

A more efficient implementation of the subgraphs-world for the Glauber dynamics in the Ising model

Francesco Farina

Laurea Magistrale in Informatica
Università degli Studi di Salerno

30 settembre 2016

Relatori

Prof. Vincenzo Auletta

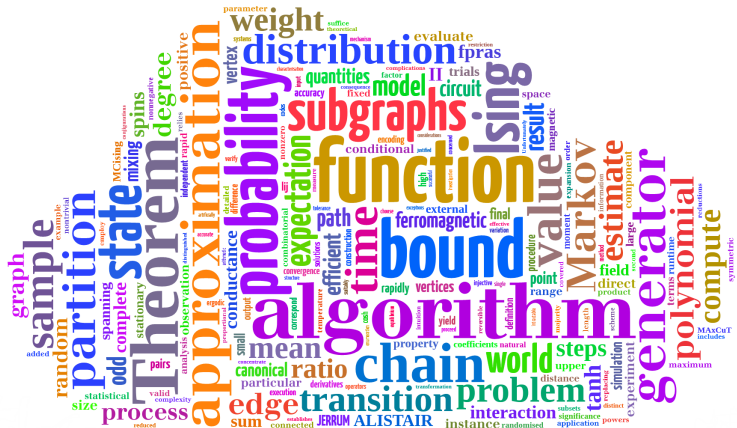
Dott. Diodato Ferraioli



Overview

- 1 Introduzione
- 2 Stato dell'arte
- 3 Lavoro di Tesi
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

Tag Cloud



Reti Sociali

La rapida crescita delle **reti sociali** ha cambiato il modo in cui le persone interagiscono.

Le informazioni si diffondono molto più velocemente.

L'influenza di ogni singolo sui suoi vicini crea un'idea globale.



Reti Sociali

La rapida crescita delle **reti sociali** ha cambiato il modo in cui le persone interagiscono.

Le informazioni si diffondono molto più velocemente.

L'influenza di ogni singolo sui suoi vicini crea un'idea globale.



Reti Sociali

La rapida crescita delle **reti sociali** ha cambiato il modo in cui le persone interagiscono.

Le informazioni si diffondono molto più velocemente.

L'influenza di ogni singolo sui suoi vicini crea un'idea globale.



Sistema complesso

- Insieme composto da più parti
 - ▶ Ogni parte possiede uno o più obiettivi
 - Comportamento globale
 - ▶ Determinato dall'interazione delle singole parti
-
- Rilevato in ambiti differenti
 - ▶ Economico, fisico, informatico, biologico, ecc...
 - Fenomeni analoghi si verificano al loro interno
 - ▶ Necessità di un linguaggio comune che modelli la struttura del sistema ed il comportamento delle parti



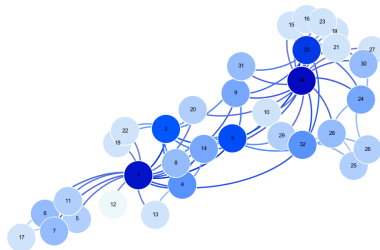
Sistema complesso

- Insieme composto da più parti
 - Ogni parte possiede uno o più obiettivi
- Comportamento globale
 - Determinato dall'interazione delle singole parti
- Rilevato in ambiti differenti
 - Economico, fisico, informatico, biologico, ecc...
- Fenomeni analoghi si verificano al loro interno
 - Necessità di un linguaggio comune che modelli la struttura del sistema ed il comportamento delle parti



Graph Theory

- Descrive le relazioni che intercorrono tra oggetti di un insieme
 - Branchia della matematica nata nel 1700
- *Grafo*: struttura che descrive ed organizza tali relazioni
 - *Nodo*: oggetto dell'insieme
 - *Arco*: esprime la relazione tra coppie di oggetti



Game Theory

- Modella il comportamento di agenti che devono prendere decisioni
 - ▶ Situazioni di conflitto o interazione strategica
 - ▶ Azioni che si influenzano a vicenda
- Interazioni modellate come *gioco*
 - ▶ Giocatori
 - ▶ Strategie
 - ▶ Payoff



Game Theory classica

- Giocatori pienamente razionali
 - ▶ Conoscenza completa del gioco
 - ▶ Potere computazionale illimitato
 - ▶ Best response *dynamics*
- Non realistico nei casi del mondo reale
 - ▶ Risorse limitate
- Modellare la *bounded rationality*
 - ▶ Dinamica probabilistica
 - ▶ Strategia giocata
 - *Alta probabilità*: massima utilità
 - *Bassa probabilità*: scelta sbagliata

Logit dynamics

Definizione

- Considera un gioco $\mathcal{G} = ([n], S_1, \dots, S_n, u_1, \dots, u_n)$
 - ▶ n giocatori
 - ▶ S_i : insieme finito di strategie per il giocatore i
 - ▶ u_i : funzione utilità per il giocatore i

Ad ogni passo

- Seleziona un giocatore i a caso
- i modifica la sua strategia in accordo alla *logit update rule*

Logit update rule

Strategia

$s \in S_i$ con probabilità $\sigma_i(s|x) = e^{\beta u_i(s, x_{-i})} / Z_i(x)$

Parametri

- x : corrente profilo di strategie
- $Z_i(x)$: fattore di normalizzazione
 - ▶ $\sum_{z \in S_i} e^{\beta u_i(z, x_{-i})}$
- β : grado di razionalità del sistema
 - ▶ $\beta = 0$: scelta casuale
 - ▶ $\beta > 0$: profili a payoff maggiore
 - ▶ $\beta \rightarrow \infty$: *best response*

Logit dynamics

Potential game

- Se \mathcal{G} è un potential game con funzione potenziale Φ
 - ▶ Distribuzione stazionaria \rightarrow *Gibbs measure*
 - $\pi(x) = \frac{1}{Z} e^{\beta \Phi(x)}$
 - ▶ Logit dynamics \rightarrow *Glauber dynamics*
 - ▶ $Z \rightarrow$ *Partition function*
 - Descrive situazioni di equilibrio termodinamico

Obiettivo del lavoro

Computare la *Gibbs measure*

Applicazioni

- Computare il *Mean Magnetic Moment*
- Prevedere l'adozione di un prodotto da parte di una popolazione sotto campagna pubblicitaria

Obiettivo del lavoro (2)

Approccio

- Simulare la dinamica finché non raggiunge la distribuzione stazionaria
- **Calcolare la partition function Z**
 - ▶ Problema *#P-hard*
 - Limiti computazionali per ottenere Z

Soluzione Approssimata

Catena di Markov alternativa

- Rapidly Mixing
- Distribuzione stazionaria da cui derivare quella di nostro interesse

Modello fondamentale

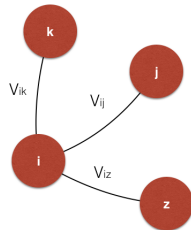
Polynomial-time approximation algorithms for the Ising model

- Mark Jerrum ed Alistair Sinclair, 1993
- Algoritmo JS
 - ▶ *fully polynomial randomized approximation scheme* (fpras)
 - ▶ Calcolo della **partition function Z** della *Gibbs measure*
 - ▶ Descritto analiticamente

Modello di Ising

Configurazioni n giocatori

- Giocatore i : $\sigma_i = \pm 1$
- Configurazione $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$
- Peso archi
 - ▶ $\forall (i, j) \in E : V_{ij} \neq 0$



Simulare la catena di Markov

Spin-world process

- Stati: 2^n configurazioni del gioco
- Transizioni tra configurazioni che differiscono in una sola componente
- Non è *rapidly mixing*

Subgraphs-world process

- Processo generico
- Applicabile al modello di Ising
- È **rapidly mixing**

Simulare la catena di Markov

Spin-world process

- Stati: 2^n configurazioni del gioco
- Transizioni tra configurazioni che differiscono in una sola componente
- Non è *rapidly mixing*

Subgraphs-world process

- Processo generico
- Applicabile al modello di Ising
- È **rapidly mixing**

Subgraphs-world process

Configurazioni

- *Spanning subgraph* del grafo d'interazione del gioco (n, E)
- Sottografo che contiene tutti i nodi del grafo iniziale
- Configurazione X : peso $w(X)$

Catena di Markov ergodica

- Stati: 2^m configurazioni, $m = |E|$
- Transizioni tra configurazioni che differiscono di un solo arco
- Distribuzione stazionaria
 - ▶ $\pi(X) = w(X)/Z'$
- *Partition function*
 - ▶ $Z' = \sum_{X \subseteq E} w(X)$

Algoritmo di Jerrum e Sinclair

Input

- Modello di Ising (grafo)
- β : livello di razionalità
- B : campo magnetico esterno
- $\epsilon \in [0, 1]$: accuratezza

Passi

- Simulare la *subgsw-MC* fino a raggiungere la stazionaria
- Calcolare la partition function Z'

Output

Approssimazione della *partition function* Z

Algoritmo di Jerrum e Sinclair (2)

Algoritmo FPRAS

- Approssima Z in un range $(1 + \epsilon/2n)^n \leq 1 + \epsilon$
- Running time *polinomiale* in n

Parametri che influenzano il tempo

- s : numero di campioni
- t : ripetizioni necessarie
- $\#$ passi di simulazione della *subgsw-MC*

Prestazioni

Macchina di test

- CPU: AMD Opteron™ 6376 32 core
- RAM: 32GB
- S.O.: Ubuntu 14.04 LTS

Random graph: 5 nodi e 10 archi

B	β	ϵ	s	t	step	Tempo
20	0.4	0.9	79778	25	1994450	1g 17h 45min
20	0.1	09	79778	25	1994450	1g 18h 56min

Miglioramenti apportati in passato

An efficient approximation algorithm for computing the Gibbs measure

- Rinaldi, 2016
- Prima implementazione dell'algoritmo JS (Partition)
- Migliorati i valori di s e t
 - ▶ Correttezza dimostrata nel lavoro di tesi

Miglioramenti apportati in passato (2)

Prestazioni algoritmo Partition

B	β	ϵ	s	t	step	Tempo	Tempo algoritmo JS
20	0.4	0.9	1	2	2	377ms	1g 17h 45min
20	0.1	0.9	58	2	116	863ms	1g 18h 56min

Proof of concept

- Buon miglioramento, ma non abbastanza
- 45 nodi, 500 archi → Più di **4 ore**

Inutilizzabile in situazioni reali

Esigenze e Possibili soluzioni

Esigenze

- Poter utilizzare l'algoritmo *Partition* anche su reti di grandi dimensioni
- Ridurre il *running time*
- Sviluppare un'applicazione pratica

Strade percorse

- Migliorare l'implementazione
- Analisi ed ottimizzazione del lavoro di JS
 - Simulazione della subgsw-MC
- Integrazione di contributi teorici più moderni
- Nuovo algoritmo per il calcolo del *Mean Magnetic Moment*

Generatore per il subgraphs-world process

Algoritmo probabilistico

- *Input:*
 - ▶ Grafo
 - ▶ Tolleranza δ
 - ▶ Insieme di configurazioni Ω
 - ▶ Distribuzione di probabilità π su Ω
- *Output:*
 - ▶ $w(X)$, peso configurazione finale $X \in \Omega$

Approssimare Z

Algoritmo: intuizione

- Costruire insieme $\{X_1, \dots, X_s\}$ di configurazioni utilizzando il generatore
- Calcolare la media campionaria $s^{-1} \sum_i f(X_i)$

Ripetere la procedura t volte e calcolare la mediana dei risultati

Problema

#Passi di simulazione della *subgsw-MC* troppo alto

Approssimare Z

Algoritmo: intuizione

- Costruire insieme $\{X_1, \dots, X_s\}$ di configurazioni utilizzando il generatore
- Calcolare la media campionaria $s^{-1} \sum_i f(X_i)$

Ripetere la procedura t volte e calcolare la mediana dei risultati

Problema

#Passi di simulazione della *subgs*-MC troppo alto

Nuovo punto di vista

Convergence to Equilibrium of Logit Dynamics for Strategic Games

- Auletta, Ferraioli, Pasquale, Penna, Persiano
- *Bound sul mixing time* di catene di Markov associate a *Logit dynamics*

Idea

Sviluppare un *upper bound* al mixing time della nostra catena di Markov basandosi su questo lavoro

Nuovo punto di vista

Convergence to Equilibrium of Logit Dynamics for Strategic Games

- Auletta, Ferraioli, Pasquale, Penna, Persiano
- *Bound sul mixing time* di catene di Markov associate a *Logit dynamics*

Idea

Sviluppare un **upper bound** al mixing time della nostra catena di Markov basandosi su questo lavoro

Integrazione del nuovo bound (2)

Complessità: Jerrum e Sinclair

- $\Phi^{-2}(\ln \delta^{-1} + \ln \pi(X_0)^{-1})$
- $16 m^2 \mu^{-8}(\ln \delta^{-1} + m)$
 - ▶ m : numero di archi
 - ▶ $\mu = \tanh \beta B$

Complessità: Auletta et al.

- $\rho(\ln \delta^{-1} + \ln \pi(X_0)^{-1})$
- ρ : congestione dell'insieme di path

Integrazione del nuovo bound (2)

Complessità: Jerrum e Sinclair

- $\Phi^{-2}(\ln \delta^{-1} + \ln \pi(X_0)^{-1})$
- $16 m^2 \mu^{-8}(\ln \delta^{-1} + m)$
 - ▶ m : numero di archi
 - ▶ $\mu = \tanh \beta B$

Complessità: Auletta et al.

- $\rho(\ln \delta^{-1} + \ln \pi(X_0)^{-1})$
- ρ : congestione dell'insieme di path

Upper bound per ρ

Idea

- Ordinamento degli archi del grafo
- Canonical path
 - ▶ Per ogni coppia di stati I, F in Ω
 - ▶ Transizione valida: profili che differiscono per un solo arco
 - ▶ Peso cp : prodotto delle probabilità stazionarie allo stato iniziale e finale
 - Indipendente dagli archi intermedi

Nuovo bound

- $\rho(\Gamma^l) \leq 2m^2 \mu^{-4} w(I) w(F)$
- Complessità Generatore = $2m^2 \mu^{-4} (\ln \delta^{-1} + 1)$

Upper bound per ρ

Idea

- Ordinamento degli archi del grafo
- Canonical path
 - ▶ Per ogni coppia di stati I, F in Ω
 - ▶ Transizione valida: profili che differiscono per un solo arco
 - ▶ Peso cp : prodotto delle probabilità stazionarie allo stato iniziale e finale
 - Indipendente dagli archi intermedi

Nuovo bound

- $\rho(\Gamma^l) \leq 2m^2 \mu^{-4} w(I) w(F)$
- Complessità Generatore = $2m^2 \mu^{-4} (\ln \delta^{-1} + 1)$

Riscontro pratico

Notevoli progressi

- *Random graph* da 45 nodi e 500 archi
- Più di 4 ore → 4 secondi

Risultati promettenti

Caso di studio

Mean Magnetic Moment: definizione

- \mathcal{M} : derivata parziale della *partition function* Z rispetto a B e β
- Valore atteso di variabili casuali opportunamente definite nel *subgraphs-world*
 - ▶ $\mathcal{M} = n \tanh \beta B + \frac{2}{\sinh 2 \beta B} E|odd(X)|$
- Stima tramite simulazione del *subgraphs-world* per un numero polinomiale di passi

Enumerazione degli spanning subgraphs

Algoritmo L

- Iterazione efficiente di tutte le possibili permutazioni lessicografiche di una sequenza senza ripetizioni
- Sviluppato nel *XIV* secolo in India
- Mostrato da Donald Knuth in "*The Art of Computer Programming*"

Stima della funzione $odd(X)$

Idea alla base dell'algoritmo

- Stima a soglia in due fasi
- Fase 1: calcolo esatto del peso delle prime k configurazioni
- Fase 2: stima delle restanti $2^m - k$
- Output di $E|odd(X)|$

Semplice ottenere \mathcal{M}

Test al variare delle dimensioni dell'input

Partition2: scalabilità

Nodi	Archi	s	t	Tempo
100	1000	1	2	16s 360ms
200	5000	1	2	6min 36s 600ms
500	10000	1	2	26min 51s
1000	10000	2	2	27min 47s 400ms
2000	20000	4	2	1h 54min 36s
3000	50000	6	2	13h 51min 36s
5000	100000	10	2	2g 14h

Parametri

- $B = 20$
- $\beta = 0.4$
- $\epsilon = 0.1$

Accuratezza e Razionalità

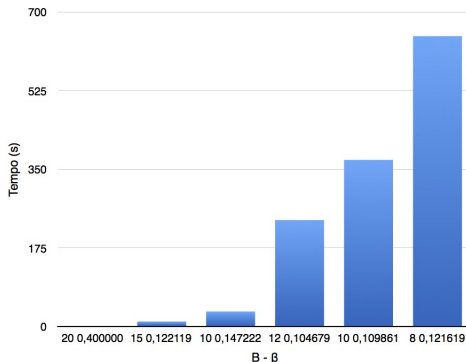
Accuratezza ϵ

- $\epsilon \in [10^{-1}, 10^{-4}]$
- Running time invariato fino a 10^{-3}

μ , campo magnetico e razionalità

- $\mu \in [1, 0.75]$
- $B \in [20, 0.8]$
- $\beta \in [0.4, 0.10]$

Accuratezza e Razionalità (2)



Tempo proporzionale al decrescere di campo esterno e razionalità

Test di magnetizzazione

Partition

Nodi	Archi	s	t	Tempo
10	50	62245	2	14h 20min 16s

Partition2

Nodi	Archi	s	t	Tempo
10	50	5950	2	3min 48s
20	100	13218	2	6min 31s
40	250	27754	2	12min 46s
100	1000	71361	2	34min 15s
500	5000	362075	2	3h 24min 17s

Gnutella

Descrizione

- Sequenza di 9 *snapshots* della rete di condivisione file *peer-to-peer* Gnutella a partire da Agosto 2002
- Nodi: *host* nella topologia della rete (6301)
- Archi: connessioni tra gli *host* (20777)

Tempo

Partition function Z calcolata in circa 16 ore

Facebook

Descrizione

- *Snapshot* di un sottografo della rete di amicizie di Facebook
- Nodi: utenti della sottorete (4039)
- Archi: relazioni di amicizia tra utenti (88234)

Tempo

Partition function Z calcolata in circa 7 giorni

Conclusioni e sviluppi futuri

- Notevoli miglioramenti apportati all'algoritmo *Partition*
- Running time ragionevoli
- Possibilità di testare grandi dataset

Sviluppi futuri

- Parallelizzare la simulazione della catena di Markov
- Migliorare il calcolo del *mean magnetic moment*

Conclusioni e sviluppi futuri

- Notevoli miglioramenti apportati all'algoritmo *Partition*
- Running time ragionevoli
- Possibilità di testare grandi dataset

Sviluppi futuri

- Parallelizzare la simulazione della catena di Markov
- Migliorare il calcolo del *mean magnetic moment*

Grazie per l'attenzione

