

# Cahier d'Exercices : Vecteurs & Physique

## Thème 1 : Vecteurs et Produits Scalaires

Ces exercices visent à maîtriser les outils mathématiques de base pour la détection et l'IA.

*Exercice 1 : Le Garde et le Voleur.*

**Contexte :** Dans un jeu d'infiltration, un garde regarde dans une direction donnée par le vecteur directeur  $\vec{D}$ . Un voleur se trouve à une position  $P$  dans la pièce. Le garde se trouve à la position  $G$ .

On considère que le garde a un champ de vision de  $180^\circ$  (il voit tout ce qui est devant lui).

**Données :**

- Position du Garde :  $G(10, 10)$
- Direction du regard :  $\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (Regarde vers l'Est)
- Position du Voleur :  $P(5, 12)$

**Question :** En utilisant le produit scalaire, déterminer si le voleur est « Devant » ou « Derrière » le garde.

*Exercice 2 : La Racing Line (Projections).*

**Contexte :** Pour aider une IA à conduire, on définit la trajectoire idéale comme une ligne droite entre deux points  $A$  et  $B$ . La voiture se trouve actuellement au point  $V$ .

On souhaite connaître la distance latérale entre la voiture et cette trajectoire idéale (l'écart de conduite).

**Données :**

- Départ de la ligne :  $A(0, 0)$
- Fin de la ligne :  $B(100, 0)$
- Position Voiture :  $V(50, 5)$

**Question :**

1. Calculer le vecteur  $\overrightarrow{AV}$ .
2. Projeter ce vecteur sur la direction de la piste  $\overrightarrow{AB}$ .
3. En déduire la distance de la voiture à la ligne.

*Exercice 3 : Le Radar de Vitesse (Vitesse Relative).*

**Contexte :** Un radar mesure la vitesse de rapprochement sur sa ligne de visée. Pour savoir ce que le radar affiche, il faut projeter les vitesses des véhicules sur l'axe qui les relie.

**Données (Positions et Vitesses) :**

- Police (A) :
  - Position :  $P_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - Vitesse :  $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$  (Roule vers le Nord à 100 km/h)
- Cible (B) :
  - Position :  $P_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \end{pmatrix}$  (Est située 500m au Nord de la police)
  - Vitesse :  $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 85 \\ 85 \end{pmatrix}$  (Roule vers le Nord-Est à  $\approx 120$  km/h)

**Questions :**

1. Calculer le vecteur direction de visée  $\vec{D} = P_B - P_A$ .
2. En déduire la normale de visée  $\vec{n}$  (le vecteur unitaire).
3. Projeter les vitesses  $\vec{v}_A$  et  $\vec{v}_B$  sur  $\vec{n}$  (Produit Scalaire).
4. La police est-elle en train de rattraper la cible ? (Est-ce que  $v_A$  projeté  $>$   $v_B$  projeté ?)

**Thème 2 : Forces, Gravité et Frottements**

Application des lois de Newton pour simuler des mouvements réalistes.

*Exercice 4 : Le Drag Race (Code).*

**Contexte :** Une voiture accélère en ligne droite.

- Force Moteur :  $F_{\text{moteur}} = 5000 \text{ N}$  (Constante).
- Friction de l'air :  $F_{\text{air}} = -k \cdot v^2$  (Opposée au mouvement).
- Masse :  $m = 1000 \text{ kg}$ , Coefficient  $k = 0.8$ .

**Objectif Code :** Implémenter ce système dans Three.js. Afficher la vitesse en temps réel. Observer la « Vitesse Terminale » : le moment où la voiture n'accélère plus car la friction compense exactement le moteur.

*Exercice 5 : Le Sniper (Balistique).* **Contexte :** On tire un projectile soumis uniquement à la gravité  $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \end{pmatrix}$ .

**Données :**

- Vitesse initiale :  $v_0 = 50 \text{ m/s}$ .
- Angle de tir :  $\theta = 45^\circ$ .
- Hauteur initiale :  $y_0 = 0$ .

**Objectif Code :** Trouver ce résultat dans une simulation avec la méthode d'Euler.

*Exercice 6 : Le Cube sur la Pente (Code).* **Contexte :** Reprise de l'exercice théorique sur le plan incliné.

**Mise en place :** Créer un plan (sol) dans Three.js dont on peut modifier l'inclinaison (rotation X) via une interface (GUI). Poser un cube dessus.

**Logique à coder :**

- Calculer la force de gravité parallèle à la pente :  $P_x = mg \sin(\theta)$ .
- Calculer la friction statique max :  $f_{s, \max} = \mu_s mg \cos(\theta)$ .
- **Condition :** Tant que  $P_x < f_{s, \max}$ , la vitesse reste à 0. Sinon, le cube accélère.

**Test :** Vérifier si le cube se met à glisser exactement à l'angle prévu (ex:  $30^\circ$  pour  $\mu_s = 0.57$ ).

*Exercice 7 : L'Ascenseur Spatial (Ressorts).* **Contexte :** Une boule est suspendue dans le vide, attachée à un point fixe par un ressort invisible.

**Loi de Hooke :**  $\vec{F} = -k \cdot (L - L_0) \cdot \vec{n}$  (Où  $L$  est la longueur actuelle et  $L_0$  la longueur au repos).

**Objectif Code :** Simuler ce ressort. Ajouter une force d'amortissement (Damping)  $F = -b \cdot v$  pour que la boule finisse par se stabiliser et ne rebondisse pas à l'infini.

### Définition 1 (Thème 3 : Collisions et Impulsions)

Gestion des chocs et conservation de la quantité de mouvement.

*Exercice 8 : Le Bumper Car (Code).* **Contexte :** Arène fermée avec 5 boules de masses identiques.

**Objectif Code :** Mettre en place la boucle de détection « Narrow Phase » : vérifier chaque paire de boules  $(i, j)$ . Si  $\text{distance} < \text{radius} * 2$ , résoudre la collision élastique ( $e = 1$ ).

Observer le chaos et vérifier que les boules ne « fusionnent » pas (stabilité).

*Exercice 9 : Le Matériau Mystère.* **Contexte :** On lâche 3 boules de la même hauteur  $H = 10m$ . Elles tombent sur le sol (masse infinie).

- Boule A : Remonte à 10m.
- Boule B : Remonte à 5m.
- Boule C : Reste collée au sol.

**Question :** Déterminer le coefficient de restitution  $e$  pour chaque boule. Rappel :  $v_{\text{après}} = -e \cdot v_{\text{avant}}$ .

*Exercice 10 : Le Rocket Jump.* **Contexte :** Une explosion se produit à la position  $E(0, 0, 0)$ . Un joueur se trouve à la position  $P(2, 0, 0)$ .

On veut propulser le joueur avec une impulsion radiale.

**Règle :**

- Direction : Du centre de l'explosion vers le joueur.
- Intensité :  $J = \frac{100}{\text{distance}^2}$ .

**Question :** Calculer le vecteur Impulsion  $\vec{J}$  à appliquer au joueur.