

گرافکاوی - تمرین سری اول

موعد تحویل ۱۲ آبان ۱۴۰۰

پیش از حل سوالات به موارد زیر دقت کنید:

- پاسخ تکلیف را به صورت یک فایل PDF آماده کنید و با نام STDNUM.pdf آماده کنید و با نام NAME_STDNUM.pdf در سامانه آپلود کنید. (بهجای NAME، فقط نام خانوادگی و بهجای PDF، شماره دانشجویی قرار بگیرد و حتما رعایت شود!)
 - در تحویل تکالیف به زمان مجاز تعیین شده دقت نمایید. موعد تکالیف قابل تمدید نمی باشند.
- در صورتی که مجموع تاخیر کل تکالیف شما کمتر از ۲۴ ساعت باشد نمرهای از شما کسر نمیگردد. در غیر این صورت به ازای هر روز تاخیر درصدی از نمره تکلیف شما کسر میگردد.
 - پاسخ تکالیف را حتما در سامانه آپلود کنید و از ارسال تکالیف به ایمیل یا تلگرام اکیدا خودداری نمایید.
 - در صورت وجود شباهت واضح، نمرهای به سوال تعلق نمیگیرد.
 - در صورت وجود هرگونه ابهام میتوانید در گروه تلگرام یا گروه اسکایپ سوالات خود را مطرح کنید.
 - از طریق ایمیلهای زیر میتوانید با TAهای مربوط به این تکلیف در ارتباط باشید.
 - nazerimahdi2001@gmail.com
 - arezo.h1371@yahoo.com -

سوال ۱. (۲۰ نمره) گراف زیر را در نظر بگیرید.

الف) ماتریس مجاورت آن را بهدست آورید و آن را A بنامید.

ب) بردارها و مقادیر ویژه ماتریس A را بیابید. برای محاسبات ماتریسی میتوانید از کامپیوتر استفاده کنید اما نتایج هر مرحله را ارائه دهید.

راهنمایی:

ماتریس A را در نظر بگیرید،

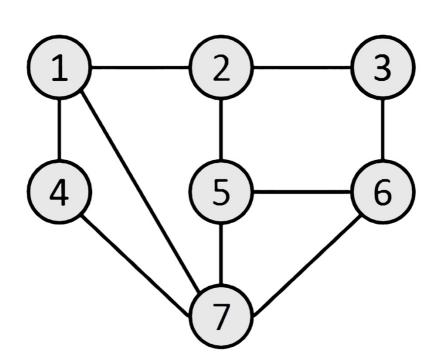
اسکالر λ و بردار ν به ترتیب یک مقدار و بردار ویژه برای ماتریس λ محسوب می شوند اگر و فقط اگر:

$$Av = \lambda v$$

بنابرین برای یافتن این مقادیر باید معادله زیر را حل کنیم:

$$(A - \lambda I) \cdot v = 0$$

این معادله تنها در صورتی دارای پاسخ (مقدار و بردار ویژه) غیر صفر است که ماتریس مربعی $(A-\lambda I)$ دارای دترمینان صفر باشد. بنابرین برای یافتن مقادیر ویژه ماتریس $(A-\lambda I)$ دارای دترمینان صفر باشد. بنابرین برای یافتن مقادیر ویژه متناظر با هر مقدار ویژه، از همان $(A-\lambda I)=0$ را حل کنیم. سپس برای یافتن بردار ویژه متناظر با هر مقدار ویژه، از همان رابطه $(Av-\lambda I)=0$ استفاده می کنیم.



ج) یک λ قابل قبول برای اجرای الگوریتم Eigenvector Centrality پیدا کنید. چرا این مقدار باعث همگرایی الگوریتم میشود؟

آیا تنها این مقدار باعث همگرایی الگوریتم میشود؟ (آیا این مقدار یکتاست؟) پاسخ خود را اثبات کنید.

راهنمایی:

ماتریسهای مجاورت، مربعی و متقارن هستند. بنابرین n مقدار و بردار ویژه متمایز و حقیقی دارند. همچنین تمامی بردارهای ویژه با هم متعامد هستند. در نتیجه هر برداری را میتوان به صورت ترکیب خطی از این n بردار نوشت. اگر v_n تا v_n بردارهای ویژه یک ماتریس مجاورت و v_n یک بردار دلخواه به ابعاد v_n باشد، آنگاه ضرایب v_n وجود دارند به نحوی که:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot v_i$$

حال اگر ماتریس مجاورت را در بردار x ضرب کنیم، آنگاه:

$$Ax = A \sum_{i=1}^{n} c_{i} \cdot v_{i} = \sum_{i=1}^{n} c_{i} \cdot (Av_{i}) = \sum_{i=1}^{n} c_{i} \cdot (\lambda_{i}v_{i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}c_{i} \cdot v_{i}$$

د) سه مرحله از این الگوریتم را به ازای λ قسمت قبل و مقادیر اولیه تمام یک اجرا کنید. آیا بردار در حال همگرا شدن است؟ اگر پاسخ مثبت است، به کدام بردار همگرا می شود؟ پاسخ خود را اثبات کنید. برای محاسبات ماتریسی می توانید از کامپیوتر استفاده کنید اما نتایج هر مرحله را ارائه دهید.

سوال ۲. (۳۰ نمره) ماتریس مجاورت گراف سوال قبل را در نظر بگیرید. تنها با استفاده از روابط ماتریسی و بدون استفاده از الگوریتمهای گراف به سوالات زیر پاسخ دهید. برای محاسبات ماتریسی میتوانید از کامپیوتر استفاده کنید اما نتایج هر مرحله را ارائه دهید.

۱- به کمک کامپیوتر، حداقل ۱۰ گراف تصادفی ایجاد کنید. بزرگترین درجه هر گراف را با بزرگترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت آن گراف مقایسه کنید. آیا رابطهای مشاهده میکنید؟

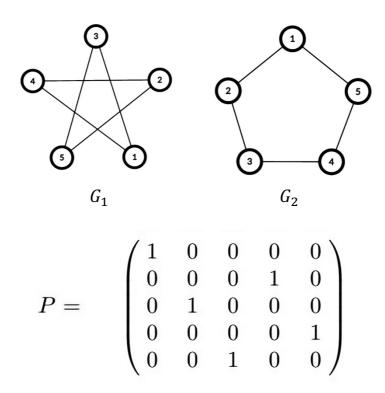
۲- به کمک کامپیوتر، حداقل ۱۰ گراف تصادفی دو بخشی ایجاد کنید و مقادیر ویژه ماتریس مجاورت هر گراف را بررسی کنید. آیا رابطه ای در بین مقادیر ویژه مشاهده میکنید؟

k که از راس i شروع و به راس j ختم میشوند، پیابید. سپس، تعداد مسیرهای به طول k در گراف سوال اول را پیدا کنید.

۴- روشی برای محاسبه تعداد مثلثهای واقع در یک گراف ساده بیابید. سپس، تعداد مثلثهای واقع در گراف سوال اول را پیدا کنید.

۵- روشی برای محاسبه تعداد مربعهای واقع در یک گراف ساده بیابید. سپس، تعداد مربعهای واقع در گراف سوال اول را پیدا کنید.

P دو گراف زیر را در نظر بگیرید. این دو گراف چه ارتباطی با هم دارند؟ ماتریس جایگشت P به شما داده شده است. PA_1P^{-1} را محاسبه کنید و آن را با A_2 مقایسه کنید. چه نتیجهای میگیرید؟



سوال ۳. (۱۵ نمره) اگریک آزمایش تصادفی را به تعداد دفعات زیادی تکرار کنیم، میانگین اعداد مشاهده شده امید ریاضی نامیده می شود. به عبارتی اگر Xیک متغیر تصادفی و S فضای نمونه باشد، آنگاه:

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot P(X = x)$$

یکی از مهمترین ویژگیهای امید ریاضی، خطی بودن است. اگر X و Y دو متغیر تصادفی دلخواه باشند، آنگاه:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

در یک گراف ساده و تصادفی n راسی که احتمال وجود هر یال p است، امید ریاضی تعداد مثلثهای واقع در گراف را بیابید.

سوال ۴. (۳۵ نمره) الگوریتم بهینهای برای یافتن Node Betweenness Centerality ارائه دهید. درستی و زمان اجرای الگوریتم ارائه شده را بررسی کنید.

سوال ۵۰(۵۰ نمره) دو گراف تصادفی با دو روش زیر ایجاد کنید و ویژگی های هر کدام را تحلیل کنید.

- روش اول: در یک گراف تصادفی Erdős-Rényi، احتمال وجود یال میان هر دو راس برابر با یک p ثابت است. کدی بنویسید که با در نظر گرفتن p=0.1 یک گراف تصادفی Erdős-Rényi با تعداد ۳۰۰ راس ایجاد کند.
- روش دوم: کدی بنویسید که ابتدا یک گراف تصادفی با ۱۰ راس ایجاد کند. سپس یک راس جدید به گراف اضافه کنید. میان این راس با سه راس موجود در گراف با احتمالی متناسب با فرمول زیر یال ایجاد کنید.

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_{j \in N} k_j} \tag{1}$$

که در آن N مجموعه ی راس های موجود در گراف و k_i درجه ی راس i است.

قطر گراف، clustering coefficient و clustering coefficient گراف های حاصل را مقایسه و علت تفاوت را تحلیل کنید.

توزیع درجات راس های هر کدام از گراف ها را با ایجاد نمودار هیستوگرام به دست آورید و با یکدیگر مقایسه کنید. مجموع تعداد راس های با درجه ی بیشتر از 10^2 را برای هر یک از این دو گراف به دست آورید. این عدد نمایشی از دنباله (tail) توزیع درجات رئوس گراف است. این عدد را برای دو گراف مقایسه و علت تفاوت را تحلیل کنید.