BOȚOC Indi

NOTIȚE DE CURS

CTI-RO-1

AM

Analiză matematică

an univ. 2022-2023

Curs predat de:

Conf. univ. dr.
CĂDARIU
Liviu

10

Cap. DERIVATE și DIFERENȚIABILITATE PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-x_0}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}$

REINTRODUCERE

$\Vert$ SAU

$f'_x(x_0,y_0,z_0)$

derivata parțială de ordinul 1 a funcției f în raport cu x

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \overset{def}{=} \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{y-y_0}$

- $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \overset{def}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{z-z_0}$

ex: $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = ?$ $\qquad f(x,y,z) = x-y+\sin(z-y)$

Met1 $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})-f(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-\frac{\pi}{2})-(1-\frac{\pi}{2})}{x-1} = 1.$

Met2 $\frac{\partial f}{\partial x} = 1+0+0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 1$

ex: $\frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 0-1+\cos(z-y)\cdot(-1)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = -1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = -1-1 = -2.$

Obs: $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$, $f_i: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$

ex: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\right)$

• Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(x_0, y_0, z_0) \in \mathring{A}$

$\bar{x} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\bar{x}), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\bar{x}), \ldots, \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(\bar{x})\right), \quad k = \overline{1,p}$$

q

p

$$\bullet\ J(f)(\bar{x}) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

matricea Jacobiană

Obs: dacă $p = q \Rightarrow J$ e pătratică $\Rightarrow \det(J f(\bar{x})) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(\bar{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(\bar{x}) \end{vmatrix}$

$\stackrel{not}{=} \dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}$

determinant funcțional

"

Jacobianul funcției f

Funcții diferențiabile

$f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathring{A}$

$$d_{\bar{x}}^1 f \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, dz$$

Obs: pt $A \in \mathbb{R} \Rightarrow (d_x f)(x_0) = f'(x_0)\, dx$

Def: Funcția $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $\bar{x} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}$ dacă există $\omega: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât:

i) $$f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0) +$$
$$+ \overset{?}{\omega(x,y,z)} \cdot \|(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\|$$

$\|(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

ii) ω este CONTINUĂ și NULĂ în punctul (x_0, y_0, z_0)

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \omega(x,y,z) = \omega(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

$\boxed{T}$ Dacă TOATE derivatele parțiale de ordinul I ale funcției f sunt CONTINUE în punctul (x_0,y_0,z_0), atunci f este DIFERENȚIABILĂ în punctul (x_0,y_0,z_0)

Obs: $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

$\bar{x} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in \mathring{A}$

$$\Rightarrow d^1_{\bar{x}} f \overset{def}{=} \left(d^1_{\bar{x}} f_1, d^1_{\bar{x}} f_2, \ldots, d^1_{\bar{x}} f_q\right)$$

Obs: $d^1_{\bar{x}} \square$ operator de diferențiabilitate $\rightsquigarrow$ operator liniar

(ex) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $a \geq 1$

- dem. că f e cont în $(0,0)$
- dem. că f are derivate parțiale în origine
- pt. $a=1$, dem. că f nu e diferențiabilă în $(0,0)$
- pt. $a>1$, dem. că f e diferențiabilă în $(0,0)$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} f(0,0)$

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x^a \cdot y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x^a \cdot y|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{|x|\cdot|y|}} = \underbrace{\frac{|x|^{a-\frac{1}{2}} \cdot |y|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}}_{g(x)}$$

$$\xrightarrow[\text{maj.}]{\text{crit.}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$\bullet \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$

$- \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=?$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$\left(\frac{(x^a\cdot y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{\left(a\cdot x^{a-1}\cdot y\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)-x^a\cdot y\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{a\cdot x^{a-1}\cdot y(x^2+y^2)-x^{a+1}\cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} f'_x(0,0) = \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

apoi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

apoi: pe cazuri : $a=1$, $a>1$