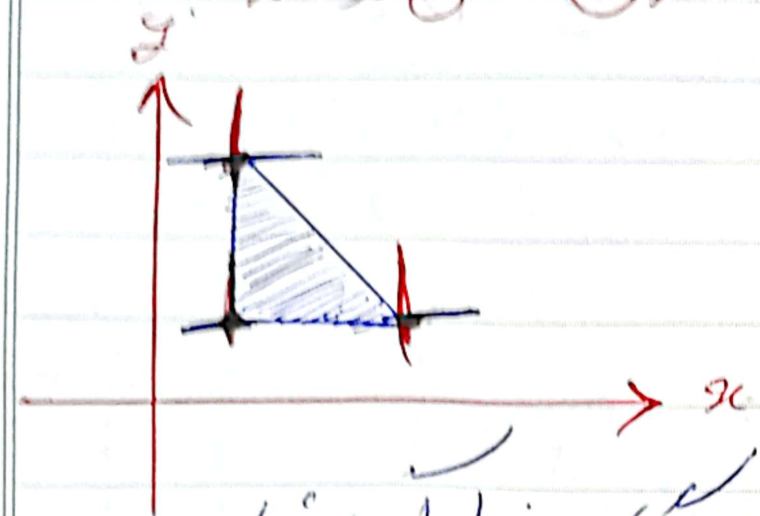
جلسه چهارم: انتگرال های دوگانه



زیرا انتگرال های دوگانه نقاط دوشاخه‌ای برای

ما خیلی مهم است در انتگرال. حال برای این نقاط

یک خط موازی با محور x بکش حال چون محور

x ها را قطع نکرده است :

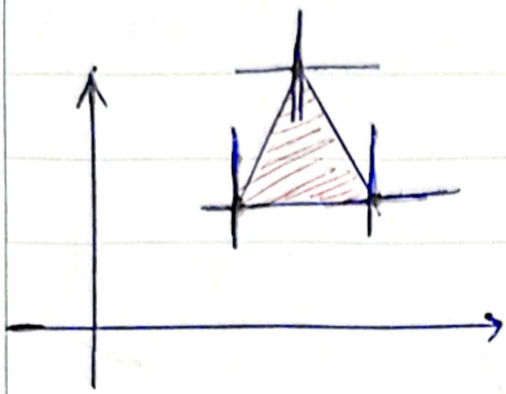
$x \rightarrow$ منتظم

$y \rightarrow$ منتظم

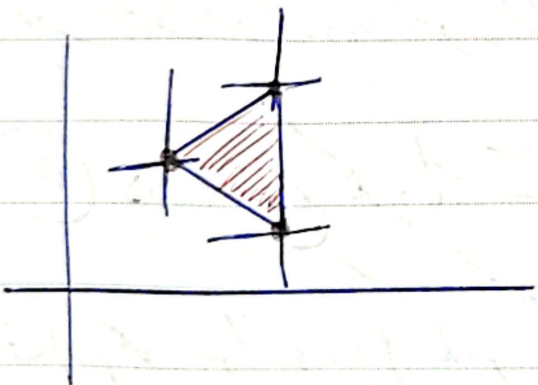
حال یه موازی با y بکش اگر

دو بار از داخل ناحیه عبور نکرد منتظم است

حال شکلا شکل دیگر در ناحیه xy

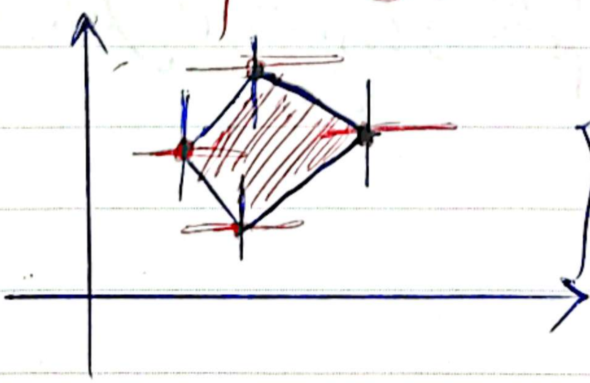


$$\begin{cases} x \rightarrow \text{منتظم} \\ y \rightarrow \text{نامنتظم‌اند} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \rightarrow \text{نامنتظم} \\ y \rightarrow \text{منتظم} \end{cases}$$

نقاط رو شناسایی خیلی مهم است.



$$\begin{cases} x \rightarrow \text{نامنتظم} \\ y \rightarrow \text{نامنتظم} \end{cases}$$

زیرا هر درخت ما موازی محور عمودی که رسم شده های
سطح را که کردیم درون ناحیه را قطع می‌کند.

$$\int_{x}^{0}\int_{\square}^{\triangle} \bigcirc \, dx \, dy$$

ترتیب انتگرال گیری از داخل به بیرون است یعنی
حق تقدم به dx و بعد به dy می‌رسد.

حال در حالت در خیلی از مسائل هندسی یا اینکه
به جای $dx\,dy$ یا $dy\,dx$ ، dA می‌گذارند

حال ما باید تشخیص دهیم کدام یک ارجح‌تر است.

حال برای این که بتوانیم انتگرال گیری کنیم
باید ببینیم کدام یک متغیر وجود ندارد و نسبت به آن
انتگرال گیری کنیم

مثال

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^2 y \, dA$$

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^2 y \, dy \, dx$$

چون در حدود انتگرال x دیده شده پس
ابتدا بر dy ارجح تر است پس $dy\,dx$
انتگرال گیری می کنیم

$$I = \int_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)_{x^2}^{x} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \left(x^2 - x^4\right) dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)_0^1$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{35}$$

در ابتدا انتگرال گیری برای نواحی که دیگر برای ما
تعیین شده و نشان داده اند باید ابتدا منتظم یا نامنتظم بودن
نسبت به محور عمودی برای خودمان تعیین کنیم.
سپس اگر هر کدام از جهات منتظم بود انتگرال
گیری برای آن جهت حق تقدم دارد نه نامنتظم
حال برای انتگرال سمت چپ ما بیرونی هم می‌شود
حتماً حتماً باید حدود عدد باشد. یعنی همان تابع
یا محدودی که نامنتظم بود باید حدود انتگرال عدد شود.
حال برای انتگرال منتظم الان گیری باید
کنیم در جهت عمودی برای a و در جهت
افقی الان برای b است.

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} y\, e^{x^2}\, dx\, dy$$

حل: چون باند انتگرال ناحیه برحسب y است

پس نسبت به اول انتگرال می‌گیریم.

چون در توان عبارتی داریم غیرخطی است

فرایندی بسیار پیچیده‌ای داریم برای حل این انتگرال

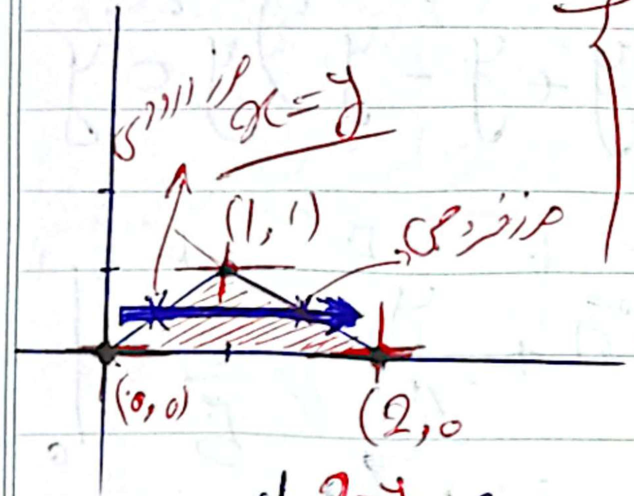
ولی اگر بیاییم تغییر ترتیب دهیم انتگرال نسبت

به x بسیار ساده است.

مثال: حاصل انتگرال $I=\iint_D xy\, dy\, dx$ که در آن

D ناحیه مثلثی به رأس های $(0,0)$ ، $(1,1)$ ،

$(2,0)$ باشد کدام است؟



$x \to$ منتظم

$y \to$ نامنتظم

$x+y=2$

$y=2-x$

$$I=\int_0^1\int_y^{2-y} xy^2\,dx\,dy$$

حال چون ناحیه نامنتظم داریم پس باید در راستای x

انتگرال بگیریم. حال باید برحسب متغیرهای y

منتظم بنویسیم

$$\begin{cases} x=y \\ x=2-y \end{cases}$$

$$I=\int_0^1\int_y^{2-y} xy^2\,dx\,dy$$

$$I=\int_0^1 y^2\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_y^{2-y}\,dy$$

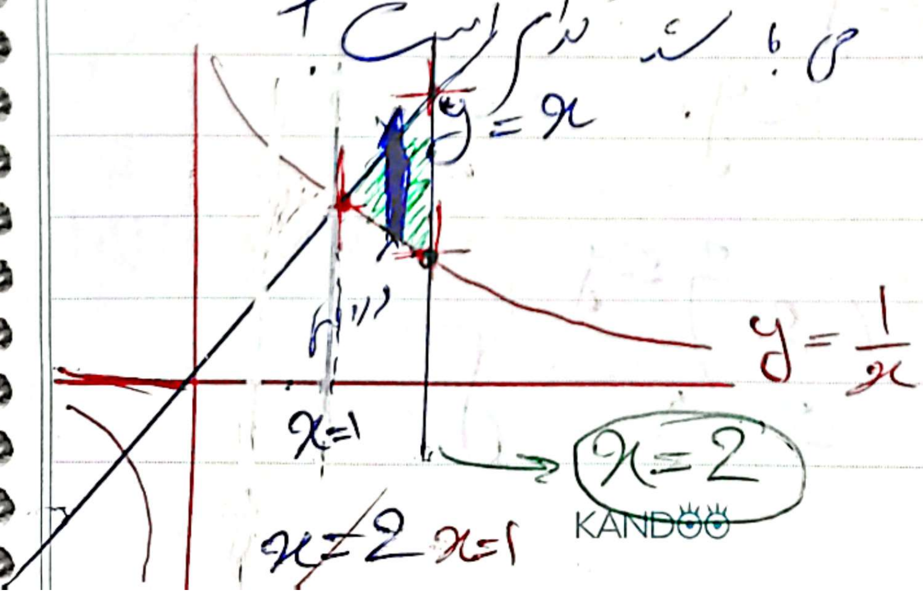
$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 (4-4y+y^2-y^2)\,y^2\,dy$$

$$I = \frac{1}{2}\left(4\frac{y^3}{3} - y^4 + \cancel{\frac{y^5}{5}} - \cancel{\frac{y^5}{5}}\right)\Big|_0^1$$

$$I = \frac{1}{2}\times 4\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\times\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

مثال: $I=\iint_D x^2 y\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور بین منحنی $y=\frac{1}{x}$ و خطوط $y=x$ و $x=2$ می باشد کدام است؟



خطوط منحنی $y=x$ و $y=\frac{1}{x}$ همدیگر هم دیگر
را قطع کرده اند که آن ها $x=1$ است بین $y=2$
که تفاوت می کند که به شکل قبلی آوردیم.

$$\begin{cases} x \rightarrow \text{نا متغیر} \\ y \rightarrow \text{متغیر} \end{cases}$$

$$I=\int_{1}^{2}\int_{1/x}^{x} x^2 y \, dy \, dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{1}^{2} x^2 \left(y^2\right)\Big|_{1/x}^{x} dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int^{1} x^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}-x\right]_{1}^{2}$$ صفحه بعد

KANDOO

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{32}{5} - 2\right) - \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{26}{5}\right) = \frac{13}{5}$$

حاصل $I = \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy\, dx$ کدام است؟

$x=\pi$

$$I = \int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, dy\, dx$$

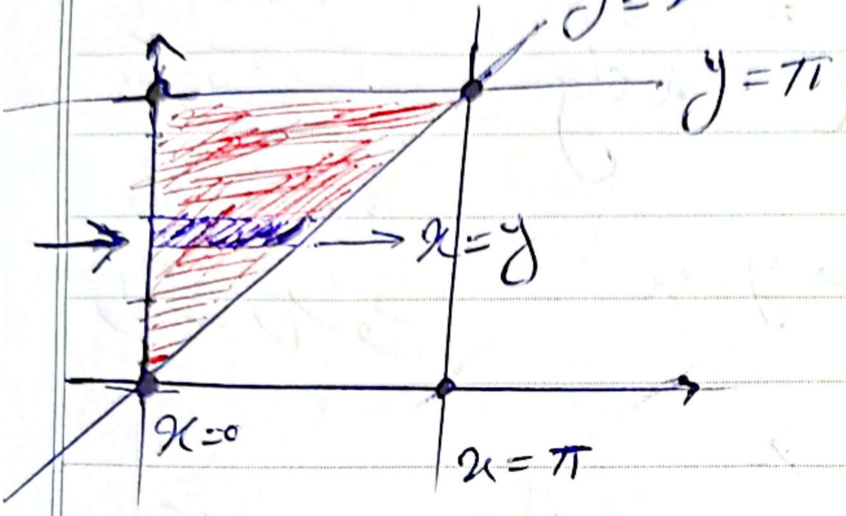
$y=\pi$

$x=0$

$y=x$

چیزی که سوال طرح شده باید dy شروع
کنیم ولی خیلی سخت است و پیچیده
می شود. حال جابجایی دیفرانسیل ها رو کن.

$$I = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{y} \frac{\sin y}{y} \, dx \, dy$$



خب چون مرز را بالای داده پس مثلث بالایی
میشود ناحیه ما

$$\begin{cases} x \to \text{متغیر} \\ y \to \text{متغیر} \end{cases}$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{y} \frac{\sin y}{y} \, dx \, dy$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin y}{y} (x) dy \Big|_{0}^{y} =$$

$$I = \int_{0}^{\pi} \sin y \, dy = -\cos y \Big|_{0}^{\pi} = -(1-1) = 2$$

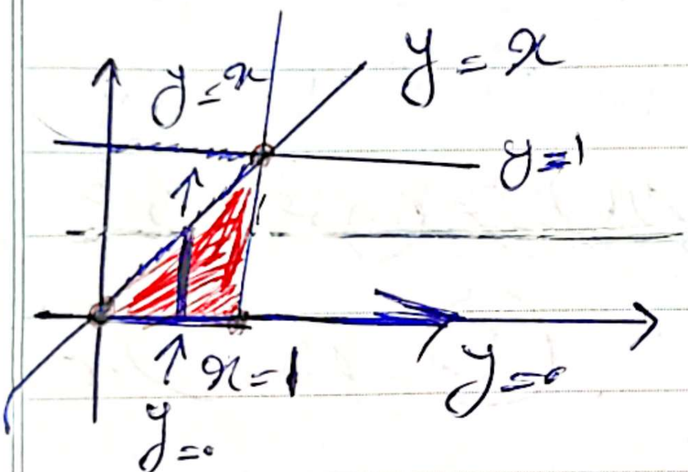
KANDOO

حاصل انتگرال $I=\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ کدام است؟

$$I=\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{x^2}\,dx\,dy$$

$y=1$ $x=1$ $y=0$ $y=x$

← تغییر ترتیب با این نقاط باعث می‌شود



$x \to$ مستقل

$y \to$ متغیر

$$I=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$I=\int_0^1 e^{x^2}(y)\Big|_0^x\,dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\,e^{x^2}(x)\,dx$$

$$I = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

حاصل $I = \int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\frac{\pi}{2}=x} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx\, dy$ کدام است؟

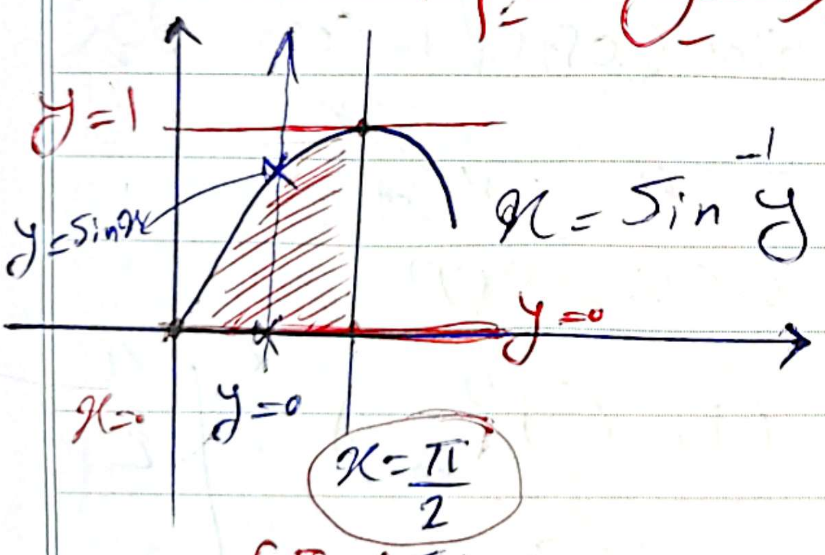
$y=1 \leftarrow y=0 \leftarrow 0 \qquad \sin^{-1} y \rightsquigarrow x = \sin^{-1} y$

$$I = \int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\frac{\pi}{2}=x} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx\, dy$$

$y=0 \leftarrow 0 \qquad \sin^{-1} y = x \Rightarrow y = \sin x$

روش رفتن به dx زحمتناک است

پس باید ترتیب دیفرانسیل دهیم



متغیر $\leftarrow x$

متغیر $\leftarrow y$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\,(y)\Big|_0^{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{\frac{1}{2}\sin 2x}{\underbrace{\cos x \sin x}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

or $$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin x \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

مشتق

این عبارت ریشه است

$$= I = -\frac{1}{2} \frac{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

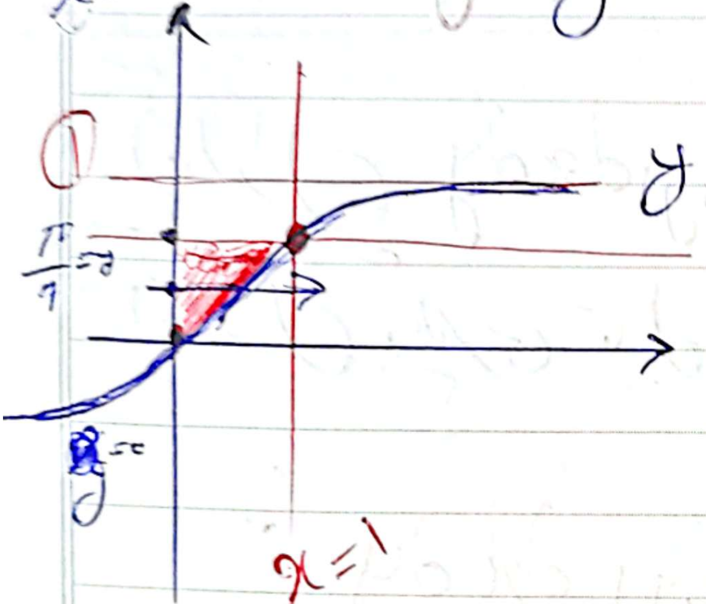
$$= I = -\frac{1}{3}\left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{3}\left(1 - 2\sqrt{2}\right)$$

$$I=\int_0^1\int_{\operatorname{Arctan}x}^{\frac{\pi}{4}} y\cot y \, dy\,dx$$ حاصل انتگرال

کدام است؟

$$I=\int_{x=0}^{1}\int_{\operatorname{Arctan}x=y}^{\frac{\pi}{4}=y} y\cot y \, dy\,dx$$

تغییر ترتیب



$x \rightarrow$ متغیر

$y \rightarrow$ ثابت

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\tan y} y\cot y \, dx\,dy$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\cot y \,(x)\Big|_0^{\tan y} dy$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\cot y \tan y \, dy$$

KANDOO

1

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{32}$$

انتگرال $\quad I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

انتگرال ... تابع ... f است

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \int_{\sqrt{y}=x}^{2-y=x} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\sqrt{y} = x \longrightarrow y = x^2$$

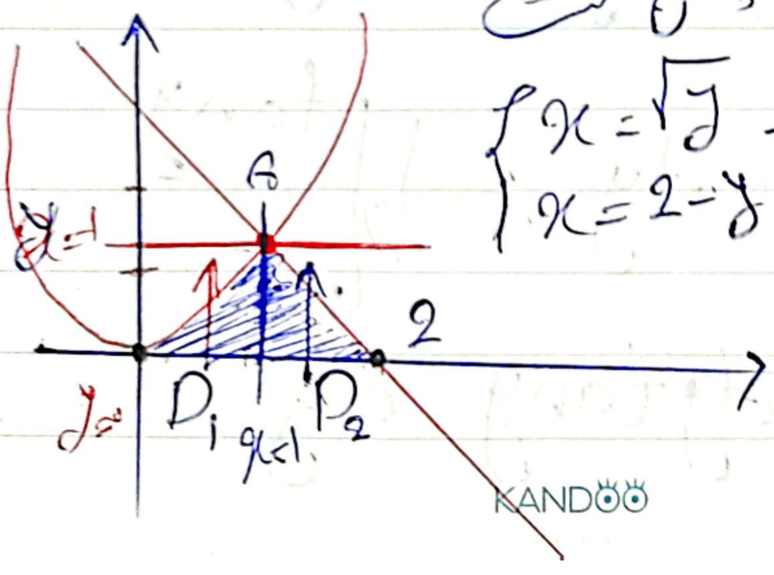
تغییر ترتیب داده است

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \to x^2 = y \\ x = 2 - y \to x = 2 - x^2 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2)$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$



چون برحسب y می‌خواهیم تغییر دهیم

$x^2 = y$ را می‌کشیم

$$\begin{cases} x \to \text{منظم} \\ y \to \text{نامنظم} \end{cases}$$

چون نوع سوال به شکلی است که نمی‌توان تغییر ترتیب داد به علت منظم و نامنظم بودن پس باید به زیر ناحیه بشکنیم. حال نقطه ای که باعث نامنظم شدن اتصال شده آن نقطه را یک جا باشد.

$$I = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

برای محاسبه حجم یک رویه میتوان به انتگرال

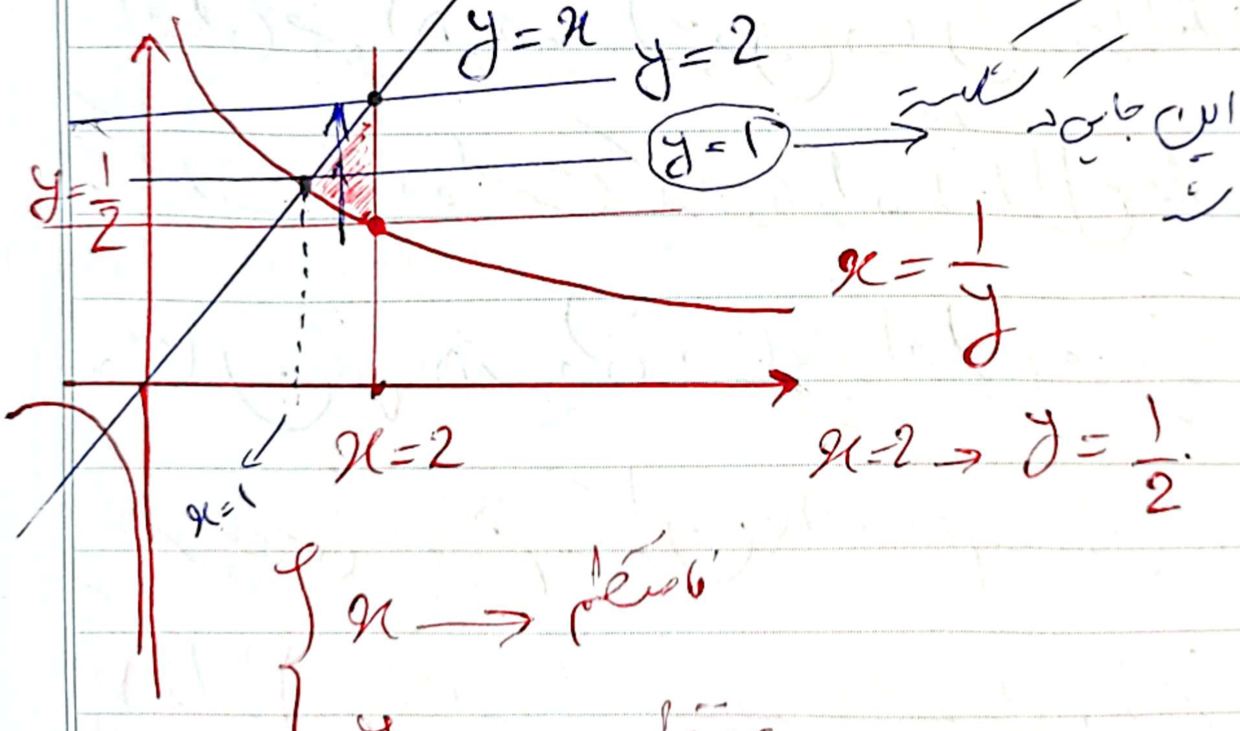
مکرر نسبت به خود رو کرده‌ایم برای محاسبه حجم از دو انتگرال

دوگانه می‌توان استفاده کرد.

$y=1 \quad x=2$

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{1}^{2}\int_{y}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$y=\frac{1}{2} \quad x=\frac{1}{y} \quad y=1 \quad y=x$



$x=2 \rightarrow y=\frac{1}{2}.$

$\begin{cases} x \rightarrow \text{نامنظم} \\ y \rightarrow \text{منظم} \end{cases}$

$$V=\int_{1}^{2}\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$$

وقتی که انتگرال دوگانه به صورت مجموع انتگرال های مکرر بیان می‌شود از حدود مرزهای ناحیه اصلی محو خواهد بود. اما چون در آن نقطه انتگرال شکسته شده است که خود را در انتگرال مکرر نشان می‌دهد ولی در ناحیه اصلی مرز نیست)

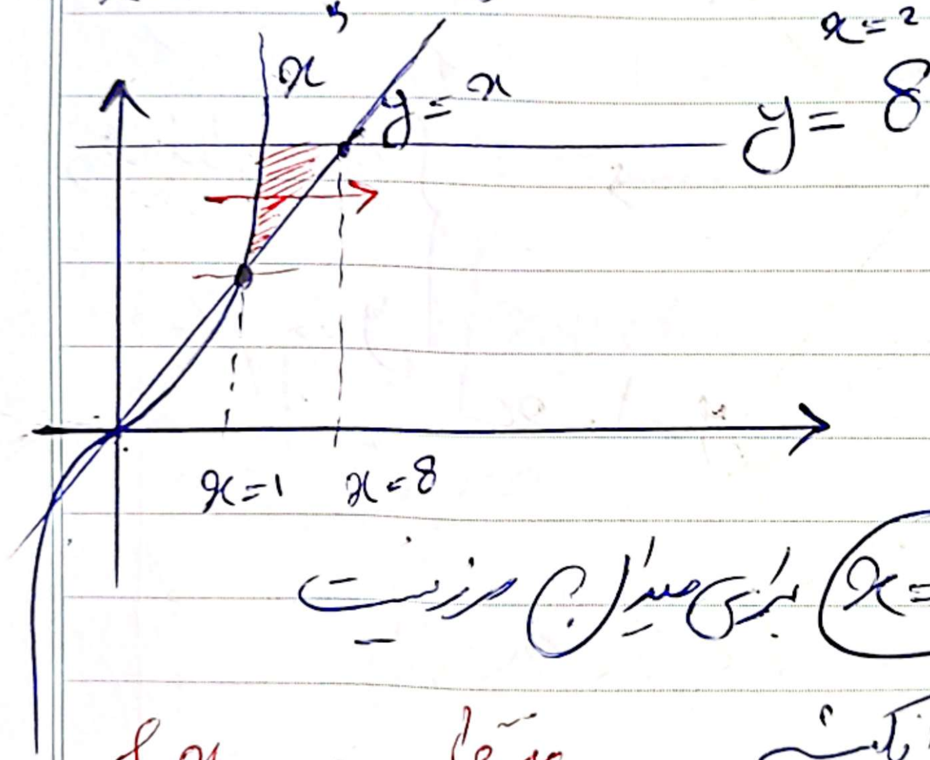
هر مرزی که هم به عنوان بالا و هم به عنوان پایین انتگرال حضور داشته باشد برای ناحیه اصلی دیگر مرز نخواهد بود.

انتگرال مکرر زیر را به انتگرال مکرر دیگری قابل بیان است؟

$x=2$ ، $y=x^3$

$$I=\int_1^2\int_x^{x^3} f(x,y)\,dy\,dx+\int_2^8\int_x^8 f(x,y)\,dy\,dx$$

$x=1$ ، $y=x$ ، $x=2$ ، $y=x$



چون $x=2$ بخشی میان مرز نیست اصلا آن را نکشیم.

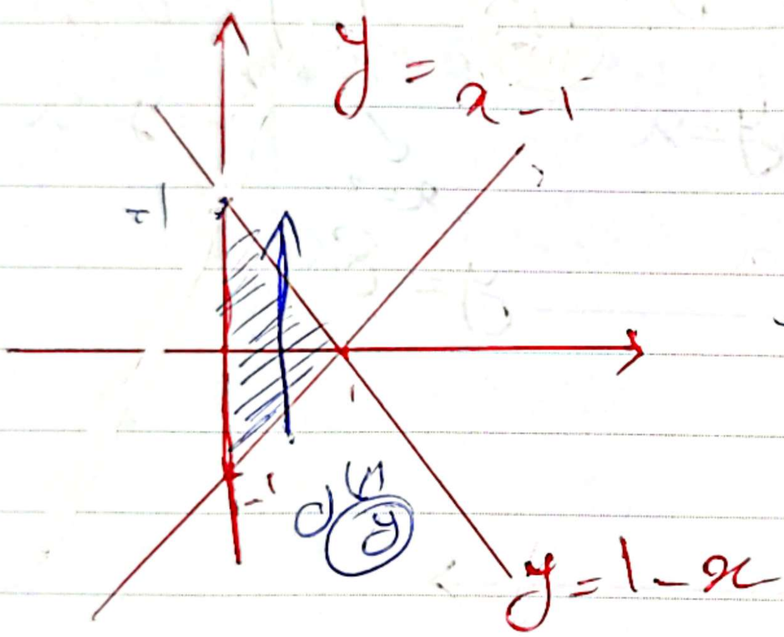
$$\begin{cases} x \rightarrow \text{متغیر} \\ y \rightarrow \text{نامتغیر} \end{cases}$$

$$I=\int_1^8\int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: حاصل $I=\iint_D x^2y\,dx\,dy$ ناحیه

محدود به خطوط $y=x-1$ و $y=1-x$

و محور yها باشد کدام است؟



$$\begin{cases} x \rightarrow \text{ثابتیم} \\ y \rightarrow \text{متغیر} \end{cases}$$

$$I=\int_0^1\int_{x-1}^{1-x} x^2 y\,dy\,dx$$

$$I=\int_0^1 \frac{y^2}{2}\cdot x^2\Big|_{x-1}^{1-x} dx =$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\underbrace{(x^2-\cancel{2x}+1)-(x^2-\cancel{2x}+1)}_{0}\,dy =$$

$$I=\iint xy^4\,dx\,dy$$

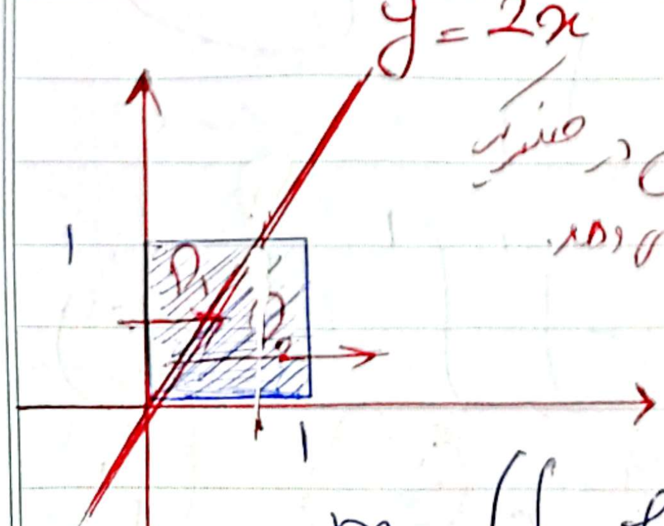
تابع داخل انتگرال نسبت به متغیر x فرد است.

تابع (x) نسبت به محور مختصات متقارن است. طبق این در قضیه، قطعاً جواب انتگرال صفر خواهد شد.

مثال

اگر تابع چگالی $D=\{(x,y)\mid (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\}$ باشد

از ضابطه $f(x,y)\begin{cases} x, & y\le 2x \\ y: & y\ge 2x\end{cases}$ جرم ناحیه D را بیابید



کشید؟ چون x و y در هر کدام قرار دارد یک تابع مرجعی به ما می‌دهد.

$$m=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

چگالی ما همگن نیست زیرا تابع چگالی فضا به ما داده است. خب حالا دو ناحیه داریم که به ما داده شده است که باید انتگرال گیری کنیم.

$$m = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$D_1 \xrightarrow{\text{بالا}} y > 2x \qquad D_2 \xrightarrow{\text{پایین}} y < 2x$$

$$m = \iint_{D_1} y\,dA + \iint_{D_2} x\,dA$$

$D_1 = \begin{cases} x \to \text{متغیر} \\ y \to \text{متغیر} \end{cases}$ $\qquad$ $D_2 = \begin{cases} x \to \text{متغیر} \\ y \to \text{متغیر} \end{cases}$

$$m = \int_0^1\int_0^{\frac{y}{2}} y\,dx\,dy + \int_0^1\int^1 x\,dx\,dy$$

$$m = \int_0^1 y(x)\,dy \Big|_0^{\frac{y}{2}} + \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dy \Big|_{\frac{y}{2}}^1$$

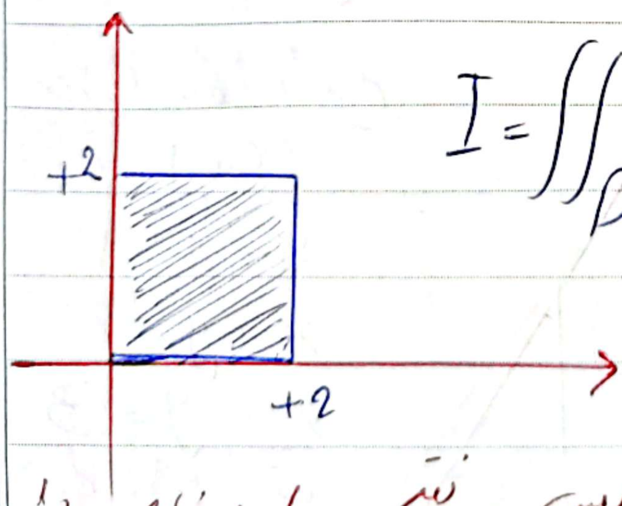
$$m=\int_0^1 y\left(\frac{y}{2}\right)dy+\int_0^1 \frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\,dy$$

$$m=\frac{1}{2}\times\frac{y^3}{3}\Big|_0^1+\frac{1}{4}\,\frac{y^3}{3}-\frac{1}{2}y\Big|_0^1$$

$$m=\left(\frac{1}{6}-0\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

حاصل انتگرال $I=\iint_D [x+y]\,dx\,dy$ که ناحیه

$D=\{(x,y)\mid (x,y)\in[0,2],[0,2]\}$ می‌باشد کدام است



$$I=\iint_D [x+y]\,dx\,dy$$

چون تابع تحت انتگرال

همیشه تغییرات ثابت دارد پس در نتیجه باید ناحیه را

$$\begin{cases}0<x<2\\0<y<2\end{cases}$$

رسم کنیم

حال باید در ناحیه $0<y<2$, $0<x<2$

با هم جمع کنیم:

$$\begin{cases} 0<x<2 \\ 0<y<2 \end{cases}$$

$$0<x+y<4 \Longrightarrow \begin{cases} ① & 0<x+y<1 \\ ② & 1<x+y<2 \\ ③ & 2<x+y<3 \\ ④ & 3<x+y<4 \end{cases}$$

مسئله‌مان را ۴ حالت

① $[x+y]=0$ ③ $[x+y]=2$

کوچکترینه

④ $[x+y]=3$

② $[x+y]=1$

چندتا خط داریم

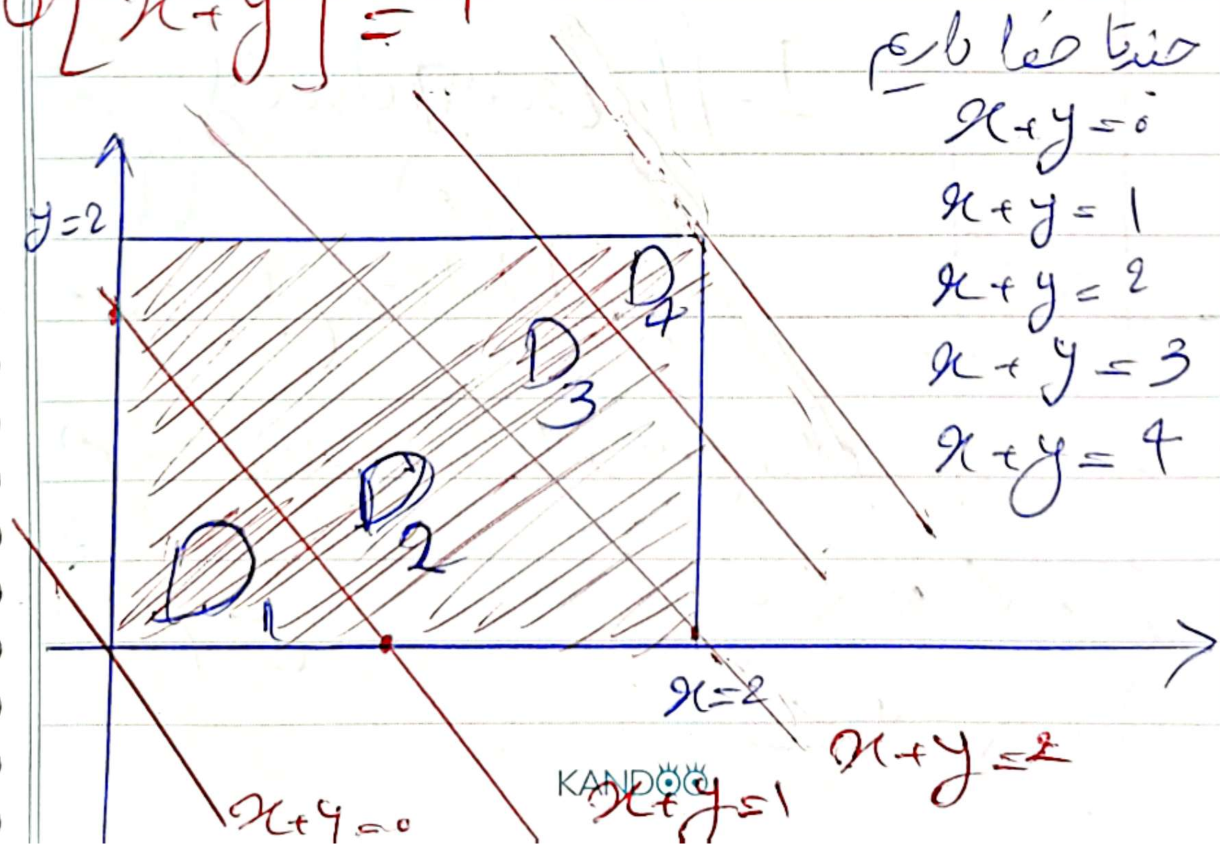
$x+y=0$

$x+y=1$

$x+y=2$

$x+y=3$

$x+y=4$



تابع دیراکلت

$$I=\iint_{D_1} \cancel{0\, dx\, dy} + \iint_{D_2} 1\, dx\, dy + \iint_{D_3} 2\, dx\, dy + \iint_{D} 3\, dx\, dy$$

این میشه مساحت چون تابع 1 است

ناحیه D_2 $\begin{cases} x \to \text{نامستقل} \\ y \to \text{نامستقل} \end{cases}$

ضب عدد ثابت ها بیرون بیاید تا تابع تحت انتگرال دو تا نه

مرا انتگرال بگیرید بین ناحیه ای که در خواهیم حساب کنیم

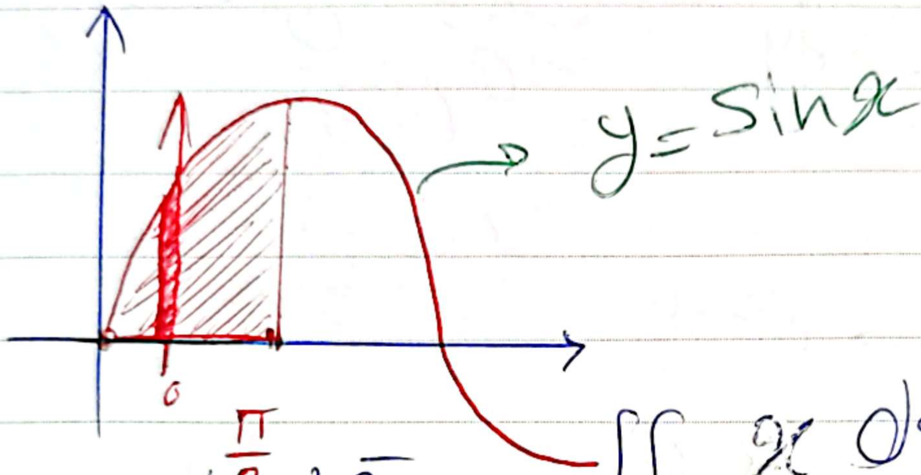
مساحت را حساب کنیم در خود مساحت عدد ثابت

$$I=S_{D_2}+2S_{D_3}+3S_{D_4}$$ ضرب می کنیم.

$$I=\frac{3}{2}+2\,\frac{3}{2}+3\,\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{6}{2}+\frac{3}{2}=6$$

مختصات مرکز سطح ناحیه محدود بین $y=\sin x$

و خط $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$ و محور x ها کدام است؟



مرکز سطح
$\bar{x} \rightarrow \dfrac{\iint_D x\,dx\,dy}{S}$

$\bar{y} \rightarrow \dfrac{\iint_D y\,dx\,dy}{S}$

$$S: \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1$$

۲ اینجا در ریاضی

$$S=\iint_D 1\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{\sin x} 1\,dy\,dx$$

$\begin{cases} x \to \text{ثابت} \\ y \to \text{متغیر} \end{cases}$

$$=\int_0^1 y\Big|_0^{\sin x} dx=\int_0^1 \sin x\,dx=$$

$$-\cos x\Big|_0^1=-(0-1)=1$$

$$\bar{x}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin x} x\,dy\,dx}{1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(y)\Big|_0^{\sin x} dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)\,dx=$$

$x \quad \sin x \quad = -x\cos x+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$1 \quad -\cos x$

$0 \quad -\sin x \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-0=1$

KANDOO

$$\bar{y} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sin x} = \frac{1}{2} \int_0^{1} \sin^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 1 - \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{1}{2} \sin \pi} \right) - (0) = \frac{\pi}{8}$$

مقدار مشتق سوئی تابع $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$

در جهت بردار $\bar{u} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ در ناحیه مثلثی

به رئوس $(0,-1)$, $(0,1)$ و $(1,0)$

کدام است؟

مشتق سوئی $= P_{\bar u} f = \nabla f \cdot \bar{u}$

بردار تراز $\bar{u}$

$$f = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

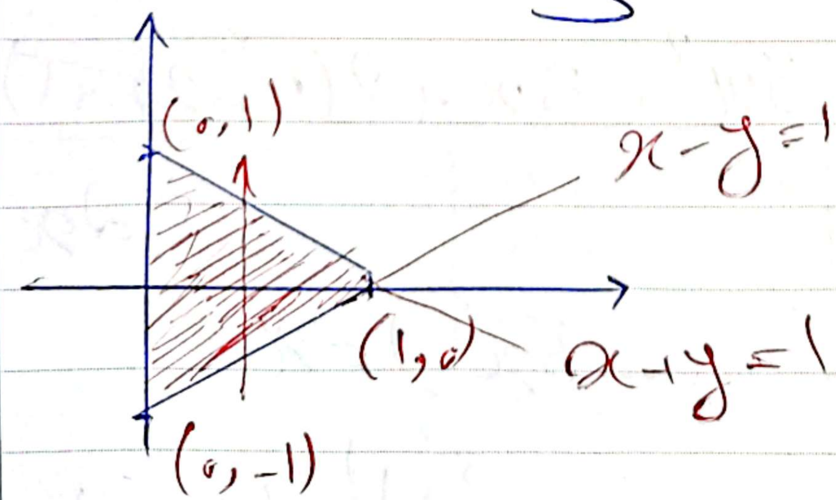
$$\nabla f \cdot \bar{u} = (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot \left(\frac{3i + 4j}{\sqrt{9+16}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}(3x + 4y)$$

مقدار متوسط مشتق سوئی ؟

$$\bar{D} = \frac{\iint D \, dx\, dy}{S}$$

تابع مشتق سوئی



$$\bar{D} = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{5}(3x+4y)\,dy\,dx$$

$x \to$ منتظم ← صورت $1 \to$ مساحت مثلث

$y \to$ منتظم

$$\bar{D} = \frac{1}{5}\int_0^1 3xy + \frac{4y^2}{2}\Big|_{x-1}^{1-x} dx =$$

$$\bar{D} = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(3x(1-x) + 2(1-x)^2 - 3x(x-1) + 2(x-1)^2\right) dx$$

$$\bar{D} = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(3x - 3x^2 + \cancel{2(1-2x+x^2)} - 3x^2 + 3x + \cancel{2(x^2-2x+1)}\right) dx$$

$$\bar{D} = \frac{1}{5}\int_0^1 (6x - 6x^2)\,dx$$

$$\bar{D} = \frac{1}{5}\left(6\frac{x^2}{2} - 6\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(3-2) = \frac{1}{5}$$

مثال: حاصل معادل $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dy \, dx$ کدام است؟

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dy \, dx$$

از ضابطه‌ی داخل انتگرال امکان انتگرال گیری نسبت به هیچ کدام از متغیرها وجود ندارد.

احتیاج به تغییر متغیر داریم.

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

قطعا در تابع داریم که عامل پیچیدگی است حال یکی از u یا v را می‌گیریم.

$$\Longrightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

حال باند های انتگرال سری که داریم را
که دارای مرز است باید تغییر متغیر دهیم دلیل

$$@\ y=0 \begin{cases} u = x - 0 \\ v = x + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow u = v$$

$$@\ y = 1 - x \begin{cases} u = x - (1-x) = 2x - 1 \\ v = \cancel{x} + (1 - \cancel{x}) = 1 \end{cases}$$

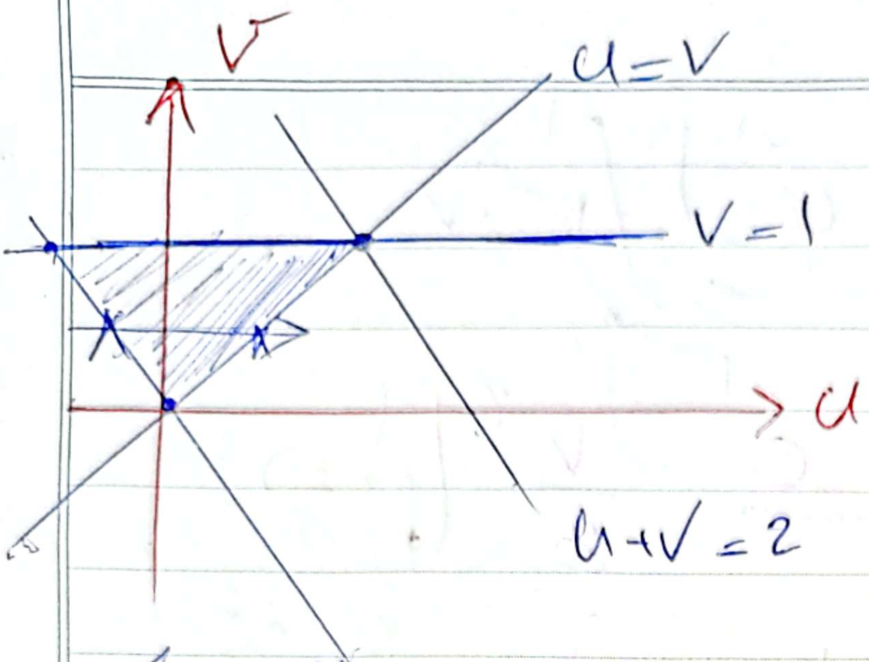
مرز ماست

$$x = 0 \begin{cases} u = 0 - y \\ v = 0 + y \end{cases} \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow u = -v$$

$$x = 1 \begin{cases} u = 1 - \cancel{y} \\ v = 1 + \cancel{y} \end{cases} \xRightarrow{+} \begin{cases} u + v = 2 \end{cases}$$

KANDOO

CamScanner



$$\begin{cases} x \text{ or } u \longrightarrow \text{متقارن} \\ y \text{ or } v \longrightarrow \text{نامتقارن} \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dy\, dx$$

$$I = \int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \left| \frac{1}{2} \right| du\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\frac{1}{v}} \right) e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^{v} dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 v \left(e^{\frac{v}{v}} - e^{\frac{-v}{v}} \right) dv$$

$$I = \underbrace{\frac{1}{2}(e^{1} - e^{-1})}\int_0^1 v\,dv$$

$$I = \frac{e^{1} - e^{-1}}{2} \cdot \frac{v^2}{2}\Big|_0^1 \Rightarrow$$

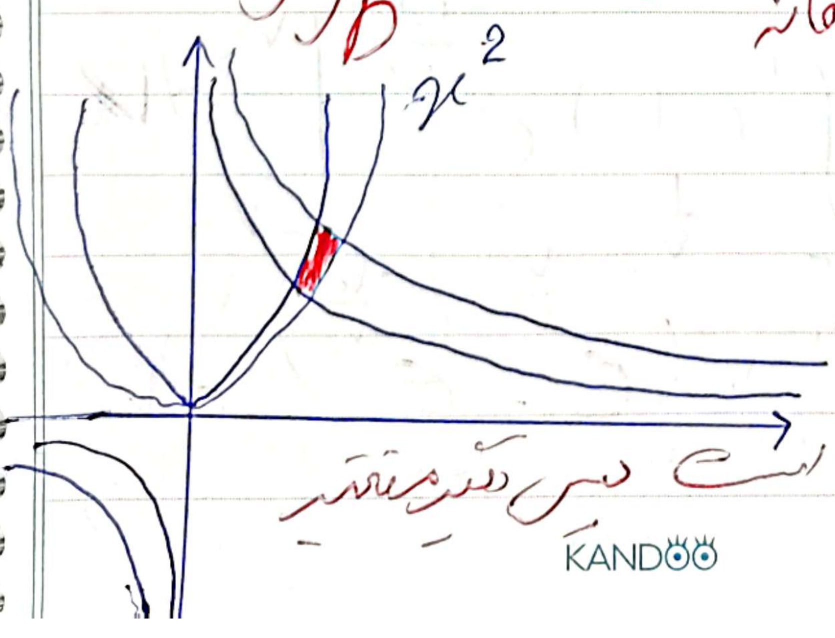
$$\underbrace{I = \frac{1}{2}\sinh 1}$$

مساحت محدود بین منحنی های $xy=1$

$xy=4$ ، $y=x^2$ ، $y=3x^2$ کدام است؟

$S = \iint_D 1\,dx\,dy$ یعنی مساحت

و اشکال ۲ گانه



$xy=1 \to y=\frac{1}{x}$

$xy=4 \to y=\frac{4}{x}$

نسبت به هر دو تا نامنظم و پیچیده است پس تغییر متغیر داریم.

$$D: \begin{cases} xy = 1 \\ xy = \frac{4}{2} \\ y = x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases} \qquad xy = u \qquad \frac{y}{x^2} = v$$

این نامعادله‌ی محال ناحیه
۵ سی خود باید کرد!!

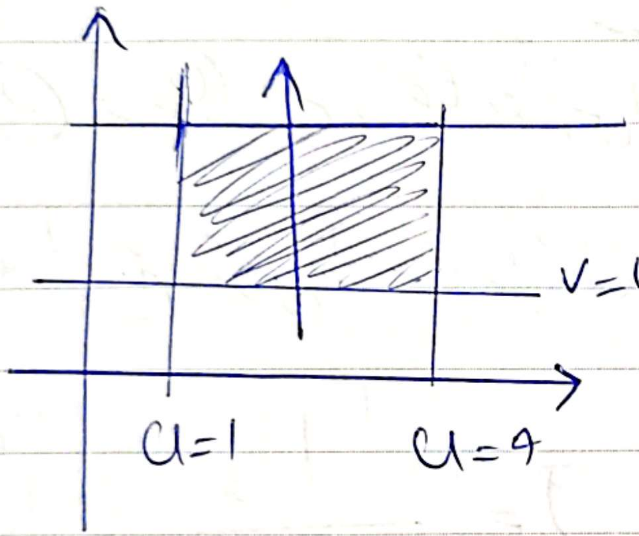
طوری باید v یا u دو متغیر را تعریف کرد که چیزی از
x و u هم در فضا رابطه‌ی استقلال دارد در اینجا ناحیه‌ای
هرکدام اثری از اشتباه شدن پاک شود.

$$D': \begin{cases} u = 1 \\ u = 4 \\ v = 1 \\ v = 3 \end{cases} \qquad J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{y}{x^2} - \frac{-2y}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3y}{x^2}}=\frac{1}{3v}$$

$$S=\iint_D 1\,dx\,dy \Rightarrow S=\iint_{D'} 1\times\left|\frac{1}{3v}\right|du\,dv$$



$$\begin{cases} u \rightarrow \text{منظم} \\ v \rightarrow \text{منظم} \end{cases}$$

$$S=\frac{1}{3}\int_1^4\int_1^3 \frac{1}{v}\,dv\,du$$

هرگاه در شرط زیر برقرار باشد انتگرال را

هرکی فرض کنیم داری محاسبه کن

کافی است از متغیرها جداگانه انتگرال بگیریم و جوابها را در هم ضرب کنیم.

۱- حدود هر دو حدود انتگرال عدد باشد.

۲- در ضابطه داخل انتگرال بین ۲ متغیر جمع و تفریق نباید باشد.

$$S = \frac{1}{3}\left(\ln v \Big|_1^3\right)\left(u \Big|_1^4\right) =$$

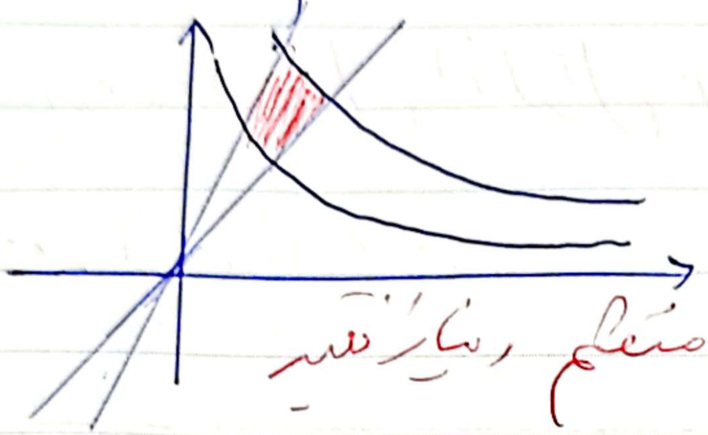
$$= \frac{1}{3}\left(\ln 3 - \ln 1\right) \cdot (4 - 1) =$$

$$S = \frac{1}{\cancel{3}} \ln 3 \times \cancel{3} = \ln 3$$

مثال: حاصل انتگرال $I=\iint_D \left(\sqrt{xy}+\frac{\sqrt{y}}{x}\right) dy\,dx$

که ناحیه محدود بین $xy=1$, $xy=4$, $y=x$,

و $y=9x$ می‌باشد کدام است؟



هر دو ناحیه نامنظم رو با تغییر متغیر داریم

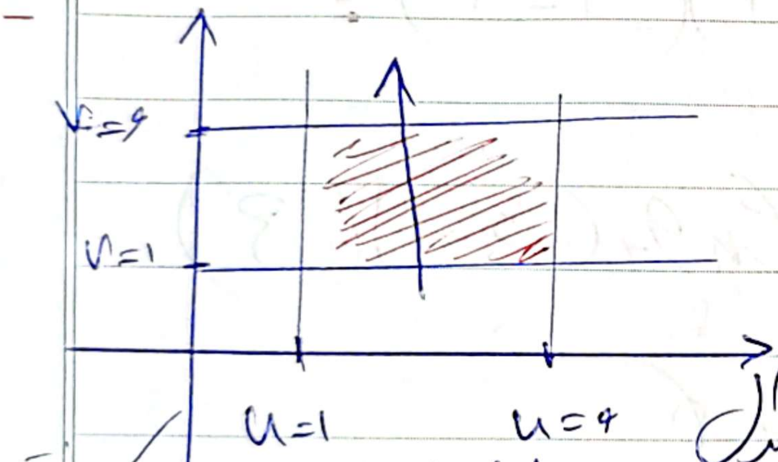
$$D:\begin{cases} xy=1 \\ xy=4 \\ y=x \\ y=9x \end{cases} \quad \begin{matrix} u=xy,\ D' \\ \\ \dfrac{y}{x}=v \end{matrix} \quad \begin{cases} u=1 \\ u=4 \\ v=1 \\ v=9 \end{cases}$$

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}}$$

$$J = \frac{1}{\frac{y}{x} - \frac{-y}{x}} = \frac{1}{2\frac{y}{x}} = \frac{1}{2v}$$

$$I = \iint_D \sqrt{xy} + \sqrt{\frac{y}{x}}\, dx\, dy$$

$$I = \iint_{D'} \sqrt{u} + \sqrt{v} \left|\frac{1}{2v}\right| du\, dv$$



$u \to$ مستقل

$v \to$ مستقل

می دانیم در مطلق انتگرال ممکن است منفی باشند اما اینجا رو قبلی می دانیم مثبت است پس مشکلی نیست

$$I = \frac{1}{2} \iint_{D'} (\sqrt{u} + \sqrt{v}) \frac{1}{v}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 \int_1^9 \frac{\sqrt{u}}{v} + \frac{1}{\sqrt{v}}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^4\int_1^9 \frac{\sqrt{u}}{v}\,dv\,du + \int_1^4\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 (\ln v)\Big|_1^9 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^9\right.$$

$$+ (u)\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)(\ln 9 - \ln 1)$$

$$+ \frac{1}{2}\times 2\left(9^{\frac{1}{2}}-1\right)(4-1) =$$

$$I = \frac{1}{3}(8-1)\ln 9 + (3-1)(3)$$

$$I = \frac{7}{3}\ln 9 + 6$$