ریاضی عمومی ۲

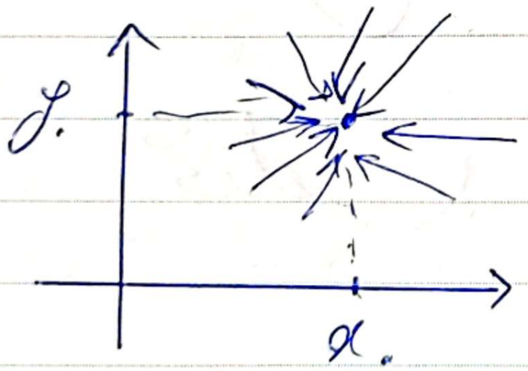
① ریاضی ۱ $\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$
$$\begin{cases} \lim_{x \to a^-} f(x) = L \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = k \end{cases}$$

if $L = k \rightarrow f(x)$ have limit

حد چپ $\longrightarrow$ x $\longleftarrow$ حد راست

$x = a$

② ریاضی ۲ $\Rightarrow f(x,y) \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$



در ریاضی ۲ بی‌نهایت مسیر داریم برای رسیدن به حد در صفحه دکارتی.

باید حد روی بی‌نهایت مسیر یکی باشد تا حد تابع برقرار شود

$$I = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2 - \frac{1}{2}y}{\ln x + y - 2} = \frac{0}{0}$$

در ریاضی عمومی ۲ برای توابع چندمتغیره چیزی به اسم

قاعده هوپیتال نداریم.

$$\text{I} \begin{cases} x = 1 & x \to \text{ثابت} \\ y \to 2 & \longrightarrow y \text{ را به ۲ میل می‌دهیم.} \end{cases}$$

$$I = \lim_{y\to 2} \frac{x^2 - \frac{1}{2}y}{0 + y - 2} = \lim_{y\to 2} \frac{1 - \frac{1}{2}y}{y - 2} =$$

$$= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{y\to 2} \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$2) \begin{cases} x \to 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad I = \lim \frac{x^2 - \frac{1}{2}2}{\ln x + 2 - 2} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = 2$$

KANDOO

چون جواب ها یکسان نشد تابع حد ندارد.

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید؟

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{\underbrace{x^2+y^2}_{=r^2}} = \frac{0}{0} \longrightarrow$$

چون به سمت (0,0) میل می‌کنیم سمت مختصات قطبی می‌آوریم

$$I = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} \frac{(r^2\cos^2\theta)(r\sin\theta)}{\underset{r\neq 0}{r^2}}$$

$$I = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} r\,\underbrace{\cos^2\theta\,\sin\theta}\; = 0 \times (\text{کراندار})$$

دامنه‌دار

دارد تابع $\cos\theta , \sin\theta$

$\longrightarrow = 0 \longrightarrow$ حد موجود و برابر صفر می‌شود.

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\sin^3 y}{1-\cos(x^2+y^2)}=\frac{0}{0}$$

هم ارزی ها : چون به سمت صفر میل داریم در سین و کسین می‌توان
از این قاعده استفاده کرد که مبدا مکلوران است

$$\sin A \underset{A\to 0}{\simeq} A-\frac{A^3}{3!}\ \ldots$$

$$\cos A \underset{A\to 0}{\simeq} 1-\frac{A^2}{2!}\ \ldots$$

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\overset{\text{اولین جمله}}{(x)(y^3)}}{1-\left(1-\frac{(x^2+y^2)^2}{2!}\right)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{\begin{cases}r\to 0\\ \forall\theta\end{cases}}\frac{r^4\cos\theta\sin^3\theta}{\frac{1}{2}r^4}=$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}} 2\cos\theta\sin^3\theta =$$ حد ندارد

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x-y}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{قطعی}}$$

$$I=\lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\theta}}\frac{r^2\cos^2\theta}{r\cos\theta-r\sin\theta}=\lim\frac{r\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

مخرج کسری است پس می‌تواند بی‌کران شود پس باید دقت کرد.

$$=0\times(?)\ \text{if}\ \theta\to\frac{\pi}{4}\xrightarrow[\text{ممکن}]{}0\times\infty$$ مبهم

پس حد وجود ندارد.

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - xy - 1}{\sin(x^3+y^3)}$$

$$\underset{A\to 0}{e^A} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

$$\underset{A\to 0}{\sin A} \simeq A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!}$$

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\cancel{1} + \cancel{xy} + \frac{(xy)^2}{2!}\right) - \cancel{xy} - \cancel{1}}{x^3+y^3}$$

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{(xy)^2}{2!}}{x^3+y^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{قطبی}}$$

$$I = \lim \frac{\frac{1}{2} r^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}$$

$\begin{cases} r \to 0 \\ \forall \theta \end{cases}$

$$I = \lim r \left(\frac{\frac{1}{2}\cos^2\theta \sin^2\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta} \right) = 0 \times (?)$$

$r \to 0$

$\forall \theta$

مخرج کسری داریم پس ممکن است

بی‌کران شود

مخرج $= 0 \to ? \to \frac{\cos^3\theta}{\cos^3\theta} + \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = 0$

$1 + \tan^3\theta = 0 \Longrightarrow \tan^3 = -1$ امکان پذیر

پس مخرج ممکن صفر شود

پس در نتیجه حد $0 \times \infty$ تولید می‌کند مبهم

است و حد ندارد.

مثال ۱) اگر $I = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin^m x \sin^n y}{x^4+y^4}$ موجود باشد

مقدار m و n چیست؟

هم ارزی

هم ارزی

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^m + y^n}{x^4+y^4} = \frac{0}{0}$$

$$I = \lim \frac{(r\cos\theta)^m + (r\sin\theta)^n}{(r^4\cos^4\theta) + (r^4\sin^4\theta)}$$

$$\begin{cases} r \to 0 \\ \forall \theta \end{cases}$$

$$I = \lim \frac{r^{n+m}(\cos^m\theta + \sin^m\theta)}{r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}$$

$$I = \lim r^{m+n-4} \frac{(\cos^m\theta + \sin^n\theta)}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} =$$

$$\begin{cases} r \to 0 \\ \forall \theta \end{cases}$$

$$= 0 \times (?)$$

$$\text{مخرج} = \cos\theta\,\sin\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 1$$

مخرج صفر شدنی نیست

$$I = 0 \times (\text{کراندار}) = 0$$ حد دارا است و برابر صفر

$$I = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy - x - 2y + 2}{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{cases} x \to 2 \Rightarrow x - 2 = X \\ y \to 1 \Rightarrow y - 1 = Y \end{cases} \quad \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

$$(X, Y) \to (0, 0)$$

جسته بندی هایی که در مخرج موجود دارد یک

نوع هستند برای تغییر متغیر دادن ما هست

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2)(y+1) - (x+2) - 2(y+1) + 2}{x^2 + y^2}$$

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + \cancel{x} + \cancel{2y} + \cancel{2} - \cancel{x} - \cancel{2} - \cancel{2y} - \cancel{2} + \cancel{2}}{x^2 + y^2}$$

$$I = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2}} \xRightarrow{\text{قطبی}} I = \lim_{\substack{r \to 0 \\ \forall \theta}} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r^2}$$

$$I = \lim_{\substack{r \to 0 \\ \forall \theta}} \sin\theta \cos\theta \Rightarrow$$ حد ندارد

چون تمامی زاویه ها را در بر می‌گیرد.

مثال :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x+y} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

حاصل $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ کدام است؟

چون نقطه‌ای است باید حدی بگیریم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{(h,0) - f(0,0)}{h} \Rightarrow$$

$x \to h \quad y \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 - 0}{h+0} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h^2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, h+y) - f(x,y)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$x \to 0$
$y \to h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{0-0}{0+h}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 - 0 = 1$$

مثال: دمورد تابع

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \\ 0 & :(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

KANDOO

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ چون مشتق‌ها بطور دایم هستند

ترتیب مشتق‌ها ثابت نداریم باید از تعریف

جلو برویم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, h+y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0,0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0}{0+h^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{\left(2x(x^2-y^2) + 2xy \cdot (-2y)\right) - 2y\left(2xy(x^2-y^2)\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

چون در

مخرج

نیاز داریم

KANDOO

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f(0,0)}{h}$$

در تابع f_y که داشتیم به y گذاشتیم به جای
y صفر و به جای x h می‌ذاریم.

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(2h^3+0)(h^2+0)}{(h^2+0)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2h^5}{h^4}}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{2h^5}{h^5} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

$$f(x,y)\begin{cases}\dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq 0\\ 0 & :(x,y)=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2+0}-0}{h}=0 \;*$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x\begin{cases}\dfrac{(2y(x^2-y^2)+(2xy(2x)-(x^2+y^2)(2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ 0\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(-2h^3+0)(0+h^2)-0}{(0+h^2)^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-2h^5}{h^4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\cancel{h^5}}{\cancel{h^5}}=-2$$

مثال: مشتق $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{-x^2}{4y}}$ حاصل عبارت $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\div\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(2,1)$ کدام است؟

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{-x^2}{4y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{0.()-\frac{1}{2\sqrt{y}}\times 1}{(\sqrt{y})^2}e^{\frac{x^2}{4y}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{-x^2}{4}\,\frac{-1}{y^2}\right)e^{\frac{-x^2}{4y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{-1}{2}e^{-1} + 1(1e^{-1}) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} + e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{-2x}{4y} e^{-\frac{x^2}{4y}} = \frac{-1}{2y\sqrt{y}} x e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{2y\sqrt{y}}\left(1 \times e^{\frac{-x^2}{4y}} + x\left(\frac{-2x}{4y} e^{\frac{-x^2}{4y}}\right)\right)$$

$$@(2,1) \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(e^{-1} + 2\left(\frac{-4}{4}e^{-1}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2}\left(e^{-1} - 2e^{-1}\right) = \frac{-1}{2}\left(-e^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2e} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \div \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\frac{1}{2e}}{\frac{1}{2e}} = 1$$

KANDOO

CamScanner

مثال در دستگاه زیر فرض کنید x و y توابعی
مستقل از متغیرهای مستقل u و v باشند
مقدار $\frac{\partial x}{\partial u}$ به ازای $(x,y)=(1,2)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u = x^2 y^3 \\ v = x^5 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x^2 y^5 \\ v = x^5 + y^2 \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial u}$$

$$\begin{cases} 1 = 2xy^3 \frac{\partial x}{\partial u} + x^2 3y^2 \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = 5x^4 \frac{\partial x}{\partial u} + 2y \frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

$(1,2)$

$$1 = 16 \frac{\partial x}{\partial u} + 12 \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = 5 \frac{\partial x}{\partial u} + 4 \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\begin{cases} 16\dfrac{\partial x}{\partial u} + 12\dfrac{\partial y}{\partial u} = 1 \\[2ex] 5\dfrac{\partial x}{\partial u} + 4\dfrac{\partial y}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad -3$$

$$16\frac{\partial x}{\partial u} + \cancel{12\frac{\partial y}{\partial u}} = 1$$

$$-15\frac{\partial x}{\partial u} \cancel{- 12\frac{\partial y}{\partial u}} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 15$$

$$16 \times 15 + 12\frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

$$\Rightarrow 240 + 12\frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} =$$

مثال: در تبدیلات زیر w و z توابعی از متغیرهای مستقل x و y باشد حاصل $\frac{\partial w}{\partial y}$ در نقطه $(x,y)=(z,w)=(1,1)$ کدام است؟

$$\begin{cases} x^2y + y^3w^2 + xz^3 = 3 \\ xw^3 + yz^2 - y^2 = 2x^2 - z \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{cases} x^2 + 3y^2w^2 + 2wy^3\frac{\partial w}{\partial y} + x3z^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ x3w\frac{\partial w}{\partial y} + z^2 + y2z\frac{\partial z}{\partial y} - 2y = -\frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 3 + 2\frac{\partial w}{\partial y} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ 3\frac{\partial w}{\partial y} + 1 + 2\frac{\partial z}{\partial y} - 2 = -\frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial w}{\partial y} + 3\dfrac{\partial z}{\partial y} = -4 \\[2ex] 3\dfrac{\partial w}{\partial y} + 3\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\dfrac{\partial w}{\partial y} = 5}$$

$$\begin{cases} x^2u^3 + uv^2 + yz - w^2 = 2xv \\ xy^2 + y^2z^2 + vw^2 = y^2 + zv + 1 \\ y^3 - xz^2 + zw^3 = xu^2 \end{cases}$$

u,v,w تابعی از x,y,z هستند