BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

14

10.01.2022

Integrale generalizate

- $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2$

- $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^\infty = \infty$ integr. generalizata, divergentă

$= \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1$

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1.$ integr. generalizată convergentă

Obs: $\int_{-3}^\infty \frac{1}{x+2}\,dx$ → generalizată din pricina lui -2

Criterii practice pentru studiul convergenței integralelor generalizate

1. Criteriu practic pe interval nemărginit

$I = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$, f - integrab. pe $[a,\infty)$

Fie $L = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x)$

1) Dacă $L < \infty$ și $\alpha > 1 \Rightarrow I =$ conv.

2) Dacă $L > 0$ și $\alpha \le 1 \Rightarrow I =$ div.

---

ex: Stud conv. integr.:

$I = \int_0^\infty \frac{x^5}{(x^{12}+1)^2}\,dx \Rightarrow L = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+5}}{(x^{12}+1)^2}$

Alegem $\underset{>1}{\alpha = 19} \Rightarrow \underset{<\infty}{L = 1} \longrightarrow I =$ conv.

rezolv I:

Fie $t = x^6 \Rightarrow 6x^5\,dx = dt \Rightarrow I$ devine: $I = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ $+t^2-t^2$ $=$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{2\cdot 6}\int_0^{\infty} \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\, t\, dt$$

$$\left(\frac{1}{t^2+1}\right)'$$

---

② Criteriu practic pe interval mărginit $[a, b)$

$I = \int_a^b f(x)\,dx$, $L = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b-x)^{\alpha} \cdot f(x)$, f integrab. pe $[a, b)$

1) Dacă $L < \infty$ și $\alpha < 1 \Rightarrow I = \text{conv}$

2) Dacă $L > 0$ și $\alpha \geq 1 \Rightarrow I = \text{div}$

③ Criteriu practic pe interval mărginit $(a, b]$

$I = \int_a^b f(x)\,dx$, $L = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x-a)^{\alpha} \cdot f(x)$, f integrab. pe $(a, b]$

1) Dacă $L < \infty$ și $\alpha < 1 \Rightarrow I = \text{conv}$

2) Dacă $L > 0$ și $\alpha \geq 1 \Rightarrow I = \text{div}$

---

ex. $I = \int_1^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$

$L = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{(x-1)^{\alpha}\,(x+1)^{1/2}}{(x-1)^{1/2}} \underset{\alpha = 1/2}{=\!=\!=} \sqrt{2} \Rightarrow I - \text{conv.}$

• calc I: Fie $t^2 = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow x = \ldots t \Rightarrow dx = \ldots dt \Rightarrow I = \int_{\infty}^{\sqrt{3}} \ldots dt$

§ Funcțiile Γ și B ale lui Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx \quad , t>0$$

→ integrală generalizată cu parametru
CONV pt. $\forall t>0$.

Proprietăți

① $\Gamma(1) = 1$

② $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

③ $\Gamma(n+1) = n! \quad , n \in \mathbb{N}^*$

④ $\Gamma(t+1) = t\cdot\Gamma(t), \forall t>0$.

⑤ $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad , p\in(0,1)$

⑥ $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\, dx$$

integrală generalizată cu 2 parametri $, p,q>0$.
CONV, $\forall p,q>0$.

Proprietăți:

① $B(p,q) = B(q,p) \quad , \forall p,q>0$.

② $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad , p,q>0$.

ex: Calc $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(2p-1)}x \cdot \sin^{(2q-1)}x\, dx \quad , p,q>0$.

Fie $\sin^2 x = t \Rightarrow \sin x = t^{1/2} \longrightarrow \cos x\, dx = \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$

$\Downarrow$

$\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-t \Rightarrow \cos x = (1-t)^{1/2}$

$dx = \frac{1}{2}\cdot t^{-1/2}\cdot(1-t)^{-1/2} dt$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (1-t)^{\frac{2p-1}{2}} \cdot t^{\frac{2q-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2} (1-t)^{-1/2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{p-1} \cdot t^{q-1}\, dt = \frac{1}{2} B(q,p) = \frac{1}{2} B(p,q)$$

Ex Calc $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\overset{2p-1}{2023}} x \sin^{\overset{2q-1}{4}} x\, dx = \frac{1}{2} B(1012, 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(1012) \cdot \Gamma(4)}{\Gamma(1012+4)} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1011! \cdot 3!}{1015!}$$

Ex $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Integrala Poisson

$x^2 = y \Rightarrow x = y^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy \Rightarrow$ integr. dev:

$$I = \int_0^\infty e^{-y} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \overset{\text{paritate}}{=\!=\!=} 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Vineri, ora 14, Zoom