BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:
Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

6

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e conv, $\forall x\in(-R,R]$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{pt. } x\in(-R,R)$$

$\Rightarrow S(x)=?$ în $x=R$

TEOREMA A DOUA A LUI ABEL

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $R\in(0,\infty)$ → raza de convergență

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e CONV în punctele x_0-R și x_0+R,

atunci suma seriei $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ este CONTINUĂ în $x_0\pm R$,

adică $S(x_0-R)=\lim_{\substack{x\to x_0-R\\ x>x_0-R}} S(x)$ și $S(x_0+R)=\lim_{\substack{x\to x_0+R\\ x<x_0+R}} S(x)$

$l_d(x_0-R)$ $\qquad$ $l_s(x_0+R)$

① $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$, $\forall x\in(-1;1)$

② $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$, $\forall x\in(-1;1)$

③ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$, $\forall x\in(-1;1)$

④ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, $\forall x\in(-1;1)$

SERII REMARCABILE

ex $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n^2}_{a_n} x^n$

a) $C=?$

b) $S(x)=?$

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \Rightarrow \Sigma$ conv în $(-1,1)$

• T Abel

• $x = \pm 1 \Rightarrow$ serii tratate după crit de conv $\Rightarrow \Sigma$ nu e conv în -1 și 1

$\Rightarrow C = (-1;1)$

ex

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n = S(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int S(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \int S(x)\,dx$$

$$\underbrace{+1\ x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} + \dots -1 = \frac{1}{1-x} - 1, \forall x \in (-1;1)$$

$$\Rightarrow S(x) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)', \forall x \in (-1;1)$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^{n-1}}}_{P(x)}$$

$$\bullet \int P(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\cancel{2}} \cdot \frac{x^n}{\cancel{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = x \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}}}_{Q(x)} = x \cdot Q(x)$$

$$\bullet\bullet \int Q(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n} \cdot \frac{x^n}{\cancel{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1 - 1 = \frac{1}{1-x} - 1, \forall x \in (-1;1)$$

$\Downarrow$

$$Q(x) = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)', \forall x \in (-1;1)$$

$$\Rightarrow P(x) = \left(x \cdot Q(x)\right)' = \dots, \forall x \in (-1;1)$$

$$\Rightarrow S(x) = \boxed{x \cdot P(x)}, \forall x \in (-1;1)$$

Sol. II $n^2 = ((n+1)-1)^2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 x^n} - 2\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \checkmark$$

$\int \Rightarrow \checkmark$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot x^{n+1} \rightarrow \text{Aparem}$$

$$\rightarrow x^n \sum (n+1) x^n$$

Obs: un singur fel: să ajungem la REMARCABILE 2/8!

SERII TAYLOR

Fie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ ↳ fixat, f - derivabilă de n ori în x_0

derivata de ordin n

$$(T_n f)(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

↳ POLINOMUL TAYLOR de ORDINUL n ASOCIAT funcției f în punctul x_0

- în ce măsură $f(x)$ poate fi aproximat cu un polinom? : $\boxed{?}$ $f(x) \cong (T_n f)(x)$

$$\boxed{f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x)}$$ FORMULA lui TAYLOR

rest de ordinul n

- în anumite condiții, funcția f este aproximată de polinomul Taylor T_n

① $\lim\limits_{x \to x_0} (R_n f)(x) = 0.$

$\Rightarrow f(x_0) \cong (T_n f)(x)$

② $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(R_n f)(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

③ $(R_n f)(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c)$, $c \in (x_0, x)$

restul de tip Lagrange

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)} = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + \dots$$

SERIE TAYLOR

obs.: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{\underbrace{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)}$ … a_n $\Rightarrow$ serie de puteri

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \overset{?}{=} S(x) \quad , C=?$$

obs: seriile Taylor pot fi privite ca și cazuri particulare de serii de puteri

: suntem interesați să găsim f și x_0 pt ca f(x) să fie expandabilă

TEOREMA de DEZVOLTABILITATE în seria TAYLOR

Fie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ fixat

f = indefinit derivabilă în x_0 (derivabilă de orice ordin (sin, cos, polinoame, ...))

Dacă $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, $M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (derivata e mărg la orice ordin),

atunci f e DEZVOLTABILĂ în SERIE TAYLOR în punctul x_0, adică:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \quad , \forall x \in I$$

obs: dacă $x_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} \cdot x^n}$ SERIE MAC-LAURIN

(ex) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = 0$.

$f(x) = e^x = ?$

↳ seria MAC-LAURIN

$f^{(n)}(x) = e^x, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$

$$\Rightarrow f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \boxed{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

(ex) $g(x) = \sin x$

$g'(x) = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$g''(x) = (g'(x))' = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' \xlongequal{\sin} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\xRightarrow{\text{inductiv}} \boxed{g^{(n)}(x) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}}$$

$$g^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & , n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^k & , n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x \xlongequal[\text{MAC-LAURIN}]{\text{Taylor în}} \underbrace{\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots}_{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Temă: pt $\cos x$: se duce t1

$$\left.\begin{array}{l} ch(x) : \text{cos hiperbolic} \xlongequal{def} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ sh(x) : \text{sin hiperbolic} \xlongequal{def} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}\right\} \text{de dezvoltat în ML}$$

$(sh\,x)' = ch(x)$

$(ch\,x)' = sh(x)$