BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

8

Spații metrice

Fie X = mulțime nevidă, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$

Def: Se numește METRICĂ (distanță) pe mulțimea X funcția d cu următoarele proprietăți:

i) $d(x,x) = 0, \forall x \in X$

$\Updownarrow$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad , \forall x, y \in X$

- $d(x,y) > 0, \forall x, y$

ii) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$

iii) $d(x,y) < d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X$

(inegalitatea triunghiului)

$\Rightarrow (X, d)$ = spațiu metric

Ex: $(\mathbb{R}^3, d_e)$

$d_e(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ ① Metrica EUCLIDIANĂ

$\forall \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\forall \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}$

② Metrica CEBÎȘEV

$(\mathbb{R}, d_c)$

$d_c(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^p + (x_2 - y_2)^p + \ldots + (x_n - y_n)^p} \quad , p \in \mathbb{N}$

③ $C([a,b])$ → mulțimea fct cont pe intervalul $[a,b]$

$d : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}_+$

$d(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|$

Def: (X,d) spațiu metric, $x_0 \in X$, $r>0$

$S(x_0,r) \overset{def}{=} \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$

↳ sfera deschisă, centrată în x_0, de rază r

$\bar{S}(x_0,r) \overset{def}{=} \{x \in X : d(x,x_0) \le r\}$

↳ sfera închisă

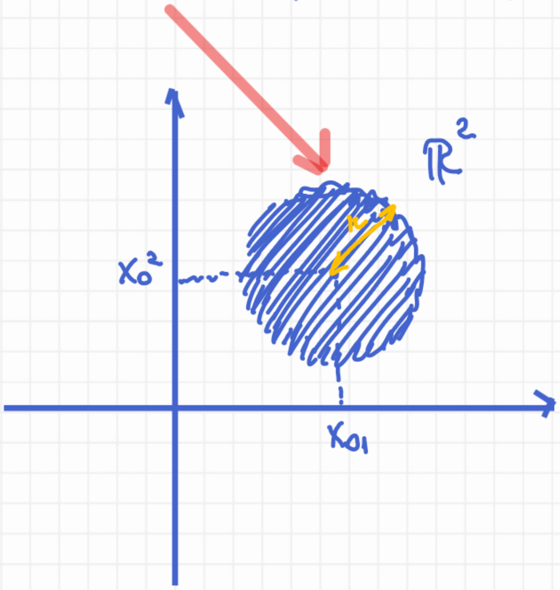
ex: $X = \mathbb{R}^2$, $d_e(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\bar{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$ NU SUNT PUTERI

$\Rightarrow S(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-x_{01})^2+(x_2-x_{02})^2} < r\}$

$\Updownarrow$

$(x_1-x_{01})^2+(x_2-x_0^2)^2 < r^2$



Def: Mulțimea $D \subset X$ se numește MULȚIME DESCHISĂ dacă $\forall x \in D$, există o sferă deschisă $S(x,r)$ a.î. $S(x,r) \subset D$

ex: (a,b)

Def Mulțimea $F \subset X$ se numește MULȚIME ÎNCHISĂ dacă complementara ei în raport cu $C_X F$ = mulțimea deschisă

ex: $[a,b]$

Def: Mulțimea $V \subset X$ se numește VECINĂTATE a punctului $a \in X$ dacă există o mulțime deschisă $D \subset X$ a.î. $a \in D \subset V$ $(V \in \mathcal{V}_a)$

Def: Punctul $x \in X$ se numește PUNCT ADERENT al mulțimii A $(x \in \bar{A})$ dacă în orice vecinătate a punctului x există cel puțin un punct din A.

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{V}(x) \ , V \cap A \neq \emptyset$

Def Punctul $x \in X$ se numește PUNCT DE ACUMULARE al mulțimii A $(x \in A')$ dacă, în orice vecinătate a punctului x există cel puțin un punct al mulțimii A diferit de x.

$x \in A' \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{V}(x) \ , V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Def Punctul $x \in X$ se numește PUNCT INTERIOR al mulțimii A $(x \in \mathring{A})$ dacă există o vecinătate a punctului x inclusă în mulțimea A.

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \subset A$

ex: $(-1,1)$: $0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \dots$

Def: Punctul $x \in X$ se numește PUNCT EXTERIOR al mulțimii A $(x \in Ext(A))$ dacă x este punct interior pentru complementara mulțimii A

$x \in Ext(A) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \subset C_X A$

Def: Punctul $x \in X$ se numește PUNCT IZOLAT al mulțimii A $(x \in Iz(A))$ dacă $x \in A$ și $x \notin A'$.