Università degli Studi di Salerno
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Magistrale in
Informatica

Titolo

Relatori
Prof. Vincenzo Auletta
Dott. Diodato Ferraioli

Candidato
Francesco Farina
Matricola 0522500282

Anno Accademico 2015-2016

Dediche e ringraziamenti

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Capitolo 2

Alcuni concetti base

2.1 Teoria dei Grafi

La teoria dei grafi è una branca della matematica, nata nel 1700 con Eulero, che consente di descrivere le relazioni che intercorrono tra un insieme di oggetti.
Il grafo è lo strumento attraverso il quale tali relazioni possono essere espresse ed organizzate. Infatti, il grafo, consiste di oggetti chiamati *nodi* e relazioni tra coppie di questi oggetti detti *archi*; nodi connessi tra loro da un arco sono detti *vicini* o *adiacenti*.

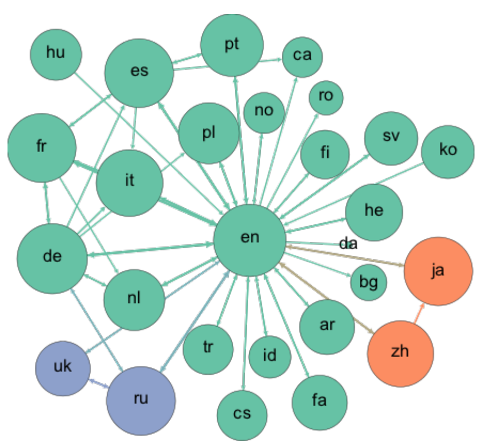

Figura 2.1: Wikipedia Multilingual Network Graph (July 2013)

La relazione tra una coppia di nodi può essere di due tipi:

- Simmetrica: l'arco connette i nodi con un collegamento bidirezionale ed è detto *indiretto*. Un grafo costituito di soli archi indiretti è anch'esso detto indiretto.

- Asimmetrica: l'arco connette i nodi con un collegamento unidirezionale ed è detto *diretto*. Un grafo costituito di soli archi diretti è anch'esso detto diretto.

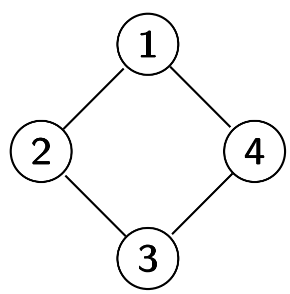

Figura 2.2: Grafo indiretto

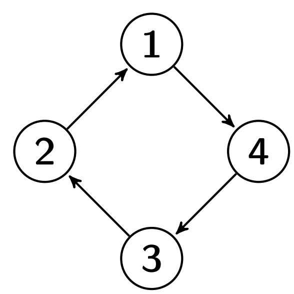

Figura 2.3: Grafo diretto

Un grafo può essere formalmente descritto come una coppia di insiemi $\mathbf{G} = \mathbf{(V, E)}$, dove V è l'insieme dei nodi ed E è l'insieme degli archi. Un arco e $\in$ E è rappresentato come un sottoinsieme di due elementi di V, $e = \{u, v\}$ per $u, v \in V$.
Le rappresentazioni atte a descrivere un grafo sono molteplici:

- *Rappresentazione grafica*: ad ogni nodo corrisponde una figura circolare sul piano e ad ogni arco (i, j) corrisponde una linea che che collega il nodo i al nodo j.

- *Matrice di adiacenza*: matrice di dimensione $n \times n$, dove n è il numero di nodi, il cui elemento (i, j) assume valore 1 se esiste l'arco tra il nodo i ed il nodo j, 0 altrimenti.

- *Lista di adiacenza*: ad ogni vertice v è associata la lista dei nodi ad esso vicini.

Negli anni, gli studi sulla teoria dei grafi hanno prodotto una quantità enorme di definizioni e teoremi, per cui, di seguito vengono descritti solamente i concetti necessari alla comprensione di questo lavoro di tesi.

Sottografo. Un grafo H si dice sottografo di un grafo G se i vertici di H sono un sottoinsieme dei vertici di G e gli archi di H sono un sottoinsieme degli archi di G. Siano $G = (V, E)$ ed $H = (V_1, E_1)$ due grafi. H è un sottografo di G se e solo se $V_1 \subseteq V$ ed $E_1 \subseteq E$. Un concetto particolarmente utile alla comprensione di questo lavoro è lo *spanning subgraph*: uno spanning subgraph H di un grafo G è un sottografo che contiene tutti i vertici di G, cioé $V_1 = V$.

Grado di un nodo. Il grado di un nodo v è il numero di nodi ad esso adiacenti ed è indicato con *deg(v)*.
In un grafo diretto, si distinguono due tipi di grado:

- *in-deg(v)*, il grado in ingresso del nodo v, dato dal numero di archi in cui v compare come nodo destinazione;
- *out-deg(v)*, il grado in uscita del nodo v, dato dal numero di archi in cui v compare come nodo sorgente.

Cammino. Un cammino è una sequenza di nodi, in cui ogni coppia consecutiva della sequenza sia connessa da un arco. Formalmente, un cammino è una sequenza di vertici $v_0, v_1, \cdots, v_n \in V$ tale che $\{v_{i-1}, v_i\} \in E, \forall 1 \leq i \leq n$. Un cammino con almeno tre vertici distinti, i cui vertici di inizio e fine coincidono, è detto *ciclo*.

Grafo connesso. Un grafo è connesso se, per ogni coppia distinta di vertici (i, j), esiste un cammino da i a j.

2.1.1 Grafo come modello della realtà

I grafi hanno una grande utilità, in quanto consentono di astrarre le relazioni che intercorrono tra più oggetti, e di rappresentare tali relazioni in strutture su cui è possibile applicare modelli matematici. In [1] viene proposto un esempio reale: la Figura 2.4 rappresenta la struttura della rete Internet nel Dicembre del 1970, noto come ARPANET allora, composto solo da 13 macchine. I nodi rappresentano gli host, e vi è un arco tra due host se esiste una comunicazione diretta tra di essi. Come è possibile intuire, la posizione geografica dei nodi non ha molta importanza, ma quel che conta è il come ogni nodo sia connesso agli altri. Infatti la figura 2.5 mostra lo stesso grafo di ARPANET, attraverso una rappresentazione logica. Il grafo di ARPANET mostrato in precedenza è un esempio di ***communication network***, i cui

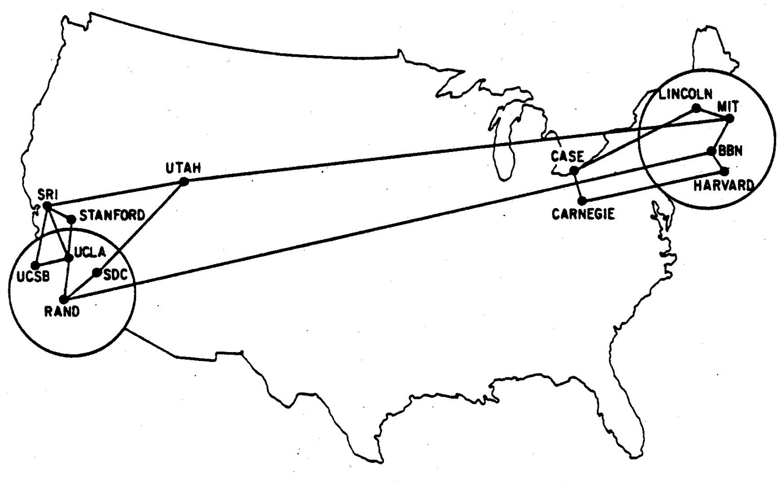

Figura 2.4: ARPANET nel Dicembre 1970

nodi sono computer o altri dispositivi capaci di inviare messaggi mentre gli archi rappresentano i collegamenti diretti lungo i quali tali messaggi possono viaggiare.

2.1.2 Complex Networks

2.2 Modello di Ising

2.2.1 Partition Function

2.3 Cenni di probabilità e statistica

2.4 Processi Markoviani

2.4.1 Irriducibilità e periodicità

2.4.2 Distribuzione stazionaria

2.4.3 Catena di Markov Monte Carlo

2.5 Algoritmi di approssimazione

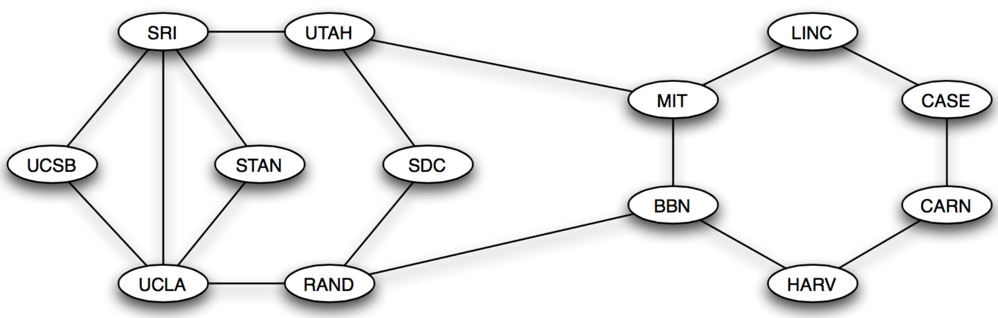

Figura 2.5: Grafo di ARPANET nel Dicembre 1970

Capitolo 3

Logit Dynamics

3.1 Definizione

3.2 Propiretà

3.2.1 Ergodicità

3.2.2 Logit dynamics e Glauber dynamics

3.3 Movitazioni

3.4 Alcuni Esperimenti

Capitolo 4

Il lavoro di Jerrum e Sinclair

4.1 Spins world e Subgraphs world

4.2 Stima della Partition Function

4.3 Analisi del subgraphs-world process

Capitolo 5

Miglioramenti apportati

5.1 Stato dell'arte

5.1.1 Miglioramenti Rinaldi

5.1.2 Esperimenti

5.2 Stima della Partition Function

5.2.1 Numero di steps

Capitolo 6

Mean Magnetic Moment

6.1 Lemma 8, Teorema 9

6.2 Approssimazione della funzione odd(X)

6.2.1 logm Subgraphs

6.2.2 Algoritmo L

Capitolo 7

Implementazione e testing

7.1 Implementazione

7.2 Testing

7.3 DLib Python Wrapper

Capitolo 8

Conclusioni e sviluppi futuri

Bibliografia

[1] D. Easley and J. Kleinberg, *Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected world.* Cambridge University Press, 2010.