BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

2

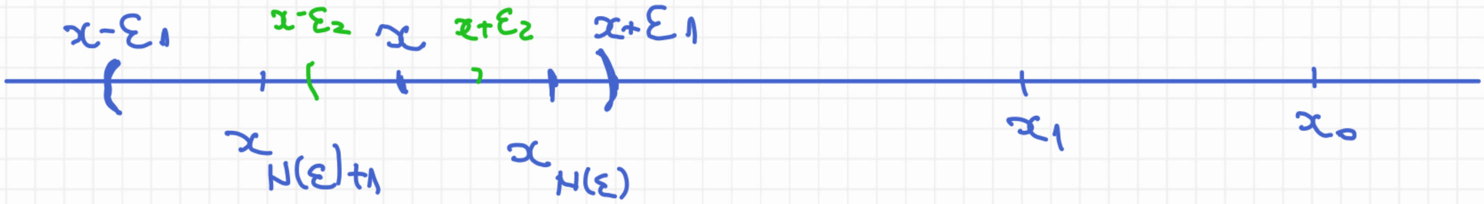
Şiruri

04.10.2022

Def: Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ e conv. la $x\in\mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ (rang) a.î. are loc $|x_n - x|<\varepsilon, \forall n\geq N(\varepsilon)$

$$\Updownarrow$$

$$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff \boxed{x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon}$$



ex: $\varepsilon_1 = 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 10^{-10}$

Concret: trebuie găsit $N(\varepsilon)$ cu parte întreagă

Def: (x_n) - mărg $\iff \exists M\in\mathbb{R}, M>0$ a.î. $|x_n|\leq M$

ex $x_n = \frac{1}{n+1}$, $n\geq 0$.

↳ şir mărginit

ex: $y_n = 2^n$, $n\geq 0$.

↳ şir nemărginit

Def: Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ e monoton:

- crescator dacă $x_n \leq x_{n+1}, \forall n\geq 0$
- descrescator dacă $x_n \geq x_{n+1}, \forall n\geq 0$.

Def: Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ e strict :

- crescator dacă $x_n < x_{n+1}, \forall n\geq 0$
- descrescator dacă $x_n > x_{n+1}, \forall n\geq 0$.

ex: $x_n = \frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$. $\quad x_0 > x_1 > \ldots > x_n \ldots$

$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$

↳ șir str ↘

: $y_n = 2^n$ șir str ↗

$z_n = (-1)^n$ NU e monoton

$\boxed{\text{Propoziție}}$ Un șir monoton și mărginit este convergent.

Din carte: pg 21 → 29 : 14 pb. nerezolvate

12/27 Dem. că $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, $n \geq 2$ este conv.

TEMĂ

5 $\quad x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ are limita ∞

10/25 $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = 1.$

9/25 $\quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

11/26 $\quad L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{e}$, $n \geq 2$.

$$x_n = \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}}}_{\frac{1}{e}} \cdot \underbrace{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}_{\to e} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n+1}{n}}}_{1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$\boxed{\text{Criteriul RADICALULUI (rădăcinii):}}$ $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$, $a_n > 0$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

$$y_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

not a_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

$$L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} = \underbrace{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}_{\to \frac{1}{e}} \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1}_{\overset{not}{=} S_n}\right) \cdot n}_{\to 1}$$

$$\frac{\ln(1+V_n)}{V_n} \xrightarrow{V_n \to 0} 1$$

• $S_n \cdot n = \underbrace{\frac{S_n}{\ln(1+S_n)}}_{\to 1} \cdot \boxed{n \cdot \ln(1+S_n)}$

$$\boxed{n \cdot \ln(1+S_n)} = n \cdot \ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt[n+1]{[(n+1)!]^n}}{n!}\right) = \ln \sqrt[n+1]{\frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}}} \longrightarrow \ln e = 1.$$

Temă: de parcurs pb rezolvate

de lucrat din carte

Def: Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ s.n. CAUCHY (șir fundamental) dacă

$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ a.î. $|x_m - x_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq N(\varepsilon)$

Def: Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ s.n. CAUCHY (șir fundamental) dacă

$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$

$\forall p\in\mathbb{N}^*$

$\boxed{T}$ Șirul de nr. reale $(x_n)_{n\geq 0}$ este CONVERGENT $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (x_n) este șir CAUCHY.

Obs: orice șir Cauchy este mărginit

Propoziție Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ s.n. CAUCHY (șir fundamental) dacă

$\exists (a_n)_{n\geq 0}, a_n>0$ cu proprietatea:

(i) $|x_{n+p} - x_n| < a_n, \forall n\geq 0, \forall p>0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ex $x_n = \dfrac{\sin(x)}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin(nx)}{2^n}, n\geq 1$. Dem. că (x_n) conv. $\forall x\in\mathbb{R}$

Sol:

$|a+b| \leq |a|+|b|$

- arătăm că (x_n) - șir Cauchy

- evaluăm $|x_{n+p} - x_n| = \left|\dfrac{\sin[(n+1)x]}{2^{n+1}} + \dfrac{\sin[(n+2)x]}{2^{n+2}} + \ldots + \dfrac{\sin[(n+p)x]}{2^{n+p}}\right| \leq$

$\leq \dfrac{\overbrace{|\sin[(n+1)x]|}^{\leq 1}}{2^{n+1}} + \ldots + \dfrac{\overbrace{|\sin[(n+p)x]|}^{\leq 1}}{2^{n+p}} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n+p}} =$

$= \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^p}\right) = \dfrac{1}{2^n}\cdot \cancel{\dfrac{1}{2}}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2^p}}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} =$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \le \boxed{\frac{1}{2^n}} \overset{not}{=} a_n$$

Cum $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \overset{\text{Prop 2}}{\Longleftrightarrow} (x_n) =$ CAUCHY $\overset{\boxed{T}}{\Rightarrow}$ șirul e conv.

Cap. SERII NUMERICE

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ = şir numeric

- $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$ → infinit

x_n → termenul general al SERIEI

- $S_n \overset{def}{=} x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ → finit

$\downarrow$

şirul sumelor parţiale

Def $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este conv dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ = conv at. şirul $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \in \mathbb{R}$

Nr. real $\boxed{S}$ s.n. suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$

ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ($\frac{1}{2^n} = x_n$) $\qquad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e conv pt. că $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$. În plus,

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este $S = 2$.