Berechenbarkeit und Komplexität
Simon Wagner - 343756
Timotheus Jochum - 304222

Übungsblatt 7

December 7, 2016

4. Übung

Aufgabe 7.1

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Geben Sie für folgende RAM-Befehle jeweils ein äquivalentes RAM-Programm mit eingeschränktem Befehlssatz (siehe Folie 310) an, wobei Sie voraussetzen können, dass alle Register j mit $j \geq k$ den Wert $c(j) = 0$ haben.
Verfügbare Befehle:
LOAD, STORE, CLOAD, CSUB, CADD, GOTO, IF $c(0) \neq 0$ THEN GOTO j, END

(a) MULT 1, das heißt $c(0) := c(0) \cdot c(1)$
Wir benutzen zwei Schleifen: Die innere addiert $c(1)$-mal 1 auf das Ergebnis, die äußere lässt dies $c(0)$ mal passieren.
k speichert das Ergebnis und ist anfangs 0

1. STORE $k+1$ (Speichert das originale $c(0)$ um darüber zu iterieren)
2. LOAD 1
3. STORE $k+2$ (Speichert das originale $c(1)$)
4. STORE $k+3$ (Speichert das originale $c(1)$ um darüber zu iterieren)
5. LOAD $k+1$
6. IF $c(0) \neq 0$ THEN GOTO 6 (Wenn $c(1) = 0$ ist, sind wir mit der Multiplikation fertig)
7. LOAD k
8. END
9. CSUB 1
10. STORE $k+1$
11. LOAD $k+2$ (Reset der kleinen Schleife)
12. STORE $k+3$
13. LOAD $k+3$
14. IF $c(0) \neq 0$ THEN GOTO 16 (Wenn $c(k+3) = 0$ ist, sind wir mit der kleinen Schleife fertig)
15. GOTO 5
16. CSUB 1
17. STORE $k+3$
18. LOAD k
19. CADD 1
20. STORE k
21. GOTO 13

(b) INDLOAD i INDLOAD: $c(0) := c(c(i))$
Da wir zwar $c(i)$ laden können, danach aber nicht direkt $c(c(i))$ machen wir so lange IF-Abfragen, bis wir herausgefunden haben, welche Zahl in $c(i)$ gespeichert war.

1. LOAD i
2. IF $c(0) \neq 0$ GOTO 5
3. LOAD 0
4. END
5. CSUB 1
6. IF $c(0) \neq 0$ GOTO 9
7. LOAD 1
8. END
9. CSUB 1
10. IF $c(0) \neq 0$ GOTO 11
11. LOAD 2
12. END

...

j+1 CSUB 1
j+2 IF $c(0) \neq 0$ GOTO j+5
j+3 LOAD $k-1$
j+4 END
j+5 CSUB 1
j+6 LOAD k
j+7 END

Aufgabe 7.2

(a) Ist das Problem, ob ein gegebenes LOOP-Programm zu einer Eingabe x die Ausgabe y berechnet, entscheidbar? Begründen Sie die Antwort.
Per Definition terminiert ein LOOP-Programm immer. Darum kann das Programm mit der Eingabe x einfach laufen lassen und das Ergebnis mit y vergleichen. Das Problem ist somit entscheidbar.

(b) Ist das Problem, ob ein gegebenes WHILE-Programm zu einer Eingabe x die Ausgabe y berechnet eintscheidbar? Begründen Sie die Antwort.
WHILE-Programme sind Turingmächtig. Dies führt dazu, dass sie nicht immer terminieren müssen und somit ist das Problem auch nicht entscheidbar.

Aufgabe 7.3

Für jedes LOOP-Programm P sei $\langle P \rangle$ eine geeignete Kodierung von P (ähnlich zu Gödelnummern für Turingmaschinen). Sei

$$A_{\text{LOOP}} = \{\langle P \rangle \mid P \text{ gibt bei Eingabe 0 das Ergebnis 1 zurück}\}.$$

Welche der folgenden Beziehungen zwischen A_{LOOP} und dem Halteproblem H für Turingmaschinen treffen zu?

(a) $A_{\text{LOOP}} \leq H$
Für jedes LOOP-Programm, welches eine primitiv rekursive Funktion f_P berechnet, können wir eine TM T_P erzeugen, welche auch f_P berechnet, da die Menge der primitiv rekursiven Funktionen eine Teilmenge der von Turingmaschinen berechenbaren Funktionen ist.
Wir können demnach A_{LOOP} entscheiden, indem wir T_P mit 0 ausführen und das Ergebnis auslesen, sobald die TM angehalten ist.
Wir definieren die Simulationsfunktion von P als f_S, wobei $f_S(\langle P\rangle w) = f_T(w)$, mit f_T als die die T_P berechnete Funktion, gilt.
Es ergibt sich $\langle P\rangle w \in A_{\text{LOOP}} \Rightarrow f_S(\langle P\rangle w) \in H$.
Wir definieren anschließend eine Funktion f'_S, wobei $f'_S = 1$ falls $f_S(w) = 1$ und $f'_S = \perp$, falls $f_S(w) \neq 1$.
Mit $\langle P\rangle w \in A_{\text{LOOP}}$ folgt $f_S(\langle P\rangle w) = 1 = f'_S(\langle P\rangle w)$. Wie oben gilt demnach auch $\langle P\rangle w \in A_{\text{LOOP}} \Rightarrow f'_S(\langle P\rangle w) \in H$, da mit $f'_S(\langle P\rangle w) \in H$ auch $f'_S(\langle P\rangle w) \neq \perp$ gelten muss und somit ebenfalls $f'_S(\langle P\rangle w) = 1 = f_S(\langle P\rangle w)$ und $\langle P\rangle w \in A_{\text{LOOP}}$.
Es folgt $\langle P\rangle w \in A_{\text{LOOP}} \Leftrightarrow f'_S(\langle P\rangle w) \in H$ woraus schließlich $A_{\text{LOOP}} \leq H$ folgt.

(b) $H \leq A_{\text{LOOP}}$
Da A_{LOOP} entscheidbar ist (7.2a und 7.3a), H aber offensichtlich nicht, ist $H \leq A_{\text{LOOP}}$ offensichtlich falsch.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.4

Zeigen Sie, dass $A(m+1,n) > A(m,n)$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ gilt. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass $A(m,n+1) > A(m,n)$.
Bemerkung: Als Zusatz können Sie bei Interesse versuchen, beide Ungleichungen zu beweisen.
Ackermanfunktions Definition:
$A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
$A(0,n) = n+1$ für $n \geq 0$
$A(m+1,0) = A(m,1)$ für $m \geq 0$
$A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n))$ für $m,n \geq 0$

Zu zeigen: Ackermannfunktion wächst stetig an.
Schon bewiesen: $A(m,n+1) > A(m,n)$
Bleibt noch zu zeigen: $A(m+1,n) > A(m,n)$

Beweis per Induktion über n:

INDUKTIONSANFANG:
$A(m+1,0) = A(m,1)$ (siehe Definition)

INDUKTIONSVORAUSSETZUNG:
$A(m+1,n-1) \geq A(m,n)$

INDUKTIONSSCHRITT:
$A(m+1,n) = A(m, A(m+1,n-1)) \geq A(m, A(m,n)) \geq A(m,n+1)$ (mit I.V.)

Wegen $A(m,n+1) > A(m,n)$ gilt also:
$A(m,n) < A(m+1,n)$