در تابع $z=\dfrac{x^2y^3+xy-y}{x^2+y^2}$ در نقطه $(2,1)$ حاصل $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

$$z=\frac{x^2y^3+xy-y}{x^2+y^2} \Rightarrow$$ کل تابع همگن نیست

$$z=\underbrace{\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}}_{z_1}+\underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{z_2}-\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{z_3}$$

$\alpha=3$ $\qquad \alpha=0 \qquad \alpha=-1$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z_1+0\times z_2-(-1)z_3$$

$$=3\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}+0+\frac{y}{y^2+x^2}\Rightarrow (2,1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13}{5}$$

KANDOO

نقاط بحرانی و نوع آن را در توابع زیر را مشخص کنید.

$$z = x^2 + 3xy + y^2 - 7x - 8y + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 7 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

نقطه بحرانی

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad A$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 \quad B$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$\Delta = 9 - 4 > 0$$

نقطه زینی

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \quad C$$

نقاط بحرانی و نوع آنها $z=(x^4+y^4-4xy)^7+1$ کدام است؟

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 7(4x^3 - y)(x^4+y^4-\ xy)^6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \_\_\_\_\_\_$$

توان های فرد مقدار تغییر نمی دهد ولی توان های زوج تغییر قیافه و شکل می دهد. مواضع

به جای معادله فوق به فرم زیر برسیم.

$$z = x^4 + y^4 - \ xy + 1$$

بحرانی

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

KANDOO

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \rightarrow y = x^3 \\ y^3 - x = 0 \rightarrow (x^3)^3 - x = 0 \end{cases}$$

$$x^9 - x = 0 \rightarrow x(x^8 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 1 \\ x = -1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$\{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 \quad A \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4 \quad B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 \quad C$$

$$\Delta = B^2 - AC = 16 - 144x^2y^2$$

$(0,0) = \Delta = 16 - 0 > 0$ زین

$(1,1) = \Delta = 16 - 144 < 0$ min

$$A = 12x^2 = 12 > 0$$

$(-1,-1)\begin{cases}\Delta = 16 - 144 < 0 \\ A = 12x^2 = 12 > 0\end{cases} \rightarrow$ min

---

هرگاه تابعی دارای دسته بندی با توان فرد باشد به شرط آنکه خارج از دسته بندی متغیر دیگری حضور نداشته باشد برای یافتن نقاط بحرانی در نوع آنها فقط همان دسته توان فرد را در نظر بگیریم.

در تابع $Z = x^3 + y^3 - 63(x+y) + 12xy$

مقدار max تابع کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 63 + 12y \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 63 + 12x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y = 21 \\ y^2 + 4x = 21 \end{cases}$$

$$x^2 + 4y - y^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + 4y - 4x = 0$$

$$(x-y)(x+y) + 4(y-x) = 0$$

$$(x-y)(x+y-4) = 0 \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$z = x^4 + y^2 - 2y$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \end{cases} \boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}}$$

$(0,1)$ (5) 5

KANDOO

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 \quad A \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \quad C$$

$$\Delta = B^2 - AC$$

$$\Delta = 0 - 2 \times 12x =$$

$$\Delta = -24x^2$$

$$\Delta(0,1) = -24(0) = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

نقطه تحلیلی داریم

$$z = x^4 + y^2 - 2y$$

$$z = x^4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 =$$

مربع کامل

$$z = \underbrace{x^4}_{\text{مثبت}} + \underbrace{(y-1)^2}_{\text{مثبت}} - 1$$

$$z(0,1) = 0 + (1-1)^2 - 1 = -1$$

$$\forall (x,y) \neq (0,1) \Rightarrow z(x,y) > -1$$

مثال : نقطه بحرانی و نوع آن در ضابطه
$z = x^4 - 4x^2y + 3y^2$ کدام است ؟

نقطه $(0,0)$ برای تابع فوق چه نقطه‌ای است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x^3}{4} - \frac{8xy}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} ① \; x^3 - 2xy = 0 \\ ② \; -2x^2 + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x^2 + 6y = 0$$

$$y = \frac{2x^2}{3} \xrightarrow{②①} x^3 - 2\left(\frac{2x^2}{3}\right)x = 0$$

$$x^3 - \frac{4x^3}{3} = -\frac{1}{3}x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 0 \longrightarrow \text{نقطه بحرانی } (0,0)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y \; Ⓐ \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -8x \; Ⓑ$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \; Ⓒ$$

$$\Delta = B^2 - AC = 64x^2 - 6(12x^2 - 8y)$$

① $(0,0) \Rightarrow \Delta = 0$ تحلیلی بررسی باید بشود

$$z = x^4 - 4x^2y + 3y^2$$

در حال حاضر می توان x و y ها را از هم جدا

کرد و بعد از هم مربع کامل کنیم ولی تکنیک دیگری

می زنیم

$$z = x^4 - 4x^2y + 3y^2 + y^2 - y^2$$

$$= (x^2 - 2y)^2 - y^2 \rightarrow$$ مثبت

مثبت

$$z = x^4 + 4xy + \bigcirc$$

توان ② اولی — دو برابر اولی در دومی — توان ② دومی

خود x^2 — $2x^2(-2y)$ — $4y^2$

$$z(0,0) = 0$$

$\forall (x,y) \neq (0,0) \Rightarrow z$ ممکن $z+$

ممکن $z < 0$

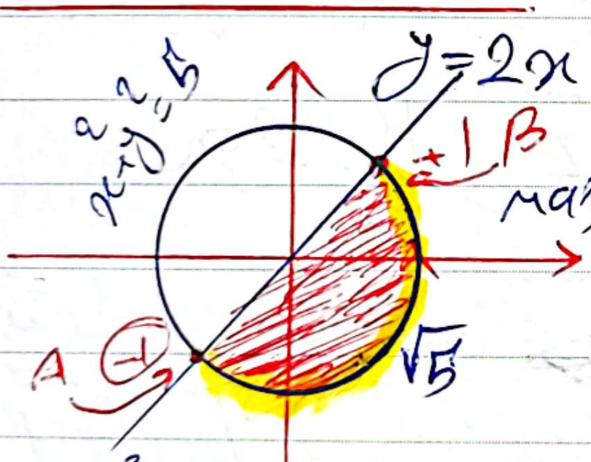
در حالت هر دو مثبت است اما اگر بالا بگیریم که در سهمی

است گاهی مثبت به مانند در سهمی است گاهی منفی.

که این نقطه به حالت زینی گویند.

مثال: Min و Max تابع $z=x^2+y^2-2x$ در ناحیه

$$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 5,\ y\leq 2x\}$$



در ناحیه‌ای که رسم کرده‌ایم نیاز داریم به max, min تابع هستیم.

$$z=x^2+y^2-2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y=0$$

$$2x=2 \Rightarrow x=1 \qquad y=0$$

چون عضو ناحیه D است $(1,0)\in D$ نقطه بحرانی

چون حدود ناحیه محصوری که رسم کرده‌ایم باشد

می‌بایست در Z بگذاریم:

$Z(1,0) = -1$

حال اینجا دو نوع مرز داریم:

① دایره

$x^2+y^2=5$ جایگذاری y $\quad y^2=5-x^2$

② خط

$Z=x^2+y^2-2x$ برازش $Z=\cancel{x^2}+5-\cancel{x^2}-2x$

معادله اصلی $Z=5-2x$

بزرگ متغیره

$Z=5-2x$ $\longrightarrow$ رفتارش در سمت فضا داره حرکت

حالت

این بخش کل دایره است و ناحیه فضا را کشیده

حال نقاطی که خط دایره را قطع کرده‌اند

شامل

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2x \end{cases} \longrightarrow x^2+2x=5 \quad x=\pm 1$$

$z=5-2x \; ; \; x\in[-1,\sqrt{5}]$

$z'=0 \Rightarrow -2=0$ غیرممکن

$x=-1 \to z=7$

$x=\sqrt{5} \to z=5-2\sqrt{5}$

مرزها $\Rightarrow y=2x$

$z=x^2+y^2-2x \to x^2+4x^2-2x$

$z=5x^2-2x$

$z=5x^2-2x \; ; \; x\in[-1,1]$

$z'=0 \qquad 10x-2=0 \qquad x=\frac{1}{5}$

$x=\frac{1}{5}\in[-1,1]$

$x=-1 \to z=7 \qquad x=1 \to z=3 \qquad x=\frac{1}{5} \to z=-\frac{1}{5}$

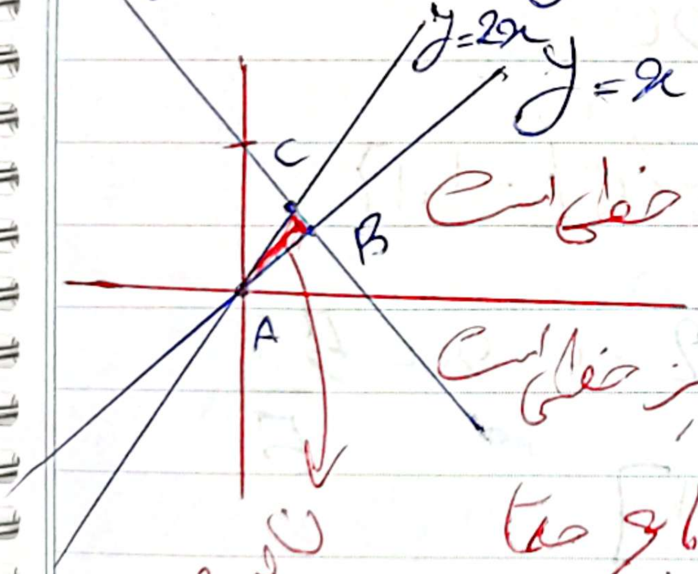
$$\begin{cases} Z_{min} = -1 \\ Z_{max} = 7 \end{cases}$$

مثال: مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق $z = 2x - 3y + 1$

در ناحیه‌ای به مرز ... را $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1 , y \geq x\}$

$y = 1 - x \quad , \quad y \leq 2x$

کدام است؟



چون تابع در تعاریف ما خطی است

و مرزهای ناحیه ما نیز خطی است

مقادیر اکسترمم های تابع حتما

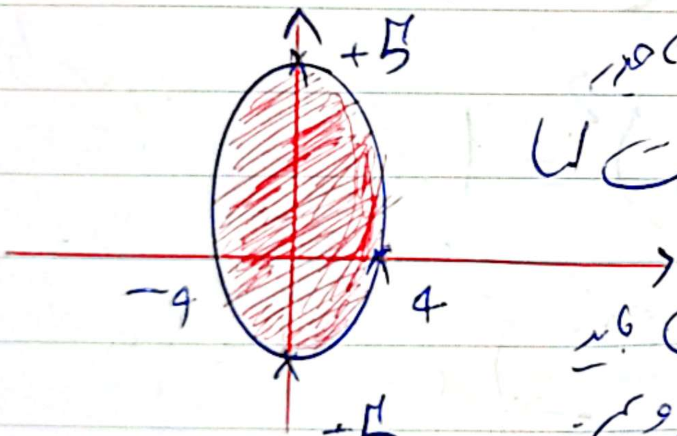
در یکی از نقاط گوشه ای ناحیه تشکیل

می شود

$$Z = 2x - 3y + 1 \begin{cases} \xrightarrow{A(0,0)} Z = 1 \quad \text{Max} \\ \xrightarrow{B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} Z = \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})} Z = -\frac{1}{3} \quad \text{min} \end{cases}$$

مقادیر اکسترمم تابع $Z = 2x - 3y + 1$ روی ناحیه

$D\{(x,y) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1\}$ کدام است؟



چون تابع خطی است لذا حد
حذر

خود ناحیه خطی نیست باید

به سراغ نقاط ابتدائی برویم

$$Z = 2x - 3y + 1$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{غیرممکن}$$

مرز $\Longrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

بله

مرز در این شکل کل تابع ها را در بر می گیرد پس مشکلات مسئله قبلی را نداریم.

فرم ها مجموع (2) مربع کامل نیز است (1)

شد $\longrightarrow$ مرز یک تابع با (Sin) و (Cos) داریم:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \cos\alpha \\ \dfrac{y}{5} = \sin\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 4\cos\alpha \\ y = 5\sin\alpha \end{cases}$$

$$z = 8\cos\alpha - 15\sin\alpha + 1$$

$$-\sqrt{A^2+B^2} \leq A\sin\alpha \pm B\cos\alpha \leq \sqrt{A^2+B^2}$$

$$-\sqrt{289}+1 \leq \underbrace{8\cos\alpha - 15\sin\alpha} \leq \sqrt{289}+1$$

$$-13 \leq z \leq 15$$

هرگاه مجموع دو مربع کامل برابر 1 شد در هر مسئله ای که باشیم مجازیم آن ها را با $\cos\alpha , \sin\alpha$ شبیه سازی کنیم.

$$(x-1)^2+4(y+2)^2=9 \xrightarrow{\div 9}$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{4(y+2)^2}{9}=1$$

$$\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\left(\frac{2(y+2)}{3}\right)^2=1$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\cos\alpha \\ \frac{2}{3}(y+2)=\sin\alpha \end{cases}$$

KANDOO

مثال بیشترین مقدار $f=2x-y+3z+1$

با شرط $x^2+y^2+z^2=28$ کدام است؟

تابع لاگرانژ: $L=(2x-y+3z+1)+\lambda(x^2+y^2+z^2-28)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=-1+2\lambda y=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=3+2\lambda z=0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-28}_{\text{شرط مسئله یا قید}}$$

نکته ③ صفر $\begin{cases} x=-2y \\ z=-3y \end{cases}$ $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$ راه حل خوب

$x^2+y^2+z^2=28 \rightarrow (-2y)^2+(y^2)+(-3y)^2$

$=28 \Rightarrow 4y^2+y^2+9y^2=28 \rightarrow$

$\rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

$y=\pm\sqrt{2} \begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ z=-3\sqrt{2} \end{cases}$

$f=2x-y+3z+1 \longrightarrow f=2(-2\sqrt{2})-(\sqrt{2})$

$+3(-3\sqrt{2})+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y,z)=-4\sqrt{2}-\sqrt{2}-9\sqrt{2}+1$

$\Rightarrow 1-14\sqrt{2} \rightarrow$ Min

when $y=-\sqrt{2} \begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=3\sqrt{2} \end{cases}$

af $\rightarrow f(x,y,z)=4\sqrt{2}+\sqrt{2}+9\sqrt{2}+1=$

$1+14\sqrt{2} \rightarrow$ Max

مثال: کمترین مقدار $f = x^2 + y^2$ با شرط

$xy^2 = 54$ کدام است؟

راه حل اول: مسائل بهینه‌سازی

$xy^2 = 54 \longrightarrow y = \frac{54}{x^2}$

$@f \longrightarrow f = x^2 + \frac{54}{x^2} = \frac{x^4 + 54}{x^2}$

و....

راه حل ② لاگرانژ

$L = x^2 + y^2 + \lambda(xy^2 - 54)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2xy\lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy^2 - 54 = 0$

راه حل ۳

$$\begin{cases} xy^2 = 54 \\ f = x^2 + y^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x^2 = t \\ y^2 = s \end{matrix}$$

$$\begin{cases} t\sqrt{s} = 54 \\ f = t + s \end{cases} \xrightarrow{\text{نکته ④}} \frac{t}{1} = \frac{s}{\frac{1}{2}}$$

$$t = 2s$$

$$t \times \sqrt{s} = 54 \longrightarrow 2s\sqrt{s} = 54$$

$$s\sqrt{s} = 27 \xrightarrow{2} s^3 = 27^2$$

$$s = 3^2 = 9$$

$$t = 2s = 18 \qquad f = t + s$$

$$f_{min} = 27$$

دما روی سطح کره $x^2+y^2+z^2=14$ از رابطه

$T = xy^2z^4$ بدست می‌آید، ماکزیمم دما روی سطح

کره چقدر خواهد بود؟

راه حل اول $\rightarrow$ تابع لاگرانژ

$$L = xy^2z^4 + \lambda(x^2+y^2+z^2-14)$$

به چهار معادله چهار مجهول می‌رسیم که در دستور داریم

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial L}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

حال برای این که تنوع نشان بدهیم که مسئله

چطور می‌شود حل کرد ما نیز از هم استفاده کنیم.

$$x^2+y^2+z^2 \to \begin{cases} x^2=t \\ y^2=r \\ z^2=s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+r+s=14 \\ T=\sqrt{t\times r\times s^2} \end{cases} \longrightarrow$$

$$2=\begin{cases} \dfrac{t}{\frac{1}{2}}=\dfrac{r}{1}=\dfrac{s}{2} \end{cases} \begin{cases} r=2t \\ s=4t \end{cases}$$

$$t+r+s=14 \to t+2t+4t=14$$

$$t=2 \to \begin{cases} r=4 \\ s=8 \end{cases}$$

$$T=\sqrt{t\times r\times s} \Rightarrow T_{max}=\sqrt{2\times 4\times 8^2}=$$

$$256\sqrt{2}$$

کمترین فاصله خم فضایی $\underbrace{z^2 = 1 + xy}_{\text{اکسترمم می‌خواد اعمال شود}}$

تا مبدأ مختصات کدام است؟

فاصله تا مبدأ $\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda(z^2 - xy - 1)$$

در اکسترمم ها مشروط یا همان مسائل

بهینه سازی با قید تمامی توابع غیر از sin و

cos یا کلا مثلثاتی ها عامل هایی را ایجاد

می‌کنند که بی‌شمار ریشه به ما می‌دهد اما مثلاً رادیکال

یا ln یا نمایی عبارت داخل خود را آرگومان

برای ما مشکلی ایجاد نمی‌کند و شرط خود را

آرگومان است که اکسترمم به ما می‌دهد.

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy + 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda y = 0 \rightarrow y = \dfrac{2x}{\lambda} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - x\lambda = 0 \rightarrow 2\left(\dfrac{2x}{\lambda}\right) - x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + 2z\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = z^2 - xy + 1 = 0$$

$$x\left(\frac{4}{\lambda} - \lambda\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{4}{\lambda} - \lambda = 0 \end{cases}$$

@ $\dfrac{\partial L}{\partial x}(x=0) = 2(0) - \lambda y = 0$

$$y = 0$$

@ $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = z^2 - 0 + 1 \Rightarrow z = \pm 1$

مثال : ماکزیمم $f(x,y,z) = x+2y+3z$ بر اشتراک

رویه های $x^2+y^2=1$ ، $x-y+z=1$

چیست؟ مسئله دو شرطه

در جهت اکسترمم های مشروط دارای دو شرط

باشد مجبوریم با تابع لاگرانژ حل کنیم.

تابع لاگرانژ $= L = x+2y+3z+\lambda(x-y+z-1)+$
$\mu(x^2+y^2-1)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1+\lambda+2\mu x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2-\lambda+2\mu y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 3+\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x - y + z - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 3 + 2\mu x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - 3 + 2\mu y = 0$$

$$\begin{cases} \mu x = 1 \\ \mu y = -\frac{5}{2} \end{cases} \longrightarrow \frac{x}{y} = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{2}{5} \longrightarrow x = -\frac{2}{5} y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \longrightarrow \frac{4}{25} y^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{29}{25} y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{25}{29} \longrightarrow y = \pm \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{\sqrt{29}} \longrightarrow x = -\dfrac{2}{5} \times \dfrac{5}{\sqrt{29}} = \dfrac{-2}{\sqrt{29}} \\[2ex] y = -\dfrac{5}{\sqrt{29}} \longrightarrow x = -\dfrac{2}{5} \times -\dfrac{5}{\sqrt{29}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{29}} \\[2ex] y = \dfrac{5}{\sqrt{29}} \end{cases} \Rightarrow x - y + z = 1$$

$$\longrightarrow -\frac{7}{\sqrt{29}} + z = 1 \longrightarrow z = 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}$$

$$f = x + 2y + 3z \longrightarrow$$

$$-\frac{2}{\sqrt{29}} + 2 \times \frac{5}{\sqrt{29}} + 3\left(\frac{21}{\sqrt{29}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{29}{\sqrt{29}} \longrightarrow 3 + \sqrt{29}$$

KANDOO

CamScanner

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{29}} \\ y = \dfrac{-5}{\sqrt{29}} \end{cases} \xrightarrow{x-y+z=1} \frac{7}{\sqrt{29}} + z = 1$$

$$z = 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}$$

$$f = x + 2y + 3z = \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{-10}{\sqrt{29}} + 3 - \frac{21}{\sqrt{29}}$$

$$= 3 - \frac{29}{\sqrt{29}} = \underbrace{3 - \sqrt{29}}$$