

# Physique de la Rotation : Mécanique du Solide

## 🔗 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons simulé des **points** qui se déplacent  $(x, y, z)$ . Mais une boule de billard, une caisse ou une voiture sont des **Solides Rigides**.

Ils ne font pas que se déplacer (Translation), ils tournent sur eux-mêmes (Rotation).

La bonne nouvelle : **Toutes** les lois de la translation ont un équivalent exact en rotation. C'est le même code, avec des noms différents.

## 1. Le Dictionnaire de Traduction

Pour passer de la physique linéaire à la physique angulaire, il suffit de remplacer les variables :

Concept	Translation (Linéaire)	Rotation (Angulaire)
Position	Vecteur Position $\vec{p}$ (x, y, z)	Quaternion $q$ ou Angle $\theta$ (Orientation)
Vitesse	Vitesse $\vec{v}$ (m/s)	Vitesse Angulaire $\vec{\omega}$ (rad/s)
Résistance	Masse $m$ (kg)	Moment d'Inertie $I$ (kg·m <sup>2</sup> )
Cause	Force $\vec{F}$ (Newton)	Couple $\vec{\tau}$ (N·m)
Loi de Newton	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

## 2. La Vitesse Angulaire (omega)

En 3D, la rotation est définie par un vecteur  $\vec{\omega}$  (Omega).

- **La Direction** de  $\vec{\omega}$  indique l'Axe de Rotation.
- **La Longueur** ( $\|\vec{\omega}\|$ ) indique la vitesse de rotation (en radians par seconde).

**Lien fondamental (Vitesse d'un point) :** Si une boule tourne sur place, quelle est la vitesse linéaire d'un point  $P$  à la surface (situé à un rayon  $\vec{r}$  du centre) ?

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(Produit Vectoriel)

### 3. Le Moment de Force (Couple / Torque)

Pour faire avancer un objet, on pousse (Force). Pour faire **tourner** un objet, il faut pousser **avec un levier**.

C'est le Couple ( $\vec{\tau}$  - Tau).

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- $\vec{r}$  : Le bras de levier (Vecteur du centre de masse vers le point d'impact).
- $\vec{F}$  : La force appliquée.

#### Exemple :

- Pousser une porte près des gonds ( $r \approx 0$ ) : Ça ne tourne pas.
- Pousser près de la poignée ( $r$  grand) : Ça tourne facilement.

### Définition 1 (4. L'Inertie et le Tenseur d'Inertie)

En translation, la résistance est simple : c'est la masse  $m$ . C'est un simple nombre (scalaire).

En rotation, la résistance dépend de la **forme** de l'objet et de l'**axe** autour duquel on veut tourner.

**A. Le Moment d'Inertie (I)** C'est la somme de toutes les masses multipliées par leur distance au carré de l'axe. Pour une Sphère pleine :  $I = \frac{2}{5}mR^2$ .

**B. Le Tenseur d'Inertie (La Matrice)** Imaginez un stylo.

- Le faire rouler entre les doigts (axe long) est très facile (Inertie faible).
- Le faire tourner comme une hélice (axe court) est difficile (Inertie forte).

Comme l'inertie change selon l'axe, on utilise une Matrice 3x3 appelée Tenseur d'Inertie.

$$I_{\text{tensor}} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

**Note pour le Billard :** Une sphère est symétrique partout. Son tenseur est simple : c'est juste un nombre  $I$  (scalaire). On échappe à la complexité matricielle !

### 5. Algorithme d'Intégration (Euler Rotation)

Voici comment mettre à jour la physique de rotation dans le code :

1. **Calculer le Couple total :**

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots$$

## 2. Newton Angulaire (Trouver l'accélération) :

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I}$$

## 3. Mettre à jour la Vitesse Angulaire :

$$\vec{\omega}_{\text{new}} = \vec{\omega} + \vec{\alpha} \cdot dt$$

## 4. Mettre à jour l'Orientation (Quaternion) : On tourne l'objet de l'angle $\|\vec{\omega}\| \cdot dt$ autour de l'axe $\vec{\omega}$ .

### *Exemple. Application : Le « Coup de Queue »*

Si on tape la boule blanche au-dessus du centre (distance  $h$ ) avec une force  $F$  vers l'avant :

1. **Force** :  $F$  fait avancer la boule ( $a = \frac{F}{m}$ ).
2. **Bras de levier** :  $r = h$  (vers le haut).
3. **Couple** :  $\tau = r \times F$ . Comme  $r$  est vertical et  $F$  horizontal, le couple est horizontal (axe gauche/droite).
4. **Résultat** : La boule avance ET se met à rouler vers l'avant (Topspin).