Géométrie et Calcul Vectoriel

Définitions

Un vecteur est une grandeur ayant une direction et une magnitude.

On dit qu'il est de dimension n si il a n composantes.

Dans le plan, $n = 2$, donc un vecteur a 2 composantes, 2 dimensions.

Représentation

Un vecteur est représenté par une flèche. Il peut être placé n'importe où dans le plan. On le place habituellement par rapport au contexte de ce qu'il représente.

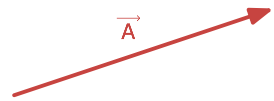

Fig. 1. – Un vecteur

Notation vectorielle

Même si le vecteur est défini par ses magnitude et direction, on utilise une notation vectorielle, qui décompose le vecteur selon les vecteurs $\hat{\imath}$ et $\hat{\jmath}$ du plan cartésien. On retrouve ses 2 dimensions représentées en colonne.

Exemple.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$$

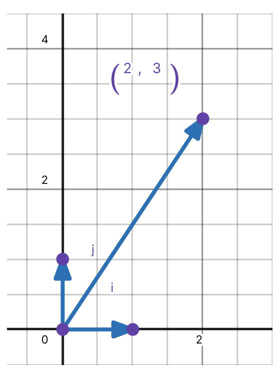

Fig. 2. – Le vecteur $\vec{v}$

Déplacement

Un déplacement peut se décrire par le vecteur reliant le point A (départ) au point B (arrivée) :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Des vecteurs célèbres en physique

- **Le vecteur position**

Souvent noté $\vec{r}$ (radius), représente la position d'un point dans l'espace en partant de l'origine.

- **Le vecteur vitesse**

Noté $\vec{v}$, représente la vitesse d'un objet, souvant représenté partant du centre de l'objet.

- **Le vecteur accélération**

Noté $\vec{a}$, représente l'accélération d'un objet, souvant représenté partant du centre de l'objet.

Magnitude et direction

La longueur du vecteur, aussi appelée magnitude, est notée $\|\vec{v}\|$, et parfois simplement $|\vec{v}|$.

En 2D :

On utilise le théorème de Pythagore pour calculer la norme (autre nom de la magnitude) :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Vecteur Unitaire ($\hat{u}$) :

Vecteur de longueur 1 direction $\vec{v}$:

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Un vecteur unitaire est un vecteur de longueur 1, il est souvent utilisé pour représenter une direction sans avoir à se soucier de la magnitude.

Opérations de Base

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

Addition :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix}$$

Soustraction :

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

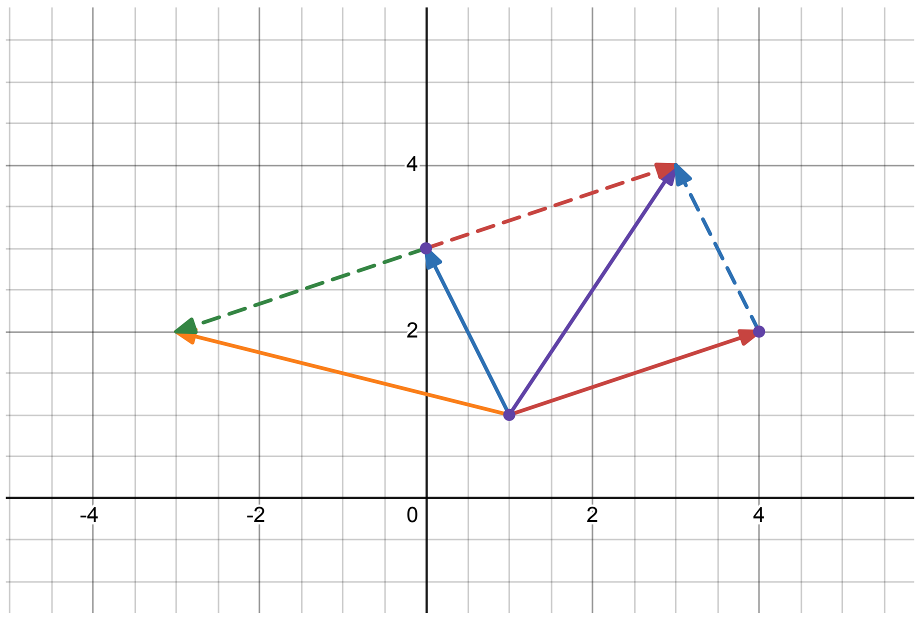

Fig. 3. – Le vecteur $\vec{u}$ (rouge) et le vecteur $\vec{v}$ (bleu)

Multiplication par scalaire (k) :

$$k \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} ku_x \\ ku_y \end{pmatrix}$$

Produit Scalaire

Résultat : un **nombre** (scalaire).

Formule algébrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Formule géométrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

1. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.
2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, alors l'angle entre les vecteurs est inférieur à 90°. (devant)
3. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, alors l'angle entre les vecteurs est supérieur à 90°. (derrière)

Angle entre 2 vecteurs

On isole $\cos(\theta)$. :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$$

Projections

Projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. On utilise le produit scalaire, dans la direction sur laquelle on projette.

$$\text{proj}_v(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

Et si $\vec{v}$ est normalisé (direction de la droite sur laquelle on projète), on peut simplifier :

$$\text{proj}_v(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

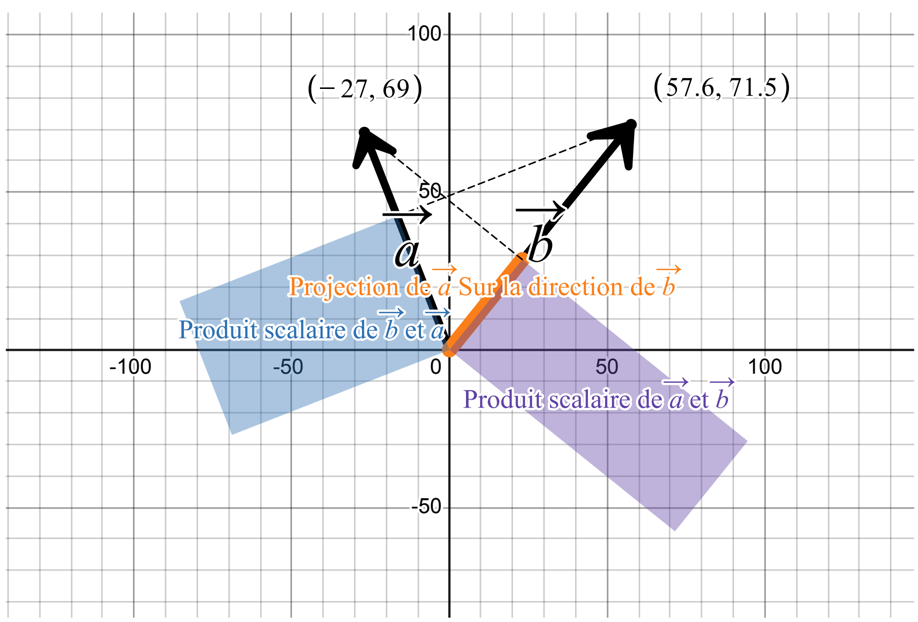

Fig. 4. – Produit scalaire, projection

Produit Vectoriel (3D)

Résultat : un **vecteur** perpendiculaire.

$$\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Commutativité :

Attention, le produit vectoriel n'est pas commutatif ! On a un changement de signe :

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Magnitude :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta)$$

Direction :

Le produit vectoriel est perpendiculaire aux deux vecteurs :

$$a \times b \perp a$$

$$a \times b \perp b$$

On utilise la rêgle de la main droite pour trouver la direction du produit vectoriel.

- Le pouce pointe sur a
- l'index sur b
- le majeur sur $a \times b$.

Calcul (Déterminant) :

Le déterminant est un outil algébrique qui permet de trouver les solutions d'un problème de n équations avec n inconnues. Cette solution représente, en quelque sorte une direction émergente (perpendiculaire) des équations.

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$