Vecteurs 101

Géométrie et Calcul Vectoriel

Définitions et Notation

Définition :

Un vecteur est une grandeur ayant une direction et une magnitude.

Un vecteur est un objet de l'espace. On dit qu'il est de dimension n si il a n composantes.

Dans le plan, $n = 2$.

Notation vectorielle :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$$

Example :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$$

Déplacement : Vecteur reliant le point A au point B :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Norme (Grandeur)

La longueur du vecteur, notée $\|\vec{v}\|$.

En 2D :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Vecteur Unitaire ($\hat{u}$) : Vecteur de longueur 1 direction $\vec{v}$:

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Opérations de Base

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

Addition :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

Soustraction :

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

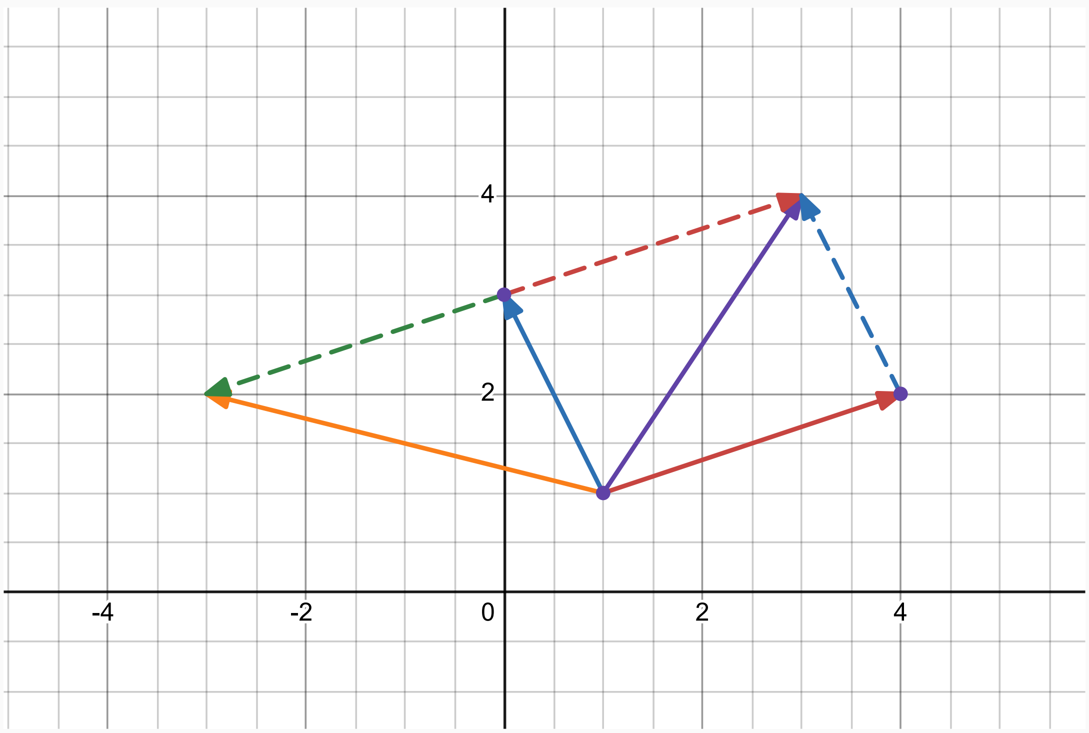

Fig. 1. – Le vecteur $\vec{u}$ (rouge) et le vecteur $\vec{v}$ (bleu)

Multiplication par scalaire (k) :

$$k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} ku_x \\ ku_y \end{pmatrix}$$

Produit Scalaire

Résultat : un **nombre** (scalaire).

Formule algébrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Formule géométrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Angle entre 2 vecteurs

On isole $\cos(\theta)$. Les parenthèses assurent que la fraction reste bien empilée :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

Produit Vectoriel (3D)

Résultat : un **vecteur** perpendiculaire.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Magnitude :

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$$

Calcul (Déterminant) : Notez les flèches sur i, j, k :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det\left(\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}\right)$$

Projections

Projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

$$\text{proj}_v(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

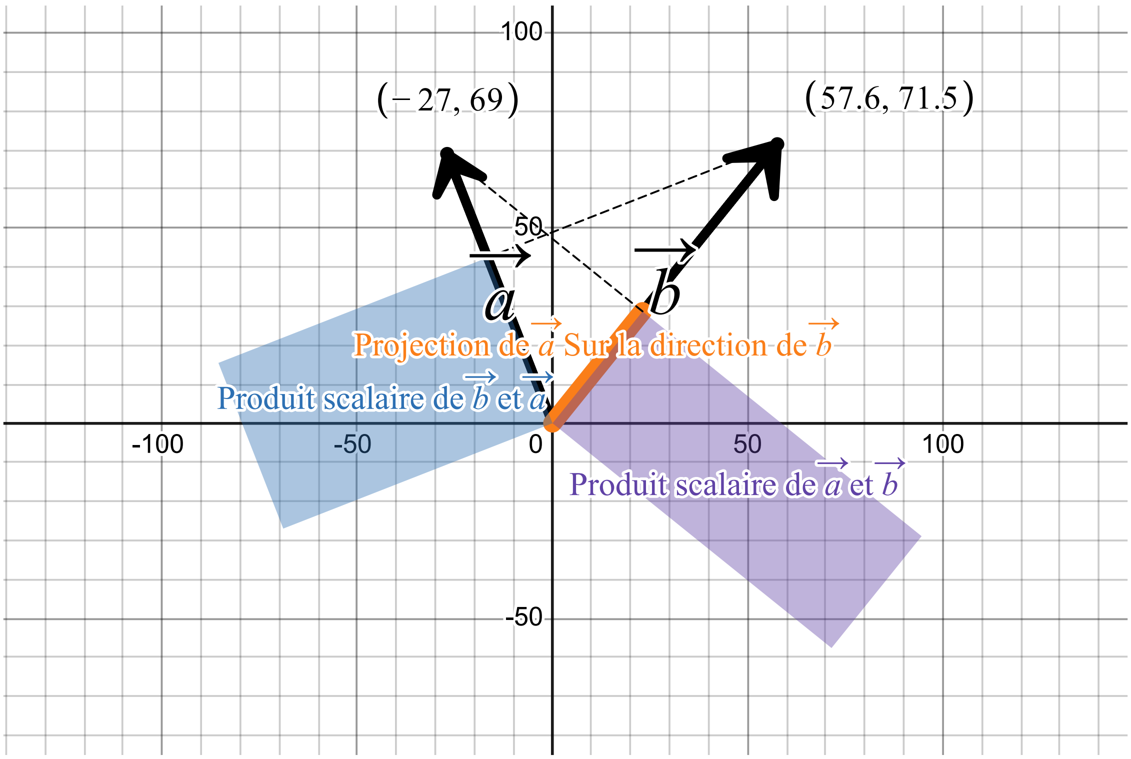

Fig. 2. – Produit scalaire, projection