فصل اول ریاضیات عمومی : جلسه اول (جلسه 1)

حقیقی   موهومی

طول   عرض

اعداد مختلط ⇐ یعنی یک نقطه در صفحه (مختصات یک نقطه) $z = x + yi \to z(x,y)$

مثال: مجموعه جواب نامعادله $|z-i| \leq |z+1|$ کدام است؟

Solve: $|z-i| \leq |z+1| \Rightarrow |x+iy-i| \leq |x+iy+1|$

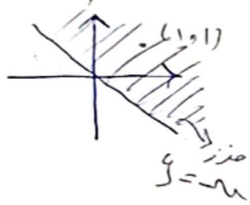
$$|x+i(y-1)| \leq |(x+1)+iy|$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} \leq \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+y^2-2y+\cancel{1} \leq \cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+y^2$$

$$-2y \leq 2x \to \boxed{y \geq -x}$$

با تست نقطه مشخص شود پس بالای خط انتخاب می‌شود.



1. اول مرز را مشخص می‌کنیم.
2. پس یک طرف مرز جواب ما خواهد بود.

مثال ⇐ مساحت ناحیه شکل $Im\left(\frac{1+z}{2-z}\right)>1$ کدام است؟

Solve: $Im\left(\frac{1+x+iy}{2-x-iy}\right)>1 \Rightarrow Im\left(\frac{(1+x)+iy}{(2-x)-iy} \times \frac{(2-x)+iy}{(2-x)+iy}\right)>1$

مزدوج می‌کنیم   مزدوج مخرج

$$\Rightarrow Im\left(\frac{(1+x)(2-x)+iy(1+x)+iy(2-x)+\cancel{i^2}y^2}{(2-x)^2-\cancel{i^2}y^2}\right)>1$$

یعنی فقط قسمت موهومی

معادله استاندارد دایره: $\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k^2}$ که $\begin{cases} \text{مرکز } (\alpha,\beta) \\ \text{شعاع } = k \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{y(1+x)+y(2-x)}{(2-x)^2+y^2}>1 \Rightarrow \frac{y+\cancel{xy}+2y-\cancel{xy}}{\boxed{(2-x)^2+y^2}}>1$$

چون مخرج همیشه مثبت است طرفین وسطین می‌توانیم بکنیم (در نامعادلات طرفین وسطین نداریم)

$$\Rightarrow 3y>(2-x)^2+y^2 \to (2-x)^2+y^2-3y<0$$

منفی

$$\Rightarrow (x-2)^2+\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}<0$$

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2<\frac{9}{4} \to \text{داخل دایره} \begin{cases} \text{مرکز } \left(2,\frac{3}{2}\right) \\ \text{شعاع } = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S=\pi r^2=\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9\pi}{4}$$

مثال ۲ = معادله $z^2+4\bar{z}-2=0$ چند ریشه مختلط دارد؟

Solve $\Rightarrow$ $z=x+iy \Rightarrow (x+iy)^2+4(x-iy)-2=0$

$x^2+2xyi-y^2+4x-4yi-2=0$

$(x^2-y^2+4x-2)+(2xy-4y)i=0 \begin{cases} x^2-y^2+4x-2=0 & \leftarrow \text{حقیقی ها} \\ 2xy-4y=0 & \leftarrow \text{موهومی ها} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2+4x-2=0 \\ 2y(x-2)=0 \begin{cases} y=0 \xrightarrow{\text{قرار است مختلط باشیم}} \text{غ ق ق} \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$

$z=x+iy \xrightarrow[y=0]{if}$ z حقیقی می شود.

$x=2 \to 4-y^2+8-2=0 \to y^2=10 \to y=\pm\sqrt{10}$

$z=x+iy=2\pm\sqrt{10}\,i \to$ ۲ ریشه مختلط داریم.

* $\overset{\text{مختلط از جنس}}{z}=x+iy \to$ حتما حقیقی است x و y

Real → طول نقطه → حقیقی

Imagenery → عرض نقطه → موهومی

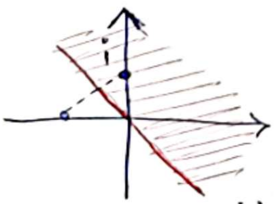
مثال ۲ = مجموعه جواب نامعادله $|z-i|\le|z+1|$ کدام است؟

نکته $\Rightarrow |z-i|\le|z+1| \to$ مرز ناحیه: $\underbrace{|z-i|}=\underbrace{|z+1|}$

$|z-i|$ ← فاصله نقطه z تا نقطه i ← $(0,1)$

$|z+1|$ ← فاصله نقطه z تا نقطه (1-) ← $(-1,0)$

$|z-i|=|z+1| \Rightarrow$ نقاطی مانند z که فاصله آن از 2 نقطه ثابت برابر باشد ← عمود منصف



$|z-i|\le|z+1|$

$z=-1 \to |-1-i|\le 0$

$\sqrt{2}\le 0$ غ ق ق

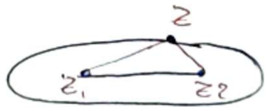
← محل این نقطه کجا است.

مثال: معادله $|z-1+2i|+|z+3-i|=k$ به ازای مقادیر مختلف k چه شکلی را توصیف می کند؟

Solve $\Rightarrow |z-(1-2i)|+|z-(-3+i)|=k$

نقاطی مانند z که مجموع فاصله آن از ۲ نقطه ثابت برابر مقدار ثابت است.

۲ نقطه ثابت $\longrightarrow$ کانون بیضی $\begin{cases} z_1=1-2i \\ z_2=-3+i \end{cases}$



$\to |z-z_1|+|z-z_2|>|z_1-z_2|$

$|z_1-z_2|=|(1-2i)-(-3+i)|$

$=|4-3i|=\sqrt{16+9}=5$

$\Rightarrow |z-z_1|+|z-z_2|>5 \longrightarrow$ if $k>5 \to$ بیضی

$|z-z_1|+|z-z_2|=5 \longrightarrow$ if $k=5 \to$ پاره خط

$|z-z_1|+|z-z_2|<5 \longrightarrow$ if $k<5 \to$ تهی

$|z-z_1|+|z-z_2|=|z_1-z_2|$

مثال ۲ = معادله $|z-1|+|z+i|=1$ چه شکلی است؟

Solve $\Rightarrow$ نقاط ثابت $\begin{cases} z_1=1 \\ z_2=-i \end{cases} \Rightarrow |z_1-z_2|=|1+i|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$k=1<\sqrt{2} \Rightarrow$ تهی

مثال ۳ = معادله $|z-1+i|+|z+1-2i|=5$ بیانگر کدام شکل است؟

Solve $\Rightarrow$ نقاط ثابت $\begin{cases} z_1=1-i \\ z_2=-1+2i \end{cases} \to |z_1-z_2|=|1-i-(-1+2i)|$

$=|2-3i|=\sqrt{13}$

$k=5>\sqrt{13} \longrightarrow$ بیضی

مثال ۳= کدام نقطه درون نمودار $\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2$ در صفحه مختلط قرار دارد؟

$$\text{Solve} \Longrightarrow z=x+iy \longrightarrow \frac{|x+iy-3|}{|x+iy+3|}=2 \longrightarrow \frac{|(x-3)+iy|}{|(x+3)+iy|}=2$$

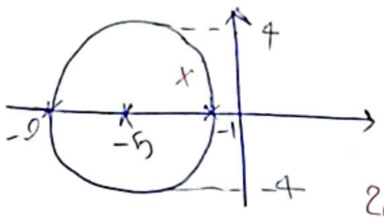
$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}=2 \longrightarrow \frac{x^2-6x+9+y^2}{x^2+6x+9+y^2}=4 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x^2+24x+36+4y^2=x^2-6x+9+y^2$$

$$\longrightarrow 3x^2+3y^2+30x+27=0 \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2+y^2+10x+9=0$$

$$\longrightarrow (x^2+10x+25)+y^2+9-25=0$$

$$\longrightarrow (x+5)^2+y^2=16 \longrightarrow \text{دایره} \begin{cases} \text{مرکز}=(-5,0) \\ \text{شعاع}=4 \end{cases}$$



آیا نقطه $-3+i=(-3,1)$ ؟ داخل دایره است

مثبت (+)؟

اگر نقطه ها را در معادله دایره جایگذاری کنیم

منفی (داخل)

جلسه دوم =

دستگاه مختصات قطبی =

مثال ۲= حاصل $z=(1-i)(1+i\sqrt{3})$ کدام است؟ چون فرم نقطه ها قطبی است از راه قطبی می رویم.

$$\text{Solve} \Longrightarrow \underset{\text{قطبش می کنیم}}{1-i} \begin{cases} x=1 \ \text{real} \\ y=-1 \ \text{imag} \end{cases} \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \\ \theta=\text{Arctan}\frac{y}{x}=\text{Arctan}(-1)=\frac{-\pi}{4} \end{cases}$$

چون x مثبت y منفی

$$1+i\sqrt{3} \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2 \\ \theta=\text{Arctan}\frac{y}{x}=\text{Arctan}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

چون x و y مثبت

$$z=(1-i)(1+i\sqrt{3}) \xrightarrow[\text{فرم کلی قطبی}]{re^{i\theta}} z=(\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}})(2e^{i\frac{\pi}{3}})$$

$$\Longrightarrow \boxed{z=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

مثال ۲ = عبارت $(-3+i\sqrt{3})^n$ به ازای کدام مقدار n حاصل حقیقی دارد؟

$$\text{Solve} \Rightarrow -3+i\sqrt{3} \begin{cases} x=-3 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow[\text{مختصات قطبی}]{\text{می‌بریم}} \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ \theta = \text{Arctan}\frac{y}{x} = \text{Arctan}\frac{-\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow (-3+i\sqrt{3})^n = (2\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{6}})^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{5\pi}{6}n}$$

$$= (2\sqrt{3})^n \left(\cos\frac{5\pi n}{6} + i\sin\frac{5\pi n}{6}\right)$$

حقیقی می‌خواهیم $\rightarrow$ $\underset{\text{موهومی} = 0}{Im = 0} \longrightarrow \sin\frac{5\pi n}{6} = 0$

$$\frac{5\pi n}{6} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$$

$$\longrightarrow n = 6k$$

مثال ۳ = مقدار θ از معادله زیر کدام است؟

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^8 = (\sin\theta - \cos\theta)^5$$

$$\text{Solve} \Rightarrow \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

از $-i$ فاکتور می‌گیریم

$$(e^{i\theta})^8 = \left(-i\left(\cos\theta - \frac{1}{i}\sin\theta\right)\right)^5$$

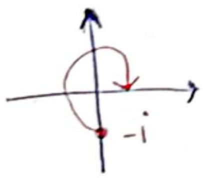
$* \quad \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \qquad \frac{1}{i} = -i$

$$\Rightarrow e^{8\theta i} = -i^5(\cos\theta + i\sin\theta)^5 \longrightarrow e^{8\theta i} = -i^5 e^{5\theta i} \longrightarrow e^{3\theta i} = -i^5$$

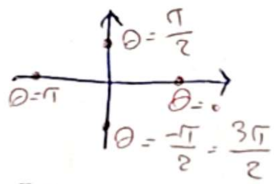
$$\Longrightarrow e^{3\theta i} = -i$$

$* \quad i^5 = i^4 \times i = (i^2)^2 \times i = (-1)^2 \times i = 1 \times i = i$

$$\Rightarrow -i \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{قطبی می‌کنیم}} \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=1 \\ \theta = \text{Arctan}\frac{y}{x} = \text{Arctan}\frac{-1}{0} = \text{Arctan}(\text{تعریف نشده}) = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



نکته $\Rightarrow$



$$\Rightarrow e^{3\theta i} = -i \xrightarrow{re^{i\theta}} e^{3\theta i} = 1\, e^{i\frac{3\pi}{2}} \longrightarrow \boxed{e^{3\theta i} = e^{\frac{3\pi}{2}i}} \longrightarrow 3\theta = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

* هر زاویه‌ای جواب ما باشد به علاوه گردش های دایره $+2\pi$ آن زاویه هم جواب ما است

هر جایی که θ را پیدا کردیم، $2k\pi$ را اضافه می‌کنیم

$$3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

* ریشه n ام اعداد مختلط = n تا جواب دارد
متناوب است و جواب‌ها تکراری می‌شود.

$$\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$$

* لگاریتم نپرین عدد مختلط = بی‌شمار جواب دارد چون متناوب نیست پس هیچ وقت جواب تکراری نخواهد داشت

مثال= حاصل $(-1+i)^i$ کدام است؟ هرجا فرم نمایی دیدیم ln می‌گیریم.

Solve =>

$A=(-1+i)^i \longrightarrow \ln$ می‌گیریم

$\ln A=i\ln(-1+i)$

$\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$

$\ln A=i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$

$\to \ln A=i\ln\sqrt{2}-\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$

$\to \boxed{A=e^{i\ln\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}-2k\pi}}$

$-1+i\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \begin{cases}r=\sqrt{2}\\ \theta=\text{Arctang}(-1)\end{cases}$

$\theta=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\theta=\frac{3\pi}{4}$

مثال= چند ریشه از معادله $e^z=2i$ در داخل دایره $x^2+y^2=25$ قرار دارد؟ ۲ ریشه داخل است

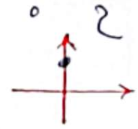
Solve => $e^z=2i \longrightarrow z=\ln(2i)$

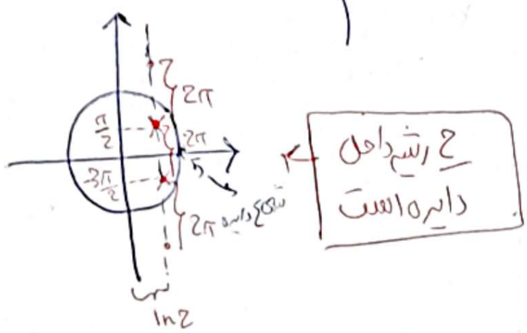
$z=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$\longrightarrow \{\text{Re}=\ln 2$

$\xrightarrow{k=0} \text{Im}=\frac{\pi}{2}$

$2i\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}r=\sqrt{0+4}=2\\ \theta=\text{Arctan}\frac{2}{0}=\frac{\pi}{2}\end{cases}$





مثال= مقدار z از معادله $1-z+z^2-z^3+z^4=0$ کدام است؟ اگر بخواهیم یک معادله با درجه بالا را حل کنیم حتما باید اتفاقی در فرایندش بیفتد.

(دنباله هندسی)

Solve => $\underbrace{1-z+z^2-z^3+z^4=0}_{\text{مجموع جملات دنباله هندسی}}$

$1\xrightarrow{\times(-z)}-z\xrightarrow{\times(-z)}z^2\xrightarrow{\times(-z)}-z^3\xrightarrow{\times(-z)}z^4$

مجموع جملات دنباله هندسی $\Rightarrow S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \to \begin{cases}a_1 \to \text{جمله اول}\\ q \to \text{قدر نسبت}\end{cases}$

$S_5=0 \longrightarrow \frac{1(1-(-z)^5)}{1-(-z)}=0$

$\longrightarrow \frac{1+z^5}{1+z}=0 \longrightarrow 1+z^5=0 \longrightarrow z^5=-1 \longrightarrow z=\sqrt[5]{-1}=-1,\ \circ,\ \circ,\ \circ,\ \circ$

۵ تا جواب دارد

غیر قابل قبول

$1+z\neq 0 \longrightarrow z\neq -1$

ادامه حل $\Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

$$\Rightarrow z = \sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)$$

$-1 \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\pi \end{cases}$

5 جواب به ما می‌دهد

$k=0 \longrightarrow z = 1\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) = e^{\frac{\pi}{5}i}$

$k=1 \longrightarrow z = 1\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right) = e^{\frac{3\pi}{5}i}$

$k=2 \longrightarrow z = 1\left(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ حقیقی

$k=3 \longrightarrow z = e^{\frac{7\pi}{5}i}$

$k=4 \longrightarrow z = e^{\frac{9\pi}{5}i}$

نکته مهم = برای یافتن جواب های فرض n ام z $\sqrt[n]{z}$ فقط کافی است که آن را به ازای $k=0$ بیابیم، سپس بدون تغییر در r فقط آن را $\frac{2\pi}{n}$ چرخش دهیم.

$\text{مثال} \Rightarrow \sqrt[7]{z} \xrightarrow{k=0} 2e^{\frac{\pi}{5}i},\ 2e^{\frac{17\pi}{35}}$ و ... تا 7 جواب می‌خواهیم.

$n=7$

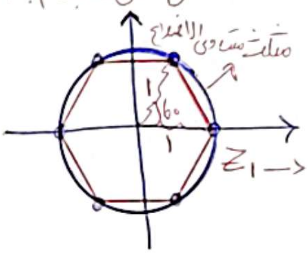
$\frac{2\pi}{7}$ چرخش می‌دهیم

مثال = جواب های $\sqrt[6]{i}$ را در صفحه نشان می‌دهیم، مساحت شکل حاصل کدام است؟ شعاع دایره چقدر می‌تواند باشد؟

$\sqrt[6]{i} \longrightarrow$ حتماً 6 جواب دارد $\longrightarrow$ رئوس شش ضلعی منتظم

مهم نیست رئوس کجا باشند، اما مساحت همه انواع شش ضلعی ها با هم برابر است.

$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} =$ چرخش



$i \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \longrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$z_1 \rightarrow \theta = 0$

$\boxed{\text{شعاع دایره} = \sqrt[n]{r}}$

شعاع دایره این مسئله $= \sqrt[6]{1} = 1$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \times 1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = 6\,\frac{\sqrt{3}\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}$$

نکته مهم = ریشه های بدست آمده از $\sqrt[n]{z}$ همگی روی یک دایره به مرکز مبدأ مختصات قرار می‌گیرند که اولاً شعاع دایره $\sqrt[n]{r}$ خواهد بود و دوماً رئوس n ضلعی منتظم می‌شوند.

نکته خیلی مهم = اگر n نقطه روی دایره با مرکز مبدأ وجود داشته باشد، به طوریکه مجموع آنها صفر باشد یعنی $z_1+z_2+\dots+z_n=0$ حتماً این n نقطه رئوس یک n ضلعی منتظم خواهند بود و به تقسیمی از z^n حاصل شده اند.

نکته تکمیلی = اگر نکته قبل رخ دهد حتماً مجموع توانهای این نقاط تا زمانی که توان آنها کمتر از n باشد، نیز صفر خواهد بود

$z_1+z_2+z_3+z_4=0 \longrightarrow$ روی دایره به مرکز مبدأ

$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0$

$z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_4^3=0$

$z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4\neq 0$

مثال = اگر z_1، z_2 و z_3 روی دایره $r=1$ باشند، بطوریکه $z_1+z_2+z_3=0$ باشد، حاصل $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ و $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}$ کدام است؟ دایره به مرکز مبدأ و شعاع K $\longrightarrow$ $r=k$

۳ نقطه روی دایره به مرکز مبدأ $\Longrightarrow z_1+z_2+z_3=0 \longrightarrow$ رئوس ۳ ضلعی منتظم

$\longrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3} \longrightarrow \frac{0}{z_1z_2z_3}=0$$

$\longrightarrow z_1+z_2+z_3=0 \longrightarrow (z_1+z_2+z_3)^2=0$

$$\underbrace{z_1^2+z_2^2+z_3^2}_{\text{صفر}}+2z_1z_3+2z_1z_2+2z_2z_3=0 \longrightarrow z_1z_3+z_1z_2+z_2z_3=0$$

جلسه سوم => (جلسه 2)

نکته: در معادلات با ضرایب حقیقی حتماً و حتماً معادله به اندازه درجه خود دارای جواب خواهد بود، حال ممکن است هم جواب‌ها حقیقی یا همه جواب‌ها مختلط یا بعضی جواب‌ها حقیقی و بعضی جواب‌ها مختلط باشد.

آن چیزی که مهم است، اگر معادله با ضرایب حقیقی دارای ریشه مختلط باشد حتماً و قطعاً مزدوج آن نیز ریشه معادله خواهد بود.

$$az^2+bz+c=0 \longrightarrow z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{cases} S=z_1+z_2=\dfrac{-b}{a} \\ P=z_1 z_2=\dfrac{c}{a} \\ A=|z_1-z_2|=\left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| \end{cases}$$

نکته => معمولاً ۹۷٪ مواقع هر سؤالی از معادله درجه ۲ مطرح شود با s و p قابل پاسخگویی است.

مثال => در معادله $z+\frac{1}{z}=1$ حاصل $\sqrt{z}+\sqrt{\bar z}$ کدام است؟

$\Delta=b^2-4ac$

Solve: $z+\frac{1}{z}=1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{z^2+1}{z}=1 \longrightarrow z^2+1=z \longrightarrow z^2-z+1=0$

$\Delta<0$

ریشه‌ها مختلط ← z و $\bar z$ ریشه‌های معادله است.

$$\begin{cases} S=z+\bar z=\dfrac{-b}{a}=1 \\ P=z\bar z=\dfrac{c}{a}=1 \end{cases}$$

$$A=\sqrt{z}+\sqrt{\bar z} \to A^2=z+\bar z+2\sqrt{z\bar z}$$
$$\to A^2=S+2\sqrt{P}$$
$$\to A^2=1+2\sqrt{1}$$
$$\to A^2=3$$
$$\to A=\pm\sqrt{3}$$

مثال = ۲ به ازای چه مقدار از k، مبدأ مختصات و دو ریشه مختلط ($\Delta<0$) معادله $z^2+az+\frac{a^2}{k}=0$، سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع می‌باشند؟

Solve: $z^2+az+\frac{a^2}{k}=0$ ، $\{ \underbrace{z , \bar z}_{\text{ریشه‌ها}} , \overset{\text{مبدأ مختصات}}{0} \} \longrightarrow$ رئوس مثلث متساوی الاضلاع $\longrightarrow k=?$

چون مقدار a مشخص نیست $a=1$ هیچ محدودیتی برای مقدار a مشخص نشده پس هرچی خودتون بخواهید بگذارید

$$z^2+z+\frac{1}{k}=0 \longrightarrow \Delta=1-\frac{4}{k} \longrightarrow \Delta<0 \longrightarrow 1-\frac{4}{k}<0$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\frac{4}{k}}}{2}\overset{\text{چون منفی}}{=}\frac{-1\pm\sqrt{\left|1-\frac{4}{k}\right|}\,i}{2}$$

$$z,\bar z=\frac{-1\pm\sqrt{\frac{4}{k}-1}\,i}{2} \xRightarrow{\text{متساوی الاضلاع}} |z-\bar z|=|z-0|=|\bar z-0|$$

ادامه مثال قبل $\Longrightarrow |z-\bar{z}| = \left| \dfrac{-1+\sqrt{\frac{4}{k}-1}\,i}{2} - \dfrac{-1-\sqrt{\frac{4}{k}-1}\,i}{2} \right| = \left| \dfrac{2\sqrt{\frac{4}{k}-1}\,i}{2} \right|$

$$|z-\bar{z}| = \left|\sqrt{\tfrac{4}{k}-1}\,i\right| = \sqrt{\underbrace{0}_{(\text{حقیقی})^2}+\underbrace{\tfrac{4}{k}-1}_{(\text{موهومی})^2}} = \sqrt{\tfrac{4}{k}-1}$$

$$|z-0| = \left| \dfrac{-1+\sqrt{\frac{4}{k}-1}\,i}{2} - 0 \right| = \sqrt{\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{(\text{حقیقی})^2}+\underbrace{\tfrac{\frac{4}{k}-1}{4}}_{(\text{موهومی})^2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{4}{k}}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{k}}$$

در نهایت $\Longrightarrow \sqrt{\frac{4}{k}-1} = \sqrt{\frac{1}{k}} \longrightarrow \dfrac{4-k}{k} = \dfrac{1}{k} \longrightarrow 4-k=1 \longrightarrow k=3$

روش دوم حل این مسئله $\Longrightarrow z^2+az+\dfrac{a^2}{k}=0 \xrightarrow{a=1} z^2+z+\dfrac{1}{k}=0 \Longrightarrow |z-\bar{z}| = |z-0|$

2 ریشه مختلط $\longrightarrow z, \bar{z} \longrightarrow \Delta<0 \longrightarrow \Delta = 1-\dfrac{4}{k}<0$

$$|z-\bar{z}| = |z| \longrightarrow \left|\dfrac{\sqrt{1-\frac{4}{k}}}{1}\right| = \left|\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\frac{4}{k}}}{2}\right|$$

$$\left|\sqrt{\tfrac{4}{k}-1}\,i\right| = \left|\dfrac{-1+\sqrt{\frac{4}{k}-1}\,i}{2}\right| \longrightarrow \sqrt{0+\tfrac{4}{k}-1} = \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{\frac{4}{k}-1}{4}}$$

$$\longrightarrow \dfrac{4}{k}-1 = \dfrac{1}{k} \longrightarrow \dfrac{3}{k}=1 \longrightarrow \boxed{k=3}$$

مثال ۳= اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2+2x+3=0$ و $A = x_1^{10}+x_2^{10}$ و $B = x_1^{11}+x_2^{11}$ باشند، در این صورت حاصل $C = x_1^{12}+x_2^{12}$ کدام است؟

Solve $\Longrightarrow x^2+2x+3=0 \longrightarrow \begin{cases} S = x_1+x_2 = \dfrac{-b}{a} = -2 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 3 \end{cases}$

$$x_1^{12}+x_2^{12} = ? \longrightarrow (x_1+x_2)(x_1^{11}+x_2^{11}) = x_1^{12} + x_1x_2^{11} + x_2x_1^{11} + x_2^{12}$$

$$\underbrace{(x_1+x_2)}_{S}\underbrace{(x_1^{11}+x_2^{11})}_{B} = x_1^{12}+x_2^{12} + \underbrace{x_1x_2}_{P}\underbrace{(x_2^{10}+x_1^{10})}_{A}$$

$$-2B = x_1^{12}+x_2^{12}+PA \longrightarrow -2B-3A = x_1^{12}+x_2^{12}$$

فصل دوم ← حد و پیوستگی =

* تابع کراندار ← نامحدود نیست (بی نهایت نمی شود)

مثال = حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

1 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{e^{2x} + e^{x} - 3x - 2} = \dfrac{0}{0}$ حالت اصلی

$\xrightarrow{Hop} I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \frac{1}{1+x}}{2e^{2x} + e^{x} - 3} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{Hop} I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\frac{-1\times 1}{(1+x)^2}}{4 \cdot e^{2x} + e^{x}} = \dfrac{1}{5}$

2 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e^{x} - 1} - \dfrac{1}{x} = \infty - \infty \xrightarrow{\text{مبهم فرعی}}$ کافی است مخرج مشترک بگیریم

$\longrightarrow I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - e^{x} + 1}{x(e^{x} - 1)} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{Hop} I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{x}}{1(e^{x} - 1) + x e^{x}} = \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{Hop} I = \lim \dfrac{-e^{x}}{e^{x} + 1e^{x} + xe^{x}} = \dfrac{-1}{2}$

3 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - e^{x}} + \dfrac{1}{x} = \infty + \infty = \infty$

4 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} = \infty - \infty \longrightarrow$ فرعی $\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} I = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{Hop} I = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 \ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{Hop} I = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{-1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

$1 - \dfrac{1}{x}$

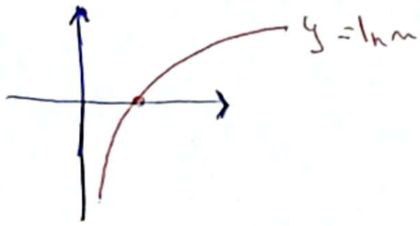
یکی ضرب ساده را افقی ← دو معکوس می کنیم

5 $I = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\operatorname{Arctan} x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \infty \times \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \infty \times 0 \longrightarrow$ فرعی

$\longrightarrow I = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0} \xrightarrow{Hop} I = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \longrightarrow I = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{-x^2 - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$\xrightarrow{Hop} I = \lim \dfrac{2x}{-2x} = -1$

یادآوری



$$\begin{cases} \ln 0^+ = -\infty \\ \ln 0^- = \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

پیش فرض $\lim_{x \to 0} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$

قسمت ساده را معکوس

6 $I = \lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \times \infty \longrightarrow$ مجمع فرعی

$\longrightarrow I = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{Hop} I = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to 0} -x = 0$

نکته طلایی حجم ۲

$0 \times \infty = 0$

توانی یا نمایی

لگاریتم

7 $I = \lim_{x \to 1} (x^2 - 3x + 2) \ln(x^2 + 2x - 3) = 0 \times \infty = 0$

توانی

لگاریتمی

قسمت ساده را معکوس

8 $I = \lim_{x \to \infty} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) \overset{\text{جایگذاری}}{=} \infty \times 0 \longrightarrow$ مجمع فرعی

$\longrightarrow I = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} I = \lim \frac{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = e^0 = 1$

مثال = ۳ اگر $x = \cos 20^\circ$ حاصل $I = \lim_{n \to \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n})$ کدام است؟

Solve ⇒

$$I = \lim_{n \to \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n})}{(1-x)}$$

$1 - x^{2^{n+1}}$

$\longrightarrow I = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - (\cos 20)^{\dots}}{1 - \cos 20} \Longrightarrow I = \frac{1 - 0}{1 - \cos 20} = \frac{1}{1 - \cos 20}$

$\Longrightarrow \frac{1}{1 - (1 - 2\sin^2 10)} = \frac{1}{2 \sin^2 10} = \frac{1}{2}(1 + \cot^2 10)$

$* \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

یادآوری = ۲ قضیه فشردگی (ساندویچ)

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} h(x) = L \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \to a} f(x) = L$$

جلسه چهارم = ۳

یادآوری = ۳

$$0 \leq A - [A] < 1$$

مثال = ۲ حاصل $I = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left[\frac{1}{5}\right] + \left[\frac{2}{5}\right] + \dots + \left[\frac{n}{5}\right]}{n^2}$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow$

$$+\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{5} - \left[\frac{1}{5}\right] < 1 \\ 0 \leq \frac{2}{5} - \left[\frac{2}{5}\right] < 1 \\ 0 \leq \frac{n}{5} - \left[\frac{n}{5}\right] < 1 \end{cases}$$

$$0 \leq \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{n}{5} - \left(\left[\frac{1}{5}\right] + \left[\frac{2}{5}\right] + \dots \left[\frac{n}{5}\right]\right) < n$$

$$\xrightarrow{\div n^2} \frac{0}{n^2} \leq \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{n}{5}}{n^2} - I < \frac{n}{n^2}$$

$$0 \leq \frac{1 + 2 + \dots + n}{5n^2} - I < \frac{1}{n}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0 & \text{تابع کوچک} \\ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 & \text{تابع بزرگ} \end{cases} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{5n^2} - I = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n}{10n^2} = I \longrightarrow I = \frac{1}{10}$$

مثال=۲ حاصل $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\frac{5}{2}]+[(\frac{5}{2})^2]+\cdots[(\frac{5}{2})^n]}{(\frac{5}{2})^n}$ کدام است؟

Solve $\longrightarrow$ $+\begin{cases} 0 \leqslant \frac{5}{2} - [\frac{5}{2}] < 1 \\ 0 \leqslant (\frac{5}{2})^2 - [(\frac{5}{2})^2] < 1 \\ 0 \leqslant (\frac{5}{2})^n - [(\frac{5}{2})^n] < 1 \end{cases}$

$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$$0 < \frac{5}{2} + (\frac{5}{2})^2 + \cdots (\frac{5}{2})^n - ([\frac{5}{2}] + [(\frac{5}{2})^2] \cdots + [(\frac{5}{2})^n]) < n$$

مجموع جملات

$$\xrightarrow{\div(\frac{5}{2})^n} 0 \leqslant \frac{\frac{5}{2} + (\frac{5}{2})^2 + \cdots (\frac{5}{2})^n}{(\frac{5}{2})^n} - I < \frac{n}{(\frac{5}{2})^n}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(\frac{5}{2})^n} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\frac{5}{2}(1-(\frac{5}{2})^n)}{1-\frac{5}{2}}}{(\frac{5}{2})^n} - I = 0$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{2}(1-(\frac{5}{2})^n)}{-\frac{3}{2}(\frac{5}{2})^n} = I \Rightarrow I = \lim \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}(\frac{5}{2})^n}{(-\frac{3}{2}) \times (\frac{5}{2})^n}$$

$$\Rightarrow I = \frac{-\frac{5}{2}(\frac{5}{2})^n}{-\frac{3}{2}(\frac{5}{2})^n} = \frac{5}{3}$$

قواعد هم ارزی =۲ همه‌ی هم ارزی های اشاره شده جلو دارد، همه هم ارزی ها در 0، ∞ است.

مثال=۲ حاصل حد های زیر را بدست آورید؟

$$I = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \infty - \infty$$

مخرج مشترک

$$I = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم ارزی می زنیم}}$$

از هم ارزی یا Hop هم می توانم اما وقت بر است.

$$\sin A \underset{A\to 0}{\simeq} A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!}$$

اگر قدرتم بود ادامه می دیم اگر قدرتم نبود تمام می کنیم.

$$I = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!})^2 - x^2}{x^2 (x)^2}$$

$$\downarrow$$

$$I = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} - \frac{2}{6}x^4 + \frac{x^6}{36} - \cancel{x^2}}{x^4}$$

$$\downarrow$$

$$I = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}(\frac{-2}{6} + \frac{x^2}{36})}{\cancel{x^4}} = \frac{-2}{6} + 0 = \frac{-1}{3}$$

مثال = ۲

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{\tan^4 x}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow[\text{هم‌ارزی}]{\text{Hop}}$$

هم‌ارزی

$$\begin{cases}\sin A\simeq A-\dfrac{A^3}{3!}+\dfrac{A^5}{5!}-\cdots\\[2mm] \cos A=1-\dfrac{A^2}{2!}+\dfrac{A^4}{4!}-\cdots\\[2mm] \tan A\simeq A+\dfrac{A^3}{3}-\cdots\end{cases}$$

* درجه مخرج را شناسایی می‌کنیم، برای جملات صورت هم‌ارزی را می‌نویسیم تا با درجه مخرج یکی شود.

$$\text{Solve}\Rightarrow I=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)-2}{(x)^4}$$

$$\to I=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{6}x^4+2-x^2+\frac{1}{12}x^4-2}{x^4}=\lim\frac{\frac{-1}{12}x^4}{x^4}=\frac{-1}{12}$$

تذکر مهم = ۲ اگر احیاناً ۲ هم‌ارزی باهم قرینه شوند حتماً حتماً باید هر ۲ هم‌ارزی تعمیم داده شود.

مثال = ۳

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (te^t+2\cos t-t-2)\,dt}{\sin^4 x}=\frac{0}{0}$$

$$e^A\simeq 1+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$$

$$\sin A\simeq A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos A\simeq 1-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}-\cdots$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} I=\lim_{x\to 0}\frac{1(xe^x+2\cos x-x-2)-0\times 1}{4x^3}$$

$$\to I=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)+2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)-x-2}{4x^3}$$

$$\to\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{x^2}+\frac{1}{2}x^3+\cancel{2}-\cancel{x^2}+\frac{1}{12}x^4-\cancel{x}-\cancel{2}}{4x^3}$$

$$\to I=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}x\right)}{4\cancel{x^3}}=\frac{1}{8}$$

یادآوری = ۱ $e^{\ln A}=A$

نکته = ۲

تعریف عدد نپر

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\\[2mm] \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\end{cases}\qquad e\simeq 2{,}7$$

جلسه پنجم = ۲ (جلسه 3)

چند تا کاربرد هم‌ارزی = ۲

مثال = ۲ حاصل حد های زیر را بدست آورید.

$$I = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{Solve}]{\text{مجموع اعداد طبیعی}} I = \lim_{n \to \infty} \frac{1^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+\cdots n^{\frac{1}{2}}}{n \times n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\xrightarrow{\text{هم‌ارزی اعداد طبیعی}} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$$

توان بزرگتر را انتخاب می‌کنیم

مثال = ۲

از هم‌ارزی ← فرمول با درجه زیر رادیکال‌ها یکسان

$$I = \lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2-24x+3} + \sqrt[3]{8x^3+48x^2-6x+1}$$

$$\text{Solve} \to I = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{4}\left|x + \frac{-24}{2 \times 4}\right| + \sqrt[3]{8}\left(x + \frac{48}{3 \times 8}\right)$$

$$\to I = \lim_{x \to -\infty} 2|x-3| + 2(x+2) = \lim 2(-x+3) + 2(x+2)$$

$$\to I = \lim_{x \to -\infty} -2x+6+2x+4 = 10$$

جلسه ششم = ۲

مقایسه مرتبه ی نهایت شونده ها = ۲

توان بزرگتر قوی تر — پایه بزرگتر قوی تر

لگاریتم >> توانی >> نمایی >> فاکتوریل >> تابع به توان تابع (لم قدرت)

* زمانی که کل ها صفر شوند در حد مجازی از ضعیف تر استفاده کنید.
* زمانی که کل ها بی نهایت شوند در حد مجازی از قوی تر استفاده کنید.

- مخرج قوی تر جواب صفر
- صورت قوی تر جواب $\pm\infty$
- وقتی صورت و مخرج قوی با هم ساده می کنیم و جواب حد پیدا می کنیم

مثال = ۲

$$I=\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3+7n^5+2^n}{4n^6-3^n+n!}\xrightarrow{\text{Solve}}\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

قوی تر ها

$$I=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^{2n}+5^n}\xrightarrow{\text{Solve}}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^{2n}}=3^2=9$$

$2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=0$

$$I=\lim_{x\to0^-}\frac{2^{\frac1x}+\frac3x}{3^{\frac1x}-\frac5x}\xrightarrow{\text{Solve}}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac3x}{-\frac5x}=-\frac35$$

$$I=\lim_{x\to0^-}\frac{2^{\frac1x}+3x}{3^{\frac1x}-5x}=\frac00\xrightarrow[\text{یا Hop}]{\text{ضعیف تر}}\lim\frac{3x}{-5x}=-\frac35$$

حالا ← مبهم ها = ۲

مثال = ۲

$$I=\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac1x}=\infty^0 \text{ مبهم روش اول}\xrightarrow{\text{Solve}}\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac1x\ln(e^x+x)$$

روش دوم (لم قدرت): $I=\lim e^{x\cdot\frac1x}=e$

$$\to\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}\Rightarrow\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}$$

$$\to\ln I=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{Hop}}\ln I=\lim\frac{e^x}{e^x}=1\to\ln I=1\to I=e^1=e$$

مثال ۲

$$I=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{\sqrt{3x+1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}=1^{\infty}$$

$$\text{Solve}\Rightarrow I=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3x+1}}-1\right)}\ \overset{\text{مشترک مخرج}}{=}\ e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{(x-1)\sqrt{3x+1}}}=\frac{0}{0}$$

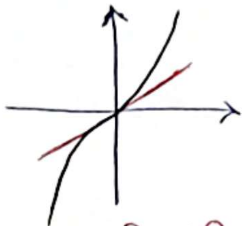
روش دیگر

$$I=\lim\frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{2\times1}=\frac{-\frac{3}{4}}{2}=e^{-\frac{3}{8}}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} I=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{1\sqrt{3x+1}+(x-1)\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}}=e^{\frac{-\frac{3}{4}}{2}}=e^{-\frac{3}{8}}$$

جلسه هفتم ۲

یادآوری توابع هیپربولیک ۲



$$*\ \sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$\sinh(0)=0$

دامنه $D=\mathbb{R}$

برد $R=\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x\to+\infty:\ \sinh x\simeq\dfrac{e^{x}}{2}\\[2ex] x\to-\infty:\ \sinh x\simeq\dfrac{-e^{-x}}{2}\end{cases}$$

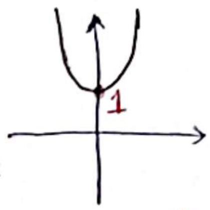
معکوس

$$*\ \underbrace{\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}_{\text{خیلی مهم}}\xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

صحیح

انتگرال

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$



$$*\ \cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$\cosh(0)=1$

* چون نیاز است یک به یک باشد این تابع معکوس پذیر نیست.

$D=\mathbb{R}$

$R=[1,+\infty)$

$$\begin{cases} x\to+\infty:\ \cosh x\simeq\dfrac{e^{x}}{2}\\[2ex] x\to-\infty:\ \cosh x\simeq\dfrac{e^{-x}}{2}\end{cases}$$

اتحاد مهم $\rightarrow \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

اگر شاخه ها را جدا در نظر بگیریم آن وقت معکوس پذیر می شود $\Longrightarrow$

$x\geq0\longrightarrow \cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$x\leq0\longrightarrow \cosh^{-1}x=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

مثال =

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cosh x+1}{\cosh x-2}\right)^{\sinh x+1}=1^{\infty}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

مخرج مشترک

$$\text{Solve}\Rightarrow I=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sinh x+1)\left(\frac{\cosh x+1}{\cosh x-2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sinh x+1)\left(\frac{3}{\cosh x-2}\right)}$$

$$\to I=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\sinh x}{\cosh x}}=e^{\lim\frac{3\frac{e^x}{2}}{\frac{e^x}{2}}}=e^{3}$$

جلسه هشتم = (جلسه 4)

فصل 3 = مشتق و کاربردهای آن =

شیب خط مماس

جلسه نهم =

مثال = در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} ; & x\neq 0\\ 1 ; & x=0\end{cases}$ حاصل $f''(0)$ کدام است؟

نقطه تغییر ضابطه است

$$\text{Solve}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{0}{0}$$ هم‌ارزی / بسط

$$\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2!}-\cancel{1}-\cancel{x}}{x^2}=\lim\frac{\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} : & x\neq0\\ 1 ; & x=0\end{cases}\xrightarrow{\text{مشتق تابع}} f'(x)=\begin{cases}\frac{e^x\times x-1(e^x-1)}{x^2} : & x\neq0\\ \frac{1}{2} : & x=0\end{cases}$$

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}$$ مخرج مشترک

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{2xe^x-2e^x+2-x^2}{2x^3}=\frac{0}{0}$$ هم‌ارزی

بسط تا درجه 3

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{2x\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)-2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+2-x^2}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{2x}+\cancel{2x^2}+x^3-\cancel{2}-\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\frac{1}{3}x^3+\cancel{2}-\cancel{x^2}}{2x^3}$$

$$=\lim\frac{\frac{2}{3}\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}=\frac{1}{3}$$

مثال ۲ = اگر در تابع $y=f(x)$ روابط $f(x+y)=xy^2+x^2y+f(x)+f(y)$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ برقرار باشد ، حاصل $f'(5)$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ فرمول اصلی ۲

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{xh^2+x^2h+\cancel{f(x)}+f(h)-\cancel{f(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(xh+x^2)+f(h)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cancel{h}(xh+x^2)}{\cancel{h}}+\frac{f(h)}{h}\right)=(0+x^2+1)=1+x^2$$

$$\Rightarrow f'(x)=1+x^2 \Rightarrow f'(5)=26$$

1

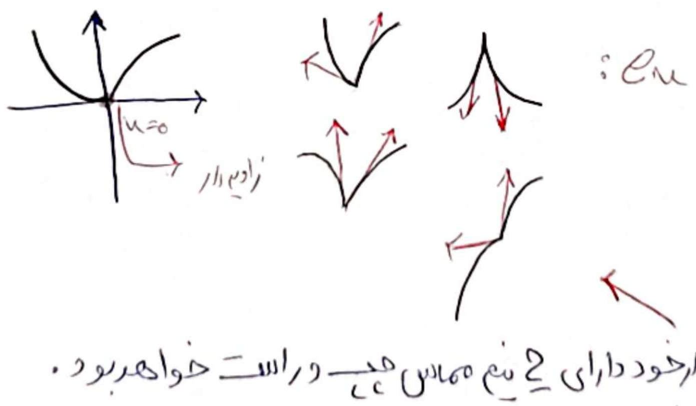
یادآوری ۲ = نقاط مشتق ناپذیر = ۲

هر تابعی در نقاط نوک تیز مشتق ناپذیر خواهد بود.

1 نقاط زاویه دار ← نقاطی که مشتق چپ و راست اعدادی نابرابر می شوند.

← فقط ممکن است در نقاط تغییر ضابطه حاصل شود. (ریشه داخل قدرمطلق) ممکن است

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & : x\geq 0\\ x^2 & : x<0\end{cases}$$



: ex

* تابع در نقطه زاویه دار خود دارای 2 نیم مماس چپ و راست خواهد بود.

* در نقاط بازگشتی فقط 1 مماس قائم وجود دارد.

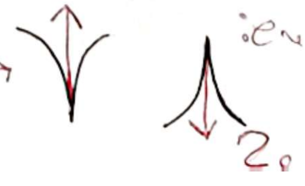
2 نقاط بازگشتی ← نقطه ای که مشتق چپ و راست ∞ غیر هم علامت می شود.

← فقط به ازای ریشه مکرر زوج (مضاعف) عبارت زیر رادیکال با فرجه فرد

$y=\sqrt[3]{x^2} \longrightarrow x=0$ مضاعف $\longrightarrow$ $x=0$ بازگشتی است.

$y=x^{\frac{2}{3}} \longrightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} \longrightarrow y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $\begin{cases}y'_-(0)=\frac{2}{0^-}=-\infty\\ y'_+(0)=\frac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}$

برای این



: ex