Dinámica de Robots

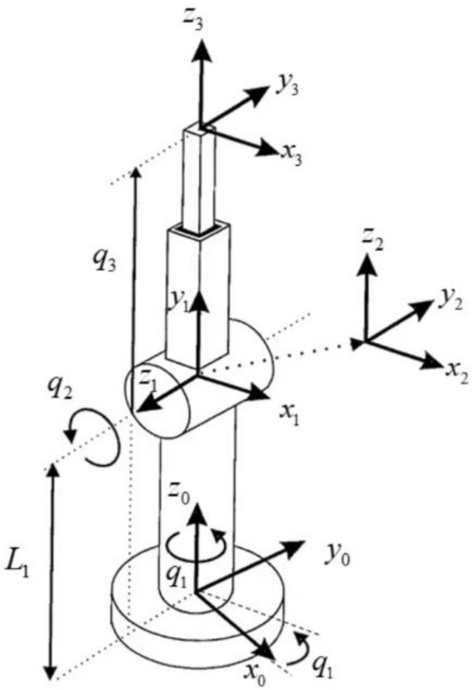
Grupo 5

- Crespi Malena Nerea 01739/9
- Naiouf Tomás 01741/3
- Stanchi Oscar Agustín 01732/2

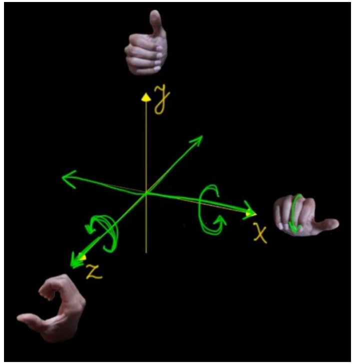
Cinemática de Robots

- Ciencia que estudia los movimientos de un cuerpo (sin considerar las fuerzas que intervienen en él).
  - Ejemplos de Fuerzas: rozamiento entre motores, el torque del motor, efecto coriolis (movimiento brusco del brazo robótico genera que este se caiga), la gravedad, etc.
- Existen dos tipos de Sistemas Cinemáticos:
  - Cinemático Directo
    - Sirve para determina la posición y orientación del robot a partir de los valores o coordenadas articulares del robot (ángulos de los servos).
  - Cinemático Inverso
    - Sirve para determinar los movimientos angulares (articulaciones o juntas o eslabones) para poder llegar a un punto específico a partir de la posición y orientación deseada.
  - Coordenadas Articulares: q_1, q_2, q_3, ... , q_n (donde $q_i = f_k(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ con $k = 1..n$ (GDL)
  - Posicion y Orientacion: $x = f_x(q_1,...,q_n)$, $y = f_y(q_1,...,q_n)$, $z = f_z(q_1,...,q_n)$, $\alpha = f_\alpha(q_1,...,q_n)$, $\beta = f_\beta(q_1,...,q_n)$, $\gamma = f_\gamma(q_1,...,q_n)$
  - Cinemática Directa ⇔ Cinemática Inversa
    - Cinemática Directa: se usa para pasar de coordenadas articulares a posición y orientación.
    - Cinemática Inversa: se usa para pasar de posición y orientación a coordenadas articulares.
  - Existen 2 métodos: Método Geométrico y Método de D-H (o algebraico, es más complejo pero más fácil de entender).

Sistema de Coordenadas



- Sólo se puede rotar y/o desplazar según la regla de la mano derecha con respecto a x o z.
- Un ángulo o desplazamiento será positivo sólo si sigue la regla de la mano derecha.
    - Se pueden realizar rotaciones o traslaciones negativas.



Matriz de Rotación

- Matrices de Rotación (con respecto al eje x o al eje z).
    - Nos indican cuántos grados va a rotar un eslabón con respecto al eje x o al eje z.
- Si también se desea hacer una translación se colocarán los valores de x y z.

$$T(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & y \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabla de Denavit-Hartenberg

- Desplazamientos:
  - Se notan en a para el eje x.
  - Se notan en d para el eje z.
- Rotaciones:
  - Se notan en α para el eje x.
  - Se notan en θ para el eje z.
- Cada transformación homogénea ${}^{i-1}A_i$ está conformada por:
  - RotZ (θ_i), TrasZ (d_i), TrasX (a_i) y RotX (α_i).
  - Cada una de las filas representa los parámetros para llegar del sistema i-1 al sistema i.

Tabla de Denavit-Hartenberg

Articulaciones	θ_i	d_i	a_i	α_i
1				
...				
n				

- Según la articulación con la que trabajemos será con la cual determinaremos los valores para cada fila de la tabla.
- La idea es llegar a la matriz de transformación homogénea para luego llegar a encontrar la matriz del robot y luego encontrar la matriz jacobiana.

Parámetros de Denavit-Hartenberg

- θ_i: son los movimientos necesarios para que la posición x_{i-1} este paralela a x_i (es un ángulo).
- d_i: distancia que existe entre x_{i-1} y x_i (sistema de referencia cartesiano).
  - Salvo que el brazo tenga movimiento por piston para su altura, suele ser una constante L_i.
- a_i: distancia que existe entre z_{i-1} y z_i con respecto a x_{i-1}.
- α_i: determina el ángulo que debe existir entre z_{i-1} y z_i para que ambos ejes estén paralelos (o sea, viendo hacia la misma dirección y sentido).

Matriz de Transformación Homogénea

$$ {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

- Luego de calcular las n matrices (i=1..n), cada una de ellas será la matriz de cada una de las articulaciones del robot.
  - Ejemplo: la matriz 0A1 o $A_{0/1}$ es la matriz de la articulación 1 respecto a 0.

Matriz del Robot

$$T = 0A1 * 1A2 * 2A3 * \ldots = \Pi^{n}_{i=1}\ {}^{i\text{-}1}A_i$$

- La última columna devuelve los 3 valores para determinar la posición del robot (x,y,z).
  - Esto es fundamental para encontrar las velocidades del robot a partir de la matriz jacobiana.
- Ejemplo:

$$^{0}A_3 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & x = f_x(q_1, \ldots, q_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & y = f_y(q_1, \ldots, q_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & z = f_z(q_1, \ldots, q_n) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Jacobiana

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Velocidad}\\ \text{de las}\\ \text{articulaciones}\\ (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)\end{array}} &
\begin{array}{c}\xrightarrow{\textbf{Jacobiana directa}}\\[2em] \xleftarrow[\textbf{Jacobiana inversa}]{}\end{array} &
\boxed{\begin{array}{c}\text{Velocidades}\\ \text{del extremo}\\ \text{del robot}\\ (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})\end{array}}
\end{array}
$$

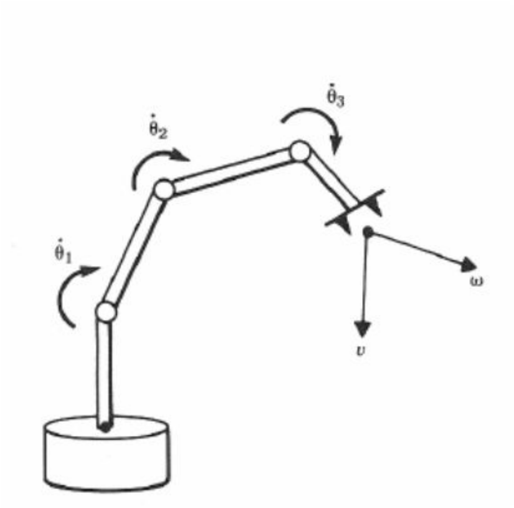
$$
\begin{array}{ll}
\dot{q}_1 = f_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) & \dot{x} = f_x(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\
\dot{q}_2 = f_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) & \dot{y} = f_y(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\
. \qquad . & \dot{z} = f_z(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\
. \qquad . & \dot{\alpha} = f_\alpha(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\
. \qquad . & \dot{\beta} = f_\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\
\dot{q}_n = f_n(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) & \dot{\gamma} = f_\gamma(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)
\end{array}
$$

Matriz Jacobiana (cont.)

- En robótica la matriz Jacobiana describe las relaciones entre las velocidades articulares (θ_i) y las velocidades lineales y de rotación del efector final (x_i).
  - Se define en robótica al *efector final* como la forma de identificar a la herramienta que está unida a la última junta del brazo robótico.

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= J(\underline{\theta})\underline{\dot{\theta}} \\ \underline{\dot{\theta}} &= J(\underline{\theta})^{-1}\underline{\dot{x}} \end{aligned}}$$

$$\underset{6\text{x}1}{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}} = \underset{6\text{x}N}{\begin{bmatrix} \\ \\ & J(\underline{\theta}) & \\ \\ \\ \end{bmatrix}} \underset{N\text{x}1}{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \cdots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix}}$$



Matriz Jacobiana (cont.)

Relaciones Diferenciales:

$$x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \beta = f_\beta(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i}\dot{q}_i$$
$$\dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \qquad \text{con } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Matriz Jacobiana}$$

Jacobiana Inversa

- Inversión simbólica de la matriz jacobiana:
  - Gran complejidad: matriz 6x6 de funciones trigonométricas.
- Evaluación e inversión numérica de la matriz jacobiana:
  - Necesidad de recómputo continuo.
  - En ocasiones J no es cuadrada: **Matriz Pseudoinversa de Moore-Penrose**.
  - En ocasiones el determinante de J es nulo: **Configuraciones Singulares**.

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

Pseudoinversa de Moore-Penrose

- Es una generalización de la matriz inversa de una matriz singular ($\nexists\ A^{-1}$).
  - Está definida para todas las matrices.
    - Incluso las no cuadradas o las que no tienen rango completo (rango(A) = m con $A_{(mxn)}$).
- Facilita el enunciado y la prueba de resultados del álgebra lineal.
  - Un uso común es el de computar una solución de “ajuste óptimo” (por cuadrados mínimos) de un sistema de ecuaciones lineales que no posee solución.
- Axioma: si la matriz A es invertible, el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene solución única dada por $x = A^{-1}b$.
  - $\Rightarrow \therefore x_{ls} = A^{+}b$ resuelve $b = Ax_{ls}$ sii $b \in$ rango(A) (número de filas/columnas LI).
    - Subíndice “ls”: solución por mínimos cuadrados (*least squares approximation*).

Pseudoinversa de Moore-Penrose (cont.)

- Si $m = n$ (matriz cuadrada) y A es no singular ($\exists\ A^{-1}$), A^{-1} satisface de manera trivial las cuatro condiciones de Penrose y por lo tanto:

$$A^{+} = A^{-1}$$

- Si $m > n$ y las columnas de A son linealmente independientes (concepto: “rango columna completo”):

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

- Se dice que A^{+} es la inversa *izquierda* de A ya que $A^{+}A = I$.
    - Recordar que A^{-1} es la inversa *bilateral* ya que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ donde I es la matriz identidad.

Conclusiones Primarias

- La pseudoinversa nos permite proporcionar una alternativa para resolver sistemas $Ax = b$ cuando A no tiene inversa (mediante mínimos cuadrados).
- Por lo tanto, basta con multiplicar $J(\theta)^{+}$ con $\tilde{x}$ para obtener la solución del sistema de ecuaciones $J(\theta)\tilde{\theta} = \tilde{x}$, es decir, realizar el cálculo de $\tilde{\theta} = J(\theta)^{+}\tilde{x}$.

¿Cálculo Diferencial en un Microcontrolador? 👎

Cálculo Numérico de la Matriz Jacobiana

1. Calcular los sistemas de referencia absolutos con respecto a la base del robot, es decir, las matrices de transformación homogéneas 0A1, ... , 0An etc.

$$
{}^{0}A_i = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \begin{bmatrix} \\ z_i \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ t_i \\ \\ \end{bmatrix} \\ \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2. La tercera columna corresponde al vector z_i de cada uno de los sistemas de referencia.
3. La cuarta columna corresponde al vector x_i de posiciones absolutas de los sistemas de referencia con respecto al sistema de referencia de la base del robot.

Cálculo Numérico de la Matriz Jacobiana (cont.)

- Sabiendo que $z_0 = [0\ 0\ 1]$ y $t_0 = [0\ 0\ 0]$ (por definición), se define a la matriz jacobiana de manera numérica como (matriz de 6xn):

$$J = \begin{pmatrix} z_0 \times (t_n - t_0) & \dots & z_{n-1} \times (t_n - t_{n-1}) \\ z_0 & \dots & z_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Cada columna de la matriz representa a cada una de las articulaciones.
- Las primeras 3 filas representan la ponderación de la velocidad lineal para los ejes $\hat{x}$ $\hat{y}$ $\hat{z}$ respectivamente.
  - Ejemplo: siendo la fila 1 = (-70 0 0 0 0 0) para un robot de 6 GDL, entonces $\hat{x} = -70*q_1$
- Las últimas 3 filas representan la ponderación de la velocidad angular para $\acute{\omega}_x$ $\acute{\omega}_y$ $\acute{\omega}_z$ respectivamente.
  - Ejemplo: siendo la fila 6 = (1 0 0 1 0 1) para un robot de 6 GDL, entonces $\acute{\omega}_z = q_1 + q_4 + q_6$

Configuraciones Singulares

- Jacobiano (determinante de la matriz jacobiana) nulo.
  - $\det(J) = |J| = 0 \Rightarrow$ Matriz Singular ($\nexists\ A^{-1}$).
  - **Incremento infinitesimal en coordenadas cartesianas implica incremento infinito en coordenadas articulares.**
    - En las inmediaciones de las configuraciones singulares, el pretender que el extremo del robot se mueva a velocidad constante, obligaría a movimientos de las articulaciones a velocidades inabordables por sus actuadores.
  - **Implica pérdida de algún grado de libertad.**
- Tipos de Singularidades:
  - En los límites del espacio de trabajo del robot.
    - El extremo se encuentra en algún punto límite de trabajo interior o exterior.
  - En el interior del espacio de trabajo del robot.
    - Alineación de dos o más ejes de las articulaciones del robot.
- Estos casos requieren su estudio y eliminación.

Bibliografía

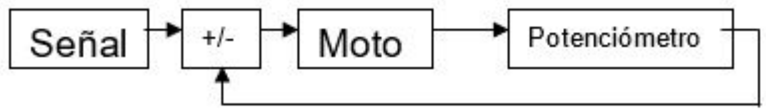
- Cinemática de Robot 3GDL Método de Denavit-Hartenberg - YouTube
  - https://www.youtube.com/watch?v=TNxo6Ft6JJc
  - https://www.youtube.com/watch?v=UR4wmwFUTmA
  - https://www.youtube.com/watch?v=fzUMecsvmy0
- Denavit–Hartenberg Parameters - Wikipedia
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Denavit%E2%80%93Hartenberg_parameters
- Tabla de Denavit-Hartenberg explicada paso a paso con Inventor y Matlab | Robótica - YouTube
  - https://www.youtube.com/watch?v=Myrw7-hAEm8
- Cinemática Inversa Robot Antropomórfico 3 GDL - YouTube
  - https://www.youtube.com/watch?v=BH5b2Hwibn8
- Cómo Calcular la Jacobiana de un Brazo Robot: Ejemplo Numérico | Sistemas Robotizados - YouTube
  - https://www.youtube.com/watch?v=G5BRcxLpHGw
- Otras:
  - https://es.slideshare.net/rubenborja/matriz-jacobiana
  - http://www.esi2.us.es/~vivas/ayr2iaei/CIN_ROB.pdf
  - http://icaro.eii.us.es/descargas/Tema%20_4_%20parte_4_y_ultima.pdf
  - http://ee263.stanford.edu/lectures/ls.pdf
  - http://ocw.uc3m.es/matematicas/algebra-lineal/teoria/algebra_teoria_14.pdf
  - https://es.wikipedia.org/wiki/Pseudoinversa_de_Moore-Penrose
  - https://groups.csail.mit.edu/drl/journal_club/papers/033005/buss-2004.pdf
  - http://www-assig.fib.upc.es/~rob/protegit/treballs/Q2_03-04/general/enders.htm

Anexo A - GDL, Home y Movimiento

- Grados de Libertad (GDL o DOF): se considera grado de libertad a cada servo que permita un movimiento.
  - Giro sobre la base
  - Hombro
  - Codo
  - Muñeca
  - Dedos (+ servos = + falanges)
- Posición HOME: posición en la debe iniciar los movimientos y en la que debe quedar al finalizar la operación, siendo este el determinado estado de reposo de las articulaciones.
  - No debe forzar las mismas, ni tampoco ser incomodo al ambiente (plegado).
- Velocidad del Movimiento
  - Si se da solo la posición final, el movimiento puede ser brusco ⇒ enviar comandos por pasos.

Anexo B - Límites y Tipos de Servomecanismos

- Límites Físicos de los Movimientos: limitaciones de los servos.
  - 90, 180 o 360 grados (este último generalmente continuo).
- Sistema de Control en Lazo Abierto
  - En estos sistemas de control no hay señal de salida monitoreada para generar una señal de control.
- Sistema de Control en Lazo Cerrado
  - Se monitorea la señal de salida en forma continua para compararla con la señal de referencia y calcular la señal de error.
  - La señal de error es aplicada al controlador para generar la señal de control y tratar de llevar la señal de salida al valor deseado. También es llamado control realimentado.



Gracias