Rendering Equation

辐射度量学

Difference among three def:

- Irradiance: power per projected unit area
- Intensity: power per solid angle
- Radiance: Irradiance per solid angle

  Radiance: Intensity per projected unit area

Difference between Irradiance and Radiance:

- Irradiance: total power received by area dA
- Radiance: power received by area dA from “direction” $d\omega$

双向反射分布函数：对不同材质的描述

双向反射分布函数（BRDF）描述光线和物体材质表面的交互作用，它是对不同材质的描述。它是一个四维函数，在4π球面度上定义，在表面上的每一个点都有定义。它的四个维度分别是:

- Ψ - 入射方向 (x_1, y_1)
- Θ - 出射方向 (x_2, y_2)

BRDF定义为一个比值，是点x处在出射方向Ψ上反射的相对辐射亮度与通过不同立体角入射的相对辐照度之比，可表示为

$$f_r(x, \Psi \rightarrow \Theta) = \frac{dL(x \rightarrow \Theta)}{dE(x \leftarrow \Theta)} = \frac{dL(x \rightarrow \Theta)}{L(x \leftarrow \Theta) cos(N_x, \Psi) d\omega_\Psi} \tag{1}$$

其中，N_x是法线向量，$cos(N_x, \Psi)$是法线向量和入射方向向量的余弦，也即入射方向向量在表面上（假设表面是平面）的投影。

BRDF的性质

1. 互反律

$$f_r(x,\Psi\to\Theta)=f_r(x,\Theta\to\Psi) \tag{2}$$

亦可直接将BRDF表示为

$$f_r(x,\Psi\leftrightarrow\Theta) \tag{3}$$

2. 入射与出射亮度的关系

在不透明的非发射表面点周围的半球上有一些辐照度分布，总反射亮度可表示为

$$\begin{gathered}dL(x\to\Theta)=f_r(x,\Psi\to\Theta)dE(x\leftarrow\Psi)\\ L(x\to\Theta)=\int_{\Omega x}f_r(x,\Psi\to\Theta)dE(x\leftarrow\Psi)\\ L(x\to\Theta)=f_r(x,\Psi\to\Theta)L(x\leftarrow\Theta)cos(N_x,\Psi)d\omega_\Psi\end{gathered} \tag{4}$$

3. 能量守恒

对于半球上任何入射辐射亮度$L(x\leftarrow\Psi)$的分布，每单位表面积的总入射功率是半球的总辐照度：

$$E=\int_{\Omega x}L(x\leftarrow\Psi)cos(N_x,\Psi)d\omega_\Psi \tag{5}$$

同时，由能量守恒定律，*在某点于某方向*的出射辐射亮度，等于该点*在某点于某方向*上的自发光和*在某点于某方向*上的反射光的辐射亮度，即：

$$L(x\to\Theta)=L_e(x\to\Theta)+L_r(x\to\Theta) \tag{6}$$

可展开为渲染方程：

$$L_o(x,\vec{\omega}_o)=L_e(x,\omega_o)+\int_{H^2}f_r(x,\vec{\omega}_o,\vec{\omega}_i)L_i(x,\vec{\omega}_i)cos\theta_i d\vec{\omega}_i \tag{7}$$

其中f_r是散射函数，即BRDF方程。余弦项是入射光和法线之间的夹角。

对于经验模型的BRDF，我们希望它是一个良好的、合理的BRDF，也即需要它满足能量守恒和互反律。

BRDF示例：漫反射、镜面反射与折射

1. 漫反射

$$f_r(x,\Psi\leftrightarrow\Theta)=\frac{\rho_d}{\pi} \tag{8}$$

其中ρ_d反射率是反射能量与入射能量之比。对于基于物理的材质，$\rho_d\in(0,1]$。

2. 镜面

   - 只考虑折射

     按反射定律找到出射方向：假设入射方向Ψ，表面法线N，反射方向为$R=2(N\cdot\Psi)N-\Psi$

   - 考虑散射

     方向： Snell's law

按Snell's law计算镜面折射方向，即根据$\eta_1 sin\theta_1 = \eta_2 sin\theta_2$，则有透射光线

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\eta_1}{\eta_2}\Psi + N(\frac{\eta_1}{\eta_2}cos\theta_1 - \sqrt{1-(\frac{\eta_1}{\eta_2})^2(1-cos^2\theta_1)} \\ &= -\frac{\eta_1}{\eta_2}\Psi + N(\frac{\eta_1}{\eta_2}cos\theta_1 - \sqrt{(1-(\frac{\eta_1}{\eta_2})^2(1-N\cdot\Psi)^2} \end{aligned} \tag{9}$$

同时须考虑到内全反射（考虑临界角）。

能量：Fresnel Equations

上述等式考虑到了反射和折射方向（角度），菲涅尔方程则考虑到了能量。

- 透明表面的互反律

  使用BSDF描述透明面时，需要注意透明表面可能不具备互反律。

渲染方程：描述光能的整体平衡分布

渲染方程用于描述场景中光能的平衡分布，对于任意表面点和方向，渲染方程给出最后的出射辐射亮度$L(x\rightarrow\Theta)$。

基本形式

半球形公式是最常用的渲染方程形式。

按照BRDF定义,

$$f_r(x,\Psi\rightarrow\Theta) = \frac{dL_r(x\rightarrow\Theta)}{dE(x\leftarrow\Theta)} \tag{10}$$

其中,

$$L_r(x\rightarrow\Theta) = \int_{\Omega_x} f_r(x,\Psi\rightarrow\Theta)L(x\leftarrow\Psi)cos(N_x,\Psi)d\omega_\Psi \tag{11}$$

则得到第二种弗雷德霍姆方程形式的渲染方程:

$$L(x\rightarrow\Theta) = L_e(x\rightarrow\Theta) + \int_{\Omega_x} f_r(x,\Psi\rightarrow\Theta)L(x\leftarrow\Psi)cos(N_x,\Psi)d\omega_\Psi \tag{12}$$

区域公式则是将定义域定义在物体表面区域。我们假设光线从点x投射到点y，我们可以将半球形定义域投射到表面区域得到公式:

$$L(x\rightarrow\Theta) = L_e(x\rightarrow\Theta) + \int_{\Omega_x} f_r(x,\Psi\rightarrow\Theta)L(x\leftarrow\Psi)V(x,y)G(x,y)dA_y \tag{13}$$

其中可视性函数V(x,y)指定了两点间可见性，几何项G则封装了涉及相对几何的内容:

$$G(x,y) = \frac{cos(N_x,\Psi)cos(N_y,-\Psi)}{r_{xy}^2} \tag{14}$$

直接光照和间接光照

渲染方程告诉我们，最后的出射光照由反射光照和物体自发光emission组成。而反射光照L_r，则由直接光照和间接光照构成。

直接光照是来自外界物体的emission，后者从表面沿着连线方向到当前的可见点，可用区域公式为：

$$L_d = \int_A f_r(x, \vec{xy} \to \Theta) L_e(y \to \vec{yx}) V(x, y) G(x, y) dA_y \tag{15}$$

间接光照则更多使用半球形公式，因为它不是单纯由某个特定区域反射而来，而是光线经过多次弹射Bounce得来，我们只考虑半球：

$$L_{id} = \int_{\Omega_x} f_r(x, \Psi \to \Theta) L_i(x \leftarrow \Psi) cos(N_x, \Psi) d\omega_\Psi \tag{16}$$

同时，我们可以知道，间接照明是点$x : r(x, \Psi)$处从半球上所有可见点反射的辐射亮度：

$$L_i(x \leftarrow \Psi) = L_r(r(x, \Psi) \to -\Psi) \tag{17}$$