مثال ۲= زاویه بین ۲ نیم مماس چپ و راست در نقطه زاویه دار منحنی $y=\left|\ln x-1\right|$ کدام است؟

Solve $\Longrightarrow y=\left|\ln x-1\right| \xrightarrow{\text{ریشه}} \ln x-1=0 \longrightarrow \ln x=1 \longrightarrow x=e$

$$y=\begin{cases}\ln x-1 : & x\geq e\\ -\ln x+1 : & x<e\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}y'_+(e)=\frac{1}{x}\Big|_{x=e}=\frac{1}{e}\\ y'_-(e)=\frac{-1}{x}\Big|_{x=e}=\frac{-1}{e}\end{cases}$$

زاویه دار

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{e}-\frac{-1}{e}}{1+\frac{1}{e}\times\frac{-1}{e}}\right|=\left|\frac{\frac{2}{e}}{1-\frac{1}{e^2}}\right|=\left|\frac{\frac{2}{e}}{\frac{e^2-1}{e^2}}\right|=\left|\frac{2e}{e^2-1}\right|$$

شیب ↓ مشتق

$$\tan\alpha=\frac{2e}{e^2-1}\longrightarrow \alpha=\tan^{-1}\frac{2e}{e^2-1}$$

جلسه دهم ۲=

استفاده از مشتق در تعیین مقدار تقریبی یک تابع در یک نقطه ۲=

مثال ۲= مقدار تقریبی $\sqrt[6]{63}$ کدام است؟

Solve $\xRightarrow{\text{فرمول اصلی}} f(x_0+\Delta x)\simeq \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}+f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2!}+\cdots$

سط تیلور ۲=

$\Longrightarrow f(x)=\sqrt[6]{x}\longrightarrow f'(x)=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

$1^6=1\longrightarrow x_0=1$

$2^6=64\longrightarrow x_0=64$ ✓ نزدیکترین عدد به 63

$3^6=729\longrightarrow x_0=729$

نزدیکترین عدد به 63

$x_0=64\longrightarrow \Delta x=63-64=-1$

عددی که تابع در آن عدد داشته باشد.

$$\Longrightarrow f(x_0+\Delta x)\simeq\sqrt[6]{64}+\frac{1}{6\sqrt[6]{64^5}}\times(-1)\simeq 2+\frac{1}{6\times2^5}\times(-1)\simeq 2-\frac{1}{192}=\frac{383}{192}$$

$\simeq 1{,}994$

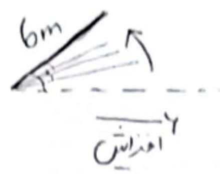
جلسه یازدهم = ۲

استفاده از مشتق در بحث نسبت های وابسته = ۲ $\xrightarrow{\frac{\text{مشتق مسائل}}{\text{زمان}}}$ نسبت به

مثال = ۲ در یک مثلث یک ضلع به اندازه 6 متر ثابت بوده و ضلع دیگر با سرعت $2\frac{m}{s}$ در حال افزایش و زاویه بین 2 ضلع با سرعت $\frac{3}{2}\frac{rad}{s}$ در حال کاهش است، سرعت تغییر مساحت مثلث وقتی ضلع 4 متر و زاویه $\frac{\pi}{3}$ می شود، کدام است؟

Solve => (به زمان ریاضی نویسیم)
$$\begin{cases} a = 6 \\ b \longrightarrow \frac{db}{dt} = +2\,m/s \\ \alpha \longrightarrow \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{Rad}{s} \end{cases} \quad \xrightarrow[\alpha = \frac{\pi}{3}]{b=4} \frac{ds}{dt}$$

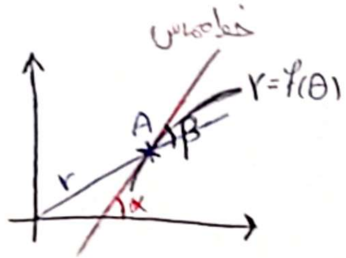
مساحت مثلث: $S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha \xrightarrow{a=6} S = 3b\sin\alpha$ (مشتق ضرب)



مشتق نسبت به زمان $\longrightarrow \frac{ds}{dt} = 3\left(1\frac{db}{dt}\sin\alpha + b\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right)$

$$\frac{ds}{dt} = 3\left((+2)\sin\frac{\pi}{3} + 4\cos\frac{\pi}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = 3(\sqrt{3}-3) = 3\sqrt{3}-9\ m^2/s$$ $\xrightarrow{\text{منفی}}$ در حال کاهش



۲ = روابط در ارتباط با خط مماس بر منحنی های قطبی

زاویه بین خط مماس و محورها $\longrightarrow \alpha$

صحیح β — γ نقطه تماس — زاویه بین خط مماس و شعاع حامل

$$\tan\beta = \frac{r}{r'}\Big|_A \qquad r' = \frac{dr}{d\theta}$$

مثال = ۲ زاویه بین خط مماس و شعاع حامل در منحنی $r = \frac{1}{\theta+\cos\theta}$ در نقطه نظیر $\theta=0$ کدام است؟

Solve => زاویه بین شعاع حامل و خط مماس: $\gamma \longrightarrow \tan\gamma = \frac{r}{r'}$

$$r = \frac{1}{\theta+\cos\theta} \longrightarrow r' = \frac{0-(1-\sin\theta)\times 1}{(\theta+\cos\theta)^2}$$

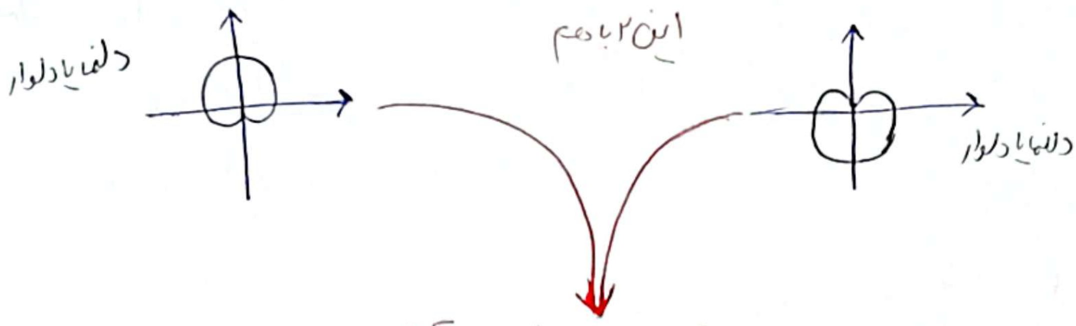
$$\tan\gamma = \frac{\frac{1}{\theta+\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-1}{(\theta+\cos\theta)^2}}\Bigg|_{\theta=0}$$

$$\xRightarrow{\theta=0} \tan\gamma = \frac{1}{-1} \longrightarrow \tan\gamma = -1$$

$$\gamma = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

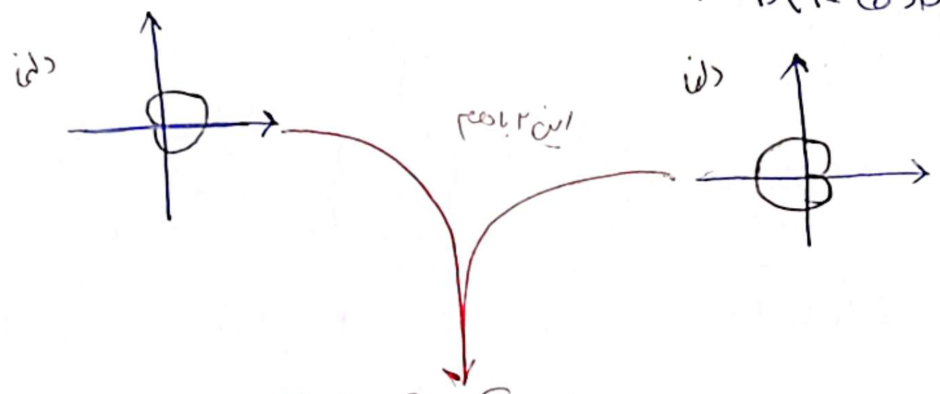
نکته بسیار مهم = ۲

$r=k(1+\sin\theta)$ $\qquad\qquad$ $r=c(1-\sin\theta)$



* حتما زاویه بین آنها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.
* حتما مسیر های متعامد یکدیگرند.

$r=a(1+\cos\theta)$ $\qquad\qquad$ $r=b(1-\cos\theta)$



* زاویه بین آنها حتما و همیشه $\frac{\pi}{2}$ است.
* این 2 حتما مسیر ها متعامد یکدیگرند.

جلسه دوازدهم = ۲

قاعده های مشتق گیری = ۲ $\quad$ ۱ مشتق ضمنی $\quad$ ۲ مشتق مرکب تابع

مثال = ۲ در ضابطه $4x^2+9y^2=5$ مقدار y'' کدام است؟

Solve $\Longrightarrow 4x^2+9y^2=5 \longrightarrow$ تابع ضمنی (چون x و y در هم هستند)

$\frac{d}{dx}\rightarrow 8x+18yy'=0$

$4x+9yy'=0 \longrightarrow y'=\frac{-4x}{9y}$

$\frac{d}{dx}\rightarrow 4+9y'y'+9yy''=0 \longrightarrow y''=-\frac{4+9y'^2}{9y} \Longrightarrow y''=-\frac{4+9\left(\frac{-4x}{9y}\right)^2}{9y} \Longrightarrow y''=-\frac{4+\frac{16x^2}{9y^2}}{9y}$

$y''=-\frac{36y^2+16x^2}{81y^3} \Longrightarrow y''=-\frac{4(4x^2+9y^2)}{81y^3}$

$\Longrightarrow -\frac{4(5)}{81y^3}=-\frac{20}{81y^3}$

نکته مثال قبل :

* در ضابطه ضمنی ای که x و y هم درجه باشند حتماً از مشتق دوم به بعد ظاهر ضابطه اصلی در مشتق پدید می‌آید.

۲) اولین جایی که رقم تکراری شود، دوباره خود تابع است.

نکته ۲= اگر تابعی یک رقم ثابت را تا بی‌نهایت تکرار کند، حتماً یک فرم ضمنی خواهد داشت.

مثال ۲= در ضابطه « « « به ازای $\tan x = \frac{3}{4}$ به طوری که x در ربع سوم قرار دارد، مقدار y' کدام است؟

Cm => $y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \cdots}}}$

$$y = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x + \cdots}}}$$

$$y = \sqrt{\tan x + y} \longrightarrow y^2 = \tan x + y$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2yy' = 1 + \tan^2 x + y' \longrightarrow y'(2y-1) = 1 + \tan^2 x \longrightarrow y' = \frac{1+\tan^2 x}{2y-1}$$

$$\begin{cases} y^2 = \tan x + y \xrightarrow{\tan x = \frac{3}{4}} y^2 = \frac{3}{4} + y \longrightarrow y^2 - y - \frac{3}{4} = 0 \\ y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2} \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

$$y' = \frac{1+\tan^2 x}{2y-1} \xrightarrow[y=\frac{3}{2}]{\tan x = \frac{3}{4}} y' = \frac{1+\frac{9}{16}}{3-1} = \frac{25}{32}$$

مثال ۲= تابع مرکب = ۲ اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، مقدار $f(3)$ از معادله زیر کدام است؟

$$f(3x) = 5x^2 + f(x^2+2x) + f(x^3-4x)$$

Solve => مشتق $\longrightarrow 3f'(3x) = 10x + (2x+2)f'(x^2+2x) + (3x^2-4)f'(x^3-4x)$

$$\xrightarrow{x=1} 3f'(3) = 10 + 4f'(3) - f'(-3)$$

$f(x) \longrightarrow$ زوج $\Rightarrow f'(x) \longrightarrow$ فرد

$$3f'(3) = 10 + 4f'(3) - (-f'(3))$$

$$3f'(3) = 10 + 5f'(3) \longrightarrow -2f'(3) = 10 \longrightarrow f'(3) = -5$$

جلسه سیزدهم = (جلسه 5)

3) مشتق گیری زنجیره ای = ۲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dw}\times\frac{dw}{dx}$$

4) مشتق گیری پارامتری = ۲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{q'(t)}{p'(t)}\quad,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q''(t)p'(t)-p''(t)q'(t)}{p'^3(t)}$$

$$,\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\bigcirc}{(p'(t))^7}$$

توان مخرج مشتقات پارامتری $= 2^n-1$

5) مشتق از تابع به توان تابع = ۲ کافی است از طرفین ln بگیریم و سپس فرآیند مشتق گیری را ادامه دهیم.

$$y(x)=f(x)^{g(x)}$$

$$\Rightarrow \ln y=g(x)\ln f(x)\ \xRightarrow{\text{مشتق}}\ \frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین وسطین}}\ \boxed{y'=\left(g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)f(x)^{g(x)}}$$

مثال = ۲ در ضابطه ای $y=\sqrt{3+x^2}$, $x=e^{t^2-4}$, $t=\ln(3z-8)+2$ حاصل $\frac{dz}{dy}$ به ازای $z=3$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y=\sqrt{3+x^2}\\ x=e^{t^2-4}\\ t=\ln(3z-8)+2\end{cases}$$

زنجیره ای: $y\downarrow x\downarrow t\downarrow z$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}\times\frac{dt}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dz}=\frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}}\times 2t\,e^{t^2-4}\times\frac{3}{3z-8}$$

$z=3 \rightarrow t=2 \rightarrow x=1$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{2}\times 4e^{0}\times\frac{3}{1}\Rightarrow\frac{dy}{dz}=6$$

$$\downarrow\ \frac{dz}{dy}=\frac{1}{6}$$

مثال ۲ = در تابع $\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = t^2 + t \end{cases}$ مقدار $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ به ازای $t = 1$ کدام است؟ مشتق پارامتری

* مشتق اول را به هیچ عنوان ساده نکنید.

$$x \downarrow t \qquad y \downarrow t$$

$$\text{Solve} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+1}{1+\frac{1}{t}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(1+\frac{1}{t}) - \frac{-1}{t^2}(2t+1)}{(1+\frac{1}{t})^3}$$

$$\xrightarrow{t=1} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4+3}{2^3} = \frac{7}{8}$$

نکته ۲ = برای محاسبه $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ در توابع پارامتری یکی از ۲ راه زیر را انتخاب کنید.

۱ مشتق اول را پیدا کرده تحت هیچ شرایطی آن را ساده نکنیم (حتی اجازه ساده کردن کسر را نداریم) پس مانند کسر مشتق گیری می کنیم ولی توان مخرج را ۳ در نظر می گیریم.

۲ مشتق اول را پیدا کرده اگر دوست داشتیم ساده کنیم پس از عبارت حاصل برحسب t مشتق بگیریم و جواب را در $\frac{1}{x'_t}$ ضرب کنیم.

مثال ۳ =

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases} \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$

پارامتری

$$\text{Solve} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2}$$

یا

$$\longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(2) - 0(\;)}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{2} = t \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 1 \times \frac{1}{x'_t}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ۴ = مشتق تابع $y = (\sqrt{x})^{x^2}$ در $x = 2$ کدام است؟ مشتق تابع به توان تابع

$$\text{Solve} \Rightarrow y = (\sqrt{x})^{x^2} \longrightarrow y = (x^{\frac{1}{2}})^{x^2} \longrightarrow y = x^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\xrightarrow{\ln} \ln y = \frac{1}{2}x^2 \ln x \longrightarrow \frac{y'}{y} = x\ln x + \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x} \longrightarrow y' = (x\ln x + \frac{x}{2})\underbrace{x^{\frac{x^2}{2}}}_{\text{خود } y}$$

$$\xrightarrow{\boxed{x=2}} y'(2) = (2\ln 2 + 1)2^2 \longrightarrow y'(2) = 4(\ln 4 + 1)$$

6 مشتق گیری از انتگرال (قضیه لایب نیتس)

7 مشتق گیری از معکوس یک تابع =۲

$(a,b) \in$ تابع $\Longleftrightarrow (b,a) \in$ معکوس

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \longrightarrow (f^{-1})''(b) = \frac{-f''(a)}{(f'(a))^3}$$

8 مشتق گیری از تابع نسبت به تابع =۲

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال =۲ مشتق تابع $y = \int_x^{x^2} \frac{\sin xt}{t}\,dt$ کدام است؟ مشتق انتگرال در حالت کلی

Solve $\Rightarrow y = \int_x^{x^2} \frac{\sin xt}{t}\,dt$

$$\Rightarrow y' = 2x\frac{\sin x^3}{x^2} - 1\frac{\sin x^2}{x} + \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin xt}{t}\right)dt$$

مشتق بالایی در بالایی به جای t − مشتق پایینی در پایینی به جای t + خود انتگرال x داخل انتگرال را نسبت x مشتق بگیریم

$$\Rightarrow y' = 2\frac{\sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x} + \int_x^{x^2} \frac{1}{\cancel{t}}\cancel{t}\cos xt\,dt$$

اول مشتق بعد انتگرال نسبت به t

$$\Rightarrow y' = 2\frac{\sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x} + \left(\frac{1}{x}\sin xt\Big|_x^{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = 2\frac{\sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x} + \left(\frac{\sin x^3}{x} - \frac{\sin x^2}{x}\right) \longrightarrow y' = 3\frac{\sin x^3}{x} - 2\frac{\sin x^2}{x}$$

مثال =۲ معادله خط مماس بر معکوس تابع $y = x^3 + 4x + 2$ در نقطه‌ای به طول 7 واقع بر معکوس کدام است؟

مشتق تابع معکوس

Solve $\Rightarrow$ معکوس : $x = 7 \longrightarrow$ تابع : $y = 7$

$$y = x^3 + 4x + 2 \longrightarrow 7 = x^3 + 4x + 2 \longrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} x = 1$$

چون شرط معکوس پذیری یک به یک بودن تابع است اگر ریشه‌ای بیابیم حتماً منحصر به فرد است. نیاز به تجزیه و پیدا کردن نقطه‌ای دیگری نیست.

نقطه $(1,7) \in$ تابع $\Rightarrow (7,1) \in$ معکوس $\Rightarrow (y^{-1})'(7) = \frac{1}{y'(1)} = \frac{1}{3x^2+4}\Big|_{x=1}$

$\longrightarrow (y^{-1})'(7) = \frac{1}{7} \longrightarrow$ شیب مماس $\Rightarrow$ نقطه $(7,1)$ شیب $\left(\frac{1}{7}\right)$ $\Rightarrow$ خط : $y - 1 = \frac{1}{7}(x - 7)$

$$\Rightarrow 7y - 7 = x - 7 \rightarrow x = 7y$$

27

* برای صفر کردن اشکال باید کران بالا و پائین یکی شود.

* $x=-1$ ⟸ مجموع ضرایب درجات فرد = مجموع ضرایب درجات زوج *

مثال ۳ = مشتق تابع $y=\ln(\sec x)$ نسبت به تابع $y=\tan x$ کدام است؟ مشتق تابع نسبت به تابع

$$\text{Solve} \Rightarrow f: y=\ln(\sec x) \xrightarrow{\text{ساده سازی}} y=\ln\frac{1}{\cos x} \longrightarrow y=-\ln(\cos x)$$

$$g: y=\tan x$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{-\sin x}{\cos x}}{1+\tan^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

جلسه چهاردهم = ۲

جمع گرانیک = کسری است که درجه صورت و مخرج ۱ باشد.

۲) مشتق مرتبه nام = حالت خاص هموگرافیک = ۲ صورت عدد ثابت

مثال ۲ = $y=\sin 2x \longrightarrow y^{(35)}=?$

$a^{35} \xrightarrow{\text{می‌کنیم}} $ بر ۴ تقسیم

$$35 \div 4 = 8, \quad 35-32 = 3$$

۳ ⟵ پس ۳ بار مشتق می‌گیریم

$$\text{Solve} \Rightarrow y^{(35)} = 2^{35}(\underbrace{-\cos 2x})$$

مثال ۳ = در تابع $y=(x^2-x)\sin 2x$ مقدار $y^{(33)}(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

$$\text{Solve} \Rightarrow y=u\times v \longrightarrow y^{(n)} = \sum_{i} \binom{n}{i} \underbrace{u^{(i)}}_{\text{چندجمله‌ای}} \underbrace{v^{(n-i)}}_{\text{تابع معروف}}$$

* $(x^2-x)^{(0)} \longrightarrow$ مشتق صفرم $\downarrow$ x^2-x

$$y=(x^2-x)\sin 2x$$

$$\Rightarrow y^{(33)} = \sum_{i=0}^{33} \binom{33}{i}(x^2-x)^{i}\sin 2x^{(33-i)}$$

$$\Rightarrow y^{(33)} = \binom{33}{0}(x^2-x)\times 2^{33}(\cos 2x) + \binom{33}{1}(2x-1)\times 2^{32}(\sin 2x) + \binom{33}{2}\times 2\times 2^{31}(-\cos 2x) + 0 + 0$$

$0+\dots-0$

$$\Rightarrow y^{(33)}(\frac{\pi}{4}) = \cancel{1(\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4})\times 2^{33}\times\cos\frac{\pi}{2}} + 33(\frac{\pi}{2}-1)2^{32}\times\sin\frac{\pi}{2} + \cancel{33\times 16\times 2\times 2^{31}(-\cos\frac{\pi}{2})}$$

صفر صفر

$$y^{(33)}(\frac{\pi}{4}) = 33\times 2^{32}(\frac{\pi}{2}-1)$$

* $\binom{n}{0}=1$ ، $\binom{n}{1}=n$

مثال ۲ = در تابع $y=\frac{x^2-6x+1}{2x-1}$ مقدار $y^{(10)}(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

$$\begin{array}{r|l} x^2-6x+1 & 2x-1 \\ \hline -x^2+\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}x-\frac{11}{4} \\ \hline -\frac{11}{2}x+1 & \\ +\frac{11}{2}x-\frac{11}{4} & \\ \hline -\frac{7}{4} & \end{array}$$

$$x^2-6x+1=(2x-1)(\frac{1}{2}x-\frac{11}{4})+\frac{-7}{4}$$

Solve $\Rightarrow y=\frac{x^2-6x+1}{2x-1}$

$$\Rightarrow y=\frac{(2x-1)(\frac{1}{2}x-\frac{11}{4})+\frac{-7}{4}}{2x-1}$$

$$\Rightarrow y=\underbrace{\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}}_{\text{در مشتق دهم نقشی ندارد}}+\frac{\frac{-7}{4}}{2x-1}$$

$$y=\frac{\frac{-7}{4}}{2x-1}\longrightarrow y^{(10)}=?$$ فرمول عمومیه اینه

$$\Rightarrow y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y^{(n)}=\frac{n!}{(cx+d)^{n+1}}(-c)^{n-1}(ad-bc)$$

$$\Rightarrow y^{(10)}=\frac{10!}{(2x-1)^{11}}(-2)^9(0+\frac{-7}{4}\times 2)$$

$$\Rightarrow y^{(10)}(\frac{-1}{2})=\frac{10!}{(-2)^{11}}(-2)^9(\frac{7}{2})=\frac{10!}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{8}\times 10!$$

* کاربرد مشتق = ۲

مثال ۲ = اگر تابع $y=(x+1)^2(x-1)$ در فاصله (a,b) معکوس پذیر باشد و این فاصله بزرگترین فاصله شامل $x=0$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow y=(x+1)^2(x-1)$

$(a,b)\longrightarrow$ معکوس پذیر

$\downarrow$

یک به یک

$\downarrow$

یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی

$$y'=2(x+1)(x-1)+(x+1)^2\times 1\longrightarrow y'=(x+1)(2(x-1)+(x+1))$$

$$y'=(x+1)(3x-1)\xrightarrow{\text{ریشه}}\begin{cases}x=-1\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}\longrightarrow$$ تعیین علامت

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	+ موافق	0	− مخالف	0	+ موافق
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	یک به یک		یک به یک		یک به یک

تابع یک به یک نیست:

همونی که ما میخواستیم

$$\Rightarrow (a,b)=(-1,\frac{1}{3})\begin{cases}a=-1\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}\longrightarrow b-a=\frac{4}{3}$$

۲) = (0,1)

مثال ۲ = بزرگترین فاصله‌ای که تابع $y=\ln(x-x^2)$ در آن دارای تقعر رو به پایین است، کدام است؟

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
	−	0 + 0	−	

تعیین علامت

$1) \; x-x^2>0$

نقش دوم

Solve $\Rightarrow y=\ln(x-x^2) \to y'=\frac{1-2x}{x-x^2} \to y''=\frac{-2(x-x^2)-(1-2x)(1-2x)}{(x-x^2)^2}=$

$\to y''=\frac{-2x+2x^2-1+4x-4x^2}{(x-x^2)^2} \Rightarrow y''=\frac{-2x^2+2x-1}{(x-x^2)^2} \xrightarrow{\text{علامت}}$ فقط صورت داشته است

همیشه مثبت

ریشه صورت: $-2x^2+2x-1=0 \to \Delta=b^2-4ac=4-4(-2)(-1) \Rightarrow \Delta=4-8<0 \to$ ریشه ندارد

علامت همواره موافق علامت ضریب x^2

x	$-\infty$	$+\infty$
y''	−	خلاف
y	$\cap$	

$\to$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y''		−		
y		$\cap$		

۱) = (0,1)

نکته (تذکر) ۲ ⇐ در مسائل شامل رادیکال و لگاریتم حتماً ابتدا دامنه تابع یافته شود.

مثال ۲ = تابع $y=x-x^{\frac{2}{3}}$ چگونه است؟

فرجه‌ی رادیکال

Solve $\Rightarrow y=x-x^{\frac{2}{3}} \to y=x-\sqrt[3]{x^2} \to D=\mathbb{R}$

$y'=1-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \to y'=1-\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=1-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

ریشه مضاعف کنار علامت کردن نمیشه ۲ درجه ۲ یا $\Delta=0$

$y'=\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}}$ ریشه صورت: $x=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

ریشه مخرج: $x=0$

تعیین علامت

$x=1 \quad y=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}=$ مثبت $\to$ ص.

مشتق تعریف نشده ولی تابع تعریف شده است.

x	$-\infty$	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$+\infty$
y'	+	تن	− 0	+
y	↗	Max	↘ min	↗

1 = کوچ

تذکر مهم = ۲ ⇐ در هر سوالی ابتدا باید دامنه تابع حتماً بررسی شود، حال در محاسبه نقاط اکسترمم نسبی یا عطف اگر نقطه‌ای باشد (نقطه حاصل از جدول تعیین علامت) در دامنه موجود نباشد، طبیعتاً این نقطه اساساً وجود ندارد، اما اگر نقطه‌ای باشد در دامنه موجود باشد اصلا مهم نیست که چه مقداری برای y' و y'' حاصل شده است. (y' و y'' می‌تواند صفر، ∞، تعریف نشده و ... باشد)

اکسترمم عطف

۲۰

جلسه پانزدهم = ۲(جلسه 6)

ادامه کاربرد مشتق = ۲

حل مسائل بهینه سازی = ۲

مثال = ۲ برد تابع $y=xe^{-x}$ در فاصله $(0,+\infty)$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow y=xe^{-x} \Longrightarrow y'=1e^{-x}+x(-e^{-x}) \Longrightarrow y'=e^{-x}(1-x)$

به ازای $\begin{cases} y'=0 \longrightarrow e^{-x}(1-x)=0 \begin{cases} e^{-x}=0 & \text{غیرممکن} \\ 1-x=0 \longrightarrow x=1 \in (0,+\infty) \end{cases} \\ y' \text{ وجود نداشته باشد} \longrightarrow \text{نقطه ای یافت نمی شود} \end{cases}$

نقاط داخل بازه / نقاط دو سر بازه / تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق

چون صفرها را رفتار حدی پیدا کردیم، ۲ صفر نزدیک می شود.

نقاط مهم در اکسترمم مطلق $\begin{cases} \text{سر بازه} \\ \text{ته بازه} \\ \text{بحرانی} \end{cases}$

$x \to 0^+ : y=\lim\limits_{x\to 0} xe^{-x}=0\times e^0 \longrightarrow y=0$

$x \to +\infty : y=\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}=\lim \dfrac{x}{e^x}=0 \longrightarrow y=0$

$x=1 : y=xe^{-x}\Big|_{x=1} \longrightarrow y=1\times e^{-1} \longrightarrow y=\dfrac{1}{e}$

ندارد = مطلق min

جواب آخر: مطلق $\max = \dfrac{1}{e}$

برد: $R=(0,\dfrac{1}{e}]$

مثال = ۲ مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع $y=(\frac{1}{x})^x$ در فاصله $(0,+\infty)$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow y=(\frac{1}{x})^x \longrightarrow y=(x^{-1})^x \longrightarrow y=x^{-x}$ تابع به توان تابع

$\ln y=-x\ln x \xrightarrow{d/dx} \dfrac{y'}{y}=-1\ln x+(-x)\dfrac{1}{x}$

$y'=(-\ln x-1)x^{-x}$

به ازای $\begin{cases} y'=0 \longrightarrow (-\ln x-1)x^{-x}=0 \begin{cases} -\ln x-1=0 \longrightarrow \ln x=-1 \longrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e} \in (0,\infty) \\ x^{-x}=0 & \text{غیرممکن} \end{cases} \\ y' \text{ وجود نداشته باشد} \longrightarrow \text{نقطه ای یافت نمی شود} \end{cases}$

ندارد = مطلق min

جواب آخر: مطلق $\max = \sqrt[e]{e}$

$x \in (0,\infty) : y=x^{-x}$

$x \to 0^+ : y=\lim\limits_{x\to 0} x^{-x}=0^0$ مبهم $\longrightarrow \ln y=\lim\limits_{x\to 0} -x\ln x=-0\times\infty=0 \longrightarrow \ln y=0 \longrightarrow y=e^0 \longrightarrow y=1$

سرعت رشد توانی نسبت به لگاریتمی

$x \to +\infty : y=\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-x}=(+\infty)^{-\infty}=\dfrac{1}{(+\infty)^{+\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0 \longrightarrow y=0$ $\sqrt[e]{1}=1 \rightarrow \sqrt[e]{1}=1 \Rightarrow \sqrt[e]{e}>1$

نکته = ۲

$x=\dfrac{1}{e} : y=x^{-x}\Big|_{x=\frac{1}{e}}=(\dfrac{1}{e})^{-\frac{1}{e}}=(e^{-1})^{-\frac{1}{e}}=e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e} \longrightarrow y=\sqrt[e]{e}$

مثال مهم = ۲ با یک سیم به طول 12m یک مربع و یک دایره تشکیل می دهیم، کم ترین و بیش ترین مقدار مجموع مساحت های دو شکل کدام است؟

Solve $\Rightarrow \begin{cases} \text{مربع} \rightarrow S_1 = a^2 \\ \text{دایره} \rightarrow S_2 = \pi r^2 = 3r^2 \end{cases} \Rightarrow S = a^2 + 3r^2$

محیط

$P \Rightarrow 4a + 2\pi r = 12$

$4a + 6r = 12$

$a = \frac{12 - 6r}{4} \Rightarrow a = 3 - \frac{3}{2}r$

$S = (3 - \frac{3}{2}r)^2 + 3r^2 = 9 - 9r + \frac{9}{4}r^2 + 3r^2$

$S = \frac{21}{4}r^2 - 9r + 9 \rightarrow S' = \frac{21}{2}r - 9$

$S' = 0 \rightarrow \frac{21}{2}r - 9 = 0 \rightarrow r = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$ بحرانی

$S = \frac{21}{4}(\frac{6}{7})^2 - 9(\frac{6}{7}) + 9 = \frac{36}{7}$ min $\rightarrow$ با استفاده از تعیین علامت

	$-\infty$	$\frac{6}{7}$	$+\infty$
S'	$-$		$+$
S	$\searrow$	min	$\nearrow$

I) فقط مربع $\begin{cases} S_1 = a^2 \\ S_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow S = a^2 + 0$

$\Rightarrow S = a^2 \rightarrow S = 9$

$4a = 12 \rightarrow a \rightarrow 3$

II) فقط دایره $\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = \pi r^2 = 3r^2 \end{cases} \Rightarrow S = 0 + \pi r^2 = 0 + 3r^2$

$\Rightarrow S = 3r^2 \rightarrow S = 12$

$2\pi r = 12 \rightarrow 6r = 12 \rightarrow r = 2$

$S_{max} = 12$

نکته مهم = ۲ در محیط های ثابت، بیش ترین مساحت مربوط به شکل متقارن تر است.

در مساحت های ثابت، بیش ترین حجم مربوط به شکل متقارن تر است.

* متقارن ترین شکل دایره است.

جلسه شانزدهم = ۲

مهم

چند قضیه در پیوستگی و مشتق = ۲

1 قضیه مقدار میانی = ۲

2 قضیه بولتزانو = ۲ مهم ترین قضیه :

3 قضیه رول = ۲

4 قضیه لاگرانژ = ۲ مهم

5 قضیه کوشی = ۲

جلسه هفدهم = ۲

مثال = ۲ معادله $x^3+\tan x=1$ در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ چند ریشه دارد؟

Solve $= x^3+\tan x=1 \longrightarrow x^3+\tan x-1=0 \xrightarrow{\text{فاصله هم داده شود}}$ حتماً بولتزانو حل می کند

$f(x)=x^3+\tan x-1 \quad : [0,\frac{\pi}{4}]$

$f(0)=0+0-1<0$

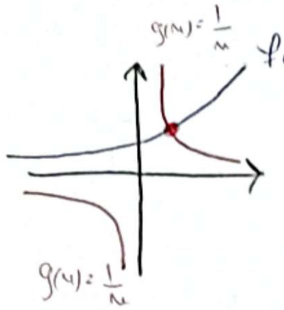
$f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^3}{64}+1-1>0$ ⟶ بولتزانو برقرار است ⟶ حداقل یکبار محور x را قطع می کند ⟶ حداقل ۱ ریشه دارد

$f'(x)=\underbrace{3x^2}_{\text{همیشه مثبت}}+1+\underbrace{\tan^2 x}_{\text{همیشه مثبت}}>0$ ⟶ اکیداً صعودی $f(x)$

فقط ۱ ریشه دارد

مثال ۲= معادله $xe^x=1$ دارای چند ریشه است؟

Solve $\Longrightarrow xe^x=1 \longrightarrow e^x=\frac{1}{x}$ $\begin{cases} f(x)=e^x \\ g(x)=\frac{1}{x} \text{ هذلولی} \end{cases}$



$\Longrightarrow$ فقط ۱ ریشه دارد

مثال ۳= معادله $x^2-x\sin x=\cos x$ دارای چند ریشه است؟

Solve $\Longrightarrow x^2-x\sin x-\cos x=0$

$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$

می‌ریم برای اکسترمم پیدا کردن $\Longrightarrow f'(x)=2x-1\sin x-x\cos x+\sin x \longrightarrow f'(x)=x(2-\cos x)$

$f'=0 \longrightarrow x(2-\cos x)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ 2-\cos x=0 \longrightarrow \cos x=2 \longrightarrow \text{غیرممکن} \end{cases}$

$f'=0$ دارای ۱ ریشه است $\overset{\text{رل}}{\Longrightarrow}$ $f=0$ حداکثر ۲ ریشه دارد

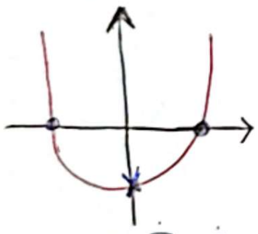
تعیین علامت می‌کنیم $\Longrightarrow$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	min $\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$	$\nearrow$	$-\infty$

$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$

$x\to-\infty: f(x)=x^2 \Rightarrow +\infty$

$x\to+\infty: f(x)=x^2 \Rightarrow +\infty$ با استفاده از رئیس قدرت



$\Longrightarrow$ دقیقاً ۲ ریشه دارد

تذکر مهم = ۲ برای تعیین علامت هرگاه به یک دلیل منطقی مطمئن شدیم که عبارتی حتماً و همیشه مثبت است، مجاز هستیم آن عبارت و ریشه‌هایش را در تعیین علامت در نظر نگیریم.

مثال = ۲ مقدار $\ln\frac{5}{3}$ در چه فاصله‌ای قرار دارد؟

هرگاه بخواهیم بدانیم که یک مقدار عددی در چه فاصله قرار می‌گیرد باید از نتیجه قضیه لاگرانژ استفاده کنیم.

$$\underset{\text{مینیمم مطلق } f'}{m} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \underset{\text{ماکزیمم مطلق } f'}{M}$$

$$*\ \ln\frac{5}{3} = \ln 5 - \ln 3$$

Solve $\Longrightarrow f(x) = \ln x : [3,5]$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{نزولی}} \begin{cases} x=3 \longrightarrow \overset{\text{ماکزیمم}}{M} = \frac{1}{3} & \text{ابتدای بازه} \\ x=5 \longrightarrow \overset{\text{مینیمم}}{m} = \frac{1}{5} & \text{انتهای بازه} \end{cases}$$

$$\frac{1}{5} < \frac{\ln 5 - \ln 3}{5-3} < \frac{1}{3} \longrightarrow \boxed{\frac{2}{5} < \ln\frac{5}{3} < \frac{2}{3}}$$

جلسه هجدهم = ۲ (جلسه 7) (فصل چهارم)

انتگرال یگانه و کاربردهای آن = ۲

انتگرال مهم = ۲

$$3)\ \int a u' u^n dx = \begin{cases} a \times \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & : n \neq -1 \\ a \ln|u| + C & : n = -1 \end{cases}$$

مشتق آن نمایان است یا با تغییرات عددی خودمان آن را اضافه می‌کنیم.

$$ex \Longrightarrow I = \int x\sqrt{3x^2+1}\, dx \overset{\text{Solve}}{\Longrightarrow} I = \frac{1}{6}\int \cancel{6}x (3x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{6} \times \frac{(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} dx$$

$$ex \Longrightarrow I = \int \frac{\sin x}{5+4\cos x} dx \overset{\text{Solve}}{\Longrightarrow} I = \frac{-1}{4}\int \cancel{-4}\sin x\, (5+4\cos x)^{-1} dx$$

$$I = \frac{-1}{4}\ln(5+4\cos x) + C$$

مثال = حاصل $I=\int_0^2 [x^2]dx$ کدام است؟

Solve $\Rightarrow$ $0<x<2 \xrightarrow[\pm 5]{\text{توان } 2} 0<x^2<4$

$0<x<1 \leftarrow 0<x^2<1 \rightarrow [x^2]=0$

$1<x<\sqrt2 \leftarrow 1<x^2<2 \rightarrow [x^2]=1$

$\sqrt2<x<\sqrt3 \leftarrow 2<x^2<3 \rightarrow [x^2]=2$

$\sqrt3<x<4 \leftarrow 3<x^2<4 \rightarrow [x^2]=3$

$6\rightarrow$

$$I=\cancel{\int_0^1 0\times dx}+\int_1^{\sqrt2}1\,dx+\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}2\,dx+\int_{\sqrt3}^{2}3\,dx$$

صفر

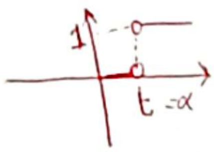
$$I=\left(x\Big|_1^{\sqrt2}\right)+\left(2x\Big|_{\sqrt2}^{\sqrt3}\right)+\left(3x\Big|_{\sqrt3}^{2}\right)$$

$$I=(\sqrt2-1)+(2\sqrt3-2\sqrt2)+(6-3\sqrt3)=5-\sqrt2-\sqrt3$$

مثال ۲ = ضابطه تابع $f(x)=\int_3^x t^2\times u_4(t)\,dt$ کدام است؟

در نقطه ۴ پله خورده

تابع پله واحد: $u_\alpha(t)=u(t-\alpha)=\begin{cases}0 : t<\alpha\\ 1 : t\geq 0\end{cases}$



در نقطه α پله صفر بوده (تعریف نشده)

قبل از پله صفر — بعد از پله ①

$$\text{Solve}\Rightarrow f(x)=\cancel{\int_3^4 t^2\times 0\times dt}+\int_4^x t^2\times 1\,dt=\frac{t^3}{3}\Big|_4^x=\frac{x^3}{3}-\frac{64}{3}$$

صفر

$$f(x)=\frac{1}{3}(x^3-64)$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x^3-64) & : x\geq 4\\ 0 & : x<4\end{cases}$$

این جواب

مثال ۳ = حاصل $I=\int_{-2}^{2}x^2\ln\frac{3-x}{3+x}dx$ کدام است؟

$$\text{Solve}\Rightarrow I=\int_{-2}^{2}x^2\ln\frac{3-x}{3+x}dx \longrightarrow$$ چون حدود انتگرال متقارن است، بررسی زوج و فرد را انجام می‌دهیم

$$f(x)=x^2\ln\frac{3-x}{3+x}\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه می‌کنیم}} f(-x)=(-x)^2\ln\frac{3-(-x)}{3+(-x)}\Rightarrow f(-x)=x^2\ln\frac{3+x}{3-x}=x^2\ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow f(-x)=-x^2\ln\frac{3-x}{3+x}\xRightarrow{\text{نتیجه}} f(-x)=-f(x)\rightarrow \text{تابع فرد}\Rightarrow I=0$$

مثال ۱ =

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{9x^3+x^2-3x+1}{x^2+1}\,dx$$

زوج

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{9x^3-3x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^2+1}\right)dx=\int_{-1}^{1}\cancel{\frac{9x^3-3x}{x^2+1}}\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx$$

صفر   فرد   تابع زوج

$$I=2\int_{0}^{1}1\,dx=2x\Big|_{0}^{1}=2$$

تابع زوج

* $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ ← یک تابع فرد است.

** معکوس یک تابع فرد حتما یک تابع فرد است.

نکته مهم ۲ = هرگاه زیر رادیکال یا در آرگومان توابع لگاریتم درجه ۲ داشتیم حتما آن را به اتحاد اول و دوم تبدیل می‌کنیم. سپس بسته بندی ایجاد شده را تغییر متغیر می‌دهیم.

$$Ex \Rightarrow I=\int_{-5}^{1}\ln\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x+2\right)dx$$

$$\xrightarrow{Solve} I=\int_{-5}^{1}\ln\left(\sqrt{x^2+4x+4+1}+x+2\right)dx \Rightarrow I=\int_{-5}^{1}\ln\left(\sqrt{(x+2)^2+1}+x+2\right)dx$$

تغییر متغیر می‌دهیم $\Rightarrow x+2=t \rightarrow dx=dt$

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow 1+2=t \Rightarrow t=3 \\ x=-5 \rightarrow -5+2=t \Rightarrow t=-3 \end{cases}$$

متقارن   معکوس $\sinh$ است

$$I=\int_{-3}^{3}\underbrace{\ln\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)}_{\text{تابع فرد}}dt=0$$

مثال ۲ = مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x+4}$ در فاصله $[0,2]$ کدام است؟

قضیه مقدار میانی ۲ =

$$Solve \Rightarrow \bar{f}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \Rightarrow \bar{f}=\frac{\int_0^2\frac{x+2}{x^2-2x+4}\,dx}{2-0}$$

انتگرال نوع ۲   درجه صورت از مخرج کمتر

$$I=\int_0^2\frac{x+2}{\underbrace{x^2-2x+4}_{\Delta=4-16<0}}\,dx=\int_0^2\frac{x+2}{x^2-2x+1+3}\,dx=\int_0^2\frac{x+2}{(x-1)^2+3}\,dx$$

غیر قابل تجزیه $\Delta=4-16<0$

تغییر متغیر $\Rightarrow x-1=t \rightarrow dx=dt \rightarrow x=t+1$

$$\begin{cases} x=2 \rightarrow 2-1=t \rightarrow t=1 \\ x=0 \rightarrow 0-1=t \rightarrow t=-1 \end{cases}$$

ادامه حل $\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\frac{t+3}{t^2+3}\,dt=\int_{-1}^{1}\cancel{\frac{t}{t^2+3}}\,dt+\int_{-1}^{1}\frac{3}{t^2+3}\,dt$

صفر — فرد — زوج

$$I=2\int_0^1\frac{3}{t^2+3}\,dt=6\int_0^1\frac{1}{t^2+3}\,dt=6\,\frac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{t}{\sqrt3}\Big|_0^1$$

$$I=\frac{6}{\sqrt3}\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt3}{3}-0\right)=\frac{6}{\sqrt3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{\sqrt3}$$

$$\bar f=\frac{\int_0^2 f}{2-0}=\frac{\frac{\pi}{\sqrt3}}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt3}$$

یادآوری = ۲ $y=ax-[ax]\rightarrow$ تناوب

دوره تناوب $T=\frac{1}{|a|}$

مثال ۲ = حاصل $I=\int_{\frac12}^{2}\frac{e^x}{x}\,dx$ در چه فاصله‌ای قرار دارد؟ سوال کاربرد مشتق است و باید min و max پیدا کنیم.

کران‌های انتگرال

Solve $\Rightarrow$ $f(x)=\frac{e^x}{x}:[\frac12,2]$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-1e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}\xrightarrow{\text{برای}}\begin{cases}f'=0\longrightarrow x=1\in[\frac12,2]\\ f'\ \text{موجود نباشد}\longrightarrow \text{نقطه‌ای به دست نمی‌آید}\end{cases}$$

$x=\frac12\longrightarrow y=\frac{e^x}{x}\xrightarrow{x=\frac12}y=2\sqrt e$

$x=2\longrightarrow$ 〃 $\xrightarrow{x=2}y=\frac12e^2$

$x=1\longrightarrow$ 〃 $\xrightarrow{x=1}y=e$

مطلق min $=m=e$

مطلق max $=M=\frac12e^2$

$e=2{,}7$

$2\sqrt e=2\sqrt{2{,}7}=3{,}\ldots$

$\frac12e^2=\frac12(2{,}7)^2\simeq3{,}5$

دقت $\Rightarrow m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$

$$e(2-\tfrac12)\leqslant\int_{\frac12}^{2}\frac{e^x}{x}\,dx\leqslant\frac12e^2(2-\tfrac12)$$

$$\frac32e\leqslant I\leqslant\frac34e^2$$

جلسه نوزدهم :

تکنیک های انتگرال گیری :

1 روش تغییر متغیر :

مثال :

$$I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{Solve}} \sqrt{e^x-1}=t \xrightarrow{\text{توان ۲}} e^x-1=t^2 \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} e^x\,dx=2t\,dt \longrightarrow dx=\frac{2t\,dt}{e^x} \longrightarrow dx=\frac{2t\,dt}{t^2+1}$$

$$e^x=t^2+1$$

$$\begin{cases} x=\ln 2 \longrightarrow \sqrt{e^{\ln 2}-1}=t \longrightarrow \sqrt{2-1}=t \longrightarrow t=1 \\ x=0 \longrightarrow \sqrt{e^0-1}=t \longrightarrow \sqrt{1-1}=t \longrightarrow t=0 \end{cases}$$

تفاوت صورت و مخرج در یک عدد ثابت است

$$I=\int_0^1 t\,\frac{2t\,dt}{t^2+1}=2\int_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=2\int_0^1\left(\frac{\cancel{t^2+1}}{\cancel{t^2+1}}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$I=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-\operatorname{Arctan} t\right)\Big|_0^1=2\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-(0-0)\right)$$

$$I=2-\frac{\pi}{2}$$

مثال :

$$I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$ تغییر متغیر مثلثاتی

$$\xrightarrow{\text{Solve}} x=2\sin\theta \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dx=2\cos\theta\,d\theta$$

$$\begin{cases} x=2 \longrightarrow 2=2\sin\theta \longrightarrow \sin\theta=1 \longrightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \\ x=0 \longrightarrow 0=2\sin\theta \longrightarrow \sin\theta=0 \longrightarrow \theta=0 \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}\times 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2\theta\,|2\cos\theta|\,2\cos\theta\,d\theta$$

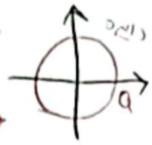
$$I=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta)^2\,d\theta=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 d\theta$$

$$I=16\,\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\overset{\text{فرمول طلایی}}{\frac{1-\cos 4\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta$$

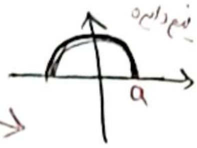
$$I=2\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-(0-0)\right)=\pi$$

نکته مهم = ۲

$$x^2+y^2=a^2 \longrightarrow$$
$$y^2=a^2-x^2 \longrightarrow$$
$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2} \longrightarrow$$

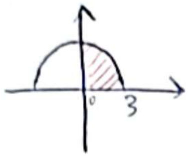


$$y=\sqrt{a^2-x^2} \longrightarrow$$



مثال = ۲

$$I=\int_0^3\sqrt{9-x^2} =$$



$$= \frac{1}{4}\pi r^2=\frac{1}{4}\pi\times 3^2=\frac{9\pi}{4}$$

جلسه بیستم = ۲

مثال = ۲ مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{2+\cos x}$ در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

Solve $\Longrightarrow$ $\bar{f}=\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \longrightarrow \bar{f}=\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos\theta}\,dx}{\frac{\pi}{2}-0}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\,dx \longrightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{2+2\tan^2\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}\,dx$$

تغییر متغیر

$$\tan\frac{x}{2}=t \longrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx=dt \longrightarrow dx=\frac{2dt}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \longrightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=t \longrightarrow \tan\frac{\pi}{4}=t \Longrightarrow t=1 \\ x=0 \longrightarrow \tan\frac{0}{2}=t \longrightarrow \tan 0=t \longrightarrow t=0 \end{cases}$$

$$I=\int_0^1\frac{1+t^2}{3+t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2}=2\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\bar{f}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \bigcirc}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$$ جواب آخر