Session 10 : Encore plus de forces

Introduction

Jusqu'à présent, nos particules étaient soit libres, soit en collision. Aujourd'hui, nous allons voir d'autres types de forces. Dans un premier temps, nous allons voir comment **lier** des particules ensemble. Cela va nous permettre de créer des objets plus complexes, comme des chaînes, des tissus, ou des structures, et d'avoir des comportements plus intéressants. Dans un deuxième temps, nous allons mettre en pratique les forces gravitationnelles pour un TP épique.

Il existe deux manières de voir un lien :
1. Comme une **Force** qui tire (Loi de Hooke).
2. Comme une **Règle** géométrique à respecter (Contrainte de Verlet).

1. La Loi de Hooke (L'approche par Force)

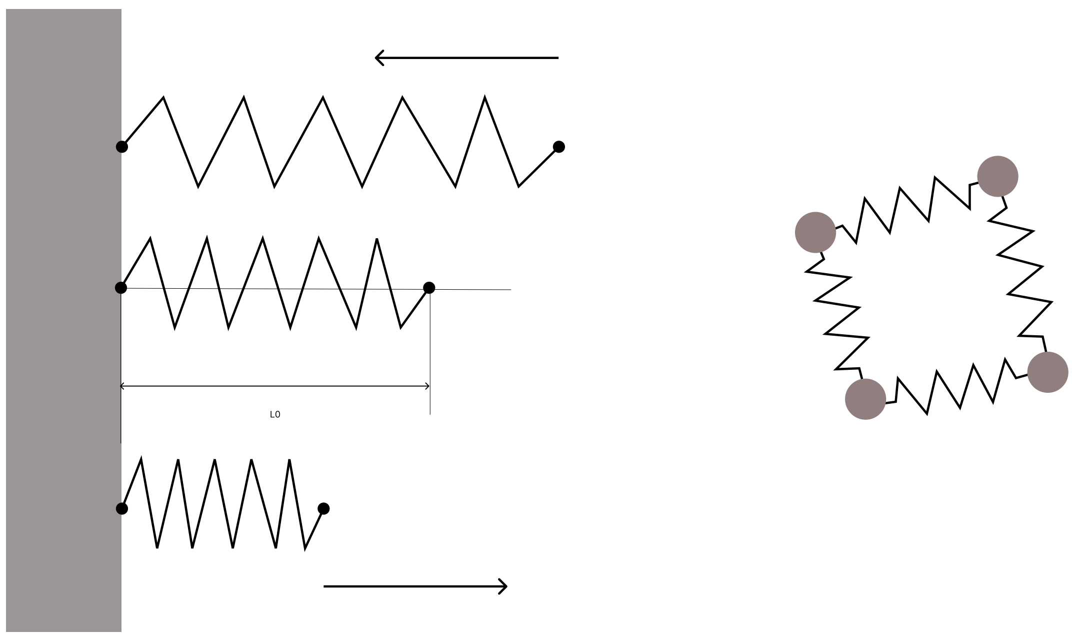

Fig. 1. – loi de Hook

Définition

La loi de Hooke modélise la **force exercée par un ressort**. La force est proportionnelle à l'étirement (ou la compression) du ressort.

$$\vec{F}_s = -k \cdot (|L - L_0|) \cdot \hat{u}$$

- k : Constante de raideur (stiffness). Plus k est grand, plus le ressort est dur.
- L : Distance actuelle entre les deux points.
- L_0 : Longueur au repos (rest length).
- $\hat{u}$: Vecteur unitaire de la direction du ressort.

C'est une loi linéaire (qui est proportionnelle à la distance) qui décrit le comportement d'un ressort idéal.

On peut noter que:
- lorsque $L = L_0$, la force est nulle.
- lorsque $L > L_0$, la force est négative (le ressort est étiré).
- lorsque $L < L_0$, la force est positive (le ressort est comprimé).

Cela signifie que la force est toujours dirigée vers la position d'équilibre.

Le problème de la stabilité

En utilisant Euler avec la loi de Hooke, si k est trop élevé ou si le dt est trop grand, le système accumule de l'énergie et explose. Pour stabiliser un ressort, il faut ajouter une Force d'Amortissement (Damping) pour dissiper l'énergie parasite :

$$\vec{F}_d = -c \cdot (\vec{v}_{\mathrm{A}} - \vec{v}_{\mathrm{B}})$$

2. Contraintes de Distance (L'approche Verlet)

La méthode géométrique

Avec l'intégration de Verlet, au lieu de calculer une force, on déplace directement les points pour satisfaire la longueur souhaitée. C'est un système de relaxation.

Algorithme pour une contrainte entre A et B :
1. Calculer la distance actuelle $d = \|P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}}\|$.
2. Calculer l'erreur relative : $e = \frac{d - L_0}{d}$.
3. Déplacer A et B de la moitié de l'erreur :

$$P_{\mathrm{A}} = P_{\mathrm{A}} - 0.5 \cdot e \cdot (P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}})$$

$$P_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{B}} + 0.5 \cdot e \cdot (P_{\mathrm{A}} - P_{\mathrm{B}})$$

La Rigidité par l'itération

Si vous n'appliquez cette correction qu'une seule fois par frame, la corde semblera élastique. Pour obtenir un câble rigide, il faut répéter cette opération plusieurs fois par frame (5 à 15 itérations). C'est ce qu'on appelle la Relaxation de Gauss-Seidel.

3. Travaux Pratiques : Le système solaire

Objectif

Créer une simulation du système solaire.

La force gravitationnelle

La force gravitationnelle est une force d'attraction universelle qui s'exerce entre tous les corps possédant une masse, s'attirant mutuellement sans se toucher. Son intensité dépend directement des masses des objets et diminue avec le carré de la distance qui les sépare (selon la célèbre loi de la gravitation universelle de Newton).

C'est cette force qui maintient la Lune en orbite autour de la Terre et qui donne leur poids aux objets sur Terre

Elle est définie par la loi de la gravitation **universelle** de Newton :

$$\boldsymbol{F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

où F représente la force d'attraction entre les corps (Newton)

G représente la constante de la gravitation universelle ($6.67 \times 10^{-11} N \cdot \frac{m^2}{\mathrm{kg}^2}$)

m_1 représente la masse du premier objet (kg)

m_2 représente la masse du deuxième objet (kg)

r représente la distance séparant les deux objets (m)

Le défi du TP : L'orbite stable

Pour qu'une planète orbite autour d'une étoile sans s'écraser ni s'enfuir, elle doit posséder une **vitesse tangentielle** initiale précise.

$$v_{\text{orbitale}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{étoile}}}{r}}$$

Données astronomiques

Nous utiliserons des valeurs relatives.

Le Soleil sera placé au centre avec une masse de 333 000 (unités terrestres).

Astre	**Masse relative** (Terre = 1)	**Distance** (UA)	**Vitesse Orbitale** (Relative)
Mercure	0.055	0.39	1.60
Vénus	0.815	0.72	1.17
Terre	1.000	1.00	1.00

Astre	Masse relative (Terre = 1)	Distance (UA)	Vitesse Orbitale (Relative)
Mars	0.107	1.52	0.80
Jupiter	317.8	5.20	0.43
Saturne	95.2	9.54	0.32
Uranus	14.5	19.20	0.22
Neptune	17.1	30.10	0.18

Conseils pour l'échelle du TP

- **Unités :** Si vous prenez 1 UA = 100 pixels, Neptune sera trop loin (3000 px). Essayez plutôt 1 UA = 20 pixels ou utilisez un zoom caméra.
- **Vitesse initiale :** Pour que la Terre reste en orbite circulaire, sa vitesse de départ doit être perpendiculaire au rayon Soleil-Terre.
- **G :** Réglez votre constante G de sorte que la Terre mette environ 10 secondes à faire un tour complet.

Vitesse d'orbite

Pour qu'une planète reste en orbite circulaire, sa vitesse initiale doit être perpendiculaire au rayon Soleil-Terre.

Sa vitesse doit être :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{soleil}}}{r}}$$

Démonstration

Dans la session 2 sur la cinématique, nous avons vu que la magnitude de l'accélération centripète est :

$$a = \|\vec{a}(t)\| = \omega^2 R$$

Comme la vitesse est $v = \omega R$, on peut exprimer l'accélération en fonction de v :

$$\omega = \frac{v}{R} \longrightarrow a = \left(\frac{v}{R}\right)^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

1. La force requise (Newton) : Pour maintenir ce mouvement circulaire, la nature doit fournir une force :

$$F_c = m \cdot a = \frac{mv^2}{R}$$

2. La force fournie (Gravitation) : Dans l'espace, c'est la gravité qui joue ce rôle :

$$F_g = \frac{GMm}{R^2}$$

3. L'équilibre orbital : En égalisant la force requise et la force fournie ($F_c = F_g$) :

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

En simplifiant par la masse de la planète (m) et par un rayon (R), on obtient :

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

D'où la vitesse orbitale circulaire utilisée dans notre code :

$$\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$