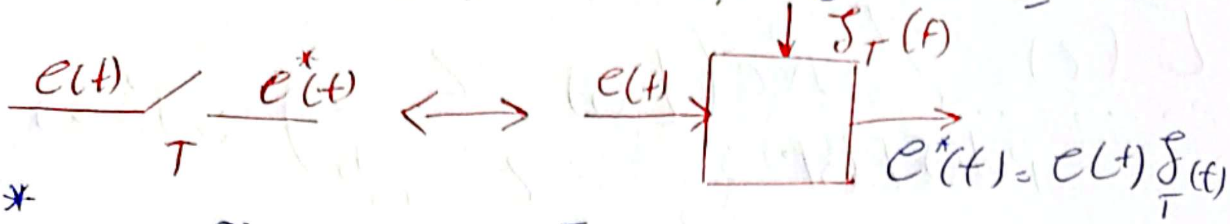
تبدیل لاپلاس خروجی از نمونه ضربه ای



$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\,\varepsilon^{-nTs} = E(z)\Big|_{z=\varepsilon^{Ts}}$$

$$E^*(s) = \mathcal{L}\big(\underbrace{e(t)\,\delta_T(t)}\big) = \frac{1}{2\pi j}\,E(s) * \Delta_T(s)$$

ضرب در سیگنال در حوزه فرکانس به ما کانولوشن می دهد

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(p)\,\Delta_T(s-p)\,dp$$

$$\Delta_T(s) = \mathcal{L}(\delta_T(t)) = \mathcal{L}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\Big) = \mathcal{L}\big(\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\dots\big)$$

$$= 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} = \frac{1}{1+e^{-Ts}}$$ سری هندسی

$$E^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E_p\,\frac{e^{Ts}}{e^{Ts}-e^{Tp}}\,dp$$

(a) قضیه مانده ها $$= \sum_{\text{poles } E(p)} \mathrm{Res}\left(E(p)\,\frac{e^{Ts}\; z}{z\; e^{Ts} - e^{Tp}}\right)$$ (a)

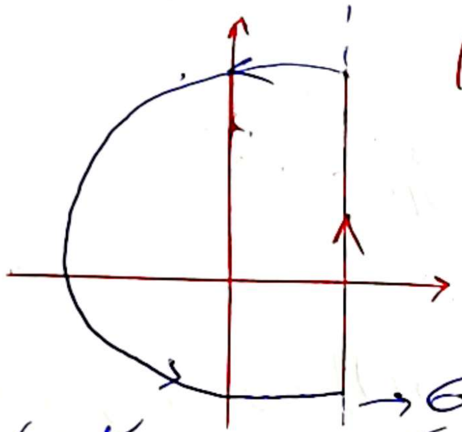
$$E(z)=\sum_{\text{poles } E(p)} Re\left(E(p)\frac{z}{z-e^{Tp}}\right)$$

$$E(z)=\sum_{\text{poles } E(s)} Re\left(E(s)\frac{z}{z-e^{Ts}}\right) \qquad p \to s$$

شرط تبدیل p به s این است که سیستم علی باشد یا اکیداً سره

$$E(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad D(s) > N(s)$$

چون براساس قضیه انتگرال مانده‌ها باید انتگرال روی خم بسته باشد تا بتوانیم این عملیات را انجام دهیم



$\to \sigma = c$

$$2\pi j \sum Res\, f = \oint_c f(z)\, dz$$

قضیه انتگرال مانده‌ها

مثال: تبدیل Z تابع زیر به روش تفکیک کسرهای جزئی، انتگرال‌ها نوشتن را محاسبه کنید

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$g(t)=(1-e^{-t})u(t)=u(t)-u(t)e^{-t}$$

تابع اولیه

$$g_k=g_k(t=kT)=u(kT)-e^{-kT}u(kT)$$

نمونه‌برداری

$$G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$$a^k 1_k = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

حل انتگرال کانولوشن

$$E(z) = \sum Re \frac{1}{s(s+1)} \times \frac{z}{z-e^{Ts}}$$

قطب های ما $s=-1$, $s=0$

$$K_{s=0} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} \times \frac{z}{z-e^{Ts}} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$K_{s=-1} = \lim_{s\to -1} \frac{1}{s} \times \frac{z}{z-e^{Ts}} = -\frac{z}{z-e^{-T}} = -\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

تبدیل Z تابع زیر را محاسبه کنید.

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$G(z) = \sum Re \frac{s}{(s+1)^2(s+2)} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}}$$

در قطب های مکرر

poles ($s=-1$ مضاعف

$s=-2$)

$$k_{s=-2} = \lim_{s \to -2} \frac{s}{(s+1)^2} \cdot \frac{z}{z - e^{Ts}} = \frac{-2z}{z - e^{-2T}}$$

$$k_{s=-1} = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \frac{sz}{(s+2)(z - e^{Ts})}$$

چون ریشه مضاعف داریم یکبار مشتق گرفته سپس حد می‌دهیم به سمت ①

$$\lim_{s \to -1} \frac{z\left((s+2)(z - e^{Ts}) - s\left(z - e^{Ts} - T(s+2)e^{Ts}\right)\right)}{(s+2)(z - e^{Ts})^2}$$

$$k_{s=-1} = \frac{z}{(z - e^{-T})^2}\left(z - e^{-T} + 1 \times (z - e^{-T} - Te^{-T})\right)$$

$$= \frac{z(2z - 2e^{-T} - Te^{-T})}{(z - e^{-T})^2}$$

$$= \frac{2 - (2e^{-T} + Te^{-T})z^{-1}}{(1 - e^{-T}z^{-1})^2}$$

حال مانده ها را که بدست آوردیم جمع می کنیم.

$$\bar{E}(s) = \underbrace{\frac{1-e^{-Ts}}{s}}_{G(s)} E(s)$$

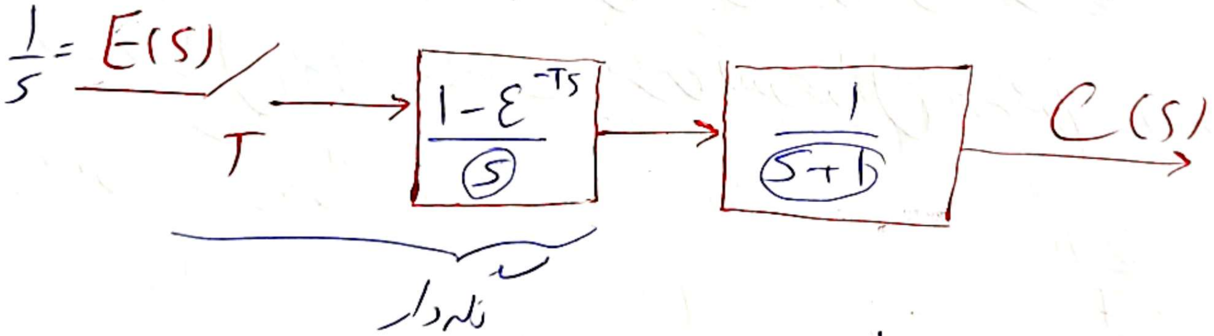
تابع تبدیل نگهدار مرتبه صفر

$$\bar{E}(z) = (1-z^{-1}) \sum_{\text{poles}(E(s)/s)} Re\left(\frac{E(s)}{s} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}}\right)$$

مرتبه اول

$$\bar{E}(z) = (1-z^{-1})^2 \sum_{\text{Poles}\left(\frac{(1+Ts)E(s)}{Ts^2}\right)} Re\left(\frac{(1+Ts)E(s)}{Ts^2} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}}\right)$$

تبدیل z خروجی بلوک دیاگرام زیر را حساب کنید و با تبدیل z پاسخ پله پلانت و بدون نگهدار مقایسه کنید. پله واحد فرض شود.



$$G_1(z) = (1-z^{-1}) \sum_{s=0,\ s=-1} Re \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}}$$

$$= (1-z^{-1})\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right) \Rightarrow$$

$$G_1(z) = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-T}} = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$u_k = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \times \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \longrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z-e^{-T}} \xrightarrow{\times z}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} \xrightarrow[(z)]{\text{عکس}}$$

$$y_k = \left(1-(e^{-T})^k\right) u_k \qquad k \geq 0$$

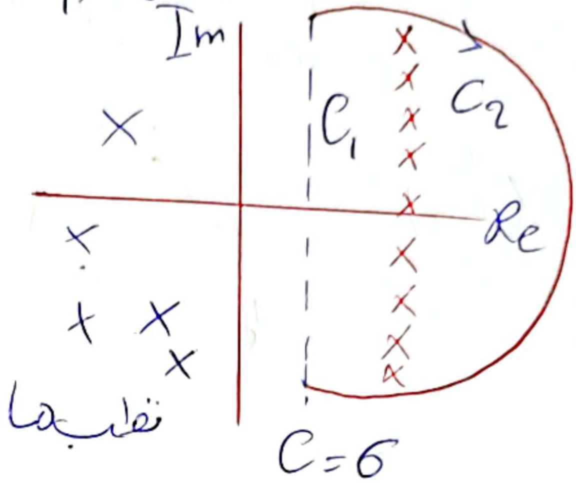
نشان دهید تبدیل لاپلاس خروجی از نمونه بردار ضربه‌ای از رابطه‌ی زیر نیز قابل محاسبه است. فرض کنید حداقل درجه مخرج دو واحد از درجه صورت بزرگتر است.

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s + j\omega_s k)$$

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} \, dp$$

حال ما در قبل نشان دادیم که بررسی خطا C نمی توانیم انتگرال روی خم بسته مانده ها حساب کنیم به کمک R_∞ سمت چپ را گرفتیم تا خم بسته تولید شود و مسئله حل کنیم. حال خم بسته را سمت راست می گیریم.



$$= \sum_{\text{قطب ها}} Re \frac{X(P)}{1-e^{-T(S-P)}}$$

این قطب ها در مسیر بسته C وجود ندارند. نقطه ریشه های مخرج

$$1-e^{-T(S-P)} = 0 \Rightarrow e^{T(S-P)} = 1 = 1e^{j(2k\pi)}$$

دارای قطب است

$$T(P-S) = j2k\pi \rightarrow P = S + jk\frac{2\pi}{T}$$

$$= \underbrace{S}_{\text{بخش حقیقی}} + \underbrace{jk\omega}_{\text{بخش موهومی}}$$

حال ما باید مانده در این بی نهایت شعاع را جمع کنیم. تمامی این قطب ها ساده هستند

$$R = \lim_{P \to p^*} (P-p^*) \frac{X(P)}{1-e^{-T(P-S)}} \longrightarrow diff$$

$$= \frac{X(P)}{-T e^{T(P-S)}} \Bigg|_{P=P^*} = \frac{X(P^*)}{-T e^{j2k\pi}} = \frac{X(P^*)}{-T}$$

چون مسیر ساعتگرد شده، یک منفی از انتگرال بیرون داریم.

$$X^*(S) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{X(P^*)}{T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X(S+jk\omega_s)$$