BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

12

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

13.12.2022

Formula lui TAYLOR pentru funcții de mai multe variabile

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathring{A}$

f - derivabilă parțial de n ori pe A

Def. Se numește polinom TAYLOR de ordin n asociat funcției f în punctul $\bar{a}$

$$T_n(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{1!} d_{\bar{a}} f(\bar{x} - \bar{a}) + \frac{1}{2!} d^2_{\bar{a}} f(\bar{x} - \bar{a}) + \dots + \frac{1}{n!} d^n_{\bar{a}} f(\bar{x} - \bar{a}),$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$$

ex: $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$T_2 f = ?$ în $\bar{a} = (1,1)$

$$(T_2 f)(\bar{x}) = f(1,1) + \frac{1}{1!}\left[\overset{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}(x-1) + \overset{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}(y-1)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\underset{0}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)} \cdot (x-1)^2 + \underset{-1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)} \cdot (x-1)(y-1) + \overset{0}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)} \cdot (y-1)^2\right]$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2}\right) = 2y \cdot \dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \dfrac{-4}{2^2} = -1.$
- $f(1,1) = \ln 2$

$\Rightarrow (T_2 f)(\bar{x}) = \ln 2 + x - 1 + y - 1 - \frac{1}{2}(x-1)(y-1).$

Formula lui Taylor:

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathring{A}$, f - derivabilă parțial de $n+1$ ori în $\mathring{A}$

Atunci $f(x) = (T_n f)(\bar{x}) + (R_n f)(\bar{x})$, pentru orice $S(\bar{a}, r) \subset A$

$(T_n f)(\bar{x})$ = polinomul Taylor de ordinul n asociat funcției f în punctul $\bar{a}$

$(R_n f)(\bar{x})$ = restul de ordinul n asociat funcției f

$S(\bar{a}, r)$ = sfera deschisă centrată în a și de rază $R>0$

$$(R_n f)(\bar{x}) = \frac{1}{(n+1)!}\left(d^{n+1}_{a+\theta(\bar{x}-\bar{a})} f\right)(\bar{x}-\bar{a}) \quad , \theta \in (0,1)$$

$(R_n f)(\bar{x})$ = restul de tip LAGRANGE

Puncte de extrem pentru funcții de mai multe variabile

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathring{A}$

Def: Punctul $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ s.n. punct de EXTREM LOCAL dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{\bar{a}}$ a.î. expresia $E = f(\bar{x}) - f(\bar{a})$ păstrează semn constant, $\forall x \in V \cap A$

- dacă $E > 0 \Rightarrow \bar{a}$ - pct. de MINIM local
- dacă $E < 0 \Rightarrow \bar{a}$ - pct. de MAXIM local

Def: Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în pct. $\bar{a}$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = 0, i = \overline{1,p}$ atunci $\bar{a}$ se numește PUNCT STAȚIONAR pentru f.

Obs: pentru o funcție diferențiabilă, punctele de extrem local se găsesc printre punctele staționare