

## Session 2 : Cinématique 2D et Mouvement de Projectile

### Objectifs de la Session :

- Comprendre et appliquer les concepts de vitesse, d'accélération et de position en deux dimensions.
- Analyser et calculer la trajectoire d'un projectile soumis à la gravité.
- Implémenter le mouvement de projectiles dans l'environnement Three.js.
- Réaliser un premier travail pratique de création d'objets en mouvement et de projectiles simples sans moteur physique, en utilisant uniquement les équations de la cinématique.

### Bloc 1 : Cinématique 2D - Position, Vitesse et Accélération

#### Objectifs spécifiques de ce bloc :

- Comprendre la représentation mathématique de la position d'un objet dans un plan bidimensionnel.
- Définir et interpréter les concepts de vitesse moyenne et instantanée sous forme vectorielle en 2D.
- Définir et interpréter les concepts d'accélération moyenne et instantanée sous forme vectorielle en 2D.
- Visualiser et relier les vecteurs position, vitesse et accélération à la trajectoire d'un objet.

#### 1. Introduction et Rappels

- **Brève révision des vecteurs :**

- Rappel de la définition d'un vecteur comme une quantité possédant une magnitude (longueur, norme) et une direction.
- Représentation d'un vecteur en 2D à l'aide de ses composantes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- Opérations vectorielles de base (addition et soustraction) :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

- Multiplication d'un vecteur par un scalaire :

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \end{pmatrix}$$

- **Introduction à la cinématique :**

- ▶ Branche de la mécanique qui décrit le mouvement des objets sans considérer les causes du mouvement (les forces).
- ▶ Contrairement à la dynamique, qui relie le mouvement aux forces.
- ▶ Notre objectif dans ce bloc est de développer les outils mathématiques pour décrire précisément *comment* les objets se déplacent en 2D.

## 2. Position en 2D

- **Vecteur Position :**

- ▶ Pour décrire la localisation d'un point (ou d'un objet considéré comme un point) dans un plan bidimensionnel, nous utilisons le **vecteur position**, noté  $\vec{r}$  (ou parfois  $\vec{s}$  ou  $\vec{x}$ ).
- ▶ Si nous définissons un système de coordonnées cartésiennes avec un axe horizontal ( $x$ ) et un axe vertical ( $y$ ), le vecteur position d'un point  $P$  de coordonnées  $(x, y)$  est donné par :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

où  $\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe  $x$ , et  $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est le vecteur unitaire dans la direction de l'axe  $y$ .

- ▶ Le vecteur position pointe de l'origine du système de coordonnées vers la position de l'objet.
- ▶ La **magnitude** du vecteur position,  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , représente la distance de l'objet à l'origine.
- ▶ La **direction** du vecteur position peut être donnée par l'angle  $\theta$  qu'il forme avec l'axe  $x$ , où  $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ .

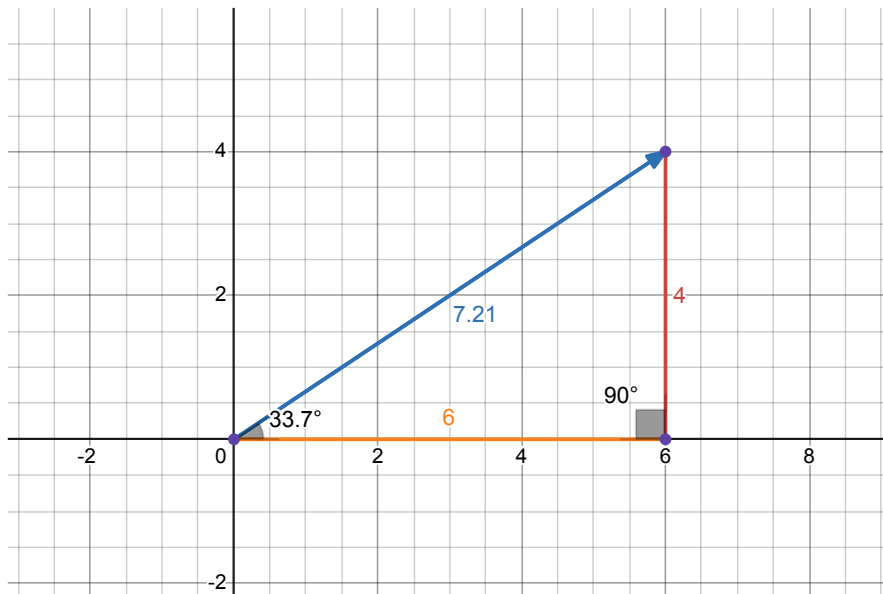


Fig. 1. – Plan 2D avec vecteurs position et vitesse

- **Trajectoire :**

- ▶ Si la position d'un objet change au cours du temps, nous pouvons décrire son mouvement en spécifiant son vecteur position en fonction du temps :  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .
- ▶ L'ensemble des points atteints par l'objet au cours de son mouvement forme sa **trajectoire**. La trajectoire est une courbe dans l'espace (ici, en 2D).
- ▶ Exemples de trajectoires :
  - **Mouvement rectiligne uniforme :**  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \end{pmatrix}$ , où  $x_0, y_0, v_x, v_y$  sont des constantes. La trajectoire est une ligne droite.
  - **Mouvement circulaire uniforme :**  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \end{pmatrix}$ , où  $R$  est le rayon et  $\omega$  la vitesse angulaire. La trajectoire est un cercle.
  - **Mouvement parabolique (projectile) :**  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$  (sous l'effet de la gravité). La trajectoire est une parabole.
- ▶ Visualisation de différentes trajectoires et des vecteurs position correspondants à différents instants.

- **Démo cinématique :** Pour visualiser les concepts de cinématique, consultez la démo : <file:///scenes/session02.html>

### 3. Vitesse en 2D

- **Vitesse Moyenne :**

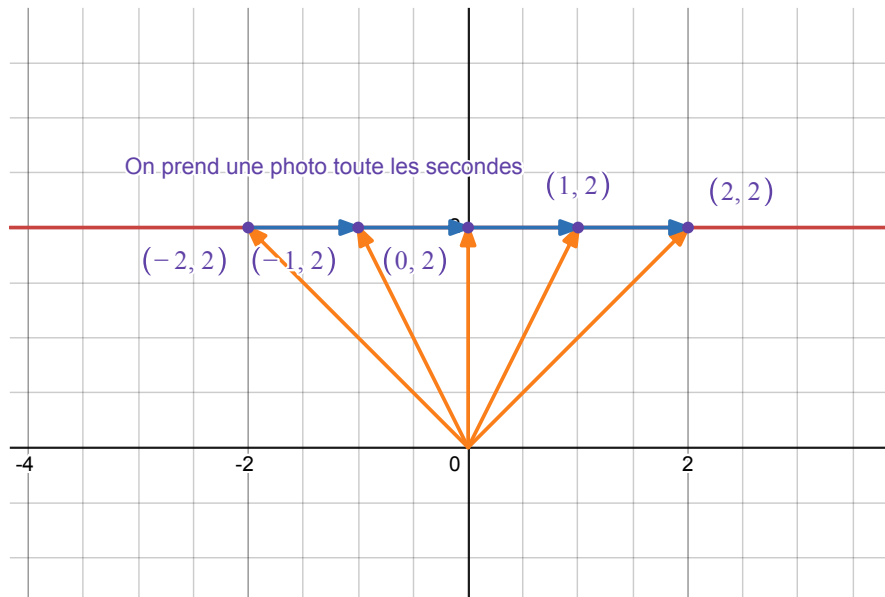


Fig. 2. – Plan 2D avec vecteurs position et vitesse

- Considérons un objet qui se déplace de la position  $\vec{r}_i$  à l'instant  $t_i$  à la position  $\vec{r}_f$  à l'instant  $t_f$ .
- Le **déplacement** de l'objet pendant cet intervalle de temps  $\Delta t = t_f - t_i$  est le vecteur :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_f - x_i \\ y_f - y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

- Le **vecteur vitesse moyenne**  $\vec{v}_m$  est défini comme le rapport du déplacement au temps écoulé :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\text{moy},x} \\ v_{\text{moy},y} \end{pmatrix}$$

- La vitesse moyenne est un vecteur dont la direction est la même que celle du déplacement, et dont la magnitude est le déplacement total divisé par le temps écoulé.

**Exemple :** Si une voiture se déplace de la position  $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  à la position  $\vec{r}_f = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$  au cours d'un intervalle de temps  $\Delta t = 5$  secondes, alors le déplacement de la voiture est  $\Delta \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$  et la vitesse moyenne est  $\vec{v}_{\text{moy}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  m/s.

- **Vitesse Instantanée :**

- Pour décrire la vitesse de l'objet à un instant précis  $t$ , nous utilisons la notion de **vitesse instantanée**,  $\vec{v}(t)$ .
- Mathématiquement, la vitesse instantanée est définie comme la limite de la vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps  $\Delta t$  tend vers zéro :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- En termes de composantes, la vitesse instantanée est la dérivée des composantes de la position par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

où  $v_{x(t)}$  est la composante de la vitesse selon l'axe  $x$ , et  $v_{y(t)}$  est la composante de la vitesse selon l'axe  $y$  à l'instant  $t$ .

- La **magnitude** de la vitesse instantanée,  $|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_{x(t)}^2 + v_{y(t)}^2}$ , est appelée **vitesse scalaire**.
- La **direction** de la vitesse instantanée est tangente à la trajectoire de l'objet au point considéré. Visualisation de ce concept avec des exemples de trajectoires courbes.

### Application aux différents types de trajectoire :

#### 1. Mouvement rectiligne uniforme :

- Pour  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \end{pmatrix}$ , la vitesse instantanée est :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- Le vecteur vitesse est **constant** : direction, magnitude et composantes ne changent pas au cours du temps. Par exemple, un objet avec  $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  se déplace horizontalement à 3 m/s.

#### 2. Mouvement circulaire uniforme :

- Pour  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \end{pmatrix}$ , la vitesse instantanée est :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y(t) \\ \omega x(t) \end{pmatrix}$$

- La magnitude est constante :  $|\vec{v}| = R\omega$ . À l'instant  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  (quand l'objet est en haut du cercle),  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega \\ 0 \end{pmatrix}$  : la vitesse est purement horizontale et tangente au cercle.

#### 3. Mouvement parabolique (projectile) :

- Pour  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} t \\ y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$ , la vitesse instantanée est :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{pmatrix}$$

- La composante horizontale  $v_x$  reste constante, tandis que la composante verticale  $v_y$  diminue linéairement. Par exemple, avec  $v_{0x} = 10$  m/s,  $v_{0y} = 20$  m/s et  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, à  $t = 2$  s :  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 - 9.81 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0.38 \end{pmatrix}$  m/s. Le projectile est quasiment à son apogée.

#### 4. Accélération en 2D

- **Accélération Moyenne :**

- ▶ Si la vitesse d'un objet change au cours du temps, l'objet est en train d'accélérer.
- ▶ Le **vecteur accélération moyenne**  $\vec{a}_{\text{moy}}$  pendant un intervalle de temps  $\Delta t = t_f - t_i$  est défini comme le rapport du changement de vitesse au temps écoulé :

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\text{moy},x} \\ a_{\text{moy},y} \end{pmatrix}$$

- ▶ L'accélération moyenne est un vecteur dont la direction est celle du changement de vitesse.

- **Accélération Instantanée :**

- ▶ L'**accélération instantanée**  $\vec{a}(t)$  décrit la manière dont la vitesse d'un objet change à un instant précis  $t$ . Elle est définie comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- ▶ En termes de composantes, l'accélération instantanée est la dérivée des composantes de la vitesse par rapport au temps, ou la deuxième dérivée des composantes de la position par rapport au temps :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{dv_y(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$$

- ▶ L'accélération peut changer la magnitude de la vitesse (l'objet accélère ou décélère), sa direction, ou les deux en même temps.

**Cas particulier : Accélération constante.** Si l'accélération  $\vec{a}$  est constante, alors  $\vec{a}(t) = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ , où  $a_x$  et  $a_y$  sont des constantes. Dans ce cas, nous pouvons **intégrer** les équations de l'accélération pour obtenir la vitesse et la position en fonction du temps :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \begin{pmatrix} v_{0x} + a_x t \\ v_{0y} + a_y t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{pmatrix}$$

où  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}$  est la vitesse initiale et  $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  est la position initiale.

C'est ce cas particulier qui sera crucial pour l'étude du mouvement de projectile sous l'effet de la gravité.

**Exemples complet par type de trajectoire :**

Nous pouvons maintenant reprendre nos 3 exemples et finaliser notre étude de leurs mouvements.

### 1. Mouvement rectiligne uniforme:

#### Position :

Pour  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  constante,

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aucune accélération n'est nécessaire pour maintenir le mouvement rectiligne uniforme.

### 2. Mouvement circulaire uniforme :

#### Position :

- Pour  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \end{pmatrix}$

#### Vitesse (dérivée de la position) :

- Dérivons chaque composante par rapport au temps
- À l'instant  $t$ , le vecteur position est :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

#### Vitesse (dérivée de la position) :

- Dérivons chaque composante par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d(R \cos(\omega t))}{dt} \\ \frac{d(R \sin(\omega t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

#### Accélération (dérivée de la vitesse) :

- Dérivons à nouveau chaque composante :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{d(R\omega \sin(\omega t))}{dt} \\ \frac{d(R\omega \cos(\omega t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ -R\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

#### Relation avec la position :

- On observe que :

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

L'accélération est constante et bien dirigée vers le centre du cercle.

### 3. Mouvement parabolique (projectile) :

- L'équation de la trajectoire est :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

- Pour  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - gt \end{pmatrix}$ , l'accélération instantanée est :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

- L'accélération est **constante** et dirigée verticalement vers le bas. Avec  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , quel que soit l'instant  $t$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2$ . Cette accélération change uniquement la composante verticale de la vitesse. La composante horizontale reste inchangée.