شرایط کاربرد قضیه Heaviside وقتی توابع $P(s)$ و $Q(s)$ بصورت

سری هایی که دارای بی نهایت ترم هستند می باشند

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

$$Q(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots$$

باستی شرایط زیر برقرار باشد تا بتوان از قضیه Heaviside استفاده کرد

۱- توانهای s باستی اعداد صحیح باشند

۲- اگر $a_0 \neq$ باشد باستی b_0 صفر باشد تا در شکل دیگری به تابع گویا نرسیم

تذکر: اگر توانهای s عدد صحیح نبوده با ضرب کردن $P_1(s)$ و $Q_1(s)$ در s^k که در آن

$|k|<1$ است توابع $Q(s) = s^k Q_1(s)$, $P(s) = s^k P_1(s)$ بدست آید که

در آنها s توانهای صحیح دارد باز میتوان از قضیه استفاده کرد.

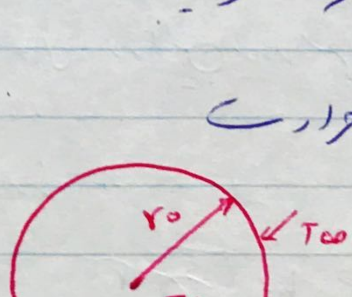
مثال: کره ای به شعاع r_0 که در ابتدا در دمای T_i است بطور ناگهانی در محیطی با دمای

T_∞ قرار داده میشود. ضریب انتقال حرارت زیاد است. مطلوبست توزیع

غیر یکنواخت درجه حرارت

$$\theta = T - T_i$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (I)$$



1) $\theta(r, 0) = 0$

2) $\theta(0, t) = \text{finite}$

3) $\theta(r_0, t) = T_\infty - T_i = \theta_\infty$

ابتدا از معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\bar{\theta}}{dr} - \frac{s}{\alpha}\bar{\theta} = 0$$

$$2)\ \bar{\theta}(0,s) = \text{finite} \qquad 3)\ \bar{\theta}(r_0,s) = \frac{\theta_\infty}{s}$$

تغییر ~~متغیر~~ تابع زیر را میدهیم

$$\bar{\theta} = \frac{U}{r}$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{s}{\alpha}U = 0$$

$$U = c_1 \cosh mr + c_2 \sinh mr \qquad m = \sqrt{s/\alpha}$$

$$\bar{\theta}(r,s) = \frac{1}{r}\left[c_1 \cosh mr + c_2 \sinh mr\right]$$

$$\bar{\theta}(0,s) = \text{finite} \qquad c_1 = 0$$

$$\bar{\theta}(r_0,s) = \frac{\theta_\infty}{s} \qquad c_2 = \frac{\theta_\infty r_0}{s \sinh m r_0}$$

$$\frac{\bar{\theta}}{\theta_\infty} = \frac{r_0}{r}\,\frac{\sinh\sqrt{s/\alpha}\,r}{s\sinh\sqrt{s/\alpha}\,r_0}$$

میتوان از Handbook استفاده کرد ولی در این مورد سعی میشود با استفاده

از قضیه H.S معکوس را بدست آورد.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh\sqrt{s/\alpha}\cdot r}{s\sinh\sqrt{s/\alpha}\,r_0}\right\} = ?$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\frac{\sinh\sqrt{s/\alpha}\,r}{s\sinh\sqrt{s/\alpha}\,r_0} = \frac{r(s/\alpha)^{1/2} + \frac{1}{3!}\left\{r\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}^3 + \cdots}{s\left\{r_0\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{1/2} + \frac{1}{3!}\left[r_0\left(\frac{s}{\alpha}\right)^{1/2}\right]^3 + \cdots\right\}}$$

ملاحظه میشود که توانهای s اعداد صحیح نیستند ولی اگر صورت و مخرج در $(s/\alpha)^{-1/2}$ ضرب شود توانهای s صحیح میشوند و داریم

$$\frac{\sinh\sqrt{s/\alpha}\,r}{s\sinh\sqrt{s/\alpha}\,r_0} = \frac{r + \frac{1}{3!}\frac{r^3}{\alpha}s + \cdots}{s\left[r_0 + \frac{1}{3!}r_0^3\frac{s}{\alpha} + \cdots\right]} \quad (*)$$

حال شرایط قضیه برقرار است. اگر s_n ریشه‌ی ساده‌ی $Q_1(s)$ باشد داریم

$$P(s) = s^k P_1(s) \qquad Q(s) = s^k Q_1(s)$$

$$\lim_{s\to s_n}\frac{P(s)}{Q'(s)} = \lim_{s\to s_n}\frac{s^k P_1(s)}{[s^k Q_1(s)]'} = \lim_{s\to s_n}\left[\frac{s^k P_1(s)}{s^k Q_1'(s) + k s^{k-1} Q_1(s)}\right]$$

$$\lim_{s\to s_n}\frac{P(s)}{Q'(s)} = \lim_{s\to s_n}\frac{P_1(s)}{Q_1'(s)}$$

اگر s_n ریشه‌های $Q_1(s)=0$ باشد

$$Q_1 = s\sinh(\sqrt{s/\alpha}\,r_0) = 0$$

$$s=0$$

$$\sinh(r_0\sqrt{s/\alpha}) = \frac{1}{i}\sin\left(i\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,r_0\right) = 0$$

$$i\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,r_0 = n\pi \qquad -\frac{s}{\alpha}r_0^2 = n^2\pi^2$$

$$s_n = -\alpha n^2\pi^2/r_0^2 = -\alpha\lambda_n^2/r_0^2 \qquad \lambda_n = n\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ترم‌های مربوط به s_n $= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_1(s_n)}{\varphi_1'(s_n)}e^{s_n t}$

باید توجه کرد $s=0$ ریشه مضاعف نیست چرا که در رابطه (*) بعد از ساده شدن صورت و مخرج به $(s/\alpha)^{1/2}$ ترمی باقی نمانده نه s^2. البته اگر در $(s/\alpha)^{1/2}$ ضرب می‌کردیم ریشه مضاعف می‌شد و اگر عمل می‌کردیم باز هم به همین نتیجه می‌رسیدیم چون ساده می‌شه.

$$P_1(s_n) = \frac{1}{i}\sin\lambda_n r/r_0$$

$$\varphi_1'(s_n) = \lim_{s\to s_n}\left[\sinh\left(\sqrt{s/\alpha}\right)r_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,r_0\cosh\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,)\,r_0\right]$$

$$\varphi_1'(s_n) = \frac{1}{2i}\lambda_n\cos\lambda_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_1(s_n)}{\varphi_1'(s_n)}e^{s_n t} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin\lambda_n r/r_0}{\lambda_n}\exp(-\lambda_n^2\alpha t/r_0^2)$$

برای ریشه مربوط به $s=0$ از فرم عبارت $\frac{P(s)}{\varphi(s)}$ استفاده می‌کنیم

$$\frac{P(s)}{\varphi(s)} = \frac{r + \frac{1}{3!}\frac{r^3}{\alpha}s + \cdots}{s\left[r_0 + \frac{1}{3!}r_0^3\frac{s}{\alpha} + \cdots\right]} \qquad \lim_{s\to 0}\frac{P(s)}{\varphi'(s)} = \frac{r}{r_0}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh(\sqrt{s/\alpha}\,r)}{s\sinh(\sqrt{s/\alpha}\,r_0)}\right\} = \frac{r}{r_0} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin\lambda_n r/r_0}{\lambda_n}\exp(-\lambda_n^2\alpha t/r_0^2)$$

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = 1 + \frac{r_0}{r} 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right) e^{-n^2\pi^2 \alpha t / r_0^2}$$

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{2 r_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi r}{r_0} \, e^{-n^2\pi^2 \alpha t / r_0^2}}$$

Fourier Series and Integrals

سری فوریه و انتگرال فوریه

اگر $F(x)$ یک تابع پریودیک باشد که در فاصله $(-L\,,\,L)$ تعریف شده

و در این فاصله $F(x)$ و $F'(x)$ بصورت قطعه به قطعه پیوسته باشند داریم

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

در نقاطی که $F(x)$ ناپیوسته است مقدار $F(x)$ برابر است با متوسط مقدار تابع در دو طرف

نقطه ناپیوستگی یعنی $\frac{1}{2}\{F(x_0+0)+F(x_0-0)\}$ که در آن x_0 نقطه مربوطه

ناپیوستگی است. منظور از $F(x_0+0)$ حد $F(x)$ است وقتی از طرف راست به x_0

نزدیک بشویم و $F(x_0-0)$ حد تابع $F(x)$ است وقتی از طرف چپ به x_0 نزدیک بشویم

تابع فرد: اگر $F(x)=-F(-x)$ باشد $a_n=0$ است و فقط ترم سینوسی در بسط داریم

تابع زوج: اگر $F(x)=F(-x)$ باشد $b_n=0$ است و فقط ترم کسینوسی در بسط داریم.

اگر تابعی در فاصله $(0\,,\,L)$ تعریف شده باشد میتوان آنرا فقط بر حسب

توابع سینوسی یا کسینوسی بسط داد. زیرا اگر $F(x)$ را بر حسب سینوسی بسط دهیم

در فاصله $(0, L)$ بتوان تابع دیگری در نظر گرفت که با $F(x)$ در فاصله $(0, L)$ برابر

بوده و در فاصله $(-L, 0)$ فرد باشد. در آن صورت بسط آن تابع فقط بر حسب

سینوسی بدست می آید که در فاصله $(0, L)$ تساوی اش با $F(x)$ برابر است لذا داریم

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} & 0 < x < L \quad (1) \\ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx & (2) \end{cases}$$

رابطه فوق را بسط سینوسی تابع $F(x)$ در فاصله $(0, L)$ گویند. به همین ترتیب

بسط کسینوسی تابع در این فاصله بصورت زیر است

$$\begin{cases} F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} & (3) \\ a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx & (4) \end{cases}$$

تبدیل محدود سینوسی فوریه Finite Fourier Transform : تبدیل محدود سینوسی فوریه تابع

$F(x)$ در فاصله $0 < x < L$ بصورت زیر تعریف میشود.

$$\boxed{f_s(n) = \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx} = F_s\{F(x)\} \quad (5)$$

از مقایسه (2) و (5) داریم

$$b_n = \frac{2}{L} f_s(n)$$

اگر مقدار b_n از رابطه فوق در معادله (1) قرار دهیم داریم

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi x}{L}} \qquad (6)$$

$$F(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f_s(n)\}$$

یا

تبدیل محدود کسینوسی فوریه در فاصله $(0, L)$ بصورت زیر تعریف میشود.

$$\boxed{\mathcal{F}_c\{F(x)\} = f_c(n) = \int_0^L F(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx} \qquad (7)$$

از مقایسه (7) و (4) داریم

$$a_n = \frac{2}{L} f_c(n)$$

$$a_0 = \frac{2}{L} f_c(0)$$

بعد از جاگذاری در (3) داریم

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{L} f_c(0) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{L}}$$

$$F(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f_c(n)\}$$

یا

از تبدیلات فوق میتوان در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای استفاده کرد.

مثال: اگر $U(x,t)$ در فاصله $0<x<L$ تعریف شده باشد مطلوبست

$$F_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}, \quad F_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}, \quad F_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}, \quad F_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

a) $$F_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^L \frac{\partial U}{\partial x} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx =$$

$$U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \frac{n\pi}{L}\int_0^L U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$F_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{L} F_c\{U\}$$

b) $$F_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^L \frac{\partial U}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L$$

$$+\frac{n\pi}{L}\int_0^L U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$F_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = +\frac{n\pi}{L} F_s\{U\} - \{U(0,t) - U(L,t)\cos n\pi\}$$

c) اگر در رابطه قسمت (a) بجای U مقدار $\frac{\partial U}{\partial x}$ قرار دهیم داریم

$$F_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n\pi}{L} F_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}$$

$$F_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} F_s\{U\} + \frac{n\pi}{L}\{U(0,t) - U(L,t)\cos n\pi\}$$

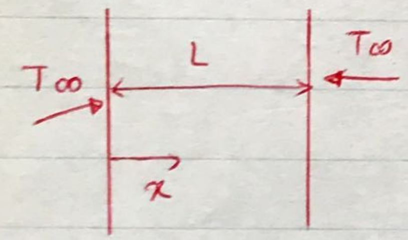
$$\boxed{F_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{-n^2\pi^2}{L^2} F_s\{U\} + \frac{n\pi}{L}\{U(0,t) - (-1)^n U(L,t)\}}$$

d) $$F_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n\pi}{L} F_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} - \left\{\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial U(L,t)}{\partial x}\cos n\pi\right\}$$

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\mathcal{F}_c\{U\} - \left\{\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial U(L,t)}{\partial x}\cos n\pi\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\mathcal{F}_c\{U\} - \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} + (-1)^n\frac{\partial U(L,t)}{\partial x}}$$

مثال: تیغه‌ای به ضخامت L که در ابتدا در دمای T_0 می‌باشد ناگهان در محیطی به دمای T_∞ قرار می‌گیرد. اگر ضریب انتقال حرارت بین سطوح تیغه و محیط زیاد باشد مطلوبست توزیع گذرای دما



$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

I.C. $T(x,0) = T_0$

B.C.1 $T(0,t) = T_\infty$

B.C.2 $T(L,t) = T_\infty$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \qquad \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

I.C. $\theta(x,0) = 1$

B.C.1 $\theta(0,t) = 0$

B.C.2 $\theta(L,t) = 0$

از معادله دیفرانسیل تبدیل سینوسی فوریه می گیریم

$$\mathcal{F}_s\{\theta\} = \theta_s(n,t)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\,\theta_s(n,t)}{dt} + \alpha\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\,\theta_s(n,t) = 0 \\[2ex] \theta_s(n,0) = \mathcal{F}_s\{1\} = \dfrac{[1-(-1)^n]L}{n\pi} \end{array}\right.$$

از حل این معادله داریم

$$\theta_s(n,t) = \frac{L[1-(-1)^n]}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha t}$$

$$\theta(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\theta_s(n,t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\theta(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha t}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

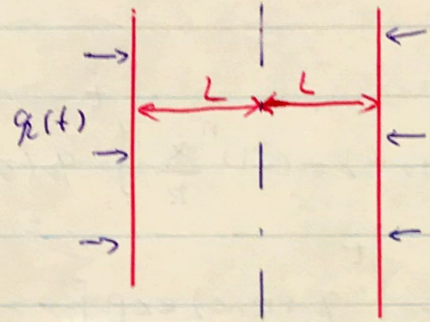
$$\boxed{\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(2n+1)^2\pi^2\alpha t/L^2}}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}}$$

مثال: نرخ تولید حرارت در واحد حجم تیغه‌ای به ضخامت $2L$ برابر $\dot{q}(x,t)$

می‌باشد و توزیع اولیه دما در آن $f(x)$ است. فلاکس حرارتی که تابع زمان است

ناگهان در سطح آن اعمال می‌گردد. مطلوبست توزیع گذرای دما در تیغه

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{k}\dot{q}(x,t)$$



I.C. $\quad T(x,0) = f(x)$

B.C.1 $\quad -k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = -q(t)$

B.C.2 $\quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$

با توجه به شرایط مرزی از تبدیل کسینوسی فوریه استفاده می‌کنیم. اگر از طرفین معادله تبدیل فوریه بگیریم داریم

$$\frac{dT_c(n,t)}{dt} + \frac{\alpha n^2 \pi^2}{L^2} T_c(n,t) = (-1)^n \frac{\alpha}{k} q(t) + \frac{\alpha}{k} \dot{q}_c(n,t)$$

که در آن

$$T_c(n,t) = \int_0^L T(x,t) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$\dot{q}_c(n,t) = \int_0^L \dot{q}(x,t) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

از حل معادله دیفرانسیل فوق داریم

$$T_c(n,t) = \exp\left[\frac{-n^2\pi^2\alpha t}{L^2}\right] \left\{ (-1)^n \frac{\alpha}{k} \int_0^t q(\tau) \exp\left[\frac{n^2\pi^2\alpha\tau}{L^2}\right] d\tau + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \dot{q}_c(n,\tau) \exp\left[\frac{n^2\pi^2\alpha\tau}{L^2}\right] d\tau + C(n) \right\}$$

اگر از شرط اولیه تبدیل فوریه بگیریم داریم

$$T_c(n,0) = C(n) = \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

پس از جایگزینی داریم

$$T_c(n,t) = (-1)^n \frac{\alpha}{k} \int_0^t q(\tau) \exp\left[-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}(t-\tau)\right] d\tau + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \dot{q}_c(n,\tau) \exp\left[-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}(t-\tau)\right] d\tau + \exp\left[\frac{-n^2\pi^2\alpha t}{L^2}\right] \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

برای به معکوس $T_c(n,t)$ را بصورت زیر می نویسیم

$$T_c(n,t) = T_c(0,t) + T_{cn}(n,t)$$

که در آن $T_{cn}(n,t)$ مقدار n از $1, 2, \dots \infty$ تغییر می کند

$$T_c(n,t) = \int_0^L f(x)\,dx + \frac{\alpha}{k}\int_0^t \left[q(\tau) + \dot{q}_c(0,\tau)\right] d\tau$$

$$+ (-1)^n \frac{\alpha}{k}\int_0^t q(\tau)\exp\left[-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}(t-\tau)\right] d\tau \; +$$

$$\frac{\alpha}{k}\int_0^t \dot{q}_c(n,\tau)\exp\left[-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}(t-\tau)\right] d\tau + \exp\left[\frac{-n^2\pi^2\alpha t}{L^2}\right]\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$T(x,t) = \frac{1}{L}T_c(0,t) + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} T_c(n,t)\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$\dot{q}_c(0,\tau) = \int_0^L \dot{q}(x,t)\,dx$$

با استفاده از رابطه معکوس داریم

$$T(x,t) = \frac{1}{L}\left\{\int_0^L f(x)\,dx + \frac{\alpha}{k}\int_0^t \left[q(\tau) + \dot{q}_c(0,\tau)\right] d\tau\right\}$$

$$+ \frac{2\alpha}{Lk}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{n\pi x}{L}\int_0^t q(\tau)\exp\left[-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}(t-\tau)\right] d\tau$$

$$+ \frac{2\alpha}{Lk}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\int_0^t \dot{q}_c(n,\tau)\exp\left[-\frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}(t-\tau)\right] d\tau$$

$$+ \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{L}\exp\left[\frac{-n^2\pi^2\alpha t}{L^2}\right]\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

حالت خاص

$$f(x) = T_0 \qquad q = q_w \qquad \dot{q} = \text{ثابت}$$

$$\dot{q}_c(0,\tau) = \int_0^L \dot{q}(x,\tau)\,dx = \dot{q}L$$

$$\dot{q}_c(n,\tau) = \int_0^L \dot{q}(x,\tau)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \dot{q}\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = T_0$$

$$T - T_0 = \frac{q_w}{k}\left\{\frac{\alpha t}{L} + 2L\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\lambda_n^2}\cos\frac{\lambda_n x}{L} + 2L\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\lambda_n^2}\cos\frac{\lambda_n x}{L}\exp\left[-\lambda_n^2 Fo\right]\right\} + \frac{\dot{q}\alpha}{k}t$$

$$\lambda_n = n\pi \qquad Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

که در آن

اگر از سری زیر استفاده کنیم داریم

$$2L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2}\cos\frac{\lambda_n x}{L} = \frac{3x^2 - L^2}{6L}$$

$$\boxed{T - T_0 = \frac{q_w L}{k}\left\{\frac{\alpha t}{L^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{6} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2}\cos\frac{\lambda_n x}{L}\exp\left[-\lambda_n^2 Fo\right]\right\} + \dot{q}\alpha t/k}$$

اگر منبع حرارتی نباشد ترم آخر صفر شده و همان پاسخ قبلی بدست می آید

$$\frac{T - T_0}{\frac{q_w L}{k}} = \frac{\alpha t}{L^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{6} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2}\cos\frac{\lambda_n x}{L}\exp\left(-\lambda_n^2 Fo\right)$$