دانشگاه صنعتی شریف

گزارش کار تمرین دوم کنترل مدرن

نام استاد : دکتر پیشوایی
نام دانشجو : محمد ده بزرگی

۲۲ آذر ۱۴۰۳

مقدمه‌ای بر دینامیک فضای حالت

نمایش فضای حالت یک مدل ریاضی است که برای توصیف رفتار سیستم‌های دینامیکی به کمک مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول استفاده می‌شود. این چارچوب ابزار قدرتمندی در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترلی به شمار می‌آید، زیرا رویکردی منظم و فشرده برای مدل‌سازی سیستم‌هایی با چند ورودی و خروجی ارائه می‌دهد.

چرا از فضای حالت استفاده می‌کنیم؟

روش‌های سنتی مانند توابع تبدیل محدود به سیستم‌های تک‌ورودی-تک‌خروجی SISO بوده و بیشتر در حوزه فرکانس کاربرد دارند. در مقابل، روش فضای حالت مزایای زیر را ارائه می‌دهد:

- مدل‌سازی سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی **MIMO**: فضای حالت به‌راحتی قابلیت توصیف سیستم‌هایی با چندین ورودی و خروجی را دارد.

- کاربرد در حوزه زمان: این روش امکان تحلیل سیستم در حوزه زمان و ارزیابی رفتار گذرای آن را فراهم می‌کند.

- قابلیت گسترش: فضای حالت به‌راحتی می‌تواند برای مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی و زمان‌متغیر استفاده شود.

- سادگی در استفاده: این روش رویکردی یکنواخت برای ترکیب دینامیک‌های مختلف سیستم ارائه می‌دهد.

با توجه به این ویژگی‌ها، فضای حالت ابزاری استاندارد و مؤثر برای تحلیل و طراحی سیستم‌های دینامیکی و کنترلی است.

تبدیل تابع تبدیل به فضای حالت

تابع تبدیل زیر داده شده است:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

برای هر ورودی-خروجی، مدل فضای حالت استخراج می‌شود:

مؤلفه اول ماتریس $\frac{1}{s+1}$

$$y' + y = 1, \tag{۱}$$
$$y_1' = x_1. \tag{۲}$$
$$\dot{x}_1 = -x_1 + u_1(t), \tag{۳}$$

مؤلفه دوم ماتریس $\frac{2}{(s+1)(s+2)}$

$$y'' + 3y' + 2 = 2u_2(t), \tag{۴}$$
$$\dot{x_2} = x_3, \tag{۵}$$
$$\dot{x_3} = y'' = -3x_3 - 2x_2 + 2u_2 \tag{۶}$$

مؤلفه سوم ماتریس $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$

$$y'' + 4y' + 3y = u_3(t), \tag{۷}$$
$$x_4 = y, \tag{۸}$$
$$\dot{x_4} = y' = x_5, \tag{۹}$$
$$x_5 = y', \tag{۱۰}$$
$$\dot{x_5} = y'' = -4x_5 - 3x_4 + u_3(t) \tag{۱۱}$$

مؤلفه چهارم ماتریس $\frac{1}{(s+3)}$

$$y' + 3y = u_4(t). \tag{۱۲}$$
$$x_6 = y_6, \tag{۱۳}$$
$$\dot{x_6} = y_6' = -3x_6 + u_4(t) \tag{۱۴}$$

تبدیل کامل به فضای حالت

برای کل سیستم:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad Y = Cx + Du(t),$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

مقدمه

این گزارش به تحلیل یک سیستم فضای حالت شامل ماتریس‌های A، B و C پرداخته است. هدف اصلی بررسی کنترل‌پذیری، مشاهده‌پذیری و تبدیل سیستم به فرم مینیمال، فرم جردن و فرم قطری است. در نهایت دلایل استفاده از هر فرم توضیح داده خواهد شد.

سیستم اولیه

ماتریس‌های اولیه سیستم به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم اولیه

کنترل‌پذیری

کنترل‌پذیری سیستم با استفاده از محاسبه رتبه ماتریس *Controllability* بررسی می‌شود:

$$\mathrm{Co} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

رتبه ماتریس کنترل‌پذیری محاسبه شده برابر با ۵ است که کمتر از ابعاد سیستم $n = 6$ می‌باشد. بنابراین سیستم در حالت اولیه کنترل‌پذیر نیست.

مشاهده‌پذیری

مشاهده‌پذیری سیستم با استفاده از محاسبه رتبه ماتریس *Observability* بررسی می‌شود:

$$\mathrm{Ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری محاسبه شده برابر با ۴ است که کمتر از ابعاد سیستم $n = 6$ می‌باشد. بنابراین سیستم در حالت اولیه مشاهده‌پذیر نیست.

تبدیل به فرم مینیمال

برای حذف ناپایداری‌ها و کاهش ابعاد سیستم، سیستم به فرم مینیمال تبدیل شد. این تبدیل تنها شامل حالت‌هایی است که هم کنترل‌پذیر و هم مشاهده‌پذیر هستند.

ماتریس‌های فرم مینیمال

ماتریس‌های فرم مینیمال به صورت زیر محاسبه شدند:

$$A_{\text{min}} = \dots,$$
$$B_{\text{min}} = \dots,$$
$$C_{\text{min}} = \dots.$$

در این فرم، رتبه ماتریس‌های کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری برابر با ابعاد جدید سیستم (۴) است. بنابراین سیستم فرم مینیمال کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر است.

فرم جردن

تعریف

فرم جردن یک نمایش استاندارد برای ماتریس‌های مربعی است که بلوک‌های جردن مرتبط با مقادیر ویژه را شامل می‌شود. این فرم اطلاعات مستقیمی درباره پایداری سیستم و ساختار هندسی آن ارائه می‌دهد.

محاسبه

ماتریس A_{min} به فرم جردن J تبدیل شد و ماتریس انتقال P نیز محاسبه شد:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$
$$P = \ldots.$$

فرم قطری

تعریف

فرم قطری ساده‌ترین نمایش ماتریس است که در آن تمام عناصر غیر قطر اصلی صفر بوده و مقادیر ویژه روی قطر اصلی قرار دارند.

محاسبه

سیستم بررسی شد و مشخص شد که ماتریس $A_{\square\square\square}$ قطری‌پذیر است. ماتریس قطری D به صورت زیر محاسبه شد:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}.$$

نتیجه‌گیری

در این گزارش، سیستم اولیه که کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر نبود، به فرم مینیمال تبدیل شد. سپس فرم‌های جردن و قطری برای تحلیل بیشتر ارائه شدند. استفاده از فرم مینیمال برای کاهش پیچیدگی، فرم جردن برای درک ساختار سیستم، و فرم قطری برای سادگی در تحلیل پایداری و پاسخ سیستم از دلایل اصلی این تبدیل‌ها هستند.

کد نویسی برای تبدیل تابع انتقال به فضای حالت و ماتریس های مربوطه

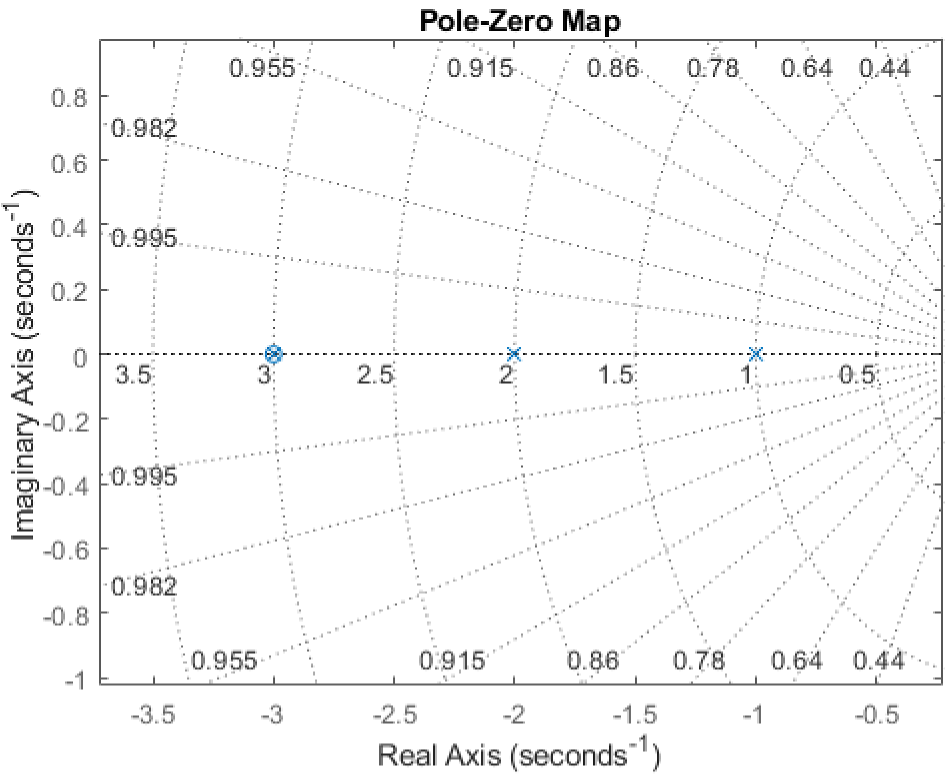
```
    s = tf('s');
G11 = 1 / (s + 1);
G12 = 2 / ((s + 1) * (s + 2));
G21 = 1 / ((s + 1) * (s + 3));
G22 = 1 / (s + 3);

% Combine into a MIMO transfer function matrix
G = [G11, G12; G21, G22];
sys_ss = ss(G);
sys_minimal = minreal(sys_ss);


A_min = sys_minimal.A;
B_min = sys_minimal.B;
C_min = sys_minimal.C;
D_min = sys_minimal.D;

disp('A_min = '), disp(A_min)
disp('B_min = '), disp(B_min)
disp('C_min = '), disp(C_min)
disp('D_min = '), disp(D_min)

ctrb_matrix = ctrb(A_min, B_min);
obsv_matrix = obsv(A_min, C_min);

is_controllable = rank(ctrb_matrix) == size(A_min, 1);
is_observable = rank(obsv_matrix) == size(A_min, 1);

if is_controllable && is_observable
    disp('The system is controllable and observable.');
else
    disp('The system is NOT controllable and/or observable.');
end

step(sys_minimal);
pzmap(sys_minimal);
grid on
```

```
omega = logspace(-2, 2, 500);


figure;
nyquist(sys_ss, omega);
title('Nyquist Plot of State-Space System');
grid on;
```

نتایج حاصل از کد نوشت شده به شرح زیر است :

```
        2 states removed.
A_min =
   -0.9787    0.0000    0.0000    0.3187
   -0.0000   -2.0000   -3.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000   -1.0000    0.0000
   -0.1350   -0.0000   -0.0000   -3.0213

B_min =
   -0.9937   -0.1362
   -0.0000   -1.7889
    0.0000   -0.8944
   -0.3610    0.8638

C_min =
   -0.9519    0.4472   -0.8944   -0.1501
   -0.3978   -0.0000   -0.0000    1.0950

D_min =
     0     0
     0     0

The system is controllable and observable.
```

نمودار حاصل از قطب ها و صفر های سیستم



کد نویسی پنج فضای حالت مینیمال به کمک دستورات متلب :

```
       A = [-1 0 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 -2 -3 0 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 -3 -4 0;
    0 0 0 0 0 -3];
B = [1 0;
    0 0;
    0 2;
    0 0;
    1 0;
    0 1];
```

```
C = [1 0 2 0 0 0;
     0 0 0 0 1 1];


Co = ctrb(A, B);
rankCo = rank(Co);
disp(['Rank of Controllability Matrix (Initial): ', num2str(rankCo)]);

Ob = obsv(A, C);
rankOb = rank(Ob);
disp(['Rank of Observability Matrix (Initial): ', num2str(rankOb)]);


sys = ss(A, B, C, 0);
sys_min = minreal(sys);
[A_min, B_min, C_min, ~] = ssdata(sys_min);

disp('A_min:');
disp(A_min);
disp('B_min:');
disp(B_min);
disp('C_min:');
disp(C_min);


Co_min = ctrb(A_min, B_min);
rankCo_min = rank(Co_min);
disp(['Rank of Controllability Matrix (Minimal): ', num2str(rankCo_min)]);

Ob_min = obsv(A_min, C_min);
rankOb_min = rank(Ob_min);
disp(['Rank of Observability Matrix (Minimal): ', num2str(rankOb_min)]);

[P, J] = jordan(A_min);
disp('Jordan Form (J):');
disp(J);
disp('Transformation Matrix (P):');
disp(P);

if rank(P) == size(A_min, 1)
    disp('The system is diagonalizable.');
```

```
    D = diag(eig(A_min));
    disp('Diagonal Form (D):');
    disp(D);
else
    disp('The system is not diagonalizable.');
end
```

نتایج کد به شرح زیر است:

```
        Rank of Controllability Matrix (Initial): 5
Rank of Observability Matrix (Initial): 4
2 states removed.
A_min:
   -3.0000   -1.4510    0.0000    1.3765
    0.7255   -1.4211    0.5713   -1.4979
   -0.0000    0.0000   -1.0000    0.0000
   -0.6882   -1.4979    0.6022   -1.5789

B_min:
   -0.0000   -2.0000
    0.4494    0.4993
   -1.0488   -0.0000
    0.4737    0.5263

C_min:
   -2.0000   -0.0000   -0.9535   -0.0000
    0.0000    0.9487   -0.0953    1.0000

Rank of Controllability Matrix (Minimal): 4
Rank of Observability Matrix (Minimal): 4
Jordan Form (J):
  -3.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -2.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -1.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -1.0000 - 0.0000i

Transformation Matrix (P):
    0.0000    2.9059    1.3345    1.8448
    0.9487   -1.0541   -0.8907   -1.5942
```

```
   -0.0000    0.0000    0.2709   -0.8957
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000

The system is diagonalizable.
Diagonal Form (D):
   -2.0000         0         0         0
         0   -1.0000         0         0
         0         0   -3.0000         0
         0         0         0   -1.0000
```

مدل‌سازی ریاضی و تحلیل فضای حالت برای برج تقطیر

برج تقطیر یکی از تجهیزات مهم فرآیندهای شیمیایی است که برای جداسازی مخلوط‌های مایع به اجزای تشکیل‌دهنده آن‌ها استفاده می‌شود. مدل‌سازی ریاضی برج تقطیر به کمک فضای حالت یک ابزار قدرتمند برای تحلیل و کنترل این فرآیند پیچیده فراهم می‌کند.

متغیرهای حالت و ماتریس‌های سیستم

در تحلیل سیستم‌های پویا مانند برج تقطیر، متغیرهای حالت معمولاً متغیرهایی هستند که دینامیک سیستم را توصیف می‌کنند. در این مدل، دمای سینی‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب شده‌اند که تغییرات زمانی آن‌ها توصیف‌کننده دینامیک حرارتی برج است. این متغیرها تحت تأثیر دو نوع ورودی اصلی قرار دارند:

- نسبت رفلاکس که از کندانسور اعمال می‌شود و بر جداسازی اجزا اثر می‌گذارد.
- بار حرارتی ریبویلر که در بخش پایین برج اعمال می‌شود و منبع اصلی انرژی برای تبخیر مواد است.

مدل خطی‌سازی‌شده

برای تسهیل در تحلیل، مدل برج تقطیر حول یک نقطه کار خطی‌سازی می‌شود. این مدل خطی با استفاده از معادلات دیفرانسیل حالت و ورودی‌های کنترلی در قالب زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- $x(t)$: بردار متغیرهای حالت (دمای سینی‌ها)

- $u(t)$: بردار ورودی‌ها (رفلاکس و بار حرارتی)
- $y(t)$: بردار خروجی‌ها
- A: ماتریس دینامیک سیستم
- B: ماتریس ورودی‌ها
- C: ماتریس خروجی‌ها
- D: ماتریس گذردهی مستقیم

تحلیل و طراحی کنترل

برای طراحی سیستم کنترلی مناسب، مدل فضای حالت ابزار مفیدی ارائه می‌دهد. با استفاده از این مدل، می‌توان تحلیل پایداری، کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم را انجام داد.

- کنترل‌پذیری: تضمین می‌کند که با ورودی‌های مناسب می‌توان سیستم را به نقطه دلخواه رساند.
- مشاهده‌پذیری: تضمین می‌کند که از روی خروجی‌ها می‌توان به متغیرهای حالت دست یافت.

اهمیت استفاده از فضای حالت

استفاده از فضای حالت در تحلیل برج تقطیر به دلایل زیر اهمیت دارد:

- امکان مدل‌سازی سیستم‌های چندمتغیره (MIMO) با چندین ورودی و خروجی.
- ارائه چارچوبی جامع برای تحلیل و طراحی کنترلرها.
- تسهیل در تحلیل پایداری و دینامیک سیستم.

این مدل‌سازی نه تنها در طراحی کنترل‌های بهینه برای برج تقطیر کاربرد دارد، بلکه در شبیه‌سازی و پیش‌بینی رفتار دینامیکی سیستم نیز نقش کلیدی ایفا می‌کن

ماتریس‌های مسئله

ماتریس A:

$$A = \begin{bmatrix} -7.6397 & 5.0629 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5985 & -9.9319 & 6.1175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0263 & 6.3535 & -12.9721 & 8.1940 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0263 & -0.00055 & 6.6077 & -19.2419 & 12.0755 & 0 & 0 \\ -0.0245 & -0.0057 & 0 & 11.2851 & -23.7816 & 15.4901 & 0 \\ -0.0199 & -0.004 & 0 & 0 & 11.3416 & -27.0859 & 18.2798 \\ -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0.1986 & -0.3470 \end{bmatrix}$$

ماتریس B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0595 & 0 \\ 0.0692 & 0 \\ 0.0622 & -0.0003 \\ 0.0645 & -0.0003 \\ 0.0524 & -0.0003 \\ 0.0006 & 0 \end{bmatrix}$$

سؤالات

الف آیا سیستم کنترل‌پذیر است؟

ب فرض کنید فقط بار حرارتی ریبویلر دستکاری (manipulate) شود. آیا سیستم کنترل‌پذیر است؟

ج آیا سیستم کنترل‌پذیر است، اگر فقط رفلاکس تنها عامل کنترل باشد؟

د فرض کنید همه دماها اندازه‌گیری می‌شوند. آیا سیستم مشاهده‌پذیر است؟

ه اگر فقط دمای ریبویلر و کندانسور اندازه‌گیری شوند، آیا سیستم مشاهده‌پذیر است؟

و فرض کنید تنها اندازه‌گیری دما، دمای ریبویلر باشد. آیا سیستم مشاهده‌پذیر است؟

ز اگر فقط دمای سینی سوم را اندازه‌گیری کنیم، آیا سیستم مشاهده‌پذیر است؟

پاسخ سوال الف با کمک کد متلب :

```
    % Given matrices
A = [-7.6397 5.06290 0 0 0 0 0 ;
     4.5985 -9.9319 6.1175 0 0 0 0;
```

```
     0.0263 6.3535 -12.9721 8.1940 0 0 0;
    -0.0263 -0.00055 6.6077 -19.2419 12.0755 0 0;
    -0.0245 -0.0057 0 11.2851 -23.7816 15.4901 0;
    -0.0199 -0.004 0 0 11.3416 -27.0859 18.2798 ;
    -0.0002 -0.0001 0 0 0 0.1986 -0.3470];




B = [0 0;
0.0595 0;
0.0692 0;
0.0622 -0.0003;
0.0645 -0.0003
;0.0524 -0.0003;
0.0006 0];

% Compute controllability matrix
n = size(A, 1); % Number of states
controllability_matrix = ctrb(A, B);

% Check rank of the controllability matrix
rank_C = rank(controllability_matrix);

% Determine controllability
if rank_C == n
    disp('The system is controllable.');
else
    disp(['The system is NOT controllable. Rank = ' num2str(rank_C)]);
end
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
  controllability_matrix =

   1.0e+07 *

  Columns 1 through 6
```

```
         0         0    0.0000         0   -0.0000         0
    0.0000         0   -0.0000         0    0.0000   -0.0000
    0.0000         0   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000         0    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000

  Columns 7 through 12

    0.0000   -0.0000   -0.0001    0.0000    0.0008   -0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0001   -0.0000   -0.0018    0.0000
    0.0000   -0.0000   -0.0001    0.0000    0.0088   -0.0002
   -0.0000    0.0000    0.0008   -0.0000   -0.0433    0.0006
    0.0000   -0.0000   -0.0022    0.0000    0.0965   -0.0011
   -0.0001    0.0000    0.0022   -0.0000   -0.0855    0.0008
    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0004   -0.0000

  Columns 13 through 14

   -0.0154    0.0003
    0.0758   -0.0015
   -0.4811    0.0075
    2.0579   -0.0256
   -4.1100    0.0452
    3.4200   -0.0350
   -0.0171    0.0002

The system is controllable.
```

پاسخ سوال ب با کمک کد متلب :

```
        clc
close all
A = [-7.6397 5.06290 0 0 0 0 0 ;
     4.5985 -9.9319 6.1175 0 0 0 0;
     0.0263 6.3535 -12.9721 8.1940 0 0 0;
    -0.0263 -0.00055 6.6077 -19.2419 12.0755 0 0;
    -0.0245 -0.0057 0 11.2851 -23.7816 15.4901 0;
    -0.0199 -0.004 0 0 11.3416 -27.0859 18.2798 ;
```

```
    -0.0002 -0.0001 0 0 0 0.1986 -0.3470];
B = [0 0;
0.0595 0;
0.0692 0;
0.0622 -0.0003;
0.0645 -0.0003;
0.0524 -0.0003;
0.0006 0];

B_reboiler = B(:, 2);
controllability_matrix = ctrb(A, B_reboiler);
rank_C = rank(controllability_matrix);
n = size(A, 1);
if rank_C == n
    disp('The system is controllable with the reboiler heat load.');
else
    disp(['The system is NOT controllable. Rank = ' num2str(rank_C)]);
end
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
controllability_matrix =

   1.0e+05 *

         0         0         0   -0.0000    0.0000   -0.0009    0.0276
         0         0   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0042   -0.1547
         0   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0004   -0.0179    0.7477
   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0014    0.0597   -2.5586
   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0025   -0.1069    4.5209
   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0001   -0.0020    0.0842   -3.5000
         0   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0004    0.0169

The system is controllable with the reboiler heat load.
```

پاسخ سوال ج با کمک کد متلب :

```
        clc
close all
A = [-7.6397 5.06290 0 0 0 0 0 ;
     4.5985 -9.9319 6.1175 0 0 0 0;
     0.0263 6.3535 -12.9721 8.1940 0 0 0;
    -0.0263 -0.00055 6.6077 -19.2419 12.0755 0 0;
    -0.0245 -0.0057 0 11.2851 -23.7816 15.4901 0;
    -0.0199 -0.004 0 0 11.3416 -27.0859 18.2798 ;
    -0.0002 -0.0001 0 0 0 0.1986 -0.3470];



B = [0 0;
0.0595 0;
0.0692 0;
0.0622 -0.0003;
0.0645 -0.0003;
0.0524 -0.0003;
0.0006 0];

B_reflux = B(:, 1);

controllability_matrix = ctrb(A, B_reflux)
rank_C = rank(controllability_matrix);
n = size(A, 1);
if rank_C == n
    disp('The system is controllable with the reflux as the only control input.'
else
    disp(['The system is NOT controllable. Rank = ' num2str(rank_C)]);
end
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
        controllability_matrix =

   1.0e+07 *
```

```
         0    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0008   -0.0154
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0001   -0.0018    0.0758
    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0088   -0.4811
    0.0000    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0008   -0.0433    2.0579
    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0022    0.0965   -4.1100
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0022   -0.0855    3.4200
    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0004   -0.0171

The system is controllable with the reflux as the only control input.
```

پاسخ سوال د با کمک کد متلب :

```
        clc
close all

A = [-7.6397 5.06290 0 0 0 0 0 ;
     4.5985 -9.9319 6.1175 0 0 0 0;
     0.0263 6.3535 -12.9721 8.1940 0 0 0;
    -0.0263 -0.00055 6.6077 -19.2419 12.0755 0 0;
    -0.0245 -0.0057 0 11.2851 -23.7816 15.4901 0;
    -0.0199 -0.004 0 0 11.3416 -27.0859 18.2798 ;
    -0.0002 -0.0001 0 0 0 0.1986 -0.3470];

C = eye(size(A));
observability_matrix = obsv(A, C);
rank_O = rank(observability_matrix);

% Determine observability
n = size(A, 1);
if rank_O == n
    disp('The system is observable.');
else
    disp(['The system is NOT observable. Rank = ' num2str(rank_O)]);
end
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
bservability_matrix =

  1.0e+09 *

    0.0000         0         0         0         0         0         0
         0    0.0000         0         0         0         0         0
         0         0    0.0000         0         0         0         0
         0         0         0    0.0000         0         0         0
         0         0         0         0    0.0000         0         0
         0         0         0         0         0    0.0000         0
         0         0         0         0         0         0    0.0000
   -0.0000    0.0000         0         0         0         0         0
    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0         0         0
    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0         0
   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0
   -0.0000   -0.0000         0    0.0000   -0.0000    0.0000         0
   -0.0000   -0.0000         0         0    0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000         0         0         0    0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0         0         0
   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0
    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.0000         0    0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0
   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0
   -0.0000    0.0001   -0.0001    0.0001   -0.0000    0.0000         0
    0.0000   -0.0001    0.0002   -0.0003    0.0002   -0.0001    0.0000
   -0.0000    0.0001   -0.0002    0.0006   -0.0009    0.0007   -0.0002
    0.0000   -0.0000    0.0002   -0.0008    0.0015   -0.0015    0.0006
    0.0000    0.0000   -0.0001    0.0005   -0.0011    0.0013   -0.0006
   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
```

-0.0002	0.0005	-0.0005	0.0005	-0.0002	0.0000	0
0.0004	-0.0011	0.0018	-0.0025	0.0019	-0.0009	0.0002
-0.0005	0.0018	-0.0042	0.0093	-0.0107	0.0073	-0.0023
0.0003	-0.0020	0.0075	-0.0242	0.0364	-0.0322	0.0126
-0.0001	0.0015	-0.0080	0.0341	-0.0622	0.0638	-0.0277
0.0000	-0.0005	0.0040	-0.0220	0.0467	-0.0528	0.0242
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0002	0.0003	-0.0001
0.0040	-0.0094	0.0131	-0.0160	0.0115	-0.0048	0.0009
-0.0084	0.0246	-0.0459	0.0835	-0.0856	0.0537	-0.0160
0.0120	-0.0476	0.1277	-0.3344	0.4494	-0.3642	0.1347
-0.0114	0.0696	-0.2696	0.9378	-1.5234	1.4384	-0.5925
0.0071	-0.0667	0.3386	-1.4237	2.6157	-2.6990	1.1767
-0.0018	0.0306	-0.2009	0.9842	-1.9762	2.1586	-0.9733
0.0000	-0.0001	0.0008	-0.0044	0.0094	-0.0106	0.0049

```
The system is observable.
```

پاسخ سوال ه همراه با توضیحات و کد متلب :

توجیه کدنویسی ماتریس **C**

در این مسئله، هدف مدل‌سازی دینامیک سیستم برج تقطیر با استفاده از فضای حالت و بررسی خروجی‌های سیستم است. ماتریس C نقش کلیدی در تعریف متغیرهای خروجی دارد و تنظیم آن به صورت زیر توجیه می‌شود:

ساختار و دلیل انتخاب متغیرهای خروجی

ماتریس C نحوه ترکیب متغیرهای حالت برای تولید خروجی‌های سیستم را مشخص می‌کند. در اینجا، متغیرهای خروجی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

- دمای کندانسور: این دما در بالاترین نقطه برج تقطیر قرار دارد و نمایانگر شرایط خروجی در بخش بالای برج است. این مقدار با اولین متغیر حالت مرتبط بوده و در اولین سطر ستون ماتریس C مقدار غیرصفر دارد.

- دمای ریبویلر: این دما در پایین‌ترین نقطه برج تقطیر قرار دارد و شرایط خروجی در بخش پایینی برج را مشخص می‌کند. این مقدار با آخرین متغیر حالت مرتبط بوده و در آخرین سطر ستون ماتریس C مقدار غیرصفر دارد.

دلیل صفر بودن سایر سطرهای ماتریس $\mathbf{C}$

سایر سطرهای ماتریس C مقدار صفر دارند زیرا:

- سایر متغیرهای حالت (دمای سینی‌های میانی) به عنوان خروجی سیستم انتخاب نشده‌اند.
- تمرکز مسئله بر روی دو نقطه کلیدی (دمای کندانسور و ریبویلر) است که برای کنترل و اندازه‌گیری سیستم کافی هستند.
- این انتخاب باعث ساده‌سازی مدل و کاهش پیچیدگی محاسباتی در طراحی سیستم کنترلی می‌شود.

کاربرد در کنترل و اندازه‌گیری

در فرآیندهای صنعتی، دمای کندانسور و ریبویلر به عنوان نقاط کلیدی برای اندازه‌گیری و کنترل سیستم شناخته می‌شوند. این دماها به طور مستقیم قابل اندازه‌گیری هستند و طراحی سیستم کنترل را ساده‌تر می‌کنند. ازاین‌رو، تنظیم ماتریس C به گونه‌ای انجام شده است که فقط این دو متغیر را شامل شود.

ساختار نهایی ماتریس $\mathbf{C}$

به دلیل توضیحات ارائه‌شده، ماتریس C به صورت زیر تنظیم شده است:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این ساختار به طور مستقیم دمای کندانسور (اولین متغیر حالت) و دمای ریبویلر (آخرین متغیر حالت) را به عنوان خروجی تعریف می‌کند.

*□□□□□□ کد به شرح زیر است:

```
        clc
close all

A = [-7.6397 5.06290 0 0 0 0 0;
     4.5985 -9.9319 6.1175 0 0 0 0;
     0.0263 6.3535 -12.9721 8.1940 0 0 0;
    -0.0263 -0.00055 6.6077 -19.2419 12.0755 0 0;
    -0.0245 -0.0057 0 11.2851 -23.7816 15.4901 0;
    -0.0199 -0.004 0 0 11.3416 -27.0859 18.2798;
    -0.0002 -0.0001 0 0 0 0.1986 -0.3470];
```

```
C = [1 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 1];
O = obsv(A,C)
rank_O = rank(O);
n = size(A, 1);

if rank_O == n
    disp('The system is observable.');
else
    disp('The system is not observable.');
end
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
        O =

   1.0e+07 *

    0.0000         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0    0.0000
   -0.0000    0.0000         0         0         0         0         0
   -0.0000   -0.0000         0         0         0    0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0         0         0
   -0.0000   -0.0000   -0.0000         0    0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0001    0.0001   -0.0001    0.0000         0         0         0
    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0015   -0.0026    0.0023   -0.0013    0.0003         0         0
   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0002    0.0005   -0.0007    0.0003
   -0.0231    0.0480   -0.0542    0.0467   -0.0225    0.0047         0
    0.0000    0.0001   -0.0014    0.0094   -0.0220    0.0263   -0.0125
    0.3955   -0.9386    1.3059   -1.5973    1.1538   -0.4778    0.0868
    0.0002   -0.0099    0.0807   -0.4405    0.9360   -1.0574    0.4859

The system is observable.
```

پاسخ سوال و همراه با کد متلب :

```
clc
close all

A = [-7.6397 5.06290 0 0 0 0 0;
     4.5985 -9.9319 6.1175 0 0 0 0;
     0.0263 6.3535 -12.9721 8.1940 0 0 0;
    -0.0263 -0.00055 6.6077 -19.2419 12.0755 0 0;
    -0.0245 -0.0057 0 11.2851 -23.7816 15.4901 0;
    -0.0199 -0.004 0 0 11.3416 -27.0859 18.2798;
    -0.0002 -0.0001 0 0 0 0.1986 -0.3470];

C = [0 0 0 0 0 0 1];
O = obsv(A, C)
rank_O = rank(O);
n = size(A, 1);

if rank_O == n
    disp('The system is observable.');
else
    disp('The system is not observable.');
end
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
O =

   1.0e+07 *

         0         0         0         0         0         0    0.0000
   -0.0000   -0.0000         0         0         0    0.0000   -0.0000
   -0.0000   -0.0000   -0.0000         0    0.0000   -0.0000    0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000    0.0000   -0.0002    0.0005   -0.0007    0.0003
    0.0000    0.0001   -0.0014    0.0094   -0.0220    0.0263   -0.0125
    0.0002   -0.0099    0.0807   -0.4405    0.9360   -1.0574    0.4859

The system is observable.
```

پاسخ سوال ز با کد متلب :

```
clc
close all
A = [-7.6397 5.06290 0 0 0 0 0;
     4.5985 -9.9319 6.1175 0 0 0 0;
     0.0263 6.3535 -12.9721 8.1940 0 0 0;
    -0.0263 -0.00055 6.6077 -19.2419 12.0755 0 0;
    -0.0245 -0.0057 0 11.2851 -23.7816 15.4901 0;
    -0.0199 -0.004 0 0 11.3416 -27.0859 18.2798;
    -0.0002 -0.0001 0 0 0 0.1986 -0.3470];

C = [0 0 1 0 0 0 0];
O = obsv(A, C)
rank_O = rank(O)
n = size(A, 1);

if rank_O == n
    disp('The system is observable.');
else
    disp('The system is not observable.');
end
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
O =

   1.0e+08 *

         0         0    0.0000         0         0         0         0
    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0         0
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000         0         0
   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0001   -0.0001    0.0000         0
    0.0002   -0.0007    0.0015   -0.0027    0.0025   -0.0013    0.0003
   -0.0050    0.0182   -0.0424    0.0931   -0.1067    0.0732   -0.0234
```

```
    0.1197   -0.4758    1.2774   -3.3442    4.4936   -3.6418    1.3470


rank_O =

     7

The system is observable.
```

مقدمه

یکی از روش‌های رایج در طراحی کنترل‌کننده‌ها، روش تخصیص قطب (Pole Placement) است. در این روش، ضرایب بهره کنترل به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که قطب‌های سیستم حلقه‌بسته به مکان‌های مطلوبی منتقل شوند. این کار بهبود پایداری و عملکرد دینامیکی سیستم را تضمین می‌کند. در این مسئله، هدف ما طراحی یک کنترل‌کننده حالت است که بتواند قطب‌های سیستم را در مکان‌های مشخصی قرار دهد.

صورت مسئله

به ما داده شده است:

- قطب اول سیستم حلقه‌بسته برابر $\lambda_1 = -10$ است.
- کنترل سیستم به‌صورت $u = -Ky$ تعریف شده است.

هدف این است که:

۱. ماتریس بهره K را به‌گونه‌ای بیابیم که قطب دوم سیستم در محل مطلوب قرار گیرد.

۲. قطب دوم سیستم را محاسبه کنیم.

روش حل مسئله

برای حل این مسئله، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

۱. نوشتن معادلات حالت سیستم و ماتریس حالت A.

۲. اعمال بازخورد حالت $u = -Ky$ و محاسبه ماتریس جدید حلقه‌بسته $A_{cl} = A - BK$.

۳. تعیین مقادیر ویژه ماتریس A_{cl} و جایگذاری قطب اول ($\lambda_1 = -10$).

۴. حل معادله مشخصه حلقه‌بسته برای یافتن قطب دوم و بهره K.

پیاده‌سازی مسئله

صورت مسئله به‌صورت ریاضی به شکل زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$\lambda_1 = -10,$$
$$u = -Ky.$$

ماتریس بهره K و قطب دیگر سیستم را می‌یابیم. محاسبات دقیق در مراحل بعدی ارائه خواهد شد.

توصیف سیستم

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx,$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

قانون کنترل به صورت زیر تعریف شده است:

$$u = -Kx,$$

که $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ است.

هدف مسئله

۱. محاسبه بهره بازخورد K برای قرار دادن یکی از قطب‌های سیستم حلقه‌بسته در $\lambda = -10$.
۲. تعیین قطب دیگر سیستم حلقه‌بسته.

راه‌حل مسئله

دینامیک حلقه‌بسته

دینامیک سیستم حلقه‌بسته به صورت زیر است:

$$\dot{x} = (A - BK)\, x.$$

معادله مشخصه

معادله مشخصه سیستم حلقه‌بسته به صورت زیر است:

$$\det\left(\lambda I - (A - BK)\right) = 0.$$

با جایگذاری A، B و K:

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -k_2 \\ -k_1 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

معادله مشخصه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & k_2 \\ k_1 & \lambda + 4 \end{bmatrix} = 0.$$

با بسط دترمینان داریم:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 4) - k_1 k_2 = 0.$$

ساده‌سازی می‌کنیم:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 - k_1 k_2 = 0.$$

تخصیص قطب موردنظر

یکی از قطب‌ها باید در $\lambda = -10$ باشد. بنابراین معادله مشخصه به صورت زیر است:

$$\lambda^2 + (10 + p)\lambda + 10p = 0.$$

با مطابقت ضرایب با $\lambda^2 + 5\lambda + 4 - k_1 k_2 = 0$، داریم:

$$\begin{aligned} 10 + p = 5 \quad &\Rightarrow \quad p = -5, \\ 10p = 4 - k_1 k_2 \quad &\Rightarrow \quad k_1 k_2 = 54. \end{aligned}$$

نتیجه‌گیری

بهره بازخورد $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ باید شرط $k_1 k_2 = 54$ را برآورده کند تا یکی از قطب‌ها در $\lambda = -10$ و قطب دیگر در $\lambda = -5$ قرار گیرد. مقادیر دقیق k_1 و k_2 بر اساس محدودیت‌ها یا طراحی‌های بیشتر قابل تعیین هستند

کد متلب مسئله به شرح زیر است :

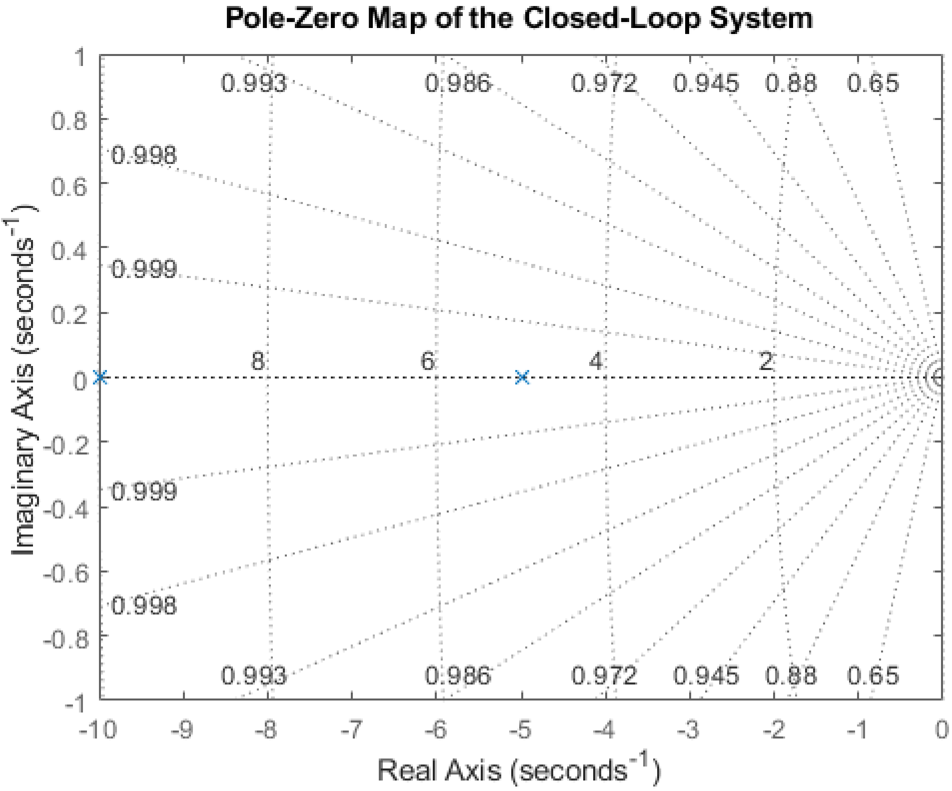
```
A = [-1  0;
      0 -4];
B = [0  1;
     1  0];
C = [0  1];
D = 0;

% Desired poles
pole1 = -10;
pole2 = -5;


desired_char_eq = conv([1, 10], [1, 5]); % Expands to  ^2 + 15  + 50


syms k1 k2 lambda;
K = [k1; k2];
A_cl = A - B * K;

char_eq = det(lambda * eye(size(A)) - A_cl);
% Match the coefficients of characteristic equations
coeffs_actual = coeffs(char_eq, lambda);
coeffs_desired = coeffs(poly2sym(desired_char_eq, lambda), lambda);

% Solve for k1 and k2
[k1_sol, k2_sol] = solve(coeffs_actual == coeffs_desired, [k1, k2]);


disp('Feedback gains:');
disp(['k1 = ', char(k1_sol)]);
disp(['k2 = ', char(k2_sol)]);


K_numeric = double([k1_sol; k2_sol]);
A_cl_numeric = A - B * K_numeric; % Use the computed k1 and k2

disp('Closed-loop eigenvalues:');
disp(eig(A_cl_numeric));
```

```
sys_cl = ss(A_cl_numeric, B, C, D);

% Plot the pole-zero map
figure;
pzmap(sys_cl);
title('Pole-Zero Map of the Closed-Loop System');
grid on;
```

نتیجه کد به شرح زیر است :

```
         Feedback gains:
k1 = -2
k2 = 12
Closed-loop eigenvalues:
  -10.0000
   -5.0000
```

نمودار محل قطب ها و صفر ها



مقدمه

این گزارش به تحلیل یک سیستم فضای حالت شامل ماتریس‌های A، B و C پرداخته است. هدف اصلی بررسی کنترل‌پذیری، مشاهده‌پذیری و بررسی پایداری سیستم بر اساس قطب داده داده شده است .

سیستم اولیه

ماتریس‌های اولیه سیستم به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

طراحی بهره مطلوب برای سیستم

هدف ما یافتن ماتریس بهره K است به‌گونه‌ای که تمامی قطب‌های سیستم در موقعیت -3 قرار بگیرند.

روش حل مسئله

برای این منظور، از روش تخصیص قطب‌ها استفاده می‌شود. معادله حالت سیستم با کنترل بازخورد حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{x} = (A - BK)x.$$

جایگاه قطب‌های سیستم به‌وسیله مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ تعیین می‌شود. بنابراین برای تحقق هدف، باید بهره K طوری محاسبه شود که مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ برابر با -3 باشد.

مراحل حل

۱. بررسی کنترل‌پذیری سیستم: ابتدا کنترل‌پذیری سیستم را با محاسبه ماتریس کنترل‌پذیری $\mathcal{C}$ بررسی می‌کنیم:
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}.$$
سیستم زمانی کنترل‌پذیر است که رتبه این ماتریس برابر با تعداد حالات سیستم باشد.

۲. محاسبه ماتریس هدف: قطب‌های مطلوب برابر با -3 هستند. بنابراین چندجمله‌ای مشخصه مطلوب به صورت زیر است:

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27.$$

۳. تنظیم ماتریس $A-BK$: ماتریس BK با فرض $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix}$ محاسبه می‌شود. سپس ماتریس $A-BK$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$A - BK = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -k_4 & -2-k_5 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 4 \end{bmatrix}.$$

۴. یافتن ضرایب K: با حل معادله مشخصه $\det(\lambda I - (A - BK)) = p(\lambda)$، مقادیر $k_1, k_2, \ldots, k_6$ محاسبه می‌شوند.

کد**MATLAB** برای محاسبه K

کد زیر بهره مطلوب K را برای تحقق هدف محاسبه می‌کند:

```
A = [-2 0 2; 0 -2 0; 0 0 4];
B = [0 0; 0 1; 1 0];

Co = ctrb(A, B);

if rank(Co) == size(A,1)
    disp('system is not Controllebl');
else
    disp('system is not Controllebl');
end


Q = eye(size(A));
R = eye(size(B, 2));

K = lqr(A, B, Q, R);
disp('LQR form Matrix K');
disp(K);
```

نتیجه کد متلب برای این سیستم :

```
system is not Controllebl
LQR form Matrix K
```

```
    0.0806    0.0000    8.1620
   -0.0000    0.2361    0.0000

pole of close loop control:
   -4.0847
   -2.0773
   -2.2361
```

تحلیل کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری

برای بررسی کنترل‌پذیری سیستم، ماتریس کنترل‌پذیری $\mathcal{C}$ به صورت زیر محاسبه شد:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}.$$

محاسبات نشان داد که رتبه این ماتریس برابر با 2 است، در حالی که ابعاد ماتریس A برابر با 3 می‌باشد. بنابراین سیستم کنترل‌پذیر نیست.

همچنین سیستم دارای قطب در قسمت راست صفحه مختلط است، که نشان‌دهنده ناپایداری آن در وضعیت اولیه است.

انتخاب روش مناسب برای طراحی کنترل‌کننده

با توجه به عدم کنترل‌پذیری سیستم و نیاز به انتقال قطب‌ها به موقعیت مطلوب، روش کنترل‌کننده خطی مربعی LQR انتخاب شد. دلایل این انتخاب عبارت‌اند از:

۱. قابلیت استفاده در سیستم‌های چندورودی (**MIMO**): روش LQR محدود به سیستم‌های تک‌ورودی نیست و به‌راحتی در سیستم‌های چندورودی پیاده‌سازی می‌شود.

۲. بهینه‌سازی عملکرد: این روش با حداقل‌سازی تابع هزینه‌ای شامل حالات سیستم Q و ورودی‌های کنترلی R یک کنترل بهینه ارائه می‌دهد.

۳. تضمین پایداری: قطب‌های سیستم حلقه بسته به مکان‌هایی منتقل می‌شوند که پایداری سیستم تضمین شود.

۴. سهولت طراحی: برخلاف روش‌های دیگر، LQR نیازی به حل دستی معادلات مشخصه ندارد و بهره K مستقیماً محاسبه می‌شود.

نتیجه‌گیری

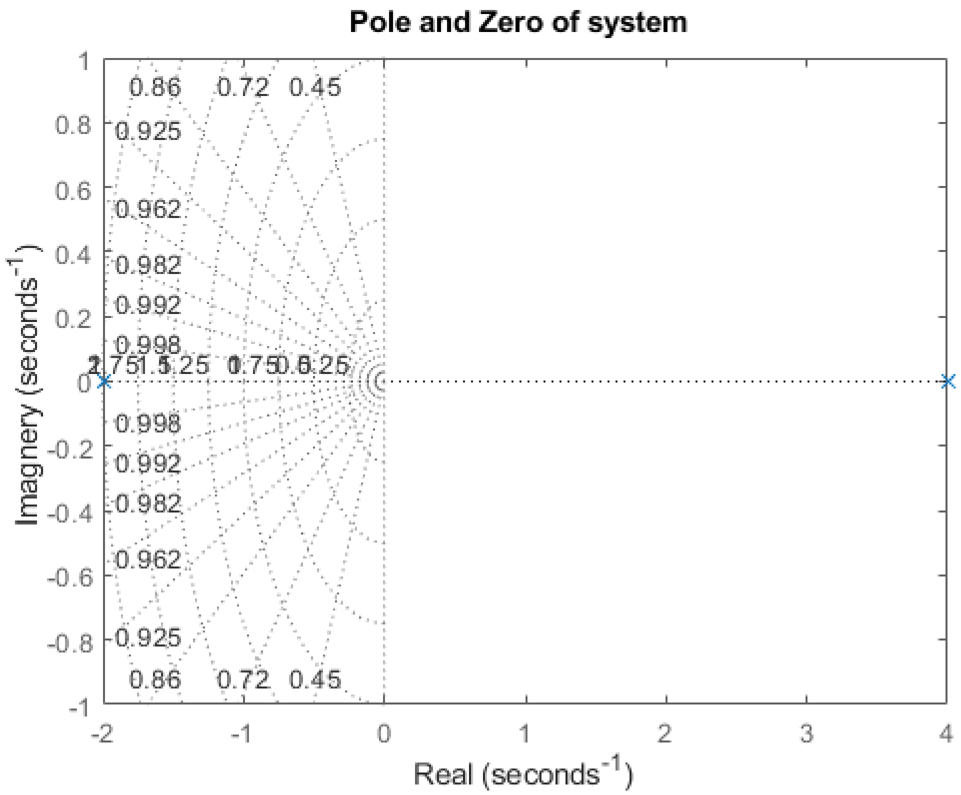
در این گزارش نشان داده شد که سیستم اولیه کنترل‌پذیر نیست و دارای قطب در سمت راست صفحه مختلط است، که ناپایداری سیستم را اثبات می‌کند. با استفاده از روش LQR، کنترل‌کننده‌ای طراحی شد که پایداری سیستم و انتقال قطب‌ها به مکان‌های مطلوب تضمین شد.

راهکار پیشنهادی برای سیستم‌های مشابه:

۱. بازطراحی ماتریس‌های سیستم: با تغییر در ساختار ماتریس B یا استفاده از ورودی‌های اضافی می‌توان کنترل‌پذیری سیستم را بهبود داد.

۲. استفاده از کنترل مقاوم: در سیستم‌های با ناپایداری بالا یا عدم قطعیت، کنترل مقاوم می‌تواند گزینه مناسبی باشد.

نمودار مکان هندسی قطب ها و صفرها :



تقدیر و تشکر

این گزارش را با سپاس و قدردانی از جناب آقای وفا خلیلی، توسعه‌دهنده کتابخانه ارزشمند xepersian، به پایان می‌رسانیم. تلاش‌های بی‌وقفه ایشان در جهت توسعه ابزارهای متناسب با نیازهای زبان فارسی، سهم بزرگی در پیشرفت جامعه علمی و فنی ما داشته است. این کتابخانه امکان نگارش مستندات علمی به زبان فارسی را در محیط LaTeX فراهم کرده و برای همه ما الهام‌بخش بوده است.

با سپاس فراوان،
نویسنده محمد ده‌بزرگی