WS 16/17
Gruppe 16

Berechenbarkeit und Komplexität
Simon Wagner - 343756
Timotheus Jochum - 304222

Übungsblatt 3

November 10, 2016

3. Übung

Aufgabe 3.1

Beschreiben Sie eine 1-Band-TM, die die Sprache $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit einem Zeitbedarf in $O(m\ log\ m)$ akzeptiert, wobei m die Länge der Eingabe bezeichnet.
Es ist **nicht** notwendig die Turingmaschine explizit anzugeben. Eine Beschreibung ihrer Arbeitsweise und Laufzeit in den einzelnen Arbeitschritten genügt.

Eine TM die L erkennt, müsste die Anzahl der Einsen und Nullen zählen und am ende vergleichen. Wir verwenden hierzu eine 1-Band TM mit 3 Spuren. Unsere TM M_L arbeitet wie folgt:

1. Prüfe zunächst ob die Einagbe der Form 0^*1^* ist. O(m)
2. Laufe nun von links nach rechts über das Band und zähle die Anzahl der Nullen mit einem Zähler auf der zweiten Spur. $O(m\ log\ m)$
3. Zähle ab dem Erreichen der ersten Eins alle Einsen auf der dritten Spur $O(m\ log\ m)$
4. Zum Vergleichen der Zähler müssen diese untereinander stehen. Verschiebe also nun den Zähler der zweiten Spur soweit nach rechts, bis er über dem Zähler der dritten Spur steht. $O(m\ log\ m)$
5. Vergleiche nun die beiden Zähler und akzeptiere wenn diese gleich sind. Ansonsten reject. $O(log\ m)$

Der Zeitbedarf beträgt also $O(m\ log\ m)$

Aufgabe 3.2

Geben Sie das Programm einer Registermaschine zur Berechnung des Zweierlogarithmus $\lfloor \log_2 n \rfloor$ für eine Eingabe $n \in \mathbb{N}$ an. Erläutern Sie kurz seine Funktionsweise.

Wir speichern die Eingabe in $c(1)$, in $c(2)$ wird später die Ausgabe sein. $c(0)$ und $c(2)$ sind zunächst mit 0 initialisiert.

1. LOAD 2
2. CADD 1
3. STORE 2
4. LOAD 1
5. CDIV 2
6. STORE 1
7. IF $c(0) > 0$ GOTO 1
8. LOAD 2
9. CSUB 1
10. END

Die Registermaschine berechnet wie viele mal man die Eingabe durch 2 teilen muss um auf 1 zu kommen.

Aufgabe 3.3

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ der endlichen Wörter über den natürlichen Zahlen abzählbar ist.

Wir haben ein Wort der Länge n $W_n = \{w_1 w_2 w_3 \dots w_n \mid w_i \in \text{Alphabet}\}$. und ein Alphabet A.
Für ein endliches Alphabet ist $\mathbb{N}^*$ offensichtlich auch endlich $(1 + \sum_{i=1}^{n} |A|^i)$ und somit durch aufstellen in kanonischer Reihenfolge einfach abzählbar.
Für ein unendliches Alphabet gilt:
Worte der Länge 1 sind offensichtlich in kanonischer Reihenfolge unendlich abzählbar.
Die Länge der Worte der Länge n sind unendlich abzählbar, da wir sie auch in kanonischer Reihenfolge aufschreiben können: $w_1 w_1 \cdots w_1, \;\; w_2 \cdots w_2, \;\; \cdots, \;\; w_2 w_1 \cdots w_1, \;\; \cdots\cdots$
Da die Länge der Worte endlich ist, ist $\mathbb{N}^*$ somit eine endliche Vereinigung von abzählbar unendlichen Mengen und somit ebenfalls abzählbar unendlich.

Aufgabe 3.4

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Antwort.
a) $H_{\leq 42} = \{\langle M\rangle w \mid M$ hält auf Eingabe w und zwar nach höchstens 42 Schritten$\}$

Die Sprache $H_{\leq 42}$ ist entscheidbar. Wir kreiern eine TM $M_{H\leq 42}$ die wie folgt arbeitet. $M_{H\leq 42}$ simuliert $\langle M\rangle$ mit der Eingabe w und speichert zusätzlich einen Zähler welche die Anzahl der bereits ausgeführten Schritte zählt. Terminiert M bevor der Zähler 42 erreicht, so akzeptiert $M_{H\leq 42}$, andernfalls verwirft $M_{H\leq 42}$ nach 42 Schritten.

Korrektheit:

$\langle M\rangle w \in H_{\leq 42}$
$\implies M_{H\leq 42}$ simuliert $\langle M\rangle$
$\implies \langle M\rangle$ terminiert bevor Zähler 42 Schritte zählt
$\implies M_{H\leq 42}$ akzeptiert $\langle M\rangle$

$\langle M\rangle w \notin H_{\leq 42}$
$\implies M_{H\leq 42}$ simuliert $\langle M\rangle$
$\implies \langle M\rangle$ terminiert nicht in 42 Schritten
$\implies M_{H\leq 42}$ verwirft die Eingabe

b) $H_{\geq 42} = \{\langle M\rangle w \mid M$ hält auf Eingabe w und zwar nach mindestens 42 Schritten$\}$

Die Sprache $H_{\geq 42}$ ist nicht entscheidbar. Angenommen eine TM $M_{H\geq 42}$ würde existieren, welche $H_{\geq 42}$ entscheidet. Wir könnten dann eine TM M_{H_ϵ} konstruieren welche das Halteproblem H_ϵ entscheidet. Hierzu würde M_{H_ϵ} aus der gegebenen TM $\langle M\rangle$ eine TM M' berechnen, welche 42 Schritte nach rechts läuft und anschliessend die TM M mit Eingabe w simuliert. M_{H_ϵ} ruft also $M_{H\geq 42}$ mit M' als Unterprogramm auf und übernimmt das Akzeptanzverhalten.