BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

1

Șiruri numerice

$(x_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$

ex: $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$ termen general

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, ..., $x_n = \frac{1}{n}$, ...

Def Șirul numeric este o funcție care pune în corespondență fiecărui număr natural n un număr real x_n

$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) \overset{not}{=} x_n$

Def: Un șir de nr. reale s.n. mărginit dacă $\exists M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

obs: un șir este nemărginit $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n| > M$

obs: (x_n) mărg $\Leftrightarrow$ relația $|x_n| \leq M$ se verifică începând de la un anumit rang n_0 , $n \geq n_0$.

ex: $x_n = \sin n \to$ mărg $\to |\sin n| \leq 1$, $\forall n$

: $x_n = n \to$ nemărg $\to \forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $n > M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x_n| > M$.

obs: (x_n) mărg $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ a.î. $a \leq x_n \leq b$

mărg. inferior — mărg. superior

obs: $x_n = \{\sqrt{n}\}$ mărg , $0 \leq x_n < 1$ $\forall n$

: $x_n = [\sqrt{n}]$ nemărg inf, $0 \le x_n$, dar $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$

a.î. $\sqrt{n} \ge b+1 \Rightarrow x_n = [\sqrt{n}] > \sqrt{n}-1 \ge b$

Def (x_n):

proprietate	condiție	
(monoton) crescător	$x_n \le x_{n+1}$	
(monoton) descrescător	$x_n \ge x_{n+1}$	
monoton	$\nearrow$ sau $\searrow$	$\forall n \in \mathbb{N}$
strict crescător	$x_n < x_{n+1}$	
strict descrescător	$x_n > x_{n+1}$	
strict monoton	str $\nearrow$ sau str $\searrow$	

ex: $x_n = n^2$ str $\nearrow$

: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \ge 1$ nu e monot, contraex: $\left.\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{-1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 < x_2 > x_3.$

Subșiruri

Def: Fie (x_n) un șir de nr. $\mathbb{R}$ și $(k_n) \subset \mathbb{N}$ un șir str. $\nearrow$ de nr. nat:

$$0 \le k_0 < k_1 < \dots < k_n < \dots \in \mathbb{N}$$

At. șirul (y_n) : $y_n = x_{k_n}$ s.n. subșir al șirului (x_n).

Obs: dacă (x_{k_n}) este un subșir al șirului (x_n) atunci

$$k_n \ge n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ex: șirurile (x_{2n}), (x_{2n+1})

: $y_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$ nu e subșir al lui $x_n = \cos n$

căci $k_n = n\pi \notin \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Def Un șir de numere reale este convergent (are limită finită)

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_0$ 

limita șirului

Obs: pt. a dem că $(x_n) \longrightarrow x$ e suficient să dem că,

$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$

ex: dem. că $x_n = \frac{n}{3n+5} \longrightarrow \frac{1}{3}$

sol $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \iff \frac{5}{3(3n+5)} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right)$

Fie $n_0 = \left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right)\right]+1$

$$\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right)\right]+1 \geq 0.$$

$$\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right)\right] \geq -1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}-1\right) \geq -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\varepsilon}-1 \geq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\varepsilon} \geq \frac{8}{5} \Rightarrow 3\varepsilon \leq \frac{5}{8} \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{5}{24} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ pt $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\exists\, x, n_0$, a.î. $|x_n - x| < \varepsilon$

qed.

Def Un şir are limita $+\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty\right) \iff \forall \varepsilon > 0$

$\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n > \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

Def Un şir are limită $\iff$
- este finită (conv)
- este infinită ($+$ sau $-\infty$)

obs: un şir (x_n) s.n. convergent $\iff$ are limită finită

obs: un şir (x_n) s.n. divergent $\iff$ nu are limită sau are limită infinită

$\boxed{T}$ Dacă (x_n) are limită, orice subșir al său are aceeași limită

Obs: dacă un șir conține 2 subșiruri care au limite diferite, at. șirul dat nu are lim ⇒ divergent

ex: $x_n = (-1)^n \Longrightarrow x_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} -1$

$\qquad\qquad\qquad\searrow x_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Obs: lim și conv. șirului nu se modifică dacă $\frac{\text{adăugăm}}{\text{înlocuim}}$ un număr finit de termeni

$\boxed{T}$ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right|$

caz partic: $x_n \longrightarrow 0 \Rightarrow |x_n| \longrightarrow 0.$

Obs: reciproca nu este adev.

$x_n = (-1)^n$ nu are lim, dar $|x_n| = 1 \longrightarrow 1$ conv.