BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

4

18.10.2022

Criterii de convergență pt SERII cu termeni OARECARE

① Criteriul lui DIRICHLET

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$, $\alpha_n, u_n \in \mathbb{R}$

Dacă : $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

: șirul $t_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ este mărginit.

at. $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$ = CONV.

obs: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ | +

$\frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) = \sin a \cos b$

ex: 9/57

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}}_{=x_n} , x\in\mathbb{R}$$

Fie $\alpha_n = \frac{1}{n}$ și $u_n = \sin(nx)$

$\alpha_n \to 0$

$t_n = \sin(x) + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$

obs: M nu trebuie să depindă de n

PONT $(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$ → Moivre

Fie și un $S_n = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$

$\Rightarrow S_n + i t_n = (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \ldots + (\cos nx + i \sin nx) =$

$= (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \ldots + (\cos x + i \sin x)^n =$

$= (\cos x + i \sin x) \frac{(\cos x + i \sin x)^n - 1}{\cos x + i \sin x - 1}$ → Moivre la n $\Rightarrow \square + i \square$

• folosim $i\sin x = \boxed{2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$\cos x - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1 = \boxed{-2\sin^2\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow \cos x + i\sin x = 2i\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)$

obs: $(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B) = \cos(A+B) + i\sin(A+B)$

$$\frac{\cos A + i\sin A}{\cos B + i\sin B} = \cos(A-B) + i\sin(A-B)$$

ex: ex 3/46 ~ rezolvat

obs: $S_n = \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, unde $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$t_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

revenim: $|t_n| = |\sin x + \ldots + \sin nx| = \left|\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}} \overset{not}{=} M \in \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow t_n$ e mărginit $\xRightarrow[\text{Dirichlet}]{T.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ e CONV, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

• pentru $x = 2k\pi \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nk\pi)}{n}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_n = 0 \rightarrow \sum$ e conv

Din cele 2 cazuri $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ e CONV, $\forall x \in \mathbb{R}$

② Criteriul lui LEIBNIZ

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$. Dacă $(\alpha_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n = \text{CONV}$

serii alternante

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \text{CONV}$ (Leibniz)

→ seamănă cu Dirichlet: $\alpha_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$u_n = (-1)^n$, $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = M$.

Criteriul lui Leibniz e un caz particular al lui Dirichlet (întrebare de examen)

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \text{CONV}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \text{div}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ semi CONV

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = \text{CONV}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ DIV

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ absolut CONV

Def: $\sum x_n$ s.n. ABSOLUT CONVERGENTĂ dacă $\sum |x_n|$ este CONV.

Def: $\sum x_n$ s.n. SEMICONVERGENTĂ dacă $\sum x_n = \text{CONV}$ și $\sum |x_n|$ este DIV

T Criteriul general de convergență al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e conv. dacă $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ a.î.

$$\underbrace{|x_{n+1}+\dots+x_{n+p}|}<\varepsilon, \forall n\geq N(\varepsilon), \forall p\in\mathbb{N}^*$$

Def: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \text{CONV}$ dacă $S_n = x_0+x_1+\dots+x_n = \text{CONV}$

$\Downarrow$

$(S_n)_{n\geq 0}$ = șir CAUCHY

$\Leftarrow$

$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)$ a.î. $|\underbrace{S_{n+p}-S_n}|<\varepsilon, \forall n\geq N(\varepsilon), \forall p\in\mathbb{N}^*$

ip. Σ abs. conv $\Rightarrow$ Σ

$$|x_{n+1}+\dots+x_{n+p}|\leq|x_{n+1}|+\dots+|x_{n+p}| = \big||x_{n+1}|+\dots+|x_{n+p}|\big|$$

dem: pg 35, carte

cap. ȘIRURI și SERII de FUNCȚII

§ ȘIRURI de FUNCȚII

Fie $\mathbb{N}$ și $D \subset \mathbb{R}$

$f: \mathbb{N} \times D \to \mathbb{R}$

$f(n,x) = f_n(x)$

șir de FUNCȚIE

ex 1: $f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$

$\Big\downarrow_{n\to\infty}$

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$g_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ex 2: $g_n(x) = \dfrac{nx^2}{n+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$

$\Big\downarrow_{n\to\infty}$

$g(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

ex: $f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$

Fie $f_n, f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Am un șir numeric $a_n \to 0$

Def: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{S} f \iff \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ a.î.
(converge SIMPLU)

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon, x)$

Def: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{U} f \iff \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$

Obs: Convergența uniformă IMPLICĂ convergența simplă.
În general, reciproca nu este adevărată.

ex: $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$, $D_1 = (-1, 1] \to$ domeniul pt. care $f_n(x) \xrightarrow{S}$

i) $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{S} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \forall x \in D_1 = (-1;1]$

ii) $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{U} g(x) \equiv 0.$

$\forall\, x \in D_2 = (-1;1)$