

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

Факультет мировой экономики и мировой политики
Департамент мировой экономики

КУРСОВАЯ РАБОТА

«Численная реконструкция распределения при неизвестной функции плотности
вероятности»

Выполнил:

Студент группы №366 (БМЭ136)

Шанидзе Д.В.

Научный руководитель:

д.э.н., профессор, заведующий секцией мировых финансов

Евстигнеев В.Р.

Москва 2016

Оглавление

Введение	3
Глава 1	5
Выбор данных для исследования	5
Реконструкция функции плотности вероятности на основе интегрального метода наименьших квадратов	5
Выбор количества моментов для реконструкции на основе числа обусловленности матрицы	10
Постановка и решение задачи вариационного исчисления для устранения отрицательно определённых значений функции плотности вероятности	11
Глава 2	14
Реконструкция функции плотности вероятности на основе максимизации функционала информационной энтропии по Шеннону	14
Выбор мощности окна реконструкции.	18
Постановка и решение вариационной задачи для нахождения совместной функции плотности вероятности.....	18
Оценка статистических характеристик функции плотности вероятности	21
Выбор торговых правил и оценка их доходности	22
Заключение	27
Список литературы	29

Введение

В данном исследовании мы попытаемся применить численные методы реконструкции неизвестной функции плотности вероятности на основе эмпирических приближениях моментов.

Реконструкции распределения на основе ограниченного числа моментов известна в литературе, как классическая проблема моментов, которая формулируется следующим образом: необходимо получить информацию о распределении μ , зная его моменты $\int x^k \mu(x) dx$. В частности, данная задача именуется проблемой Хаусдорфа, так как функция оценивается на ограниченном интервале¹.

Цель данного исследования заключается в оценке методов беспредопосылочной реконструкции функции плотности вероятности для дальнейшего прогнозирования на валютном рынке курса доллара к евро. В соответствии с этой целью в работе ставятся и решаются следующие задачи:

- Оценить функцию плотности вероятности на основе интегрального метода наименьших квадратов и приближения функции плотности распределения на основе максимизации функционала информационной энтропии по Шеннону;
- Оценить количество необходимых моментов на основе числа обусловленности;
- Выбрать мощность окна реконструкции на основе взаимной информации;
- Оценить статистические характеристики реконструированных плотностей распределения;

¹ Thanh Mai Pham Ngoc. Statistical minimax approach of the Hausdorff moment problem. Inverse Problems, Institute of Physics: Hybrid Open Access, 2008, P. 1

- Разработать торговые правила на основе статистических характеристик для прогноза поведения пары доллар-евро.

Объектами исследования являются функции плотности вероятности различного вида. Предмет исследования – эффективность применения различных численных методов реконструкции функции плотности вероятности.

Глава 1

Выбор данных для исследования

Для исследования были выбраны минутные данные значений валютного курса пары доллар-евро в период с 28.10.2014 по 29.01.2015, в течении которого будет происходить реконструкция функции плотности вероятности на скользящем временном окне мощностью k .

В данной работе мы будем использовать данные с задержкой в 5 минут и ограничимся для начала окном реконструкции $k=12$ (1 час).

Реконструкция функции плотности вероятности на основе интегрального метода наименьших квадратов

В данном исследовании мы делаем предположением о том, что необходимо оценить неизвестную функцию $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ на основе моментов данной функции, при этом заменив эти моменты на их приближение, эмпирические моменты. Реконструкции на основе интегрального метод наименьших квадратов предполагает, что функция плотности вероятности $p(x)$ имеет вид обычного полинома, функцию плотности вероятности $p(x)$ требуется заменить обобщенным полиномом $Q_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение функции $p(x)$ от обобщенного полинома $Q_m(x)$ на указанном множестве $X = \{x\}$ было наименьшим².

В общем случае полином $Q_m(x)$ имеет вид:

$$Q_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x), (1)$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \dots \varphi_m(x)$ — система функций;

$c_0, c_1 \dots c_m$ — постоянные коэффициенты, обобщённые полиномы.

² Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. —М.: Издательство «Наука», 1967. С. 40

В нашем случае система $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \dots \varphi_m(x)$ будет состоять из целых неотрицательных степеней переменной x , т.е. $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x \dots \varphi_m(x) = x^m$, тогда полином $Q_m(x)$ принимает вид:

$$Q_m(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m. (2)$$

Полином (2) называется обычным полиномом степени m .

В численном методе реконструкции функции плотности вероятности будет использовано интегральное квадратичное аппроксимирование функции на отрезке, тогда множество $X = \{x\}$, на котором будет оценена функция плотности вероятности, есть отрезок $a \leq x \leq b$.

В интегральном способе наименьших квадратов за меру отклонения функции $p(x)$ от полинома $Q_m(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимается величина⁴:

$$I_m = \int_a^b [Q_m(x) - p(x)]^2 dx (3)$$

Для наилучшей аппроксимации функции плотности вероятности $p(x)$ нужно подобрать коэффициенты $c_0, c_1 \dots c_m$ функции I_m таким образом, чтобы отклонение функции $p(x)$ от полинома $Q_m(x)$ было наименьшим, а функция I_m принимала свое наименьшее значение, тогда, получаем систему уравнений⁵:

³ Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. –М.: Издательство «Наука», 1967. С. 41

⁴ Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. –М.: Издательство «Наука», 1967. С. 40

⁵ Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. –М.: Издательство «Наука», 1967. С. 41

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial I_m}{\partial C_0} &= \int_a^b [Q_m(x) - p(x)] dx = 0 \\
\frac{1}{2} \frac{\partial I_m}{\partial C_1} &= \int_a^b [Q_m(x) - p(x)] x dx = 0 \\
&\vdots \\
\frac{1}{2} \frac{\partial I_m}{\partial C_m} &= \int_a^b [Q_m(x) - p(x)] x^m dx = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Преобразовав систему уравнений (4), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [Q_m(x)] dx &= \int_a^b p(x) dx \\
\int_a^b [Q_m(x)] x dx &= \int_a^b x p(x) dx \\
&\vdots \\
\int_a^b [Q_m(x)] x^m dx &= \int_a^b x^m p(x) dx
\end{aligned} \tag{5}$$

откуда видно, что правая часть системы уравнений (5) есть моменты функции $p(x)$.

Раскрыв левую часть системы уравнений (5), получим:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m] dx &= \int_a^b p(x) dx \\
\int_a^b [c_0 x + c_1 x^2 + \dots + c_m x^{m+1}] dx &= \int_a^b x p(x) dx \\
&\vdots \\
\int_a^b [c_0 x^m + c_1 x^{m+1} + \dots + c_m x^{2m}] dx &= \int_a^b x^m p(x) dx
\end{aligned} \tag{6}$$

Для упрощения вида системы уравнений (6), учитывая, что $s_n = \int_a^b x^n dx$, получим

$$\begin{aligned} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_m s_m &= \int_a^b p(x) dx \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \dots + c_m s_{m+1} &= \int_a^b x p(x) dx \\ &\vdots \\ c_0 s_m + c_1 s_{m+1} + \dots + c_m s_{2m} &= \int_a^b x^m p(x) dx \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь необходимо заменить моменты в правой части системы (7) на эмпирические приближения моментов в виде средних степеней:

$$\int_a^b x^m p(x) dx \approx \frac{\sum_{n=0}^N u^m}{N} \quad (8)$$

Система (7) после замены (8) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_m s_m &= 1 \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \dots + c_m s_{m+1} &= \frac{\sum_{n=0}^N u}{N} \\ &\vdots \\ c_0 s_m + c_1 s_{m+1} + \dots + c_m s_{2m} &= \frac{\sum_{n=0}^N u^m}{N} \end{aligned} \quad (9)$$

Решением системы (9) является набор скалярных параметров $\overrightarrow{\{c\}}$ функции плотности вероятности $p(x)$, которая имеет вид обычного полинома.

Оценив скалярные параметры функции плотности вероятности в виде полинома $Q_m(x)$ порядка $m=2$, мы получим функцию $p(x)$ вида:

$$p(x) = Q_m(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2, \quad (10)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – скалярные параметры функции $p(x)$, оцененные интегральным способом наименьших квадратов.

Оцененная интегральным способом наименьших квадратов, функция плотности вероятности (10) отвечает условию нормировки

$$\int_a^b p(x) = 1.$$

Ниже представлен график функции плотности вероятности $p(x) = Q_2(x)$, реконструированный на одном из временных интервалов.

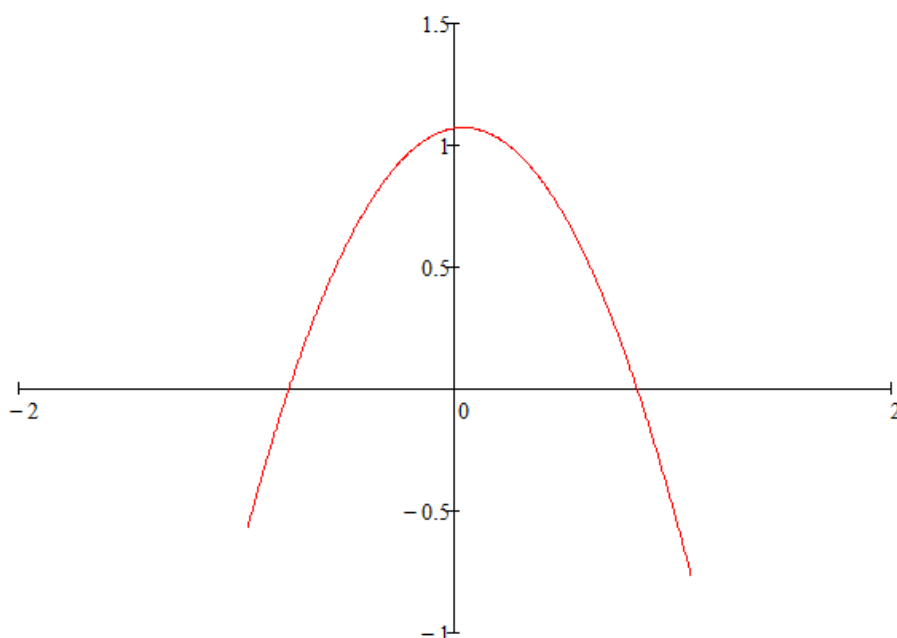


Рисунок 1. График функции плотности вероятности $p(x)$

Как видно из рисунка 1., реконструированная функция плотности вероятности не отвечает одному из основных свойств – плотность распределения есть неотрицательная функции

$$p(x) \geq 0.$$

Выбор количества моментов для реконструкции на основе числа обусловленности матрицы

При решении системы (9) возникает вопрос о количестве линейных уравнений $M=m+1$ и моментов $2m$, которое необходимо использовать для реконструкции функции плотности вероятности $p(x)$.

Для решения данной проблемы в качестве ограничения на количество моментов будет использовано число обусловленности. Число обусловленности $cond(A)$ является количественной оценкой обусловленности:

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|,$$

где $\|A\| = \sqrt{\max(\lambda)}$ – спектральная норма матрицы M , подчиненная норме $\|x\|_2$ (λ – собственные числа $A * A^T$).

Так, если $cond(M) > 10^3$, то матрица считается M плохо обусловленной, тогда сколько угодно малая погрешность в правой части системы уравнений приведет к сколь угодно большой погрешности в оценке скалярных параметров функции плотности вероятности, что особенно важно учитывать, так как эмпирические моменты являются приближенными, оценка которых так или иначе имеет погрешность.

Помимо точности оценки коэффициентов функции плотности вероятности число обусловленности будет также являться ограничением меры сложности наблюдаемого процесса.

В зависимости от временной задержки данных и длины окна реконструкция число обусловленности принимает различные значения.

Постановка и решение задачи вариационного исчисления для устранения отрицательно определённых значений функции плотности вероятности

Для того чтобы попытаться исправить данный недостаток реконструкции функции плотности вероятности при помощи интегрального способа наименьших квадратов, будем решать задачу вариационного исчисления.

Необходимо найти минимум функционала вида

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (11)$$

где y – функция распределения, $y' = q(x)$ – функция плотности вероятности.

В нашем случае функционал (11) имеет два интегральных ограничения:

1. Принцип максимума энтропии

$$H = - \int_a^b q(x) \ln[q(x)] dx \rightarrow \max;$$

2. Интегральный способ наименьших квадратов

$$I = \int_a^b [q(x) - p(x)]^2 dx \rightarrow \min.$$

С учетом этих двух ограничений подынтегральная функция, независимая от y , имеет вид

$$F(x, y' = q(x)) = y' \ln[y'] + \beta (y' - p(x))^2, \quad (12)$$

где β является множителем Лагранжа

Для того чтобы функционал (11), определенный на множестве функции $y=y(x)$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющим условиям

$y(a)=A$, $y(b)=B$, достигал на данной функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы это функция удовлетворяла уравнению Эйлера⁶

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Так как подынтегральная функция не зависит от y , то в этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. (13)$$

Будем решать уравнение (13), как дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно функции плотности вероятности с граничными условиями $y(a)=0$, $y(b)=0$.

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \ln(y') + \beta(2y' - 2p(x)) + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial y'}{\partial x} - 2\beta y' \frac{\partial p(x)}{\partial x} + 2\beta y' \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial q(x)}{\partial x} - 2\beta q(x) \frac{\partial p(x)}{\partial x} + 2\beta q(x) \frac{\partial q(x)}{\partial x}$$

Продифференцировав подынтегральную функцию (12), уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} - 2\beta q(x) \frac{\partial p(x)}{\partial x} + 2\beta q(x) \frac{\partial q(x)}{\partial x} = 0. (14)$$

Уравнение (14) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{(2\beta q(x) + 1) \partial q(x)}{q(x) \partial x} = 2\beta \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Точным решением данного уравнения является

⁶ Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961 г. С. 21-22

$$\int \frac{(2\beta q(x) + 1)}{q(x)} dq(x) = 2\beta \int dp(x) + C, (15)$$

где C – произвольная постоянная.

Проинтегрировав обе части решения (15) и решив относительно $q(x)$, получим новую функцию плотности вероятности

$$q(x) = \exp[C - W(2\beta \exp[C + 2\beta p(x)] + 2\beta p(x))], (16)$$

где $W(x)$ представляет собой функцию Ламберта.

Прежде всего необходимо умножить функцию (16) на такой нормирующий множитель N , чтобы функция плотности сохраняло условие нормировки

$$N \int_a^b q(x) dx = 1,$$

откуда

$$N = \frac{1}{\int_a^b q(x) dx}.$$

Теперь функция плотности вероятности () принимает вид

$$q(x) = N * \exp[C - W(2\beta \exp[C + 2\beta p(x)] + 2\beta p(x))]. (17)$$

Функцию Ламберта $W(x)$ имеет разложение в ряд⁷

$$W(x) = \sum_{n=1}^K \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)},$$

которое мы подставим в функцию (17) для упрощения вида функции плотности вероятности $q(x)$.

⁷ Lambert W-Function [электронный ресурс] / Wolfram Math World. – URL: <http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html> (Дата обращения 26.04.16)

Теперь построим график функции плотности вероятности (17).

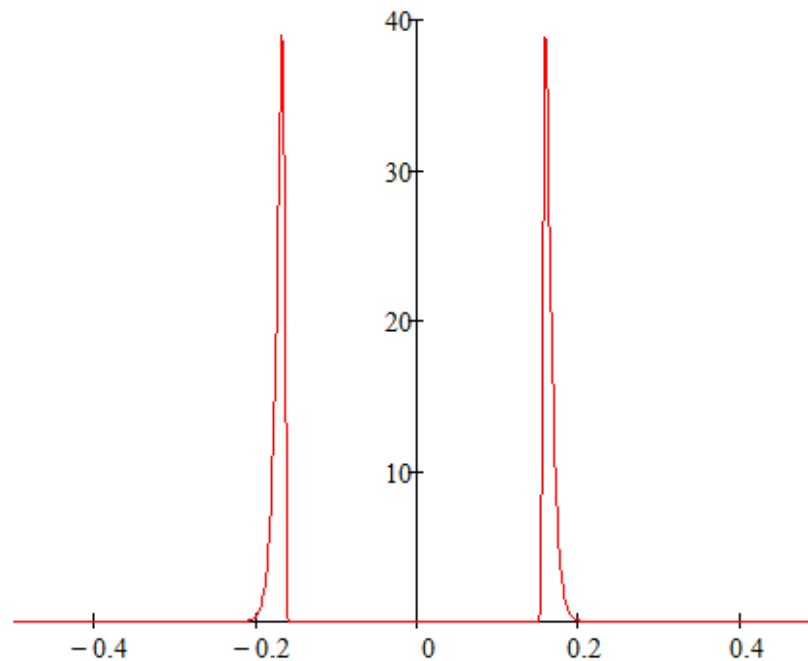


Рисунок 2. График функции плотности вероятности $q(x)$

Как видно из рисунка 2., функция плотности вероятности имеет две одинаковые вершины симметричные относительно нуля, что наталкивает на предположение о том, что оценка ее статистических характеристик будет ненадёжной.

Глава 2

Реконструкция функции плотности вероятности на основе максимизации функционала информационной энтропии по Шеннону

Другой подход к реконструкции функции плотности вероятности основан на получении аналитической формы приближения функции плотности распределения через максимизацию функционала информационной энтропии по Шеннону с ограничениями по моментам⁸

⁸ Frontini M., Tagliani A. Entropy-Convergence, Instability In Stieltjes And Hamburger Moment Problems. 2000. P. 1

$$S(f) = - \int f(x) \ln f(x) dx - (\lambda_0 - 1) \left(\int f(x) dx - \mu_0 \right) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\int x^i f(x) dx - \mu_i \right). \quad (18)$$

Аналитическая форма приближения функции плотности вероятности имеет вид⁹

$$f_N(x) = \exp\left(- \sum_{i=0}^N \lambda_i x^i\right)$$

Аргументом в пользу получения функции плотности вероятности в таком виде является то, что такой вид приближения функции плотности вероятности наименее субъективен¹⁰.

В работе [4] ставится задача о нахождении моментов по функции плотности вероятности. Мы же будем решать обратную задачу – будем искать скалярные параметры функции по эмпирическим приближениям моментов.

Скалярные параметры мы будем находить из следующего соотношения¹¹

$$(n+1)\mu_n - \sum_{i=1}^N i \lambda_i \mu_{n+i} = 0 \quad (n \geq 1), \quad (19)$$

в котором моменты μ будут заменены на их эмпирическое приближение (8). Видно, что соотношение (19) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_2 \mu_3 + \dots + N\lambda_N \mu_{1+N} &= 2\mu_1 \\ \lambda_1 \mu_3 + 2\lambda_2 \mu_4 + \dots + N\lambda_N \mu_{2+N} &= 3\mu_2 \\ &\vdots \\ \lambda_1 \mu_{1+N} + 2\lambda_2 \mu_{2+N} + \dots + N\lambda_N \mu_{2N} &= (N+1)\mu_N \end{aligned} \quad (20)$$

⁹ Frontini M., Tagliani A. Entropy-Convergence, Instability In Stieltjes And Hamburger Moment Problems. 2000. P. 2

¹⁰ Frontini M., Tagliani A. Entropy-Convergence, Instability In Stieltjes And Hamburger Moment Problems. 2000. P. 2

¹¹ Frontini M., Tagliani A. Entropy-Convergence, Instability In Stieltjes And Hamburger Moment Problems. 2000. P. 2

Как и в способе на основе интегрального метода наименьших квадратов, возникает вопрос о количестве моментов, необходимом для реконструкции функцию плотности вероятности. Используя число обусловленности $cond(A)$, попытаемся разрешить этот вопрос.

Выбрав необходимое число моментов и решив систему уравнений (20), мы получим скалярные параметры функции плотности вероятности $f_K(x)$.

Теперь функцию плотности вероятности $f_K(x)$ необходимо умножить на нормирующий множитель N , чтобы выполнялось условие нормировки.

Так функция плотности вероятности $f_K(x)$ имеет вид

$$f_K(x) = N * \exp\left(-\sum_{i=1}^K \lambda_i x^i\right).$$

Ниже представлен график данной функции плотности вероятности вида

$$f_2(x) = N * \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2). \quad (21)$$

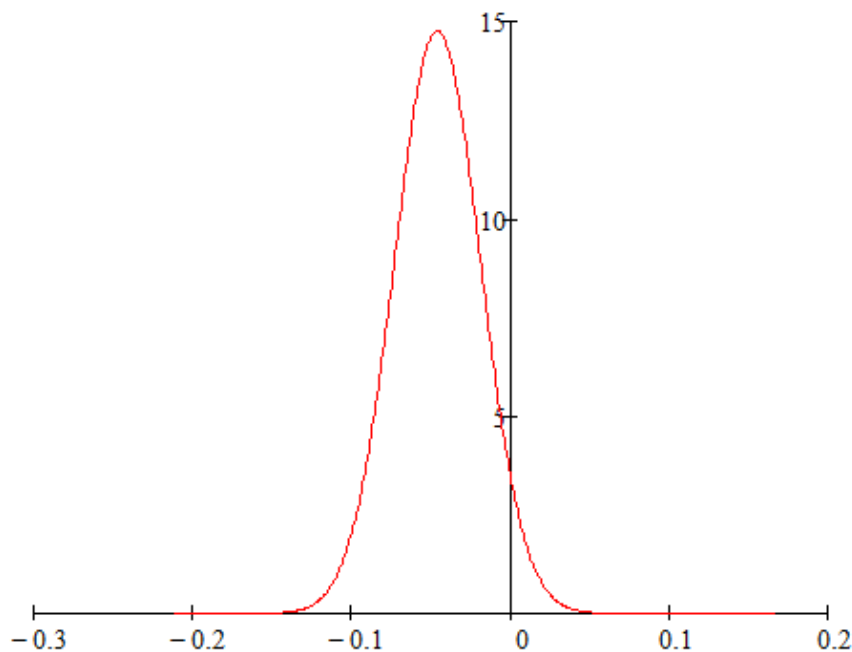


Рисунок 3. График функции плотности вероятности $f_2(x)$

Функция плотности вероятности данного вида отвечает всем основным свойствам - является нормированной и неотрицательной функцией. Также данный вид функции плотности вероятности не подходит под ограничение на основе числа обусловленности, значение которого не превышало 10^3 .

Для того, чтобы в дальнейшем оценить влияние меры сложности, мы также реконструируем функцию плотности вероятности

$$f_3(x) = N * \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \lambda_3 x^3), (22)$$

число обусловленности которой при реконструкции превышало 10^3 . Функция плотности вероятности (22) соответствует основным свойствам плотности распределения.

График функции (22) представлен ниже.

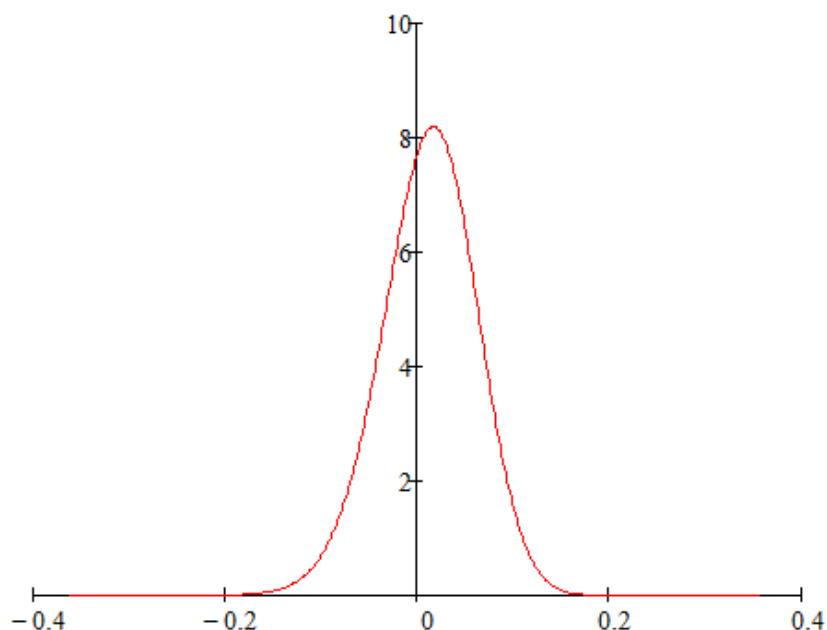


Рисунок 4. График функции плотности вероятности $f_3(x)$

Функции плотности вероятности $f_K(x)$, в экспоненте которых порядок полнума $K > 3$, имеют число обусловленности намного превышающее значение 10^3 , что приводит к неточным оценкам скалярных параметров функции плотности вероятности, соответственно вид функции при реконструкции

становится сильно искажен. Поэтому мы ограничимся функциями плотности вероятности порядка 2 и 3.

Выбор мощности окна реконструкции.

Оценка функции плотности вероятности $p(x)$ происходит на скользящем окне u , мощность которого составляет N . Мощность скользящего окна будет выбираться из соображений использования взаимной информации, между двумя плотностями распределениями $p(x)$ и $q(y)$, при реконструкции которых использовались скользящие окна разной длины, m и $m+n$ соответственно. Взаимная информация является мерой связи между двумя вероятностными распределениями

$$I(X, Y) = \int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} f(x, y) \ln \left(\frac{f(x, y)}{p(x)q(y)} \right) dx dy,$$

где $f(x, y)$ – функция плотности совместной вероятности X и Y .

Необходимо выбрать длину скользящего окна такую, чтобы оно включало наибольшее количество зависимых наблюдений. Поэтому в качестве длины окна мы будем использовать значение, при котором взаимная информация между $p(x)$ и $q(y)$ достигает первого минимума¹².

Постановка и решение вариационной задачи для нахождения совместной функции плотности вероятности

Совместную функцию плотности вероятности $f(x, y)$ будем искать, предположив, что она имеет вид

$$f(x, y) = p(x)q(x)w(x, y), (23)$$

¹² Хайкин С. Нейронные сети. Нейронные сети: полный курс, 2е издание. : Пер. с англ. М. Издательский дом "Вильямс", 2006. С. 901

где $w(x, y)$: $w(x, y) > 0 \forall (x, y)$ - функция связи $p(x)$ и $q(y)$.

Тогда, решив вариационную задачу, необходимо найти минимум функционала

$$F(w(x, y), x, y) = p(x)q(x)w(x, y) \ln[p(x)q(x)w(x, y)] + \\ \alpha xy p(x)q(y)w(x, y) + \beta x^2 y^2 p(x)q(y)w(x, y) \rightarrow \min,$$

где $p(x)q(x)w(x, y) \ln[p(x)q(x)w(x, y)]$ – принцип максимума энтропии;
 $xy p(x)q(x)$ и $x^2 y^2 p(x)q(x)$ – ограничения по моментам 1-го и 2-го порядка;
 α и β – множители Лагранжа при соответствующих ограничениях.

Продифференцировав функционал () по $w(x, y)$, получим

$$p(x)q(y) \left(\ln(w(x, y)q(x)p(x)) + \alpha xy p(x)q(y)w(x, y) + \beta x^2 y^2 p(x)q(y)w(x, y) \right) \\ = 0, (24)$$

откуда мы найдем функцию связи $w(x, y)$, решив уравнение (24) относительно $w(x, y)$, которая принимает вид

$$w(x, y) = \frac{\exp[-\beta x^2 y^2 - \alpha xy - 1]}{p(x)q(y)}$$

Учитывая (), совместная функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x, y) = \exp[-\beta x^2 y^2 - \alpha xy - 1],$$

которую также нужно умножить на такой нормирующий множитель, чтобы соблюдалось условие нормировки двумерной плотности распределения

$$N \int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} f(x, y) dx dy = 1,$$

откуда

$$N = \frac{1}{\int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} f(x, y) dx dy} = 1$$

Умножив () на нормирующий множитель, получим двумерную функция плотности распределения,

$$f(x, y) = N * \exp[-\beta x^2 y^2 - \alpha xy - 1].$$

Теперь рассчитаем, как с увеличением длины скользящего окна изменяется взаимная информация между функцией плотности вероятности $f_K(x)$ с длиной скользящего окна равного 12 и функцией $f_K(x)$, длина которого будет изменяться.

Ниже представлены графики значений взаимной информации функций плотности вида

$$f_2(x) = N * \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2) \text{ и } f_3(x) = N * \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \lambda_3 x^3).$$

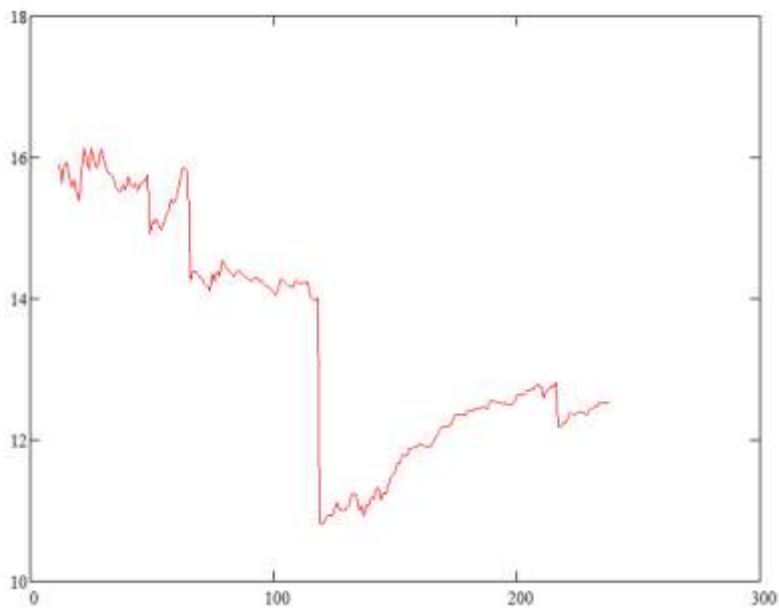


Рисунок 5. Значения взаимной информации для функции плотности вероятности $f_2(x)$

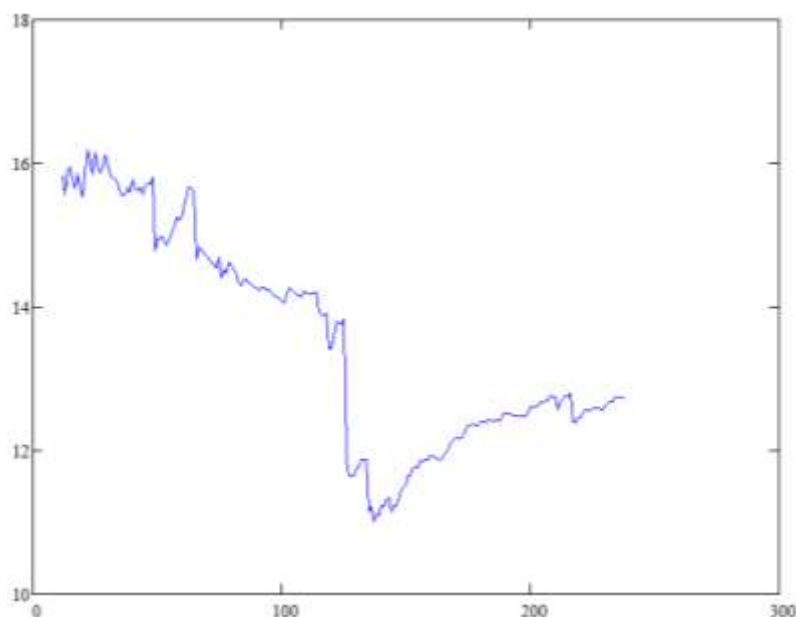


Рисунок 6. Значения взаимной информации для функции плотности вероятности $f_3(x)$

Для функций плотности вероятности $f_2(x)$ и $f_3(x)$ взаимная информация достигает своего первого минимума при длине окна 120 и 137 соответственно. Данные значения мы будем использовать в дальнейшем для реконструкции.

Оценка статистических характеристик функции плотности вероятности

На основе функции плотности вероятности $f_K(x)$ мы будем оценивать статистические характеристики: математическое ожидание, мода, медиана, моменты 3-го и 5-го порядка. В дальнейшем на их основе мы попробуем сформулировать торговые правила.

Математическое ожидание будем рассчитывать, как математическое ожидание непрерывной случайно величины

$$Mean = \int_a^b xf(x)dx.$$

Мода представляет собой самое часто встречающееся значение случайной величины, поэтому моду будем искать в виде экстремума функции плотности

вероятности $f(x)$. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$ (достаточное условие), то $f(x)$ в точке x_0 достигает локального максимума. Тогда x_0 является модой функции $f(x)$.

Медиану будем искать как верхнюю границу интеграла из условия, что

$$\int_a^{Median} f(x)dx = \frac{1}{2},$$

так как медиана делит функцию плотности на две равные части.

Моменты 3-го и 5-го порядка будем искать как моменты непрерывной случайной величины:

$$M3 = \int_a^b x^3 f(x)dx \text{ и } M5 = \int_a^b x^5 f(x)dx.$$

Выбор торговых правил и оценка их доходности

В качестве торговых правил мы будем использовать знаки статистических характеристик и знаки их различных комбинаций разностей. Так, если в текущий момент времени t знак «положительный», то в момент времени $t+1$ мы прогнозируем «рост» и играем в длинную позицию, и наоборот, если в момент времени t знак «отрицательный», то в момент времени $t+1$ мы прогнозируем «падение» и играем в короткую позицию.

Для функции плотности вероятности $f_2(x)$, используя данное торговое правило, лучшим образом себя показали следующие комбинации статистических характеристик, на основе которых мы сформулируем обобщенное торговое правило:

$$\begin{aligned} &sign(M5 - M3) \\ &sign(M5 - Mean) \\ &sign(M5 - Mode) \\ &sign(M5 - Median). \end{aligned}$$

Также стоит отметить что, выбор окна на основе взаимной информации не является неоправданным. Для этого мы сравним доходности по этим 4 комбинациям в приведенной ниже таблице.

Доходность, %								
Торговое правило	Длина окна реконструкции							
	12	48	72	100	115	120	125	140
$sign(M5 - M3)$	9,5	4,4	9,8	9,4	8,9	9,7	8,4	8,3
$sign(M5 - Mean)$	7,4	3,4	8,6	8,3	8,2	9,3	8,1	7,9
$sign(M5 - Mode)$	7,5	3,4	8,5	8,4	8,2	9,5	8	8
$sign(M5 - Median)$	3	2,9	8,5	8,9	7,6	8,9	7,6	7,8

Как видно из таблицы, в 3-х случаях из 4-х доходность, если выбирать мощность окна реконструкции на основе взаимной информации, оказалась выше или не хуже, чем в остальных случаях, а в 4 случае доходность была ниже всего на 0,1%.

В случае с функцией плотности вероятности $f_3(x)$ наибольшую доходность показали следующие статистические характеристики и их комбинации:

$$\begin{aligned}
 &sign(-M5) \\
 &sign(M5 - Mode) \\
 &sign(Median - Mean) \\
 &sign(Mode - M3).
 \end{aligned}$$

Доходности в зависимости от мощности окна реконструкции представлены в таблице ниже.

Доходность, %								
Торговое правило	Длина окна реконструкции							
	12	48	72	117	132	137	142	157
$sign(-M5)$	0,5	8,2	-0,4	1	3,3	6,9	3,9	2,6

$sign(Median - Mean)$	-3,1	16,9	10,8	5	5,8	7,5	6,7	6,3
$sign(M5 - Mode)$	-10,3	7,5	2	-2,2	4,5	8,5	6,4	5,2
$sign(Mode - M3)$	-9,4	2,2	1,4	2,9	5,6	8,2	5,6	4,8

Мы видим из приведенных в таблице результатов, что выбор окна на основе метода информации не так уже эффективен, но если мы будем искать локальный минимум на более коротком отрезке значений, то увидим, что связь между такой высокой доходностью и мощностью окна реконструкции не случайна.

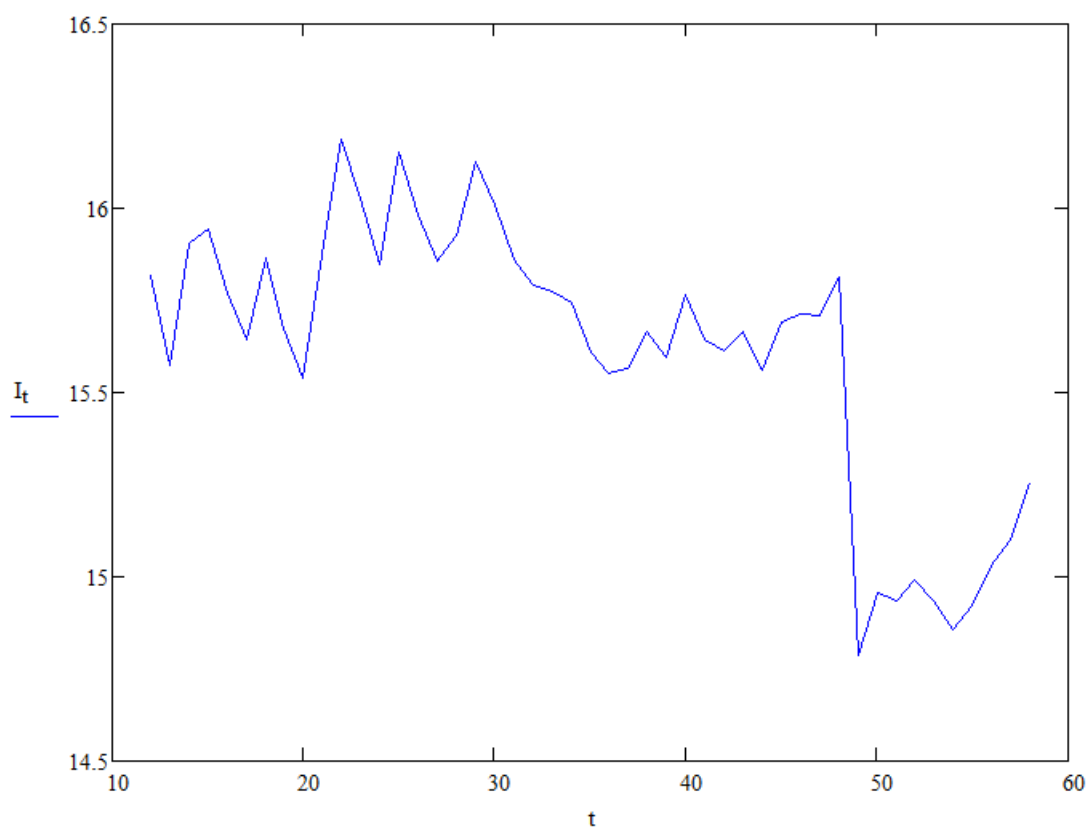


Рисунок 7. Значения взаимной информации для функции плотности вероятности $f_3(x)$

Как видно из графика именно по оси абсциссы в районе значения мощности 48 взаимная информация достигает локального минимума, если искать его на более коротком отрезке значений взаимной информации.

Теперь построим торговое правило, которое будет учитывать знаки четырех самых доходных показателей. Так, если сумма знаков положительна, то мы

прогнозируем «рост» и играем в длинную позицию, в противоположном случае играем в короткую позицию. Если же сумма знаков равна нулю, то мы воздержимся от занятия позиции.

Доходность нашей торговой стратегии мы будем сравнить со стратегией «купи и держи». Ниже представлен график изменения стоимости портфеля при использовании двух этих «стратегий».

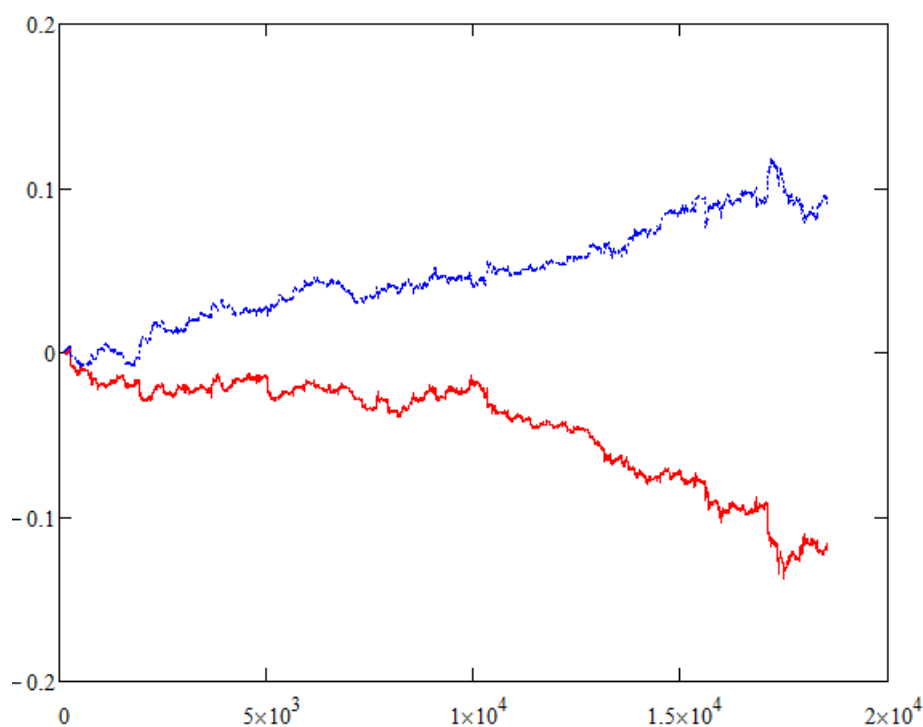


Рисунок 8. Доходности стратегии на основе статистических показателей (синяя линия) и стратегии «купи и держи» (красная линия)

Как видно из рисунка 8., если придерживаться стратегии «купи и держи» (красная линия), то мы «проигрываем у рынка» 10,9%, то есть стоимость нашего портфеля за период с по упала на 10,4%. Если же мы придерживаемся обобщённого торгового правила на основе статистических характеристик функции плотности вероятности вида

$$f_2(x) = N * \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2),$$

и мощностью окна реконструкции 120, то стоимость нашего портфеля к концу периода увеличивается на 9,4%.

Что касается доходности при использовании торгового правила на основе статических показателей функции вида

$$f_3(x) = N * \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3),$$

то доходность нашего портфеля увеличивается на 7,3%, как видно из ниже представленного рисунка 9., при этом доходность имеет менее стабильный характер.

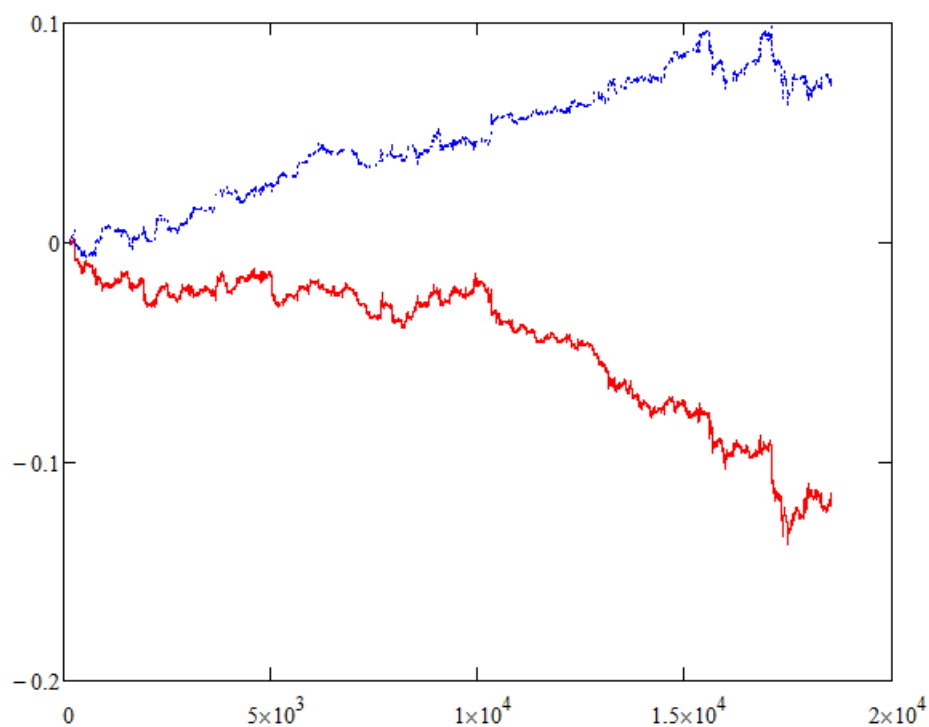


Рисунок 9. Доходности стратегии на основе статистических показателей (синяя линия) и стратегии "купи и держи"(красная линия)

Заключение

Проводя исследование об эффективности применения двух численных методов реконструкции функции плотности вероятности, мы выяснили, что помимо выбора самого метода очень важно учитывать параметры реконструкции: меру сложности функции плотности вероятности и мощность скользящего окна реконструкции. Выбор этих параметров оказывает большое влияние на то, насколько точно мы сможем оценить функцию плотности, от которой зависит точность оценок статистических характеристик, и соответственно эффективность и доходность торговых правил на их основе.

Так, мы можем сделать вывод, что ограничение меры сложности функции плотности вероятности по средствам числа обусловленности показало свою эффективность. Торговые правила построенные на основе статистик функции плотности вероятности, число обусловленности которых незначительно превышало пороговое значение, показывали доходности ниже, чем функции для которых выполнялось ограничение. Функции, чьи числа обусловленности намного превышали данное пороговое значение, не удавалось реконструировать.

Также нужно отметить важность выбора мощности окна реконструкции. В данной работе мы использовали метод на основе взаимной информации, которой оказался крайне эффективным способ. Так, доходность при выборе окна реконструкции на основе метода взаимной информации оказалось намного выше, в случае выбора окна реконструкции из субъективных соображений.

Что касается самих методов реконструкции, то способ на основе интегрального метода наименьших квадратов абсолютно не пригоден для нахождения приближенного вида функции плотности вероятности в силу того, что функция полученная таким образом не отвечает основным свойствам функции плотности распределения. Даже попытки привести функции плотности вероятности, решая вариационную задачу, к такому виду, чтобы ее можно

использовать в дальнейшем, привели к функции плотности вероятности очень сложной структуры, оценивать статистику, которой не имеет смысла.

Метод на основе максимизации функционала информационной энтропии по Шеннону показал свою прикладную значимость, показывая относительно высокую доходность. Тем не менее надо учитывать, что данный метод можно применять только в совокупности с правильно выбранными параметрами реконструкции. В большей степени именно от этих параметров зависит насколько эффективна будет реконструкция функции плотности вероятности.

Список литературы

1. Thanh Mai Pham Ngoc. Statistical minimax approach of the Hausdorff moment problem. Inverse Problems, Institute of Physics: Hybrid Open Access, 2008,
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Издательство «Наука», 1967. С. 41
3. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
4. Frontini M., Tagliani A. Entropy-Convergence, Instability In Stieltjes And Hamburger Moment Problems. 2000.
5. Хайкин С. Нейронные сети. Нейронные сети: полный курс, 2е издание. : Пер. с англ. М. Издательский дом "Вильямс", 2006.
6. Lambert W-Function [электронный ресурс] / Wolfram Math World. – URL: <http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html> (Дата обращения 26.04.16)