BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

7

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$$

1/113 $P(x) = x^3 + x^2 + x + 3$, $x-2$ ($a=2$) , $x+1$ ($a=-1$)

$$P(x) = P(2) + \frac{x-2}{1!} P'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!} P''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!} \cdot P'''(2)$$

3/113

$f(x) = \frac{1}{9x^2-1}$, $f: \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \to \mathbb{R}$. Dezv în serie Taylor în jurul pct. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

Met 1

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-1/3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1/3} =$$

$\circ$ formula $= \dots$

Met 2

• Știm că $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

$? = \frac{1}{a-x}$ $\qquad$ $? = \frac{1}{a+x}$

$$-3\sum \left(\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)^n = -\frac{1}{\frac{1}{3}-x}$$

$$\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-x/a}\right)$$

$\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, $-a < x < a$

$$g(x) = \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{3(x-1)+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}(x-1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{3}{2}(x-1)\right)^n$$

pentru $\left|\frac{3}{2}(x-1)\right| < 1$

$\Downarrow$

domeniul 1

din fracția 2 $\Rightarrow$ dom 2 $\Big\} \Rightarrow$

dom de dezvoltabilitate $= D_1 \cap D_2$

2/113 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}$

$f(x) = \sin 2x = f(0) + \dfrac{x}{1!} f'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + \dfrac{x^3}{3!} f'''(0) + \underbrace{\dfrac{x^4}{4!} f^{IV}(c_1)}_{\text{restul}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\square x^3 + \Delta x^4}{x^3} = \square \cdot 1 + \Delta \cdot 0 = \square$

SERII FOURIER TRIGONOMETRICE

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(\omega n x)+b_n\cdot\sin(\omega n x)\right)}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

forma generală a unei SFT

$\left.\begin{array}{l} a_n,\ n\in\mathbb{N} \\ b_n,\ n\in\mathbb{N}^* \end{array}\right\} \to$ coeficienții seriei

ω - pulsația, $\omega>0$.

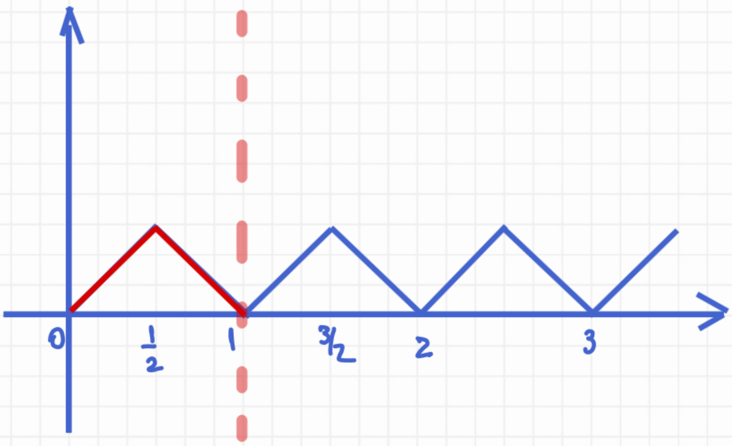
$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(\omega k x)+b_k\sin(\omega k x)\right)$$

→ șirul sumelor parțiale

→ POLINOM TRIGONOMETRIC

Fie $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f = fct periodică, de perioadă $T>0$

$[a, a+T]$ ⇕ $f(a)=f(a+T)$



$\boxed{T}$ TEOREMA lui DIRICHLET

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f - periodică, T - perioada. Dacă

i) f - mărginită pe intervalul $[a, a+T]\subset\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ fixat

ii) f - continuă pe intervalul $[a, a+T)$ SAU admite un număr finit de discontinuități de SPEȚA I pe $[a, a+T)$

iii) f monotonă pe porțiuni pe intervalul $[a, a+T)$ putem să o desfacem în mai multe intervale monotone atunci f este DEZVOLTABILĂ în SFT pe $[a, a+T]$ și

$$S(x) \overset{def}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)\Big),$$

coef Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cdot\cos(\omega n x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cdot\sin(\omega n x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x = \text{pct. de cont din } [a, a+T] \\ \dfrac{\overset{ls}{f(x-0)} + \overset{ld}{f(x+0)}}{2}, & x = \text{pct. de discont de speța I din } [a, a+T) \end{cases}$$

obs.: G_f par → simetric față de Oy

G_f impar → simetric față de O.

Cazuri particulare

$\boxed{1}$ Dacă f = funcție pară ($f(-x) = f(x), \forall x$), atunci f s.n. DEZVOLTABILĂ în SFT de COSINUSURI:

$$b_n \equiv 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(\omega n x)\,dx$$

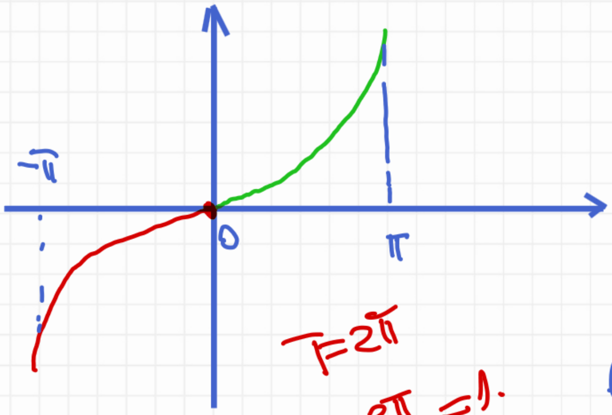
$\boxed{2}$ Dacă f = funcție impară ($f(-x) = -f(x), \forall x$), atunci f s.n. DEZVOLTABILĂ în SFT de SINUSURI:

$$a_n \equiv 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(\omega n x)\,dx$$

(ex) Dezv. f în serie de
$\nearrow$ sin $\to$ o fac impară
$\searrow$ cos $\to$ o fac pară

(ex) Dezv $f(x)=x^2$ pe $[0,\pi)$ în serie trig de sin



$T=2\pi$

$\omega=\frac{2\pi}{T}=1.$

$$\hat{f}_i(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,\pi) \\ -x^2, & x\in(-\pi;0) \end{cases}$$

$$b_n=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\cdot\sin(nx)\,dx$$