BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

13

Curs predat de:
Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

20.12.2022

Condiții suficiente de extrem

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$
$\downarrow$
derivate parț. de ord 2 cont

Fie $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in A$ un <u>punct STAȚIONAR</u> : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases}$

i) Dacă $d^2_{\bar{a}} f$ este POZITIV DEFINITĂ $\Rightarrow (a_1, a_2, a_3)$ pct de MINIM local

ii) Dacă $d^2_{\bar{a}} f$ este NEGATIV DEFINITĂ $\Rightarrow (a_1, a_2, a_3)$ pct. de MAXIM local

iii) Dacă $d^2_{\bar{a}} f$ este NEDEFINITĂ $\Rightarrow (a_1, a_2, a_3)$ NU e pct. de extrem

<u>Obs</u>: $8AB + 2A^2 + B^2 + C^2 + 0AC + 9BC \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{a})$

Criteriul lui Sylvester

$$H_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

matricea hessiană (HESS)

$$\Delta_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) \right|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a}) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \det(H_f(\bar{a}))$$

Criteriul lui SYLVESTER:

(1) Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\Rightarrow$ $\bar{a}$ = pct. de minim local

(2) Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ $\Rightarrow$ $\bar{a}$ = pct. de maxim local

(3) Dacă $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 \geq 0$

SAU $\Rightarrow$ nu se poate preciza natura pct. $\bar{a}$

$\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 \leq 0$ ↳ formam pătrate / găsim λ : $\lambda_i > 0$ min, $\lambda_i < 0$ max

(4) În orice situație diferită de cea mai de sus $\Rightarrow$ $\bar{a}$ nu e pct. de extrem

(ex) Det. pct. de extrem ale funcției:

$$f(x,y,z) = x+y+z+\frac{1}{xyz}, \quad x\cdot y\cdot z \neq 0.$$

$$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{yz}\cdot\frac{-1}{x^2} \qquad \cdot\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \frac{1}{xz}\cdot\frac{-1}{y^2} \qquad \cdot\ \frac{\partial f}{\partial z} = 1 + \frac{1}{xy}\cdot\frac{-1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2yz} = 1 \Rightarrow x^2yz = 1 \quad (1) \\ \frac{1}{xy^2z} = 1 \Rightarrow xy^2z = 1 \\ \frac{1}{xyz^2} = 1 \Rightarrow xyz^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x,y,z \neq 0. \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{y}{z} = 1 \\ \frac{x}{z} = 1 \end{cases} \rightarrow x = y = z.$$

$\Rightarrow$ înloc în rel (1) $\Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A(1,1,1)$, $B(-1,-1,-1)$ pct. staționare

$$\cdot\cdot\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3yz}$$

$$\cdot\cdot\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{xy^3z}$$

$$\cdot\cdot\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{xyz^3}$$

$$\cdot\cdot\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2y^2z}$$

$$\cdot\cdot\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{1}{x^2yz^2}$$

$$\cdot\cdot\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{1}{xy^2z^2}$$

$\Rightarrow Hf(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 4 - 1 > 0$

$\Delta_3 = 4 > 0. \quad \Rightarrow$ A - pct. de minim local

$\rightarrow Hf(B) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ A - pct. de maxim local

$\Delta_2 = 4 - 1 > 0$

$\Delta_3 = -4 < 0$

Extreme condiționate
(extreme cu legături)

• Se caută valorile de extrem pentru o funcție $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cu legătura $g(x, y, z) = 0$.

• Se construiește funcția multiplicatorilor lui Lagrange

$$F(x, y, z, \lambda) \overset{def}{=} f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

→ se determină punctele staționare ale lui F:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

→ se calculează diferențiala de ord. 2 a lui F pentru fiecare punct staționar găsit ($d_{\bar{a}} F = ?$) și pentru λ atașat corespunzător

→ se stabilește dacă diferențiala este pozitiv definită / negativ definită / /nedefinită, impunând condiția ca diferențial de ord I a lui g să fie 0:

$$d_{\bar{a}}^1 g = 0.$$

• $\bar{a}$ va fi punct de MINIM dacă $d_{\bar{a}}^2 F$ pozitiv definită (>0)

• $\bar{a}$ va fi punct de MAXIM dacă $d^2_{\bar{a}}F$ negativ definită (<0)

• $\bar{a}$ nu e punct de extrem dacă $d^2_{\bar{a}}F$ nedefinită

ex) Det. pct. de extrem ale funcției, care au legătura:

$$f(x,y) = 2x+y$$

leg: $x^2-y^2=3 \longrightarrow g(x,y) = x^2-y^2-3=0$

1

• $F(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda g(x,y) = 2x+y+\lambda x^2-\lambda y^2-3\lambda$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2+2x\lambda = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2}{2\lambda} = \dfrac{-1}{\lambda} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1-2\lambda y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2-y^2-3=0. \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

// e fix legatura

$\Rightarrow \dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{1}{4\lambda^2} - 3 = 0 \;\Big|\cdot \lambda^2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{3}{4} - 3\lambda^2 = 0. \Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{2}$

• pt. $\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ y_1 = 1$

$\Rightarrow A(-2,1)$ pt. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

pt. $\lambda_2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow x_2 = 2,\ y_2 = -1$

$\Rightarrow B(2,-1)$ pt. $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$

2

• $d^1 g = 2x\,dx - 2y\,dy = 0.$

•• $d^2F = 2\lambda\,dx^2 - 2\lambda\,dy^2 + 2\cdot 0\,dx\,dy$

$\quad = 2\lambda(dx^2 - dy^2)$

• pt. $A=(-2,1)$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$d^1_A g = -4\,dx - 2\,dy = 0 \Rightarrow dy = -2dx$

$d^2_A F = dx^2 - dy^2 = dx^2 - 4dx^2 = -3dx^2 < 0. \Rightarrow A(-2,1)$ pct. de max

Temă: B