

## Übungsblatt 3

November 3, 2016

### 3. Übung

#### Aufgabe 3.1

Beschreiben Sie eine 1-Band-TM, die die Sprache  $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  mit einem Zeitbedarf in  $O(m \log m)$  akzeptiert, wobei  $m$  die Länge der Eingabe bezeichnet.

Es ist **nicht** notwendig die Turingmaschine explizit anzugeben. Eine Beschreibung ihrer Arbeitsweise und Laufzeit in den einzelnen Arbeitsschritten genügt.

#### Aufgabe 3.2

Geben Sie das Programm einer Registermaschine zur Berechnung des Zweierlogarithmus  $\lfloor \log_2 n \rfloor$  für eine Eingabe  $n \in \mathbb{N}$  an. Erläutern Sie kurz seine Funktionsweise.

#### Aufgabe 3.3

Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$  der endlichen Wörter über den natürlichen Zahlen abzählbar ist.

#### Aufgabe 3.4

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Antwort.

a)  $H_{\leq 42} = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf Eingabe } w \text{ und zwar nach höchstens 42 Schritten}\}$

Die Sprache  $H_{\leq 42}$  ist entscheidbar. Wir kreieren eine TM  $M_{H_{\leq 42}}$  die wie folgt arbeitet.  $M_{H_{\leq 42}}$  simuliert  $\langle M \rangle$  mit der Eingabe  $w$  und speichert zusätzlich einen Zähler welche die Anzahl der bereits ausgeführten Schritte zählt. Terminiert  $M$  bevor der Zähler 42 erreicht, so akzeptiert  $M_{H_{\leq 42}}$ , andernfalls verwirft  $M_{H_{\leq 42}}$  nach 42 Schritten.

b)  $H_{\geq 42} = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ hält auf Eingabe } w \text{ und zwar nach mindestens 42 Schritten}\}$

Die Sprache  $H_{\geq 42}$  ist nicht entscheidbar. Angenommen eine TM  $M_{H_{\geq 42}}$  würde existieren, welche  $H_{\geq 42}$  entscheidet. Wir könnten dann eine TM  $M_{H_{\epsilon}}$  konstruieren welche das Halteproblem  $H_{\epsilon}$  entscheidet. Hierzu würde  $M_{H_{\epsilon}}$  aus der gegebenen TM  $\langle M \rangle$  eine TM  $M'$  berechnen, welche 42 Schritte nach rechts läuft und anschliessend die TM  $M$  mit Eingabe  $w$  simuliert.  $M_{H_{\epsilon}}$  ruft also  $M_{H_{\geq 42}}$  mit  $M'$  als Unterprogramm auf und übernimmt das Akzeptanzverhalten.