WS 16/17
Gruppe 16

Berechenbarkeit und Komplexität
Simon Wagner - 343756
none - N/A

Übungsblatt 2

November 2, 2016

2. Übung

Aufgabe 2.1

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, B, q_1, q_2, \delta)$ mit δ wie folgt:

δ	0	1	B
q_1	(q_3, 1, N)	(q_1, 0, R)	(q_2, B, L)
q_3	(q_1, 0, L)	(q_3, 1, L)	(q_1, B, R)

Berechnen Sie die Gödelnummer $\langle M \rangle$ von M wie in der Vorlesung definiert.

Aufgabe 2.2

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \bar{q}, \delta)$ eine 1-Band-TM, deren Speicherbedarf für eine Eingabe der Länge n maximal $s(n)$ beträgt. Zeigen Sie: Wenn M auf einer Eingabe w der Länge n hält, dann hält M auf w nach spätestenz $(|Q| - 1) \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n) + 1$ Schritten.

In den folgenden Aufgaben ist es **nicht** notwendig, die Turingmaschinen explizit anzugeben. Eine Beschreibung ihrer Arbeitsweise und Laufzeit in den einzelnen Arbeitsschritten genügt.

Aufgabe 2.3

Sei $L = \{w\#w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ (über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$).
a) Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 1-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und Speicherbedarf der von ihnen entworfenen Maschine.

1. Die TM 'merkt' sich erste Zeichen und setzt dieses auf B. Ist das Zeichen ein B wird mit 0 terminiert, bei # wird zu 7. gesprungen.
2. Für 0 und 1 wird jeweils in einen eigenen Zustand gewechselt, die aber beide nach Rechts gehen, bis sie ein # lesen.
3. Die beiden Zustände wechseln jeweils in einen neuen Zustand, welcher nach rechts läuft, bis ein Zeichen ungleich # gelesen wird.
4. Dieses neue Zeichen wird mit dem gemerkten Zeichen verglichen. Sind sie nicht gleich wird mit 0 terminiert. Sind sie gleich, so wird das Zeichen auf # gesetzt.
5. Es wird nach links gelaufen bis das erste Zeichen (ungleich B) gelesen wird.
6. Ist das erste Zeichen nicht #, wird zu 1. gesprungen.

7. Es wird nach rechts gegangen bis ein B gelesen wird. Wird dabei eine 0 oder 1 gelesen wird mit 0 terminiert. Wird ein B gelesen wird mit 1 terminiert.

Falls die TM terminiert:
Für Länge$(w) = n$ werden für jedes Zeichen von w $n + 1$ Schritte getan bis der Lesekopf auf dem Zeichen steht, mit welchem verglichen wird und anschließend muss der Lesekopf n Schritte an den Anfang zurückgehen. Am Ende läuft die TM noch einmal $n+1$ Schritte über die # Zeichen und ein letztes B.
Insgesamt braucht die TM also $n * (2n + 1) + n + 1$ Schritte, die Laufzeit ist also $O(n^2)$.
Es werden alle Elemente von w besucht, sowie das ursprüngliche # Zeichen, die n Zeichen hinter # und gegebenenfalls noch ein B am Ende.
Zusammen also $2n + 2$ Zellen.

b) Beschreiben Sie eine möglichst effiziente 2-Band-TM, die L entscheidet. Analysieren Sie den Zeit- und Speicherbedarf der von ihnen entworfenen Maschine.
Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, wie wie ein zweites Band die Erkennung eines Wortes in L schneller machen kann.

1. Das leere Wort terminiert mit 0. Beide Bände laufen nach Rechts bis auf Band 1 ein # gelesen wird. Dabei wird jedes Zeichen, welches auf Band 1 gelesen wird, auf Band 2 kopiert und anschließend gelöscht.

2. Wird ein # gelesen löscht Band 1 dieses und geht einen Schritt nach Rechts. Band 2 geht nun an den Anfang zurück.

3. Nun laufen beide Bänder nach Rechts und vergleichen die gelesenen Zeichen. Werden unterschiedliche Zeichen gelesen wird mit 0 terminiert.

4. Lesen beide Bänder ein B wird mit 1 terminiert.

Für Länge$(w) = n$ läuft die TM zunächst mit beiden Bändern die n Zeichen ab. Anschließend wird der Lesekopf auf Band 2 mit n Schritten auf den Anfang zurückgesetzt. Am Ende werden erneut n Schritte benötigt um die beiden Bänder zu vergleichen.
Das macht zusammen $3n$ Schritte, die Laufzeit beträgt also $O(n)$.
Band 1 wird einmal gesamt durchlaufen, was 2n+1 Zellen sind. Auf Band 2 werden nur die n Elemente von einem w kopiert, welche auch vollständig durchlaufen werden.
Das macht einen Speicherverbrauch von 3n+1 Zellen.

Aufgabe 2.4

Zeigen Sie, dass jede 1-Band-TM durch eine 1-Band-TM mit einseitig unendlichem Band, d.h., durch eine Turingmaschine, die die Position $p < 0$ nie benutzt, simuliert werden kann. Wie groß ist der Zeitverlust?

Wir benutzen eine zweite Spur um die Positionen $p \leq 0$ zu simulieren.
An Position $p_0 = 0$ steht ein einzigartiges Zeichen auf beiden Spuren, um diese Position zu erkennen.
Zugriffe auf $p \leq 0$ werden zu $1 + |p|$.
δ wird in δ' geklont.
Solange der Lesekopf auf $p < 0$ steht wird Spur 2 ignoriert und einzig in Spur 1 gearbeitet.
Sobald das Sonderzeichen, welches Position 0 markiert, gelesen wird, wird zu δ' gewechselt.
δ' ignoriert Spur 1 und arbeitet in Spur 2. Zusätzlich werden die Schrittrichtungen gespiegelt (L wird zu R, R zu L).
Selbstverständlich wird hier beim Lesen vom Sonderzeichen wieder zu δ gewechselt.

Die Laufzeit ist hier nicht anders als bei einer beidseitig unendlichen TM (der Speicherverbrauch ist aber höher).