} r\,V_0(\lambda_n r)\,F(r)\,dr$$

$$V_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r)\,Y_0(\lambda_n R_1) - Y_0(\lambda_n r)\,J_0(\lambda_n R_1)$$

$$* \quad \theta_0(\lambda_n,t) = \int_{R_1}^{R_2} r\,V_0(\lambda_n r)\,\theta(r,t)\,dr$$

$$\Theta_0(\lambda_n, t) = e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \int_{R_1}^{R_2} r\, V_0(\lambda_n r)\, F(r)\, dr$$

حال از رابطه عکس استفاده می کنیم

$$\Theta = T - T_\infty = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n R_2)\, V_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R_1) - J_0^2(\lambda_n R_2)} \times \int_{R_1}^{R_2} r \left[f(r) - T_\infty \right] V_0(\lambda_n r)\, dr \right] e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \right\}$$

بدست آوردن کرنل مناسب : معادله بسل برای $\nu=0$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_0}{dr}\right)+\lambda^2 r V_0=0$$

$$V_0(R_1)=V_0(R_2)=0$$

$$V_0(r)=C J_0(\lambda r)+D Y_0(\lambda r)$$

$$\begin{cases} C J_0(\lambda R_1)+D Y_0(\lambda R_1)=0 \\ C J_0(\lambda R_2)+D Y_0(\lambda R_2)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{vmatrix} J_0(\lambda R_1) & Y_0(\lambda R_1) \\ J_0(\lambda R_2) & Y_0(\lambda R_2) \end{vmatrix}=0$$

$$J_0(\lambda R_1)Y_0(\lambda R_2)-J_0(\lambda R_2)Y_0(\lambda R_1)=0$$

$$\boxed{J_0(\lambda_n R_1)Y_0(\lambda_n R_2)=J_0(\lambda_n R_2)Y_0(\lambda_n R_1)}$$

از معادله $(*)$ داریم

$$D=-C\frac{J_0(\lambda_n R_1)}{Y_0(\lambda_n R_1)}$$

$$V_0=C J_0(\lambda_n r)-C\frac{J_0(\lambda_n R_1)}{Y_0(\lambda_n R_1)}Y_0(\lambda_n r)$$

$$V_0=\frac{C}{Y_0(\lambda R_1)}\boxed{\underbrace{\left[J_0(\lambda_n r)Y_0(\lambda_n R_1)-Y_0(\lambda_n r)J_0(\lambda_n R_1)\right]}_{V_0(\lambda_n r)}}$$