BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

9

Limite și CONTINUITATE pentru funcții de mai multe variabile

- $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$

$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_q(\bar{x}))$

ex: $f(x,y,z) = (x-y+\sin(xz), x^2-y^2+z^2)$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Def: Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ - un punct de acumulare ($\bar{a} \in D'$), și $l \in \mathbb{R}$. Funcția f are limită în punctul $\bar{a}$ dacă : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0$ a.î. $\forall \bar{x} \in D \setminus \{\bar{a}\}$ pentru care $|x_k - a_k| < \eta(\varepsilon)$, $k = \overline{1,p}$ $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

obs. $l = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$

limită în raport cu ansamblul variabilei

ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$

- $\lim\limits_{(x,y) \to (1, \frac{\pi}{2})} f(x,y) = \dfrac{\sin(1 \cdot \frac{\pi}{2})}{1} = 1.$

- $\lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} f(x,y) \overset{\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1}{=\!=\!=} \lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} y = 1.$

1

ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Stud. dacă f are limită în punctul $(0,0)$

Teorema lui HEINE: Funcția $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ are limita l în punctul $\bar{a} \in D'$ dacă și numai dacă pentru ORICE șir $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{\bar{a}\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{x}_n = \bar{a}$ avem că $\lim\limits_{n \to \infty} f(\bar{x}_n) = l$

Fie $\overline{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, $f(\overline{x}_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

$\overline{y}_n = \left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$, $f(\overline{y}_n) = f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{5} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{5}$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} (\overline{x}_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} (\overline{y}_n) \xRightarrow{\text{T. Heine}}$ f NU are limita în punctul $(0,0)$

Teorema CLEȘTELUI:

Funcția $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ are limita $l \in D$ în punctul $\overline{a} \in D'$ dacă există o funcție $g: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ a.î.

i) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = 0$

ii) $|f(\overline{x}) - l| \leq g(\overline{x})$, $\forall \overline{x} \in D$

ex: Fie $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right), & x,y \neq (0,0) \\ 2, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Stud existența limitei în $(0,0)$: $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$|f(x,y) - 0| = \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right| = |x^2+y^2| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right| \leq \overbrace{x^2+y^2}^{g(x,y)}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$

$\xRightarrow{\text{T. Cleștelui}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Limite ITERATE pentru funcții de mai multe variabile

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in D'$

$l_{12} \overset{not}{=} \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)\right)$

$l_{21} \overset{not}{=} \lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$

Ex: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Funcție ce are lim iterate, dar n-are lim în rap cu ans. var.

TEORIE EXAMEN

$$\Rightarrow l_{12} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot 0}{x^2+0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Legătura între limitele iterate și limita în raport cu ansamblul variabil

Dacă, pentru o funcție reală de mai multe variabile există o limită iterată și limita în raport cu ansamblul variabilelor, atunci aceste limite sunt egale între ele

$$\left.\begin{aligned} &\exists l_{12} \\ &\exists l \end{aligned}\right\} \Rightarrow l_{12} = l$$

Ex $f(x,y) = \frac{y^2-2x}{x^2-2y}$. Calc l_{12}, l_{21}, l în pct $(2,2)$

$$l_{12} = \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 2} \frac{y^2-2x}{x^2-2y}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{4-2x}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{-2}{x+2}\right) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$l_{21} = \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 2} \frac{y^2-2x}{x^2-2y}\right) = \lim_{y\to 2}\left(\frac{y^2-4}{4-2y}\right) = \lim_{y\to 2}\left(\frac{y+2}{-2}\right) = \frac{4}{-2} = -2.$$

$$\Rightarrow l_{12} = \frac{-1}{2} \neq -2 = l_{21}$$

$$\Downarrow$$

$$\nexists l$$

§ CONTINUITATE pt. funcții de mai multe variabile

Def: Funcția $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ este CONTINUĂ în punctul $\bar{a} \in D$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0$ a.î. dacă $|x_k - a_k| < \eta(\varepsilon)$, $k=\overline{1,p}$ $\Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon, \forall \bar{x} \in D$

Def: Funcția $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ este CONTINUĂ în punctul $\bar{a} \in D$ dacă $\forall (\bar{x}_m)_{m\geq 0} \in D$ cu $\bar{x}_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \bar{a} \Rightarrow f(\bar{x}_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(\bar{a})$

Def: Funcția $f: D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este CONTINUĂ în $\bar{a} \in D \iff \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

ex) Stud cont funcției $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^3y^3)}{x^2+2y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ în punctul $(0,0)$.

$$\bullet \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\left(1-2\sin^2\left(\frac{x^3y^3}{2}\right)\right)}{x^2+2y^4} = 2\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\left(\frac{x^3y^3}{2}\right)}{x^2+2y^4} =$$

$$= 2\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{x^3y^3}{2}\right)}{\left(\frac{x^3y^3}{2}\right)^2}}^{1} \cdot \left(\frac{x^3y^3}{2}\right)^2}{x^2+2y^4} = 2\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6y^6}{4(x^2+2y^4)} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0,$$

Obs: $\dfrac{1}{A^2+B^2} \leq \dfrac{1}{2|AB|}$, $A, B \neq 0$.

$$\to \left|\frac{x^6y^6}{x^2+2y^4} - 0\right| \leq \frac{|x^6y^6|}{2|x\sqrt{2}y^2|} = \frac{|x^5|\cdot y^4}{2\sqrt{2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

$$|f-g| \leq g$$

$\Downarrow$

T. Cleștelui: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6y^6}{x^2+2y^4} = 0$.

$\Rightarrow 0 = f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ - cont în $(0,0)$