Annexe Mathématique : Dérivée et Intégration 101

Pour faire de la physique, nous avons besoin de deux outils mathématiques fondamentaux qui fonctionnent comme des opérations inverses l'une de l'autre, un peu comme l'addition et la soustraction.

1. La Dérivée (La Pente)

Le microscope du changement

La dérivée mesure comment une valeur change **à un instant précis**. Géométriquement, c'est la **pente** de la courbe.

- **Notation :** Si on a une fonction $f(t)$, sa dérivée s'écrit $f'(t)$ ou $\frac{df}{dt}$.
- **Intuition :**
  - Si $x(t)$ est la position, sa pente nous dit à quelle vitesse on avance. Une pente raide = grande vitesse. Une pente nulle (plat) = à l'arrêt.
  - $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Règle de puissance (La plus utile !) : Pour dériver t^n, on descend l'exposant devant et on réduit l'exposant de 1.

$$f(t) = t^n \longrightarrow f'(t) = nt^{n-1}$$

Exemple : Si $x(t) = 5t^3$, alors $v(t) = 15t^2$.

2. L'Intégrale (L'Aire)

L'accumulateur

L'intégration est l'opération inverse de la dérivée. Elle permet de retrouver la fonction originale à partir de son taux de changement. Géométriquement, c'est l'**aire sous la courbe**.

- **Notation :** $\int f(t)dt$.
- **Intuition :**
  - Si on connaît la vitesse à chaque instant, l'intégrale additionne toutes ces petites distances parcourues pour nous donner la position totale.
  - $x(t) = \int v(t)dt$

Règle de puissance inversée : On augmente l'exposant de 1 et on divise par le nouveau nombre.

$$f(t) = t^n \longrightarrow F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

Attention à la Constante (C) ! Quand on intègre, on perd l'information du point de départ. La constante C représente les conditions initiales (Position initiale x_0 ou Vitesse initiale v_0).

3. Le cycle de la Cinématique

En physique, on passe constamment de l'un à l'autre selon ce que l'on cherche :

Position $x(t)$ $\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$ Dérivation (Pente) **Vitesse** $v(t)$

Vitesse $v(t)$ $\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$ Dérivation (Pente) **Accélération** $a(t)$

Et dans l'autre sens...

Accélération $a(t)$ $\xrightarrow{\int_{t_0}^{t} dt}$ Intégration (Aire + v_0) **Vitesse** $v(t)$

Vitesse $v(t)$ $\xrightarrow{\int_{t_0}^{t} dt}$ Intégration (Aire + x_0) **Position** $x(t)$

Aide-mémoire des fonctions usuelles

Voici les transformations que nous utiliserons le plus souvent dans ce cours :

Fonction $f(t)$	**Dérivée** $f'(t)$	**Intégrale** $\int f(t)dt$
Constante k (ex: 5)	0	$kt + C$
Linéaire t	1	$\frac{1}{2}t^2 + C$
Quadratique t^2	$2t$	$\frac{1}{3}t^3 + C$
Sinus $\sin(\omega t)$	$\omega \cos(\omega t)$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + C$
Cosinus $\cos(\omega t)$	$-\omega \sin(\omega t)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + C$

Table 1: Tableau des dérivées et primitives usuelles