Session 8 : Physique de la Rotation

L'objectif du jour

Passer de la particule (un point) au corps rigide (une forme). Un corps rigide ne fait pas que se déplacer, il **pivote** autour de son centre de masse.

1. Le Dictionnaire de Traduction

Concept	Translation (Linéaire)	Rotation (Angulaire)
Position	$\vec{r}$ (m)	Angle θ (rad)
Vitesse	$\vec{v}$ (m/s)	Vitesse Angulaire ω (rad/s)
Résistance	Masse m (kg)	Moment d'Inertie I (kg·m²)
Cause	Force $\vec{F}$ (N)	Couple / Torque τ (N·m)
Loi de Newton	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\tau = I\alpha$

2. Le Couple (Torque) : Faire tourner

Le couple τ dépend de où on pousse.

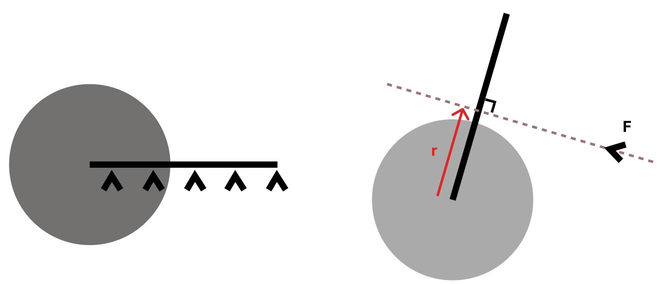

Fig. 1. – Plus on tire loin du centre, plus l'effet de rotation est fort.

En 3D (Vectoriel) :

La formule générale utlise un produit vectoriel.

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$

τ est donc un vecteur perpendiculaire au plan de rotation.

En 2D (Scalaire) :

En 2D, la formule se simplifie.

$$\tau = r_x F_y - r_y F_x$$

(Où $\vec{r}$ est le vecteur allant du centre de masse au point d'impact)

3. Le Moment d'Inertie (I ou J)

Le moment d'inertie représente la résistance d'un objet à la rotation.

Il dépend de la répartition de la masse, et de la forme de l'objet.

Toujours par rapport a l'axe de rotation bien entendu.

La formule générale est :

$$\boldsymbol{I = \sum_i m_i . r_i^2}$$

ou r_i est la distance au centre de rotation de la masse m_i.

Pour un anneau mince de masse m et de rayon R, on a :

$$I = mR^2$$

, en effet, toute la masse de l'anneau est à la distance fixe R du centre de rotation.

Exercice A : Calcul du moment d'inertie d'un anneau

Retrouver $I = mR^2$ pour un anneau mince de masse m et de rayon R.

1. Paramètres :

- Densité linéaire : $\lambda = \frac{m}{L} = \frac{m}{2\pi R}$ (où L est la circonférence).
- Masse infinitésimale d'un petit segment : $dm = \lambda R d\theta$.
- Distance à l'axe pour tout point : $r = R$.

2. Calcul par intégration : Le moment d'inertie total est la somme (intégrale) des moments infinitésimaux $dI = r^2 dm$.

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} R^2 \cdot (\lambda R d\theta)$$

Sortons les constantes de l'intégrale :

$$I = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\theta$$

Résolution de l'intégrale :

$$I = \lambda R^3 [\theta]_0^{2\pi}$$

$$I = \lambda R^3 (2\pi - 0) = 2\pi \lambda R^3$$

3. Substitution et simplification : Remplaçons λ par sa définition ($\frac{m}{2\pi R}$) :

$$I = \left(\frac{m}{\cancel{2\pi R}}\right) \cdot \cancel{2\pi} R^{\cancel{3}2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{I = mR^2}}$$

> **Conclusion :** Pour un anneau, toute la masse est à la distance maximale R. C'est l'objet qui offre la plus grande résistance à la rotation pour une masse donnée.

- Rectangle (Largeur w, Hauteur h) :

$$I = \frac{1}{12}m(w^2 + h^2)$$

Pourquoi $\frac{1}{12}$? C'est le résultat mathématique de l'intégration de la masse sur toute la surface du rectangle.

4. Vitesse d'un point sur le corps

C'est l'équation la plus importante pour la détection de collision future. Si un corps se déplace à $\vec{v}_G$ et tourne à ω, la vitesse d'un point P situé à la distance $\vec{r}$ du centre est :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + (\omega \times \vec{r})$$

En 2D, cela devient :

$$v_{P.x} = v_{G.x} - \omega \cdot r_y$$

$$v_{P.y} = v_{G.y} + \omega \cdot r_x$$

Travaux Pratiques : Le 'Spinning Box'

Objectif

Implémenter un rectangle qui tourne lorsqu'on clique dessus avec la souris (application d'une force à un point précis).

Étape 1 : Mise à jour de la classe `RigidBody`

Ajoutez les propriétés suivantes à vos objets :

- `angle` (float)
- `angularVelocity` (float)
- `torque` (float)
- `Inertia` (float) : Calculez-le une seule fois au début via la formule du rectangle.

Étape 2 : La méthode `ApplyForce(force, worldPoint)`

Cette méthode remplace l'ancien ajout direct à l'accélération :

1. Calculer le bras de levier : $\vec{r} = \text{worldPoint} - \text{positionCentre}$.
2. Ajouter à la force linéaire : $\vec{F}_{\text{total}} += \overrightarrow{\text{force}}$.
3. Ajouter au torque : $\tau += \left(r_x F_y - r_y F_x\right)$.

Étape 3 : L'intégrateur (Euler Semi-Implicite)

Dans votre boucle `update(dt)` :

1. $a = \frac{F}{m}$
2. $\alpha = \frac{\tau}{I}$
3. $v += a \cdot dt$
4. $\omega += \alpha \cdot dt$
5. $p += v \cdot dt$
6. $\theta += \omega \cdot dt$
7. Important : Remettre `F` et `tau` à zéro pour la frame suivante.

Test de compréhension

« A) L'objet tourne plus vite si je clique au centre. », « B) L'objet tourne plus vite si je clique sur un coin. », « C) L'endroit du clic n'a pas d'importance. »

« Pensez au bras de levier r. »