BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

5

25.10.2022

Propoziție Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$, $f_n, f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \iff \forall x_n \in D$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) - f(x_n) = 0$
(șir numeric)

Propoziție * CRITERIUL CONVERGENȚĂ NEUNIFORMĂ

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ și $\exists x_n \in D$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) - f(x_n) \neq 0$,
atunci $f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} f$ pe D

ex: $f_n = \frac{nx}{n+x}$, $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{nx}{n+x} \xrightarrow[n\to\infty]{s} x = f(x)$

Arătăm că $f_n \overset{u}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} f$ folosind prop. 2

Fie $x_n = ? \in [0,\infty)$ a.î. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\longrightarrow 0$.

$\left| \frac{n x_n}{n + x_n} - x_n \right| = \frac{x_n^2}{n + x_n}$

• alegem $x_n = n \Rightarrow f_n(n) - f(n) = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow f_n(x) \overset{u}{\not\longrightarrow} f$

Propoziție CRITERIUL MAJORĂRII

Fie $f_n, f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și pres că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ pe D

Dacă $\exists (a_n)_{n\geq 0} \in D$ a.î.

i) $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, $\forall x \in D$

ii) $a_n \longrightarrow 0$

atunci $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe D

Proprietățile șirurilor de funcții uniform convergente

① TRANSFER DE CONTINUITATE

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe mulțimea D și f_n continuă pe D ⇒

⇒ f continuă pe D

Ex: $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f(x) = \begin{cases} 0, & x\in(-1;1) \\ 1, & x=1. \end{cases}$

$f_n : (-1;1] \to \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ pres prin red la absurd că } f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \text{ pe } (-1;1] \\ \text{Cum } f_n \text{ cont pe } (-1;1] \end{array}\right\} \overset{\text{prop}}{\Rightarrow} f\text{-cont pe } (-1;1]$

⇓

FALS

② TRANSFER DE DERIVABILITATE

Fie $f_n, f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ pe D

$\left.\begin{array}{l} \text{Dacă: } (f_n)_{n\geq 0} \text{ - șir de FUNCȚII DERIVABILE} \\ : f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \text{ pe } D \\ : f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{u} g \text{ pe } D \end{array}\right\}$ atunci f DERIVAB pe D și $f' = g$ pe D

$\lim_{n\to\infty} f_n{}' = \lim_{n\to\infty} f'_n$

③ TRANSFER DE INTEGRABILITATE

$\left.\begin{array}{l} \text{Dacă } f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f \text{ pe } [a,b] \text{ și} \\ f_n \text{ - șir de FUNCȚII INTEGRABILE pe } [a,b] \end{array}\right\}$ atunci

f este integrabilă pe $[a,b]$ și $\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$

SERII DE FUNCȚII

Fie $(f_n)_{n\geq 0} \in D \subset \mathbb{R}$

↳ șir de funcții

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

Def: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este SIMPLU CONVERGENTĂ pe mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ dacă

$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$ este SIMPLU CONVERGENT pe D

Obs: $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$

↳ SUMA SERIEI $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

ex: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \mathbb{R}$

x^n ↳ $f_n(x)$

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \xrightarrow[n\to\infty]{s} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{S(x)}, \ \forall x \in (-1;1)$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ este SIMPLU CONV, $\forall x \in (-1;1)$ și are suma $S(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall x \in (-1;1)$$

Def: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este UNIFORM CONVERGENTĂ pe mulțimea D dacă

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} S(x) \text{ pe } D$$

$\boxed{\text{TEOREMA lui WEIERSTRASS}}$

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ UNIFORM CONVERGENTĂ pe D dacă există $(a_n) \in D$ a.î.:

$$\begin{cases} |f_n(x)| \leq a_n, \ \forall x \in D \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \text{CONV} \end{cases}$$

ex Stud conv:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n^3+1}}_{f_n(x)}$$

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n^3+1} \leq \underbrace{\frac{1}{n^3+1}}_{a_n}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} = \text{CONV}$ (crit. comp la lim cu $\frac{1}{n^3}$)

$\overset{TW}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3+1}$ unif. conv. pe $\mathbb{R}$

Obs: propr. următoarele de fct se aplică

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = (S(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

SERII DE PUTERI

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{a_n (x-x_0)^n}^{f_n(x)} = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0)^1 + \ldots + a_n(x-x_0)^n,}_{S(x) = ?} + \ldots$$

- a_n - ŞIR NUMERIC
- $x_0 \in \mathbb{R}$ = fixat

serie de puteri centrată în punctul x_0

$x_0 = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0, & n - \text{par} \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & n - \text{impar} \end{cases}$$

■ Se obs. că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e CONV în $x = x_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0$

Def: Fie o serie de puteri:

① $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ SAU $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|}$

- R s.n. RAZA de CONVERGENȚĂ a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $R \in [0, \infty]$,

R nu depinde de x

TEOREMA I A lui ABEL

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri, R = RAZA de CONVERGENȚĂ, $R\in[0,\infty]$

Dacă: i) $R=\infty$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este conv, $\forall x\in\mathbb{R}$

2

Mulțimea de CONVERGENȚĂ, notată C, este $C=\mathbb{R}$

ii) $R=0$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este CONV în pct. x_0

$\Rightarrow C=\{x_0\}$

iii) $R\in(0,\infty)$ atunci:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este ABSOLUT CONV, $\forall x\in \overbrace{(x_0-R,\ x_0+R)}^{C}$

DIV, $\forall x\in(-\infty, x_0-R)\cup(x_0+R,\infty)$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este UNIF CONV, $\forall x\in[\alpha,\beta]\subset(x_0-R,x_0+R)$

Obs: dacă $x=x_0+R$ sau $x=x_0-R$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ devine o SERIE NUMERICĂ

: înlocuind, obținem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot R^n$