روش بسط برحسب توابع آیگن. معادله غیرهمگن دیفرانسیل را در نظر بگیرید

$$\nabla^2 U = \frac{1}{K}\frac{\partial U}{\partial t} + h(x, y, z, t)$$

اگر $h=0$ باشد و شرایط مرزی همگن.

$$I.C. \quad U(x,y,z,0) = f(x,y,z)$$

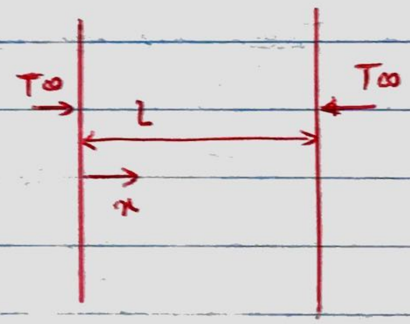
$$U = \Phi(x,y,z)\Gamma(t) \qquad \frac{\nabla^2\Phi}{\Phi} = \frac{1}{K}\frac{\Gamma'}{\Gamma} = -\lambda^2$$

می‌توان مسئله را به کمک بسط برحسب توابع آیگن معادله هلمهولتز زیر حل کرد

$$\nabla^2\Phi + \lambda^2\Phi = 0$$

مثال: مطلوبست مسئلهٔ زیر

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}(x,t)}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



$$I.C. \quad T(x,0) = F(x)$$

$$B.C.1 \quad T(0,t) = T\infty$$

$$B.C.2 \quad T(l,t) = T\infty$$

با یک تغییر تابع شرایط مرزی را همگن می‌کنیم چون معادله هلمهولتز باید شرایط مرزی‌اش همگن باشد

$$\theta = T - T\infty$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}(x,t)}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

$$I.C. \quad \theta(x,0) = F(x) - T\infty = f(x)$$

$$B.C.1 \quad \theta(0,t) = 0$$

$$B.C.2 \quad \theta(l,t) = 0$$

$$\frac{\dot{q}(x,t)}{k} = h(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + h(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

در این روش ابتدا قسمت غیرهمگن را کنار می‌گذاریم و توابع آیگن معادله همگن‌تر مربوط را بدست می‌آوریم آنگاه جواب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\theta(x,t) = \sum_n a_n(t)\, \phi_n(x)$$

که در آن ϕ_n پاسخ معادله زیر است

$$\nabla^2 \phi + \lambda^2 \phi = 0$$

با استفاده از خاصیت عمود بودن $a_n(t)$ را بدست آورده و پس معادله دیفرانسیلی برای a_n تشکیل میدهیم که از حل آن $a_n(t)$ محاسبه شده و در نهایت جواب معادله بدست می‌آید لذا داریم

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\theta = \phi(x)\, \Gamma(t)$$

$$\frac{\phi''}{\phi} = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma'}{\Gamma} = -\lambda^2$$

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda^2 \phi = 0 \\ \phi(0) = 0 \\ \phi(L) = 0 \end{cases}$$

$$\phi = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

B.C.1 $\quad B = 0 \quad$ B.C.2 $\Rightarrow \lambda_n = \dfrac{n\pi}{L}$

بنابراین توابع آیگن عبارتند از

$$\phi_n = \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, \phi_n(x)$$

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (*)$$

با استفاده از خاصیت عمود بودن $\sin \frac{n\pi}{L} x$ داریم

$$a_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \theta(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم

$$\frac{d a_n(t)}{dt} = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial t} \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

از طرفی داریم

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \alpha h(x,t)$$

$$\frac{d a_n}{dt} = \frac{2\alpha}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx + \frac{2\alpha}{L} \int_0^L h(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

اگر دو بار از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنیم و همچنین از شرایط مرزی داریم

$$\frac{da_n}{dt} + \frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}\, a_n(t) = \frac{2\alpha}{L}\int_0^L h(x,t)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

اگر $h_n(t)$ را بصورت زیر تعریف کنیم داریم

$$h_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (*)$$

$$\frac{da_n}{dt} + \frac{n^2\pi^2\alpha}{L^2}\, a_n(t) = \alpha\, h_n(t) \qquad (I)$$

اگر از شرط اولیه در مسئله (*) استفاده کنیم داریم

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\,\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad (+)$$

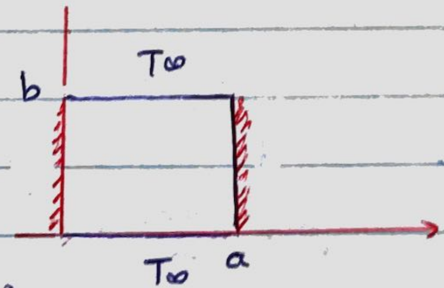
حال مسئله (I) را با شرط اولیه (+) حل می کنیم

$$a_n(t) = a_n(0)\, e^{-n^2\pi^2\alpha t/L^2} + \alpha\int_0^t e^{-n^2\pi^2\alpha(t-\tau)/L^2}\, h_n(\tau)\,d\tau \qquad (II)$$

با جایگزینی $a_n(t)$ در (*) مسئله حل شد.

حل معادله دیفرانسیل در مربع: یک صفحه بطول a و عرض b که توزیع اولیه دما در آن $f(x,y)$ است در نظر بگیرید. اگر ناگهان شرایط مرزی نشان داده شده در زیر ناگهان به آن اعمال شود توزیع دما چگونه است

$$\theta = T - T_\infty$$



$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

I.C. $\theta(x,y,0) = f(x,y) - T_\infty = F(x,y)$

B.C.1 $\frac{\partial \theta(0,y,t)}{\partial x} = 0$ B.C.2 $\frac{\partial \theta(a,y,t)}{\partial x} = 0$

B.C.3 $\theta(x,0,t) = 0$ B.C.4 $\theta(x,b,t) = 0$

$$\theta(x,y,t) = T(t)\,\phi(x,y)$$

$$T' + \lambda^2 \alpha T = 0$$

$$\nabla^2 \phi + \lambda^2 \phi = 0$$

$$\phi(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda^2 = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \lambda^2\right) = -\mu^2$$

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

$$Y'' + (\lambda^2 - \mu^2) Y = 0$$

$$X = A \cos \mu x + B \sin \mu x$$

B.C.1 $\quad X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

B.C.2 $\quad X'(a) = 0 \qquad \mu_m = \dfrac{m\pi}{a}$

$$X_m = A_m \cos \frac{m\pi x}{a} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lambda^2 - \mu^2 = \gamma^2 \quad (*)$$

$$Y = C \cos \gamma y + D \sin \gamma y$$

B.C.3 $\Rightarrow C = 0$

B.C.4 $\Rightarrow \gamma_n = \dfrac{n\pi}{b}$

$$Y_n = D_n \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

از رابطه (*) داریم

$$\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + \gamma_n^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2$$

$$T_{mn}(t) = E_{mn}\, e^{-\alpha \lambda_{mn}^2 t} = E_{mn}\, e^{-\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 \alpha t}$$

$$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\, e^{-\lambda_{mn}^2 \alpha t} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$F(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$a_{0n}=\frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

برای ادامه داریم

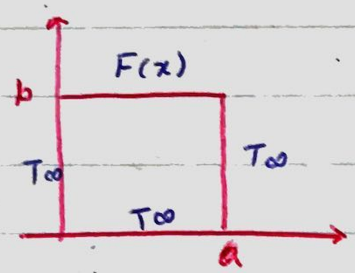
$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$T=T_\infty+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 \alpha t} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

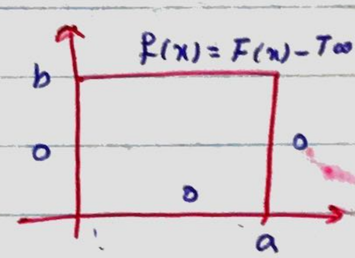
$$a_{0n}=\frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b [f(x,y)-T_\infty]\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b [f(x,y)-T_\infty]\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,dx\,dy$$

نکته ای در مورد حل معادله دیفرانسیل دو بعد یا سه بعد. اگر با تغییر تابع نتوان شرایط مرزی را همگن کرد بایستی مسئله را با شرایط تک بعدی به چند مسئله شکست به عنوان مثال مسئله زیر را در نظر بگیرید



$$\theta = T - T_\infty$$



$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\theta(x,y,0) = T(x,y,0) - T_\infty = G(x,y) - T_\infty = g(x,y)$$

$$\theta(0,y,t) = \theta(a,y,t) = 0$$

$$\theta(x,0,t) = 0$$

$$\theta(x,b,t) = f(x)$$

حال مسئله را بصورت زیر تجزیه می کنیم

$$\theta(x,y,t) = \theta_1(x,y,t) + \theta_2(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial \theta_1}{\partial t}$$

$$\theta_1(x,y,0) = g(x,y) - \theta_2(x,y)$$

$$\theta_1(0,y,t) = \theta_1(a,y,t) = \theta_1(x,0,t) = \theta_1(x,b,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2}=0$$

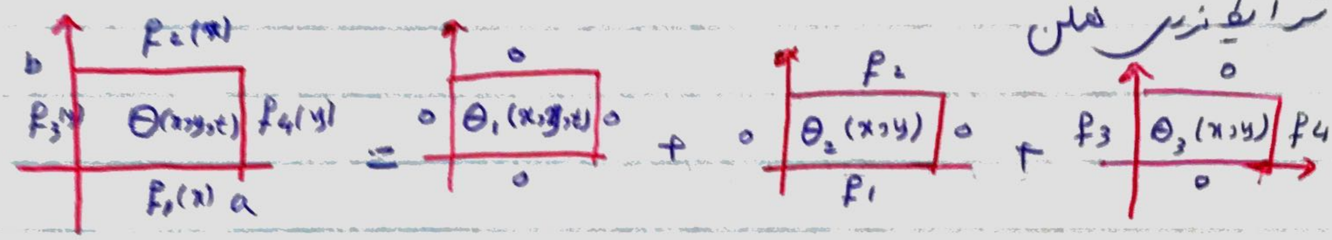
$$\theta_2(0,y)=\theta_2(a,y)=0$$

$$\theta_2(x,0)=0$$

$$\theta_2(x,b)=f(x)$$

برای حالتی که تمام شرایط مرزی غیرهمگن هستند با استفاده از روش فوق عمل کرده و پاسخ را مجموع سه پاسخ گرفت که هر کدام از آن فقط تابع مکان هستند و یکی تابع مکان و زمان.

شرایط مرزی همگن



$$\theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3$$

$$\begin{cases}\nabla^2\theta_1=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial t}\\ \theta_1(x,y,0)=\theta(x,y,0)-\theta_2(x,y)-\theta_3(x,y)=g(x,y)-\theta_2(x,y)-\theta_3(x,y)\\ \theta_1(0,y,t)=\theta_1(a,y,t)=\theta_1(x,0,t)=\theta_1(x,b,t)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\theta_2=0\\ \theta_2(0,y)=\theta_2(a,y)=0\\ \theta_2(x,0)=f_1(x)\\ \theta_2(x,b)=f_2(x)\end{cases}$$

$$\nabla^2\theta_3=0$$

$$\theta_3(x,0)=\theta_3(x,b)=0$$

$$\theta_3(0,y)=f_3(y)$$

$$\theta_3(a,y)=f_4(y)$$

حل معادله دیفرانسیل درسه بعد: توزیع اولیه دما در مکعبی به ابعاد a و b و c برابر

f(x,y,z) است. اگر تمام دمای کلیه سطوح آن T_∞ شود توزیع گذرای دما

چگونه است.

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\nabla^2\theta = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\theta(x, y, z, 0) = f(x, y, z) - T_\infty = F(x, y, z)$$

$$\theta(0, y, z, t) = \theta(a, y, z, t) = 0$$

$$\theta(x, 0, z, t) = \theta(x, b, z, t) = 0$$

$$\theta(x, y, 0, t) = \theta(x, y, c, t) = 0$$

$$\theta = \Phi(x, y, z)\, T(t)$$

$$T' + \alpha \lambda^2 T = 0$$

$$\nabla^2 \Phi + \lambda^2 \Phi = 0$$

$$\Phi(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$$

حل معادله فوق با شرایط مرزی بصورت زیر است

$$\Phi_{l,m,n}(x, y, z) = B_l D_m F_n \sin\frac{l\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c}$$

$$T(t) = C e^{-\lambda_{lmn}^2 \alpha t}$$

$$\theta = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{lmn}\, e^{-\lambda_{lmn}^2 \alpha t} \sin\frac{l\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c}$$

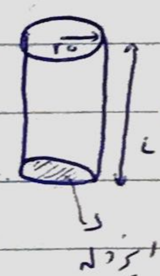
$$a_{lmn} = \frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c F(x, y, z) \sin\frac{l\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \sin\frac{n\pi z}{c}\, dx\, dy\, dz$$

$$\lambda_{lmn}^2 = \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2$$

حل معادله دیفرانسیل در سیستم استوانه‌ای: استوانه‌ای به شعاع r_0 و طول L در نظر بگیرید که دمای ابتدای در دمای $f(r,\theta,z)$ است ناگهان دمای سطوح خارجی آن T_∞ می‌گردد و قاعده آن ایزوله است. مطلوب توزیع گذرای دما در استوانه

$\bar{\Theta} = T - T_\infty$

$F(r,\theta,z) = f(r,\theta,z) - T_\infty$



$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial z^2}\right]$$

B.C.1 $\quad r = 0 \qquad \bar{\Theta} = \text{finite}$

B.C.2 $\quad \bar{\Theta}(r_0,\theta,z,t) = 0$

B.C.3 $\quad \bar{\Theta}(r,\theta,z,t) = \bar{\Theta}(r,\theta+2\pi,z,t)$

B.C.4 $\quad \dfrac{\partial \bar{\Theta}(r,\theta,z,t)}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \bar{\Theta}(r,\theta+2\pi,z,t)}{\partial \theta}$

B.C.5 $\quad \dfrac{\partial \bar{\Theta}(r,\theta,0,t)}{\partial z} = 0$

B.C.6 $\quad \bar{\Theta}(r,\theta,L,t) = 0$

I.C. $\quad \bar{\Theta}(r,\theta,z,0) = f(r,\theta,z) - T_\infty$

$$\bar{\Theta}(r,\theta,z,t) = \Phi(r,\theta,z)\,T(t)$$

$$\nabla^2 \Phi + \mu^2 \Phi = 0$$

$$T' + \alpha \mu^2 T = 0$$

$$\Phi(r,\theta,z) = R(r)\,\Theta(\theta)\,Z(z)$$

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + \mu^2 = 0$$

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = -\left(\frac{Z''}{Z} + \mu^2\right) = -\lambda^2$$

$$Z'' + (\mu^2 - \lambda^2)Z = 0$$

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} + r^2\lambda^2 = \frac{-\Theta''}{\Theta} = \beta^2$$

$$\Theta'' + \beta^2\Theta = 0$$

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \beta^2)R = 0$$

$3,4 \Rightarrow \quad \beta = m \qquad m = 0,1,2\ldots \qquad \Theta = A\cos m\theta + B\sin m\theta$

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - m^2)R = 0$$

$$R(r) = D\,J_m(\lambda r) + E\,Y_m(\lambda r)$$

$B.C.1 \Rightarrow E = 0$

$B.C.2 \Rightarrow J_m(\lambda r_0) = 0$

بازای هر m یک سری λ وجود دارد که فعلاً این λ ها را با λ_{mk} نشان میدهیم

$J_m(\lambda_{mk} r_0) = 0 \qquad k = 1,2\ldots$

$$\mu^2 - \lambda^2 = \gamma^2$$

$$Z = F \cos \gamma z + G \sin \gamma z$$

B. C. 5 $\qquad G = 0$

B. C. 6 $\qquad \cos \gamma L = 0 \qquad \gamma L = \frac{(2n-1)\pi}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots$

$$\gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}$$

$$\mu^2 = \lambda^2 + \gamma^2$$

$$\mu_{mkn}^2 = \lambda_{mk}^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$Z = F \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{L}$$

$$T = H e^{-\mu_{mkn}^2 \alpha t} = H e^{-\left[\lambda_{mk}^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}\right] t}$$

بنابراین جواب بصورت زیر است

$$\bar{\Theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mkn} \cos m\theta + b_{mkn} \sin m\theta\right) J_m(\lambda_{mk} r) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{L} \times e^{-\left[\lambda_{mk}^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}\right] t}$$

$$F(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mkn} \cos m\theta + b_{mkn} \sin m\theta\right) J_m(\lambda_{mk} r) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{L}$$

با استفاده از خاصیت عمود بودن توابع آنگاه میتوان ضرایب را بدست آورد.

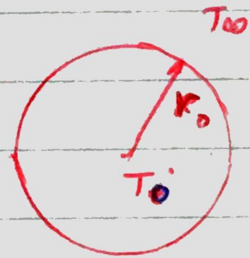
$$a_{okn} = \frac{2\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{L} rF(r,\theta,z)\, J_0(\lambda_{ok} r) \cos(n-\frac{1}{2})\frac{\pi z}{L}\, dr\, d\theta\, dz}{\pi L r_0^2 J_1^2(\lambda_o k r_0)}$$

$$a_{mkn} = \frac{4\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{L} rF(r,\theta,z)\, J_m(\lambda_{mk} r) \cos m\theta \cos(n-\frac{1}{2})\frac{\pi z}{L}\, dr\, d\theta\, dz}{\pi L r_0^2 J_{m+1}^2(\lambda_{mk} r_0)}$$

$$b_{mkn} = \frac{4\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{L} rF(r,\theta,z)\, J_m(\lambda_{mk} r) \sin m\theta \cos(n-\frac{1}{2})\frac{\pi z}{L}\, dr\, d\theta\, dz}{\pi L r_0^2 J_{m+1}^2(\lambda_{mk} r_0)}$$

مثال: کره‌ای بشعاع r_0 که در ابتدا در دمای T_0 است بطور ناگهانی در محیطی با دمای T_∞ قرار داده میشود. ضریب انتقال حرارت زیاد است. مطلوبست توزیع درجه حرارت در کره

$$\theta = T - T_\infty \qquad \theta_0 = T_0 - T_\infty$$



$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r}\right)$$

I.C. $\theta(r,0) = \theta_0$ (1)

B.C1 $\theta(0,t) =$ محدود (2) یا $\dfrac{\partial \theta(0,t)}{\partial r} = 0$

B.C2 $\theta(r_0,t) = 0$ (3)

هر دو همگن هستند

$$\theta(r, t) = R(r)\,\Gamma(t)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \lambda^2 r^2 R = 0 \qquad (I)$$

$$R(0) = \text{معین}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \alpha \lambda^2 \Gamma = 0 \qquad (II)$$

معادله (I) معادله بسل کروی برای حالت خاص $n=0$ است و قبلاً نشان دادیم که

$$R(r) = A \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} + B \frac{\cos \lambda r}{\lambda r}$$

با توجه به معین بودن $R(0)$ داریم $B = 0$

$$R(r) = A \frac{\sin \lambda r}{\lambda r}$$

$$\theta = A \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$B.C.2 \qquad 0 = A \frac{\sin \lambda r_0}{\lambda r_0}$$

$$\sin r_0 \lambda = 0 \qquad \lambda_n r_0 = n\pi \qquad \boxed{\lambda_n = \frac{n\pi}{r_0} \qquad n = 1, 2, \ldots}$$

چون λ مثبت است n از یک شروع می‌شود.

$$\boxed{\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t}}$$

I.C.

$$\theta_0 = \sum_{1}^{\infty} A_n \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n r}$$

یا

$$r\theta_0 = \sum_{1}^{\infty} A_n \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n}$$

میتوان نشان داد که

$$A_n = (-1)^{n+1} 2\theta_0$$

بنابراین پاسخ نهائی بصورت زیر است

$$\boxed{\frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n r}}$$

یا

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{2r_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 \alpha t / r_0^2} \sin\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right)}$$

تذکر: تابع وزن r^2 است داریم

$$\int_0^{r_0} \theta_0 r^2 \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n r} dr = A_n \int_0^{r_0} \sin^2 \lambda_n r / \lambda_n^2 \, dr$$

$$A_n \int_0^{r_0} r^2 \Phi_n^2(r) dr = A_n \int_0^{r_0} r^2 \frac{\sin^2 \lambda_n r}{r^2 \lambda_n^2} dr = A_n \int_0^{r_0} \frac{\sin^2 \lambda_n r}{\lambda_n^2} dr$$