اپراتور برداری نابلا:

مثال: خط عمود بر رویه فضایی $xy^2 = \ln(2x-z^2) + y$

در نقطه $(1,1,1)$ واقع بر آن صفحه xy

در چه نقطه ای قطع می کند؟

KANDOO

حتماً معادله خود را برابر با صفر کنیم:

$$f: \ln(2x-z^3)+y-xy^2=0$$

$$\vec{\nabla} f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{2-z^3}{2x-z^3}-y^2\right)\hat{i}+(1-2xy)\hat{j}+\left(-\frac{3z^2}{2x-z^3}\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} f(1,1,1)=\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$$

معادله خط:
$$\frac{x-\overset{1}{x_0}}{P}=\frac{y-\overset{1}{y_0}}{Q}=\frac{z-\overset{1}{z_0}}{R}$$

همان (∇) بردار هادی ماست در نقطه (1,1,1) که از گرادیان محاسبه کنیم.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$$

تقاطع با صفحه xy $z=0$ $\Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{1}{3}$

$\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه}} \left\{\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right\}$

مثال: معادله صفحه عمود بر خم فصل مشترک

$z-1=\sqrt{x^2-y^2}$ و $xy^2z^3=1$ در

در نقطه $(1,1,1)$ واقع بر آن کدام است؟

چون ۲ خم داریم پس ۲ گرادیان داریم

$f: \; xy^2z^3-1=0$

$\vec{\nabla} f=(y^2z^3)\hat{i}+(2xyz^3)\hat{j}+(3xy^2z^2)\hat{k}$

$\vec{\nabla} f(1,1,1)=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$g: \; z-1=\sqrt{x^2-y^2} \rightarrow (z-1)^2=x^2-y^2$

$\rightarrow x^2-y^2-(z-1)^2=0$

$$\bar{\nabla} g = (2x)\hat{i} + (-2y)\hat{j} + (-2(z-1))\hat{k}$$

$$\bar{\nabla} g(1,1,1) = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\bar{\nabla} f \times \bar{\nabla} g = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(0-(-2\times 3))\hat{i} - (0-6)\hat{j} + (-2-4)\hat{k}$$

$$= +6\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$$

معادله صفحه $= a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)$

$$= 6(x-1) + 6(y-1) - 6(z-1) = 0$$

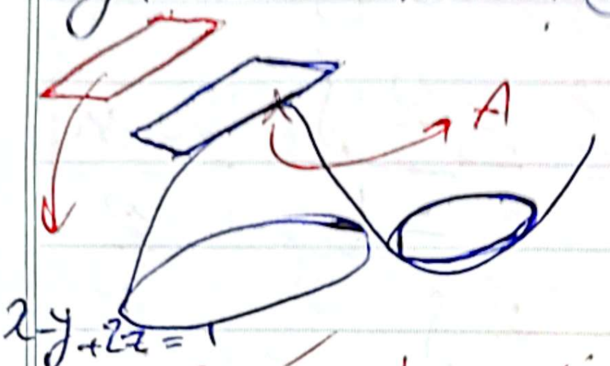
$$\div 6 \rightarrow x-1+y-1-z+1=0$$

$$x+y-z=1$$

6

مثال: بر روی خم فضایی $y^2 = xz - 1$ نقاطی بیابید

تا صفحه مماس بر خم فضایی، با صفحه $x-y+2z=1$



در تصویر می‌بینید که دو خم فضایی داریم و یک صفحه مماس رسم کرده‌ایم حال یک صفحه در بالای آن نیز موازی قرار دارد حال ما نقطه A را می‌خواهیم.

$$x-y+2z=1 \xrightarrow[\text{بردار نرمال}]{} \vec{N} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

ضرایب x و y و z

حال صفحه‌ای که مماس می‌شود بر خم فضایی

پس $\vec{N} = \nabla f$ می‌شود.

$$f: y^2 - xz + 1 = 0$$

$$\nabla f = -z\hat{i} + 2y\hat{j} - x\hat{k}$$

پس در نتیجه $\vec{\nabla} f \parallel \vec{N}$ باید ضرایب ها

را تناسب قرار دهیم:

$$\vec{\nabla} f \parallel \vec{N} \Longrightarrow \frac{-z}{1} = \frac{2y}{-1} = \frac{-x}{2}$$

$$\begin{cases} z = 2y \\ x = 4y \\ x = 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2y \\ x = 4y \\ y^2 = xz - 1 \end{cases}$$

سه معادله داریم از بین این ۳ معادله ۲ معادله

انتخاب می کنیم. یک معادله هم خود صفحه است

$$\begin{cases} 2y = z \\ x = 4y \\ y^2 = xz - 1 \end{cases} \longrightarrow y^2 = (2y)(4y) - 1$$

$$y^2 = 8y^2 - 1 \longrightarrow 7y^2 = 1 \longrightarrow y^2 = \frac{1}{7}$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$$

نقطه $\left(\pm\frac{4}{\sqrt7}, \pm\frac{1}{\sqrt7}, \pm\frac{2}{\sqrt7}\right)$

$$\begin{cases} x = 4y \rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt7} \\ z = 2y \rightarrow z = \pm\frac{2}{\sqrt7} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt7} \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt7} \end{cases}$$

مثال: در چه نقطه ای از سطح فضایی $x^2+y^2+4z^2=1$ خط عمود بر سطح فضایی با محور مختصات زوایای مساوی تشکیل می دهد!

$f: x^2+y^2+4z^2-1=0$

$\vec\nabla f = (2x)\hat i + (2y)\hat j + (8z)\hat k$

این گرادیان وظیفه خط هادی را بر عهده دارد.

KANDOO

خط مورد نظر با محور مختصات زوایای مساوی تشکیل می دهد. زمانی این حالت رخ می دهد که هر سه عامل مساوی هم باشد:

$$\underbrace{2x = 2y}\ = 8z \qquad \begin{cases} x = y \\ \boxed{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 4z \end{array}} \end{cases}$$

سه تا معادله داریم ۲ تاش بدرد بخور ماست.

$$\begin{cases} x = 4z \\ y = 4z \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow (4z)^2 + (4z)^2 + 4z^2 = 1$$

$$16z^2 + 16z^2 + 4z^2 = 1 \rightarrow 36z^2 = 1$$

$$z = \pm \frac{1}{6}$$

نقطه‌ها $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{6}}, \pm\frac{4}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$$\begin{cases} x = 4z \\ y = 4z \\ z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \longrightarrow \left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}\right)$$

مثال: زاویه بین دو رویه $x+2y-\ln z=3$ و $x^2-y+e^{z-y}=1$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟

$f: x+2y-\ln z-3=0$

$\vec{\nabla} f = (1)\hat{i} + (2)\hat{j} - \left(\frac{1}{z}\right)\hat{k}$

$\vec{\nabla} f(1,1,1) = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$g: x^2-y+e^{z-y}-1=0$

$\vec{\nabla} g = (2x)\hat{i} + (-1-e^{z-y})\hat{j} + (e^{z-y})\hat{k}$

$\vec{\nabla} g(1,1,1) = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\cos\alpha = \frac{\bar{\nabla} f \cdot \bar{\nabla} g}{|\bar{\nabla} f||\bar{\nabla} g|} = \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cos\alpha = \frac{(1\times 2)+(2\times(-2))+(-1\times 1)}{\sqrt{1+4+1} \times \sqrt{4+4+1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{6}\times 3} = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{6}}$$

مثال: با تعریف $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\alpha = |\bar{r}|$ حاصل $\bar{\nabla} f(\alpha)$ کدام است؟

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \longrightarrow \alpha\,|\bar{r}|$$

$$\alpha = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\bar{\nabla} f(\alpha) = \bar{\nabla} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f'(\alpha)\,\hat{i} + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f'(\alpha)\,\hat{j}$$

$$+ \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f'(\alpha)\,\hat{k}$$

$$\frac{f'(\alpha)}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\alpha}} \underbrace{\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)}_{\bar{r}}$$

$$= \frac{f'(\alpha)}{\alpha}\,\bar{r}$$

مثال: $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ در نقطه

نقطه $(1,1,1)$ در جهت بردار

$\bar{u}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$

چگونه است؟

$$f(x,y,z) = x^2 + y^z - z^2$$

$$\overline{\nabla} f = (2x)\hat{i} + (z y^{z-1})\hat{j} + (1 \times y^z \ln y - 2z)\hat{k}$$

$$\overline{\nabla} f(1,1,1) = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\lambda_u = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1+4+4}} =$$

$$= \frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

$$D_{\bar{u}} f = \overline{\nabla} f \cdot \lambda_{\bar{u}} = (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \cdot \left(\frac{\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}\right) = \frac{1}{3}(2 - 2 - 4)$$

$$D_{\bar{u}} f = -\frac{4}{3} < 0$$ نزولی

مثال: اگر مشتق سوئی تابع $w=f(x,y,z)$

در نقطه ای خاص در جهت بردارهای

$\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

به ترتیب برابر $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$ باشد بیشترین

مقدار مشتق سوئی تابع کدام است؟

$\bar{u}_1=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$D_{\bar{u}}f=\bar{\nabla}f\cdot\bar{u}$

$\bar{u}_2=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

$u_3=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$

$\sqrt{3}=(\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}+\gamma\hat{k})\cdot\frac{(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{3}}$

$\xrightarrow{u_1}\sqrt{3}=(\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}+\gamma\hat{k})\cdot\frac{(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{3}}$

$\longrightarrow 3=\alpha-\beta+\gamma$

$\xrightarrow{u_2}\sqrt{6}=(\alpha\hat{i}+\beta\hat{j}+\gamma\hat{k})\cdot\frac{(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{6}}$

$6=2\alpha+\beta-\gamma$

KANDOO

$$\vec{u_3} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} = (\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}) \cdot \frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow 1 = \alpha + 2\beta + \gamma$$

یک دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول داریم

$$\alpha - \beta + \gamma = 3$$

$$2\alpha + \beta - \gamma = 6$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 1$$

$$-2\times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\times -1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

KANDOO

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \frac{-2}{3} \qquad \beta = \frac{-2}{3}$$

$$\alpha + \cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{2}{3}} = 3 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\operatorname{Max} D_{\bar{u}} f = |\nabla f| = \sqrt{9 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{89}}{3}$$

دما در هر نقطه از یک فضا با رابطه

$T(x,y,z) = x^2 y - e^{z^3 - y^2}$

بدست می‌آید.

اگر در نقطه‌ی $(1,1,1)$ ایستاده باشیم در چه جهتی حرکت کنیم تا تغییرات دما احساس شود؟

$$T(x,y,z) = x^2 y - e^{z^3 - y^2}$$

$$\vec{\nabla} T = (2xy)\hat{i} + \left(x^2 + 2y e^{z^3 - y^2}\right)\hat{j} + \left(-3z^2 e^{z^3 - y^2}\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} T(1,1,1) = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

۱- با حرکت در جهت گرادیان بیشترین مقدار احساس دما را داریم

۲- با حرکت در جهت $-2\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

که عکس آن همان ∇T ـ بیشترین احساس سرمای کنیم

با حرکت در جهت عمود بر ∇T برادیان دما تغییرات دمایی احساس نمی‌شود. لذا چیزی درست است ضرب داخلی ∇T در آن عدد صفر شود.

مشتق سوی $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x-y} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = 0 \end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ و در جهت بردار $\bar{u} = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}$ کدام است؟

$$D_{\bar{u}} f = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

u_1 و u_2 بردارهای یکه هستند که باید این‌ها را یکه کنیم

$u = \frac{1}{2} i - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} \xrightarrow{\text{یکه}} \frac{u}{|u|} =$

$$= \frac{\frac{1}{2} i - \frac{\sqrt{3}}{2} j}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{u_1} i \underbrace{- \frac{\sqrt{3}}{2}}_{u_2} \hat{j}$$

$$D_u(0,0) f = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(0 + t \times \frac{1}{2}, 0 + t \times -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - f(0,0)}{t}$$

$$D_u f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\underbrace{\frac{t}{2}}_{x}, \underbrace{\frac{-t\sqrt{3}}{2}}_{y}\right) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{t}{2} - -\frac{t\sqrt{3}}{2}} - \cancel{f(0,0)}}{t}$$

$$D_u f = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^2}{4} + \frac{3t^2}{4}}{t\left(\frac{t}{2} + \frac{t\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{3}} \times \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}(1-\sqrt{3})}{-\cancel{2}}$$

$$= \sqrt{3} - 1$$

$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times f) = 0$ دیورژانس کرل یک تابع صفر

$\bar{\nabla} \times (\nabla f) = 0$ کرل گرادیان یک تابع صفر

$\bar{\nabla} \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$ لاپلاسین

$\nabla \times (\bar{\nabla} \cdot f) =$ وجود ندارد چون

حاصل $\nabla \cdot f$ اسکالر هست کرل برای برداری ها

خروجی یک تابع برداری یک اسکالر یعنی عدد خروجی می دهد حال داریم:

if $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{f} > 0 & \text{در حال واگرایی خطوط میدان} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{f} < 0 & \text{در حال همگرایی خطوط میدان} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 0 & \text{خطوط میدان موازی} \end{cases}$

← میدان تراکم ناپذیر است

if $\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{f} \neq 0 & \text{چرخشی} \\ \vec{\nabla}\times\vec{f} = 0 & \text{غیرچرخشی} \end{cases}$

حال کمی ...

اگر ما یک تابع اسکالر را ضرب کنیم در $\vec{u}$ یک بردار

دیورژانس $\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{u})$ را نخواهد چیست؟

چون φ یک اسکالر است ما با در صورت گرادیان روی φ اثر نمی گذارد حال در $\vec{u}$ ضرب داخلی

$$\bar{\nabla}(\varphi\bar{u}) = \bar{\nabla}\varphi\cdot\bar{u} + \varphi\,\bar{\nabla}\cdot\bar{u}$$ می‌شود:

گرادیان f

دیورژانس $\bar{u}$

مثال: با تعریف بردار $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ حاصل $\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{r}{|r|}\right)$ کدام است؟

$$\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{r}{|r|}\right) = \nabla\cdot\left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\nabla\cdot\left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{P}\hat{i} + \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{Q}\hat{j} + \underbrace{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{R}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} =$$

$$= \frac{1\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{?}} =$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\dfrac{\cancel{x^2} + y^2 + z^2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}$$

تا بل بقیه هم است برمشتقات :

$$I = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} =$$

$$= \frac{y^2+z^2+x^2+z^2+y^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{2\,\cancel{(x^2+y^2+z^2)}}{\cancel{(x^2+y^2+z^2)}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} = \frac{2}{|r|}$$

KANDOO

مثال: با ترتیب $\bar{U} = (x\cos y)\hat{i} + (z^2 - y\sin x)\hat{j} + (xyz^2)\hat{k}$

حاصل $\bar{\nabla} \times U$ در نقطه $(\frac{\pi}{2}, 0, 2)$

کدام است؟

$$\bar{\nabla} \times \bar{U} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x\cos y) & (z^2 - y\sin x) & xyz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(xz^2 - 2z) - \hat{j}(yz^2 - 0)$$

$$+ \hat{k}(-y\cos x - x\sin y)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{U}(\frac{\pi}{2}, 0, 2) = \hat{i}(2\pi - 4) - \hat{j}(0)$$

$$\hat{k}(0 + 0) = (2\pi - 4)\hat{i}$$

مثال: با فرض $\alpha = x^2+y^2+z^2$ تابع $W = g(\alpha)$ هارمونیک باشد کدام گزینه درست است؟

$$\alpha = x^2+y^2+z^2 \longrightarrow w = g(\alpha) = g(x^2+y^2+z^2) \xrightarrow{\text{هارمونیک}} \nabla^2 W = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x\,g'(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2g'(x^2+y^2+z^2) + 2x\big(2x\,g''(x^2+y^2+z^2)\big)$$

$$= 2g'(\alpha) + 4x^2 g''(\alpha)$$

تابع مثل منی است نزدیکی اولی

$$\nabla^2 g(\alpha) \text{ or } W = \left(2g'(\alpha) + 4x^2 g''(\alpha)\right) +$$

$$\left(2g'(\alpha) + 4y^2 g''(\alpha)\right)$$

$$\left(2g'(\alpha) + 4z^2 g''(\alpha)\right) = 0$$

$$6g'(\alpha) + 4g''(\alpha)\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\alpha} = 0$$

$$\frac{6g'(\alpha)}{2} + \frac{4\alpha g''(\alpha)}{2} = 0 \quad \alpha$$

$$\Rightarrow 3g'(\alpha) + 2\alpha g''(\alpha) = 0$$

مثال : اگر φ تابعی اسکالر باشد بطوریکه

$\bar{\nabla}\cdot(\varphi \bar{\nabla}\varphi) = 10\varphi$, $|\nabla\varphi|^2 = 4\varphi$ دارا باشد

تابع φ کدام است؟

$$\bar{\nabla}\cdot(\underbrace{\varphi}_{\text{اسکالر}}\ \underbrace{\nabla\varphi}_{\text{بردار}}) = 10\varphi \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi + \varphi\,\bar{\nabla}\cdot\nabla\varphi = 10\varphi$$

$$\underbrace{\bar\nabla\varphi\cdot\bar\nabla\varphi}_{|\nabla\varphi|^2}+\varphi\,\underbrace{\bar\nabla\cdot\bar\nabla\varphi}_{\nabla^2\varphi}=10\varphi$$

$$4\varphi+\varphi\nabla^2\varphi=10\varphi$$

$$\varphi\nabla^2\varphi=6\varphi\Rightarrow\nabla^2\varphi=6$$

مثال: $u=\varphi(t)$. باشد تابع $t=x^2+y^2+z^2$

هرصورتی باشد لاپلاسین کدام است؟

با توجه به مثال قبلی هامرتب را حساب کردیم

شد: $3\varphi'(t)+2t\varphi''(t)=0$

$$\frac{3\varphi'(t)}{\varphi'(t)}+\frac{2t\varphi''(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}=-\frac{3}{2t}\xrightarrow{\int}\ln\varphi'(t)$$

$$=-\frac{3}{2}\ln t+c$$

KANDOO

$$\ln \varphi'(t) = \ln t^{-\frac{3}{2}} + \ln c$$

$$\ln \varphi'(t) = \ln c\,t^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow$$

$$\varphi'(t) = c\,t^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{\int}$$

$$\varphi(t) = c\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + k \longrightarrow$$

$$\varphi(t) = c\,\frac{1}{\sqrt{t}} + k$$

رویه $z = e^{-(x^2+y^2)}$ چند صفحه موازی

با صفحه xy دارد؟

$$f: z - e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\nabla f = 2x\,e^{-(x^2+y^2)}\,i + 2y\,(e^{-(x^2-y^2)})\,j$$

$$+(1)\,\hat{k}$$

KANDOO

چون صفحه xy است $z=0$ می‌شود

درنتیجه $\nabla f \parallel N$ باید شرط (۱) برقرار

شرط موازی شدن پس داریم

$$\begin{cases} 2x\left(e^{-(x^2+y^2)}\right)=0 \\ 2y\left(e^{-(x^2+y^2)}\right)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$z=e^{-(x^2+y^2)}$$

نقطه $(0,0,1)$ تماس برهم است.

مثال: مقدار مینیمم تابع $z=x^2+y^2$

مقید به معادله $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ کدام است؟

تمرین ۱۱) جواب

$$L = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \frac{\lambda}{a} = 0 \Rightarrow \lambda = -2ax$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \frac{\lambda}{b} = 0 \rightarrow 2y + \frac{-2ax}{b} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 2y - \dfrac{2ax}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{b}{2} \times \begin{cases} \dfrac{2}{a} y - \dfrac{2x}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} by - ax = 0 \\ bx + ay = ab \end{cases}$$

$$-b \begin{cases} -abx + b^2 y = 0 \\ abx + a^2 y = a^2 b \end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$(a^2+b^2)y = a^2 b$$

$$y = \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)}$$

$$by - ax = 0 \to b\frac{a^{\cancel{2}} b}{a^2+b^2} = \cancel{a}x$$

$$x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

$$z = x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^4}{a^4+b^4} + \frac{a^4 b^2}{a^4+b^4}$$

$$= \frac{a^2 b^2 \cancel{(a^2+b^2)}}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^2 b^2}{(a^2+b^2)}$$