جلسه بیست و یکم = ۲

مثال = ۲

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x-3\cos x}{3\sin x+\cos x}\,dx$$

Solve $\Longrightarrow 2\sin x-3\cos x = A(\underbrace{3\sin x+\cos x}_{\text{خود مخرج}})+B(\underbrace{3\cos x-\sin x}_{\text{مشتق مخرج}})$

$$\quad = (3A-1B)\sin x+(1A+3B)\cos x$$

$$\begin{cases}3A-B=2\\ A+3B=-3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=\frac{3}{10} & \text{ضریب } x\\ B=\frac{-11}{10} & \text{ضریب } \ln\end{cases}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overset{A}{\frac{3}{10}}(3\sin x+\cos x)-\overset{B}{\frac{11}{10}}(3\cos x-\sin x)}{3\sin x+\cos x}\,dx$$

$$\Longrightarrow I=\int\Big(\frac{3}{10}-\frac{11}{10}\,\frac{3\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}\Big)\,dx = \frac{3}{10}x-\frac{11}{10}\ln(3\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

مشتق در صورت

$$I=\Big(\frac{3\pi}{20}-\frac{11}{10}\ln 3\Big)-\Big(0-\frac{11}{10}\ln 1\Big)=\frac{3\pi}{20}-\frac{11}{10}\ln 3$$

مثال = ۳

$$I=\int_0^{2}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+2e^{-x}}\,dx$$

Solve $\Longrightarrow e^{x}-e^{-x}=A(\underbrace{e^{x}+2e^{-x}}_{\text{خود مخرج}})+B(\underbrace{e^{x}-2e^{-x}}_{\text{مشتق مخرج}})$

$$\begin{cases}A+B=1\\ 2A-2B=-1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\ B=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\ln(e^{x}+2e^{-x})\Big|_0^{\ln 2}\longrightarrow I=\Big(\frac{1}{4}\ln 2+\frac{3}{4}\ln(2+1)\Big)-\Big(0+\frac{3}{4}\ln(1+1)\Big)$$

$$I=\frac{1}{4}\ln 2+\frac{3}{4}\ln 3-\frac{3}{4}\ln 2=\frac{3}{4}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\begin{cases} e^{\ln 2} = 2 \\ e^{-\ln 2} = e^{\ln 2^{-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \end{cases}$$ برای مثال قبل

خیلی مهم

تذکر: تکنیک فوق برای Sin و Cos زمانی صدق می‌کند که آن‌ها در صورت و مخرج مشابه باشند و برای توابع نمایی زمانی صادق است که نما در صورت و مخرج مشابه باشند.

نکته خیلی خیلی مهم ۳ =

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

نکته ۳ = اگر با انتگرال‌های در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ برخورد کردیم که داخل انتگرال کسری بوده صورت و مخرج شامل Sin و Cos باشد، از رابطه فوق استفاده کرده و از دو جهت مختلف پس 2 انتگرال را با هم جمع می‌کنیم

مثال ۳ =

$$+\begin{cases} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx \\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x}\,dx \end{cases}$$

اتحاد چاق و لاغر

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(\sin x + \cos x)}(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)}{\cancel{\sin x + \cos x}}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\cos\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\cos 0\right)\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi - 1}{4}$$

جلسه بیست و دوم = ۲ جلسه 8 = ۲

انتگرال های به روش جزء به جزء = ۲

مثال = ۲

حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید؟

$I=\int(3x+5)\sec^2x\,dx \longrightarrow$ ضرب ۲ جنس مختلف است ← جزء به جزء

(از نوع الف)

Solve $\Longrightarrow$

مشتق	انتگرال
$3x+5$	$\sec^2x \Longrightarrow \dfrac{1}{\cos^2x}=1+\tan^2x$
3	$\tan x$
0	$-\ln(\cos x)$

$$I=(3x+5)\tan x+3\ln(\cos x)+C$$

معکوس

$ex \Longrightarrow I=\int_0^1 x\,\text{Arctan}\,x\,dx \longrightarrow$ از نوع ج

Solve $\Longrightarrow$

مشتق	انتگرال
$\text{Arctan}\,x$	x
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{x^2}{2}$

$$I=\frac{x^2}{2}\text{Artan}\,x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$I=\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}1-0\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx$$

$$I=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \longrightarrow I=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\text{Arctan}\,x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-(0-0)\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

$ex \Longrightarrow I=\int_0^1\text{Arc}\sin x\,dx \Longrightarrow I=x\,\text{Arc}\sin x\Big|_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Solve $\Longrightarrow$

مشتق	انتگرال
$\text{Arc}\sin x$	1
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x

مشتق u/

$$I=(1\,\text{Arc}\sin 1-0)-\frac{1}{2}\int\cancel{2x}\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$I=\frac{\pi}{2}+\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}}\Big|_0^1\right) \Longrightarrow I=\frac{\pi}{2}+\left(\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1\right)=\frac{\pi}{2}+(0-1)$$

$$\Longrightarrow I=\frac{\pi}{2}-1$$

4.3

انتگرال های بازگشتی ← ۳

مثال

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ — دنباله فیبوناچی

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

هر جمله برابر مجموع ۲ جمله قبلش

رابطه بازگشتی

انتگرال هایی می باشند که داخل انتگرال یک عامل به توان n است ($n \in \mathbb{N}$) به طوری که حل عمومی یک دنباله می باشد و قرار است در این سؤالات ما پیدا کنیم که هر جمله چه رابطه ای با جملات قبلی خود دارد که برای این منظور ما باید از روش جزء به جزء استفاده کنیم.

جدول ج

مثال ۳ = در حالت کلی $I_n = \int_0^a (a^2-x^2)^n dx$ کدام گزینه درست است؟

Solve ⟹ $I_n = \int_0^a (a^2-x^2)^n dx$

مشتق		انتگرال
$(a^2-x^2)^n$	$+$	1
$n(-2x)(a^2-x^2)^{n-1}$	$-$	x

$$I_n = x(a^2-x^2)^n\Big|_0^a - \int_0^a n(-2x^2)(a^2-x^2)^{n-1}dx$$

$$I_n = (0-0) - 2n\int_0^a -x^2(a^2-x^2)^{n-1}dx$$

$$I_n = -2n\int_0^a (a^2-x^2-a^2)(a^2-x^2)^{n-1}dx$$

ضرب

$$I_n = -2n\int_0^a \left((a^2-x^2)^n - a^2(a^2-x^2)^{n-1}\right)dx$$

$$I_n = -2n\underbrace{\int_0^a (a^2-x^2)^n dx}_{I_n} + 2a^2n\underbrace{\int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}dx}_{I_{n-1}}$$

$$I_n = -2n\,I_n + 2a^2n\,I_{n-1}$$

$$\to I_n(1+2n) = 2a^2n\,I_{n-1}$$

$$\boxed{I_n = \frac{2a^2n}{1+2n}I_{n-1}}$$

جلسه بیست و سوم =

روش تفکیک کسرها =

مثال ۲ = حاصل $I=\int \frac{4x+7}{x^2-5x+6}$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow I=\int \frac{4x+7}{(x-2)(x-3)}dx=\int \left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx$

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \overset{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} \overset{\text{متحد با}}{\equiv} \frac{4x+7}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ -3A-2B=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2A+2B=8 \\ -3A-2B=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-15 \\ B=19 \end{cases}$$

$$I=\int \left(\frac{-15}{x-2}+\frac{19}{x-3}\right)dx=-15\ln(x-2)+19\ln(x-3)+C$$

$$* \quad \frac{4x+7}{(x-2)(x-3)}=\frac{\overset{-15}{A}}{(x-2)}+\frac{\overset{19}{B}}{(x-3)}$$

ریشه $=2$ ، ریشه $=3$

روش هوی ساید =

مثال ۲ =

$$I=\int_2^\infty \frac{3x+5}{(x-1)(x+1)^2}dx=?$$

$\longrightarrow$ 3 درجه $\longrightarrow$ 3 ثابت باید داشته باشیم

$$I=\int_2^\infty \left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$* \; A=\frac{3x+5}{(x+1)^2}\Big|_{x=1} \longrightarrow A=\frac{8}{4}=2$$

$$* \quad \frac{3x+5}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}$$

هوی ساید

$$* \; C=\frac{3x+5}{x-1}\Big|_{x=-1} \longrightarrow C=\frac{2}{-2}=-1$$

دلخواه $x=0 \longrightarrow \frac{5}{-1}=-2+B-1$

$$-5=B-3 \longrightarrow B=-2$$

$$I=\left(2\ln(x-1)-2\ln(x+1)-1\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right)\Big|_2^\infty$$

$$I=2\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\Big|_2^\infty$$

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(2\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)-\left(2\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow I=(2\overset{\text{صفر}}{\cancel{\ln 1}}+0)-\left(-2\ln 3+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=2\ln 3-\frac{1}{3}$$

جلسه بیست و چهارم:

انتگرال های ناسره:
(غیرعادی)

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx \Longrightarrow \text{ناسره}$$

$$I=\int_0^1 \ln x\,dx \Longrightarrow \text{ناسره}$$

$$I=\int_1^5 \frac{1}{x-3}\,dx \Longrightarrow \text{ناسره}$$

چون عدد 3 هم توی بازه [illegible]

$$I=\int_1^{\infty} \{\ \}\,dx \Longrightarrow \text{ناسره}$$

نکته مهم: در تحلیل انتگرال های ناسره هیچ کار جبری لازم نیست انجام دهیم، حتی اگر نفهمیم که انتگرال ناسره است باز هم در جواب درست تأثیری ندارد و فقط و فقط زمانی که نقطه ناسره در بین بازه انتگرال‌گیری مشروط باشد باید به آن دقت کنیم. (انتگرال باید شکسته شود)

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بدست بیاورید؟

$$I=\int_0^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$$

Solve

$$\Longrightarrow I=\int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

تغییر متغیر $\Rightarrow e^x=t \to e^x\,dx=dt \to dx=\frac{dt}{e^x} \to dx=\frac{dt}{t}$

$$\begin{cases} x\to\infty \to e^{\infty}=t \to t=\infty \\ x\to 0 \to e^0=t \to t=1 \end{cases}$$

$$I=2\int_1^{\infty} \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\,\frac{dt}{t} = 2\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\,\frac{1}{1}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{t}{1}\Big|_1^{\infty}$$

$$I=2(\mathrm{Arctan}(\infty)-\mathrm{Arctan}(1)) = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 2\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$ex \Rightarrow I=\int_0^1 \ln x\,dx \xrightarrow{Solve} I = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\,x\,dx$$

مشتق	انتگرال
$\ln x$	1
$\frac{1}{x}$	x

$$I=(1\ln 1 - 0\ln 0) - \int_0^1 dx$$

$$I=(0-\cancel{0\times\infty}) - \left(x\Big|_0^1\right)$$

مساوی صفر — ابهام — تعریف نشده

$$I= -(1-0) = -1$$

$$ex \Rightarrow I=\int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Solve ⟹ تغییر متغیر

$$x=1\sin\theta \xrightarrow{\text{مشتق}} dx = \cos\theta\, d\theta \qquad \begin{cases} x=1 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \\ x=0 \longrightarrow \theta = 0 \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1-\sin^2\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\theta\,|\cancel{\cos\theta}|}\cancel{\cos\theta}\, d\theta$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\tan^2\theta)\,d\theta = \tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=\tan\frac{\pi}{2} - \tan 0 = \infty \longrightarrow \text{واگرا}$$

$$ex \Rightarrow I=\int_1^5 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$Solve \Rightarrow I=\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_2^5 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$I_1=\int_1^2 \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|\Big|_1^2 = \ln 0 - \ln 1 = \infty \longrightarrow \text{واگرا} \longrightarrow \text{انتگرال } I \text{ واگرا است}$$

$$I_2=\int_2^5 \frac{1}{x-2}\,dx \quad \text{دیگر نیاز نیست}$$

نکته = ۲

مثال 1 = حاصل (ریمانی) $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ کدام است؟ جواب: واگرا

مثال ۲ = مقدار اصلی کوشی (هندسی) $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ کدام است؟ جواب: صفر

* قرار نیست هر واگرایی مقدار اصلی کوشی داشته باشد.

هندسی رسم و مساحت زیر نمودار را بررسی می‌کنیم.

جلسه بیست و پنجم = جلسه ۹ = چند نکته در انتگرال های ناسره = ۲

مثال = کدام گزینه در مورد $I=\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2+x\sqrt{x}}dx$ و $J=\int_1^\infty \frac{5x^2-6x^3+e^{-x}}{4x^5-3x^4}$ درست است؟ هر دو همگرا

Solve $\Rightarrow$ $I=\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2+x\sqrt{x}}dx \xrightarrow{\text{است}}$ باعث ناسره شدن $x=0$ ← هم ارزی در $x\to 0$ مجاز است

$$I=\int_0^1 \frac{1-(1-\frac{x^2}{2!})}{x^2+x\sqrt{x}}dx \simeq \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}dx \simeq \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}dx \xrightarrow{P=-\frac{1}{2}<1} \text{همگرا}$$

به خاطر بی نهایت ناسره شده — کنار گذاشته شده در کم ارزش ترین — توان بزرگتر

$$J=\int_1^\infty \frac{5x^2-6x^3+e^{-x}}{4x^5-3x^4} \xrightarrow[\text{هم ارزی}]{x\to+\infty} J \simeq \int_1^\infty \frac{-6x^3}{4x^5} \simeq \frac{-6}{4}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \xrightarrow{P=2>1} \text{همگرا}$$

کم قدرت

تذکر = در استفاده از هم ارزی های صفر در بحث انتگرال های ناسره حتماً حتماً به وجود جمله قرینه دقت کنید و فرآیندی که در بحث حد استفاده می‌کردیم را فراموش نکنید.

ex $\Rightarrow$ $I=\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}dx$ $\qquad$ $J=\int_1^\infty \frac{1+\sin x}{x^2+x+1}dx$

Solve $\Rightarrow$ $I=\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}dx \rightarrow$ هم به خاطر حضور ∞ در کران های انتگرال و هم به خاطر حضور 0 در کران انتگرال ← ناسره است ← دو دلیل ناسره می‌تواند در یک انتگرال باشد بنابراین انتگرال را در نقطه α می‌شکنیم.

$$I=\underbrace{\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x}}}_{P=\frac{1}{2}<1}+\underbrace{\int_\alpha^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}}_{P=\frac{3}{2}>1} \Rightarrow \text{همگرا} + \text{همگرا} = \text{همگرا}$$

$$J=\int_1^\infty \frac{1+\sin x}{x^2+x+1}dx \xrightarrow[\text{هم ارزی بی نهایت}]{x\to+\infty} J \simeq \int_1^\infty \frac{1+\sin x}{x^2}dx$$

* $A=\int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx \xrightarrow{P=2>1}$ همگرا $\qquad J \leq A \xrightarrow{A\ \text{همگرا}}$ J نیز همگرا

تذکر ۲ = هرگاه یک انتگرال را به هر دلیلی بشکنیم جدا نیم یکی یا هر دو انتگرال شکسته شده واگرا باشد، انتگرال اصلی نیز واگرا است.

اما اگر ۲ انتگرال واگرا با ضابطه های متفاوت داشتیم در مورد جمع و تفریق آنها از حیث همگرایی یا واگرایی قضاوت نمی توان داشت.

تعریف تابع گاما = ۲

جلسه بیست و ششم = ۲

مثال ۲ = حاصل $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}dx$ کدام است؟

Solve

* هرگاه در گزینه ها π یا $\sqrt{\pi}$ یا فاکتوریل دیدیم، حتماً انتگرال به تابع گاما منتهی خواهد شد.

حال می دانیم انتگرال حتماً به تابع گاما منجر خواهد شد:

- داخل انتگرال $e^{-()}$ داریم. ← اگر بسته بندی درجه ۲ باشد باید بسته بندی را مربع کامل کنیم ← تغییر متغیر بسته بندی
- داخل انتگرال $\ln x$ داریم. ← باید از تغییر متغیر $\ln x=-t$ استفاده کنیم

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}dx$$

$$\Rightarrow -\ln x=t \Rightarrow \ln x=-t \Rightarrow x=e^{-t} \overset{d}{\Rightarrow} dx=-e^{-t}dt$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \ln 1=-t \Rightarrow 0=-t \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow \ln 0=-t \Rightarrow -\infty=-t \Rightarrow t=+\infty \end{cases}$$

$$I=\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{-(-t)}}(-e^{-t})dt=-\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-t}\times t^{-\frac{1}{2}}dt=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$x-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

مثال = ۲ حاصل $I=\int_1^\infty e^{-x^2+2x+3}$ کدام است؟

Solve $\Longrightarrow I=\int_1^\infty e^{-x^2+2x+3}\,dx \xrightarrow{\text{تبدیل به مربع کامل}} I=\int_1^\infty e^{-(x^2-2x+1-4)}\,dx$

$\Longrightarrow I=\int_1^\infty e^{-((x-1)^2-4)}\,dx=\int_1^\infty e^{-(x-1)^2+4}\,dx=\int_1^\infty e^{-(x-1)^2}\times e^{4}\,dx$

$\Longrightarrow I=e^4\int_1^\infty e^{-(x-1)^2}\,dx$

$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} (x-1)^2=t \xrightarrow{d} 2(x-1)\,dx=dt \longrightarrow dx=\frac{dt}{2(x-1)} \longrightarrow dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$\begin{cases} x=\infty \longrightarrow (x-1)^2=t \longrightarrow (\infty-1)^2=t \longrightarrow t=\infty \\ x=1 \longrightarrow (x-1)^2=t \longrightarrow (1-1)^2=t \longrightarrow t=0 \end{cases}$$

$I=e^4\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{e^4}{2}\int_0^\infty e^{-t}\times t^{-\frac12}\,dt=\frac{e^4}{2}\Gamma(\frac12)=\frac{e^4\sqrt{\pi}}{2}$

$x-1=\frac{-1}{2}\Rightarrow x=\frac12$

مهم

$*\quad \int_0^1 (\ln x)^n\,dx=(-1)^n\times n!$

مثال = ۲ حاصل $I=\int_0^1(\ln x)^6\,dx$ کدام است؟

طبق این فرمول //

Solve $\Longrightarrow I=\int_0^1(\ln x)^6\,dx=(-1)^6\times 6!=6!=720$

مثال = ۲ حاصل $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,dx$ کدام است؟

Solve $\Longrightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x^{(2m-1)}\cos x^{(2n-1)}\,dx=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6(x)\cos x^0\,dx=\frac{\Gamma(\frac72)\Gamma(\frac12)}{2\Gamma(\frac72+\frac12)}=\frac{\frac52\times\frac32\times\frac{\Gamma 1}{2}\times\Gamma(\frac12)}{2\Gamma(4)}=\frac{\frac{15}{8}\pi}{2\times3!}=\frac{15\pi}{8\times1}$

$2m-1=6 \longrightarrow m=\frac72$

$2n-1=0 \longrightarrow n=\frac12$

$=\frac{5\pi}{32}$

مثال ۳= حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید؟

تعریف تبدیل لاپلاس

$$I_1=\int_0^\infty (x^3-3x^2+5x-2)\,e^{-2x}\,dx$$

Solve $\Longrightarrow L(x^3-3x^2+5x-2)\Big|_{s=2} \Longrightarrow I=\frac{3!}{s^4}-3\frac{2!}{s^4}+5\frac{1!}{s^2}-\frac{2}{s}\Big|_{s=2}$

$$I=\frac{6}{16}-\frac{6}{8}+\frac{5}{4}-\frac{2}{2}=\frac{-3}{8}+\frac{5}{4}-1=\frac{3}{4}$$

$$I_2=\int_0^\infty e^{-2x}(x\sin^2 x)\,dx \overset{\text{Solve}}{=} L(x\sin^2 x)\Big|_{s=2}$$

فرمول طلایی

$$=L\left(x\,\frac{1-\cos 2x}{2}\right)=\frac{1}{2}L(x(1-\cos 2x))$$

به خاطر ضرب x مشتق می گیریم $\quad =-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)'$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{s^2}-\frac{1(s^2+4)-2s(s)}{(s^2+4)^2}\right)\Big|_{s=2}$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{4}-0\right)=\frac{1}{8}$$

$$I_3=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\right)dy \overset{\text{Solve}}{=}\int_0^\infty\left(L\sin x\big|_{s=y}\right)dy=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s^2+1}\Big|_{s=y}\right)dy$$

$$I=\int_0^\infty\frac{1}{y^2+1}\,dy=\frac{1}{1}\operatorname{Arctan}\frac{y}{1}\Big|_0^\infty=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$I_4=\int_0^\infty\frac{e^{-2x}-e^{-5x}}{x}\,dx$$

به خاطر $\frac{1}{x}$ انتگرال می گیریم

Solve $\Longrightarrow I=\int_0^\infty e^{-2x}\frac{1}{x}\,dx-\int_0^\infty e^{-5x}\frac{1}{x}\,dx$

$$I=L\frac{1}{x}\Big|_{s=2}-L\frac{1}{x}\Big|_{s=5}\Longrightarrow I=\int_2^\infty\frac{1}{s}\,ds-\int_5^\infty\frac{1}{s}\,ds$$

$$\Longrightarrow I=\left(\ln s\big|_2^\infty\right)-\left(\ln s\big|_5^\infty\right)=(\cancel{\ln\infty}-\ln 2)-(\cancel{\ln\infty}-\ln 5)=-\ln 2+\ln 5$$

چون مثل هم هستن می توانیم ساده کنیم

$$=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$$

چند کاربرد انتگرال معین =

محاسبه سطح محصور به دو منحنی =

مثال = مساحت زیر منحنی $y=x^3e^{-x^2}$ در فاصله $x\in[-1,1]$ کدام است؟

Solve $\Longrightarrow$ $S=\int_a^b |f(x)|dx=\int_{-1}^{1}|x^3e^{-x^2}|dx=2\int_0^1|x^3e^{-x^2}|dx=2\int_0^1 x^3e^{-x^2}dx$

تابع زوج — انتگرال های تقسیم — تغییر متغیر

$x^2=t \to 2xdx=dt \to xdx=\frac{dt}{2}$

$\begin{cases} x=1 \to 1^2=t \to t=1 \\ x=0 \to 0^2=t \to t=0 \end{cases}$

$S=2\int_0^1 x^2e^{-x^2}(xdx)$

$\Longrightarrow S=\cancel{2}\int_0^1 te^{-t}\frac{dt}{\cancel{2}}=\int_0^1 te^{-t}dt \xRightarrow{\text{نوع ۱ جزء به جزء}}$

$\Longrightarrow S=-te^{-t}-e^{-t}=-e^{-t}(t+1)\Big|_0^1$

$\Longrightarrow S=(-e^{-1}(2)-(-1))=\frac{-2}{e}+1=\boxed{\frac{e-2}{e}}$

مشتق		انتگرال
t	$+$	e^{-t}
1	$-$	$-e^{-t}$
0		e^{-t}

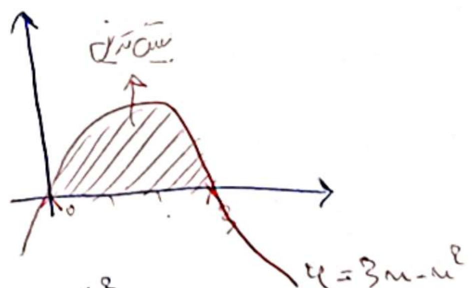
نکته مهم = در محاسبه انتگرال هایی که جزء به جزء می خواهد حتماً باید آرگومان خطی باشد، به تعبیری اگر آرگومان خطی نبود حتماً باید ابتدا آرگومان را تغییر متغیر دهیم تا خطی شود، سپس مسأله را ادامه دهیم.

مثال = بیشترین مقدار $I=\int_a^b(3x-x^2)dx$ کدام است؟

Solve $\Longrightarrow$ $I=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ سطح فاصل به ما می دهد

$I=\int_a^b(3x-x^2)dx$ — $y=3x-x^2$ سطح فاصل زیر منحنی

$x=0 \quad x=3$



$I_{max}=\int_0^3(3x-x^2)dx$

$=(3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}$

$=27(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=27(\frac{1}{6})=\frac{9}{2}$

جلسه بیست و هفتم => ۲ مثال فقط حل شد.

جلسه بیست و هشتم = ۲ جلسه 10 =>

مثال => طول قسمتی از منحنی $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ که $x\in[1,2]$ است، کدام است؟

همان طول قوس

Solve => $L=\int_1^2\sqrt{1+f'^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}}\,dx$$

* هر موقع زیر رادیکال ۳ جمله‌ای حتماً می‌توانیم به اتحاد اول و دوم تبدیل کنیم.

$$L=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right|dx$$

$$L=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^2$$

$$L=\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 1\right)=\frac{3}{4}+\ln\sqrt{2}$$

مثال => طول قسمتی از منحنی $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=-\cos t\end{cases}$ به ازای $0\leq t\leq\pi$ کدام است؟

پارامتری

Solve => $L=\int_a^b\sqrt{f'^2+g'^2}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{(1-\cos t)^2+(-\sin t)^2}\,dt$

* مثلثاتی زیر رادیکال حتماً مد نظرمان است:

1. $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
2. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$
3. $1+\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$
4. $1-\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow L=\int_0^\pi\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

$$L=\int_0^\pi\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{4\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)}\,dt$$

$$L=\int_0^\pi\left|2\sin\frac{t}{2}\right|dt=2\int_0^\pi\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$L=2\,\frac{-1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi=-4(0-1)=4$$

مثال ۲ = قسمتی از منحنی $y=\cosh x$ که در فاصله $x\in[0,\ln 2]$ قرار دارد را حول محور y دوران می‌دهیم ، سطح جانبی حاصل کدام است؟

Solve $\Rightarrow S_y = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'^2}\,dx = 2\pi\int_0^{\ln 2} x\sqrt{1+(\sinh x)^2}\,dx$

$\Rightarrow S_y^L = 2\pi\int_0^{\ln 2} x\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx \longrightarrow L = 2\pi\int_0^{\ln 2} x\sqrt{\cosh^2 x}\,dx$

همیشه

$* \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow 1+\sinh^2 = \cosh^2 x$

$\Rightarrow L = 2\pi\int_0^{\ln 2} x\cosh x\,dx$ $\Rightarrow$ جزء به جزء

مشتق	انتگرال
x	$\cosh x$
1	$\sinh x$
0	$\cosh x$

$\Rightarrow L = 2\pi(x\sinh x - \cosh x)\Big|_0^{\ln 2}$

$\Rightarrow L = 2\pi\left(\left(\frac{3}{4}\ln 2 - \frac{5}{4}\right) - (0-1)\right)$

$L = 2\pi\left(\frac{3}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\right)$

$L = \frac{\pi}{2}(3\ln 2 - 1)$

$L = \frac{\pi}{2}(\ln 8 - 1)$

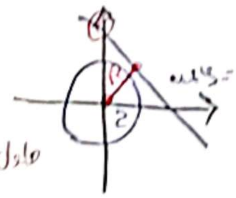
$* \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

$* \cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

مهم $\Rightarrow \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}(\underbrace{\sec x\tan x}_{\text{مشتق } \sec} + \ln(\underbrace{\sec x + \tan x}_{\text{انتگرال } \sec}))$

مثال ۲ = (مهم اول کنکور) سطح حاصل از دوران دایره $x^2+y^2=4$ حول خط $x+y=3$ کدام است؟ (دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲)

Solve $\Rightarrow$



$S = L \times 2\pi R$

$S = 4\pi \times 2\pi \times \frac{3}{\sqrt{2}}$

$S = \frac{24\pi^2}{\sqrt{2}}$

$L \rightarrow$ طول دوران یافته

$L = 2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi$

فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax+by+c=0$ $\Rightarrow R = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

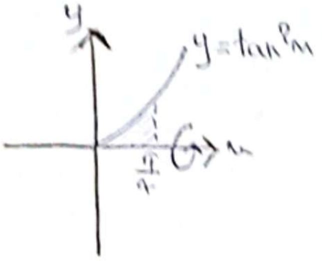
$\Downarrow$

فاصله نقطه $(0,0)$ از خط $x+y-3=0$ $\Rightarrow R = \frac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

جلسه بیست و نهم = ۲

حجم = ۲

مثال => سطح زیر منحنی $y=\tan^2 x$ که در محدوده $[0, \frac{\pi}{4}]$ قرار دارد را حول محور x ها دوران می‌دهیم، حجم حاصل از دوران کدام است؟



Solve $\Rightarrow V_x=\pi\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))\,dx$

$$\Rightarrow V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}((\tan^2(x))^2-0)\,dx$$

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^4 x)\,dx$$

* برای توان tan و cot از روش [illegible] استفاده می‌کنیم

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x+\tan^2 x-\tan^2 x\,dx$$

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x(\tan^2 x+1)-\tan^2 x\,dx$$

مشتق tan

$$V_x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\tan^2 x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+1-1)\,dx$$

$$V_x=\pi\left(\frac{\tan^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)-\pi(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$V_x=\pi\left(\frac{1}{3}-0\right)-\pi\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-(0-0)\right)$$

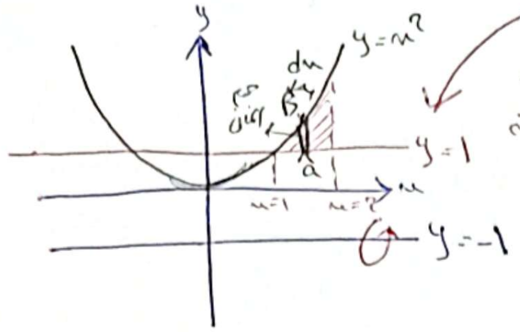
$$V_x=\frac{\pi}{3}-\pi+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{2\pi}{3}$$

* $\int\tan^8 x\,dx=\frac{\tan^7 x}{7}-\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^3 x}{3}-\frac{\tan x}{1}+x+C$

cot هم همینجوری ولی فقط با منفی شروع میشه

* $\int\tan^9 x\,dx=\frac{\tan^8 x}{8}-\frac{\tan^6 x}{6}+\frac{\tan^4 x}{4}-\frac{\tan^2 x}{2}+(\underbrace{-\ln\cos x}_{})+C$

مثال ۳: سطح محدود بین منحنی $y=x^2$ و خط $y=1$ از $x=1$ تا $x=2$ را حول خط $y=-1$ دوران می‌دهیم، حجم حاصل کدام است؟



المان ⊥ محور عمود ← واشر
المان ∥ محور موازی ← استوانه

*در اثر دوران المان AB حول خط $y=-1$ واشر پدید می‌آید.

$dV=\pi(R_2^2-R_1^2)dt$: حجم واشر

R_2 ← شعاع خارجی ← فاصله دورترین نقطه المان تا محور ← نقطه B تا محور

R_1 ← شعاع داخلی ← فاصله نزدیک‌ترین نقطه المان تا محور ← نقطه A تا محور

$$dV=\pi\underbrace{((1+y_B)^2-(1+y_A)^2)}\underbrace{dx}=\pi((1+x^2)^2-(1+1)^2)dx$$

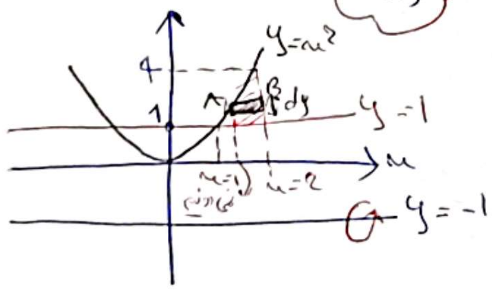
همه باید برحسب x شود

$$V=\int_1^2\pi(1+2x^2+x^4-4)dx=\pi(-3x+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5})\Big|_1^2$$

$$V=\pi((-6+\frac{16}{3}+\frac{32}{5})-(-3+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}))=\pi(-3+\frac{14}{3}+\frac{31}{5})$$

$$V=\pi(\frac{-45+70+93}{15})=\frac{118\pi}{15}$$

راه حل دیگر ۳:



*در اثر دوران المان AB حول محور $y=-1$ پوسته استوانه‌ای پدید می‌آید.

$dV=2\pi Rh\,dR$

R ← شعاع استوانه ← فاصله المان تا محور ← فاصله نقطه امتداد

h ← ارتفاع استوانه ← فاصله ۲ سر المان از هم x / y

$$dV=2\pi\underbrace{(1+y_{AB})(x_B-x_A)}dy$$

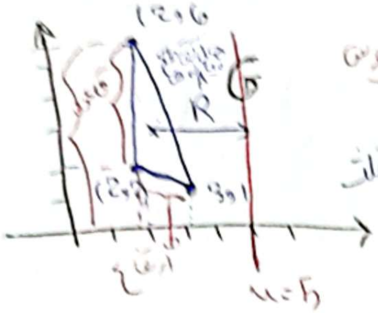
باید برحسب y شود

$$=2\pi(1+y)(2-\sqrt{y})dy$$

$$V=\int_1^4 2\pi(2-\sqrt{y}+2y-y\sqrt{y})dy$$

$V=$

مثال ۳ = سطح مثلث به رئوس (2,2) ، (2,6) ، (3,1) را حول خط x=5 دوران می‌دهیم، حجم حاصل کدام است؟



قضیه دوم پاپوس $\Rightarrow V = S \times 2\pi R$

مساحت سطح مثلث $S = \frac{1}{2}$ قاعده × ارتفاع

$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \Rightarrow S = 2$

مرکز سطح مثلث

$$\left| \begin{array}{l} \text{طول: } \bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ \text{عرض: } \bar{y} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{2+2+3}{3} = \frac{7}{3} \\ \bar{y} = \frac{2+6+1}{3} = \frac{9}{3} \end{array} \right.$$

$V = S \times 2\pi R$

فاصله مرکز سطح تا محور دوران

$V = 2 \times 2\pi\left(5 - \frac{7}{3}\right) \Rightarrow V = 4\pi\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$

حد مجموع ریمانی = ۳

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید؟

$$I_1 = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tan^{-1}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$$

Solve $\Rightarrow I = \lim \frac{1}{n}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2n} + \tan^{-1}\frac{3}{2n} + \dots + \tan^{-1}\frac{2n-1}{2n}\right)$

مقدار ثابت

→ حد مجموع مشتق‌ها دارد

→ ضریب $\frac{1}{n}$ دارد

→ پرش منظم دارد

برابر

پرش منظم $= \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 \\ b = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1 \end{cases} \Longrightarrow I = \int_{a=0}^{b=1} f(x)\,dx = \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$$

مشتق کامل

$$I = \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx \Rightarrow I = x\tan^{-1}x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

جزء به جزء

مشتق	انتگرال
$\tan^{-1}$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	x

$I = \left(1\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1$

$I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1)$

صفر

$I = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$

جلسه سی ام => جلسه 11 =>

فصل پنجم =>

دنباله، سری و بسط ها =>

مثال ۲= کدام گزینه در مورد دنباله $a_n=\{\sin\frac{\pi}{n}\}$ درست است؟ فرآیند صعودی و نزولی بودن => مشتق می‌گیریم.

Solve => $a_n=\{\sin\frac{\pi}{n}\} \xrightarrow{\text{مشتق}} a'_n=\frac{-\pi}{n^2}\cos\frac{\pi}{n}$ اکیداً نزولی

$n>1 \Rightarrow a'_n<0 \Rightarrow$ اکیداً نزولی → غیر یکنوا

$n\in\mathbb{N}$

$\frac{\pi}{n}\xrightarrow{n>1}$ واقع در ربع اول

نکته =>

$a_n=\{\sin\frac{\pi}{n}\}$ $\xrightarrow{n=1}$ جمله اول: $a_1=\sin\pi=0$

$\xrightarrow{n=2}$ جمله دوم: $a_2=\sin\frac{\pi}{2}=1$ صعودی → صعودی

مثال ۳= کدام گزینه برای دنباله $a_n=\{\frac{5^n}{n!}\}$ درست است؟

فاکتوریل قابل مشتق گیری نیست

Solve => $a_n=\{\frac{5^n}{n!}\}$

$\text{س}_c \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}=\frac{5^{n+1}\times n!}{(n+1)!\,5^n}=\frac{\cancel{5^n}\times5\times\cancel{n!}}{\cancel{5^n}\times(n+1)\times\cancel{n!}}=\frac{5}{n+1}$

$\xrightarrow{n>4} \frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ نزولی

$\xrightarrow{n<4} \frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ صعودی

غیر یکنوا

مثال ۴= کران پایین، کران بالا، کوچکترین جمله و بزرگترین جمله در دنباله $a_n=\{\frac{\sqrt n}{n+25}\}$ را بدست آورید؟ نقش اکسترمم مطلق عمل می‌کنیم.

Solve => $a_n=\{\frac{\sqrt n}{n+25}\} \Rightarrow a'_n=\frac{\frac{1}{2\sqrt n}(n+25)-1\sqrt n}{(n+25)^2}=0$

$\frac{n+25}{2\sqrt n}-\sqrt n=0 \Rightarrow \frac{n+25}{2\sqrt n}=\sqrt n \Rightarrow n+25-2n=0 \Rightarrow n=25\in\mathbb{N}$

ابتدای بازه $n=1 \Rightarrow a_1=\frac{\sqrt1}{1+25} \Rightarrow a_1=\frac{1}{26}$

انتهای بازه $n=\infty \xRightarrow{\text{حد می‌گیریم}} \lim a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt n}{n+25}=0$

بحرانی $n=25 \Rightarrow a_{25}=\frac{\sqrt{25}}{25+25}=\frac{5}{100}=\frac{1}{10}$

کران پایین = 0 → inf

کران بالا = $\frac{1}{10}$ → sup

نداریم چون اشتر = نداریم = کوچکترین جمله → min

بزرگترین جمله = $\frac{1}{10}$ → max

تذکر = می‌دانیم برای محاسبه کران در دنباله مانند اکسترمم مطلق عمل می‌کنیم، دقت داشته باشیم مقادیر اکسترمم لازم نیست واقعی باشند و در صورت حدی بودن مشکلی ندارد، ولی مقادیر min و max باید واقعی باشند و در صورت حدی بودن وجود ندارند.

مثال = ۲ کران پایین، کران بالا، کوچکترین عضو و بزرگترین عضو دنباله $a_n=\{2n^2-25n+10\}$ را بدست آورید.

Solve $\Longrightarrow a_n=\{2n^2-25n+10\} \Rightarrow a'_n=0 \Rightarrow 4n-25=0 \Rightarrow n=\frac{25}{4}$ ریشه

$n=\frac{25}{4}=6,\ldots \Rightarrow$ دو عدد طبیعی قبلی و بعدی آن را باید بررسی کنیم $\Rightarrow \begin{matrix} n=6 \\ n=7 \end{matrix} \Rightarrow$ است

$n=\frac{25}{4}\notin \mathbb{N} \Rightarrow$ بحرانی ندارد

$n=1 \Rightarrow a_1=-13$

$n=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

بحرانی = ندارم

$n=6 \Rightarrow a_6=-68$

$n=7 \Rightarrow a_7=-67$

کران پایین = -68

کران بالا = ∞ پس ندارد

کوچکترین عضو = -68

بزرگترین عضو = ∞ پس ندارد

مثال = ۲ همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید؟

$a_n=\left\{\left[\frac{3n^2+8}{n^2+3}\right]\right\} \xrightarrow{\text{Solve}} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2+8}{n^2+3}\right] \overset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\right]$ با هم‌ارزی نمی‌توانیم حد بی‌نهایت (∞) بگیریم

$=[3]$ ؟ $\Rightarrow$ همگرا به 2

$*\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3(n^2+\frac{8}{3})}{n^2+3}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[3\,\frac{n^2+\frac{8}{3}}{n^2+3}\right]=[3\times 1^-]=[3^-]=2$

چون صورت کمتر از مخرج است

مثال = ۳ $a_n=\left\{\left[\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\frac{1}{2}}\right]\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\frac{1}{2}}\right]$

زوج و فرد بودن را بررسی می‌کنیم

پس صورت بزرگتر است

n زوج $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n^2+\frac{1}{2}}\right]=[1^+]=1$

n فرد $\Rightarrow \lim\left[\frac{n^2-1}{n^2+\frac{1}{2}}\right]=[1^-]=0$

پس

مخرج بزرگتر است

واگرا

سری نامتناهی ها = ۲

محاسبه ی سری خاص = ۲

الف) سری تلسکوپی یا قاعده ادغام:

$$\overset{\text{نامتناهی}}{I}=\sum_{n=k}^{m}(\overset{\text{اولین}}{a_n}-\overset{\text{آخرین}}{a_{n+1}}) \Rightarrow$$ تفاضل جمع جملات مشابه که n در آنها 1 واحد اختلاف داشته باشد.

$$\boxed{\Sigma = a_k - a_{m+1}} \longrightarrow$$ جمع جمله اول و آخر است

$$\overset{\text{نامتناهی}}{I}=\sum_{n=k}^{\infty}(\overset{\text{اولین}}{a_n}-\overset{\text{آخرین}}{a_{n+1}}) = a_k - \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

تذکر = ۲ هرگاه در سری تلسکوپی اندیس ها به جای 1 واحد k واحد اختلاف داشته باشند از جملات a_n باید k جمله اول و از جملات دیگر باید k جمله آخر را محاسبه کنیم. (جمع متناهی های جمع نامتناهی)

3 واحد باهم اختلاف

$$Ex \Rightarrow \sum_{n=1}^{25}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right) = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{28}+\frac{1}{27}+\frac{1}{26}\right)$$

از اول

از آخر

ب) سری هندسی:

$$I=\sum_{n=k}^{\infty}(\text{عدد})^n \;:\; -1<\text{عدد}<1$$

سری هندسی
$$\begin{cases} a_1 : \text{جمله اول} = \text{اولین جمله سیگما} \\ q : \text{قدر نسبت} = \text{همان عددی که به توان است} \end{cases} \Longrightarrow \Sigma = \frac{a_1}{1-q}$$

مثال ۲= حاصل سری های زیر را بدست آورید؟

$$I_1=\sum_{n=7}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

Solve $\Longrightarrow$ $\xrightarrow[\text{کسرهای ساده}]{\text{تفکیک کسر}}$ $I=\sum_{n=7}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}}{3n-1}+\frac{-\frac{1}{3}}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=7}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

سری تلسکوپ با ۱ واحد اختلاف

$n\to n+1$

$$I=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{21-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{20}-0\right)=\frac{1}{60}$$

$$I_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$$

Solve $\Longrightarrow$ $\xrightarrow[\text{کسرهای ساده}]{\text{تفکیک کسر}}$ $I=\sum\left(\frac{\frac{1}{6}}{2n-1}+\frac{-\frac{1}{6}}{2n+5}\right)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)\Longrightarrow$ ۳ تا جمله اول و ۳ تا جمله آخر است برای جمله عام

تلسکوپ

$n\to n+3$

$$I=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+5}\right)\right)$$

میل دهی

$$I=\frac{1}{6}\left(\frac{23}{15}-(3\times 0)\right)=\frac{23}{90}$$

صفر

* مجموع اعداد طبیعی = $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

مثال ۳=

$$I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n-1}}{3^{n+1}}\Longrightarrow \text{سری هندسی}$$

Solve $\Longrightarrow$ $I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}\Longrightarrow I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\times 3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\times 2^{-1}}{3^n\times 3}$

$$I=\underbrace{\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n}_{-1<\frac{-1}{3}<1}+\underbrace{\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{-1<\frac{2}{3}<1}\xRightarrow{S=\frac{a_1}{1-q}} I=\frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}{1-\frac{-1}{3}}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}\right)$$

هر دو همگرا

$$\Longrightarrow I=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{3}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{36}+\frac{4}{18}=\frac{1}{4}$$

* $\sum_{n=k}^{\infty}(\text{عدد})^n \xrightarrow{|\text{عدد}|>1}$ واگرا

نکته $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$\sum\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

جلسه سی و یکم:

آزمون های تعیین همگرایی یا واگرایی سری ها:

جمع بندی آزمون ها جهت همگرایی یا واگرایی سری ها: ناشناس ها

1) $\sum^{\infty}$ (چند جمله‌ای یا رادیکالی) $\longrightarrow$ آزمون درجه صورت و مخرج

2) $\sum^{\infty}$ (نمایی یا فاکتوریل) $\longrightarrow$ آزمون کوشی

3) $\sum^{\infty} (-1)^n$ (هر نوع جمله‌ای) (هر نوع جمله‌ای) $\longrightarrow$ آزمون لایب نیتس

4) $\sum^{\infty}$ (قیاس جدید) $\longrightarrow$ هم ارزی $\longrightarrow$ تبدیل به سری مرجع

5) (هیچ کدام از اتفاق های بالا نبود) $\longrightarrow$ آزمون مقایسه

مثال: کدام گزینه در مورد سری های $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2\sqrt{n^3+1}+n-1}{5n^3\sqrt[3]{n^4+n}-n^2+1}$ و $J=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\times n!}{n^n}$ درست است؟

Solve $\Rightarrow$ $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2\sqrt{n^3+1}+n-1}{5n^3\sqrt[3]{n^4+n}-n^2+1}$ $\Longrightarrow$ آزمون درجه صورت و مخرج

درجه صورت $\Longrightarrow n^2\times n^{\frac{3}{2}}=n^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$

درجه مخرج $\Longrightarrow n^3\times n^{\frac{4}{3}}=n^{\frac{13}{3}}=\frac{13}{3}$ $\Longrightarrow$ درجه مخرج − درجه صورت $=\frac{13}{3}-\frac{7}{2}=\frac{5}{6}<1 \Longrightarrow$ واگرا

$J=\frac{3^n\times n!}{n^n} \Longrightarrow$ آزمون کوشی

$n\to\infty:\ \sqrt[n]{(kn)!}\simeq\left(\frac{kn}{e}\right)^k$ هم ارزی استرلینگ

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n\times n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3^n}\times\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\frac{n}{e}}{n}=\frac{3}{e}>1 \Longrightarrow$ واگرا

مثال ۲ =

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^2+3n+1)}{n^2+2}$$

$n\to\infty$ هم ارزی — بالاترین قدرت

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n^2}{n^2}$$

$$J\simeq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}\longrightarrow \text{سری مرجع}$$

$$P=2>1\Rightarrow \text{همگرا}$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n^2+1}{7n^2+5}$$

لایب نیتس

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\\ a_n \text{ نزولی باشد}\end{cases}$$

$$I=\lim\frac{3n^2+1}{7n^2+5}=\frac{3}{7}\neq 0\Rightarrow \text{واگرا}$$

مثال ۲ =

$$J=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{(\ln n)^3}$$

مجبوریم از آزمون مقایسه استفاده کنیم.

$$n\to\infty:\ (\ln n)^3<n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\ln n)^3}>\frac{1}{n}$$

$$A=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\xrightarrow[P=1]{\text{سری مرجع}}\text{واگرا}$$

$$J>A\Rightarrow \text{J نیز واگرا است}$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$\frac{1}{n}\to 0$ می توان از هم ارزی صفر استفاده کرد.

$$\ln(1+A)\simeq A-\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}-\frac{A^4}{4}\cdots$$

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{(\frac{1}{n})^2}{2}\right)\right)$$

$$I\simeq\frac{1}{2}\sum^{\infty}\frac{1}{n^2}\longrightarrow \text{سری مرجع}$$

$$P=2>1\longrightarrow \text{همگرا}$$

ماجرای جذاب ۲ =

هرگاه سری شامل لگاریتم بود حتماً با n مقایسه شود.

هرگاه سری شامل نمایی بود حتماً با n^2 مقایسه شود.

تکنیک بازه همگرایی سری های تابعی ۲ =

مثال ۲ = فاصله همگرایی هر سری زیر کدام است؟

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-5)^n}{4n+7}\xRightarrow{\text{Solve}}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3x-5}{4n+7}\right|}<1$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|3x-5|}}{\sqrt[n]{4n+7}}<1\Rightarrow\frac{3x+5}{1}<1\Rightarrow|3x+5|<1\Rightarrow -1<3x-5<1$$

$$\Rightarrow 4<3x<6$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}<x<\frac{6}{3}2$$

$$\frac{2-\frac{4}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

شعاع همگرایی

ادامه مثال قبل $\Rightarrow I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-5)^n}{4n+7}$

$x=\frac{4}{3}\Rightarrow I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+7}\xrightarrow{\text{لایب نیتز}}\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+7}=0 \ ✓\\ a_n=\frac{1}{4n+7} \ \text{نزولی} ✓\end{cases}\Rightarrow$ همگرا

$x=2\Rightarrow I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+7}\simeq\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\xrightarrow[P=1]{\text{سری مرجع}}$ واگرا

فاصله همگرایی $\Rightarrow x\in[\frac{4}{3},2)$

نکته یا تبصره = اگه در سری تابع فاکتوریل داشته باشیم حتماً و قطعاً مرزهای فاصله همگرایی به واگرا شدن سری منتهی خواهد شد.

جلسه سی و دوم =

بسط تیلور و مک لوران =

مثال = در بسط تیلور تابع $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ضریب $(x-1)^3$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow (x-1)^3\Rightarrow\begin{cases}x_0=1\\ a_3=?\end{cases}\qquad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$\xrightarrow{\text{پس}} a_3=\frac{f'''(1)}{3!}$

$\xrightarrow{\text{حالا}} f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\xrightarrow{\text{تابع مشتق}} f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f''=\frac{-1}{2}(2x)(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow f'''=-1(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}+(-x)(\frac{-3}{2}\times 2x)(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$

$a_3=\frac{f'''(1)}{3!}=\frac{-\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+3\times\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}}{6}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}}{6}=\frac{1}{24\sqrt{2}}$

مثال ۳= در بسط تابع $f(x)=(x^3+3x^2+2x+4)\ln(1+2x)$ ضریب x^4 کدام است؟

Solve $\Rightarrow$ $x^4 \begin{cases} x_0=0 \longrightarrow \text{مک لوران} \\ a_4=? \end{cases} \Rightarrow a_4=\dfrac{f^{4}(0)}{4!}$

$f(x)=(x^3+3x^2+2x+4)\ln(1+2x)$

هم ارزی برایش می نویسیم

$\Rightarrow f(x)=(x^3+3x^2+2x+4)(2x-\dfrac{(2x)^2}{2}+\dfrac{(2x)^3}{3}-\dfrac{(2x)^4}{4})$

$2x^4 \quad -6x^4 \quad \dfrac{16}{3}x^4 \quad -16x^4$

ضریب x^4 ها $=2+(-6)+\dfrac{16}{3}+(-16)=\dfrac{-44}{3}$

مثال: با فرض $|x|<1$ ضریب x^9 در بسط $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^4}$ کدام است؟

$\Rightarrow$ Solve: $x^9 \begin{cases} x_0=0 \longrightarrow \text{بسط مک لوران} \\ a_9=? \end{cases} \Rightarrow a_9=\dfrac{f^{9}(0)}{9!}$

$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^4}=\sin x\,\dfrac{1}{1+x^4}$

هم ارزی — هم ارزی — هم ارزی شان را می نویسم

$\begin{cases} \sin A \simeq A-\dfrac{A^3}{3!}+\dfrac{A^5}{5!}-\dfrac{A^7}{7!}+\dfrac{A^9}{9!}-\dots \\ \dfrac{1}{1+A} \simeq 1-A+A^2-A^3+A^4-A^5\dots \end{cases}$

$f(x)=(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!})(1-x^4+(x^4)^2-(x^4)^3\dots)$

$\dfrac{1}{9!}x^9 \quad -\dfrac{1}{5!}x^9 \quad x^9$

$\Rightarrow$ ضریب x^9 $=\dfrac{1}{9!}-\dfrac{1}{5!}+1$

مثال ۲ = در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2} & : x\neq 0\\[4pt] \dfrac{-1}{2} & : x=0\end{cases}$ مقدار $f^{(8)}(0)$ کدام است؟

Solve =>

بسط مک لوران $\xrightarrow{x_0=0} a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(0)=a_n\times n!$ مهم

برابر با ضریب ثابت مک لوران پس مشتق پذیر است

جمله های هم را می نویسیم

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{\cancel{1}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{10}}{10!}\cdots-\cancel{1}}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{-1}{2!}+\frac{1x^2}{4!}-\frac{1}{6!}x^4+\frac{1}{8!}x^6-\frac{1}{10!}x^8\cdots$$

$$f^{(8)}(0)=a_8\times 8!=\frac{-1}{10!}\times 8!=\frac{-1}{90}$$

ضریب x^8

خیلی مهم

* اگه مقدار تعریف شده در $x=0$ توسط طراح با عدد ثابت بسط مک لوران برابر نباشد مشتق وجود ندارد.

مثال ۲ = حاصل $I=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{n!}$ کدام است؟ چون فاکتوریل داره و فاکتوریل به n وابسته است از همارزی e^x استفاده می کنیم

و هرگاه حاصل یک سری تابع مدنظر باشد (سری علاوه بر n شامل x نیز باشد) حتماً آن سری به بسط مک لوران توابع مشهور (همارزی) وابسته است

Solve => $* e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\cdots$

اولین جمله عدد ثابت

* اگه تفاوت ها برحسب n در صورت کسر باشد با مشتق گیری خواهیم رسید و اگه در مخرج کسر باشد با انتگرال گیری خواهیم رسید.

مشتق

$$e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}\xrightarrow{\times x} xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}\xrightarrow{d/dx} 1e^x+xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{n!}$$

جز ثابت نیست

$$\xrightarrow{\times x} xe^x+x^2e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!}$$

توجه مهم = در فرآیند مشتق گیری از سیگما چنانچه اولین جمله سری عدد ثابت باشد باید حتماً پس از مشتق شروع سیگما 1 واحد به جلو منتقل شود ولی اگه اولین جمله سری شامل متغیر باشد پس از مشتق شروع سیگما تغییر نمی کند، دقت داشته باشید در فرآیند انتگرال گیری هیچ گاه شروع سیگما تغییر نمی کند.

مثال ۳ = حاصل سری $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\times 2^n}$ کدام است؟ فاکتوریل ندارد و $(-1)^n$ هم ندارد

ربط یک توان — با تفاوت در مخرج پس انتگرال می‌گیریم

Solve $\Rightarrow \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$$\xrightarrow{\int} -\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n+1)\to n$$

$$\xrightarrow{\text{افزودن شمارنده}} -\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

داخل ۱ واحد کم شود
۱ واحد زیاد

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} \Rightarrow -\ln\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\times 2^n}$$

$$I=-\ln\frac{1}{2} \Rightarrow I=\ln 2$$

تذکر مهم و جذاب = برای یافتن حاصل سری های عددی (غیر از تلسکوپی) می توان رد گزینه کرد. بدین گونه که کافی است تعداد از جملات سری را نوشته و مجموع را حساب کنیم و نزدیک ترین گزینه را انتخاب کنیم. فقط حتماً ۲ موضوع زیر رعایت شود:

1 حتماً جملات سری از نظر اندازه رفتار نزولی به خود بگیرند.

2 جملات را آنقدر ادامه می دهیم تا به عددی کوچکتر از $\frac{1}{2}$ رسیده باشیم.

$\pi\simeq 3.1$ ، $\pi^2\simeq 10$ ، $\ln 2\simeq 0.7$ ، $\ln 3\simeq 1.1$ و $\ln 5\simeq 1.6$ و $\sqrt{2}\simeq 1.4$ و $\sqrt{3}\simeq 1.7$

راه دوم مثال قبل = ۳

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\times 2^n}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{n=1}+\underbrace{\frac{1}{8}}_{n=2}+\text{مثبت}\simeq\frac{5}{8}\simeq 0.6^{+}\simeq 0.7\simeq \ln 2$$

① رفتار نزولی

1) $\ln 2 \simeq 0.7$ 2) $\ln 3 \simeq 1.1$ 3) $\ln\frac{1}{2} \simeq -0.7$ 4) $\ln\frac{1}{3} \simeq -1.1$