ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 3.1
# Αβεβαιότητα σε Σύνολα Συλλογιστικών Κανόνων

Διδάσκων Ενότητας:
Κώστας Κοντογιάννης

ΜΕΡΟΣ 3: Ατελής Γνώση και Μηχανική Μάθηση

## Περίληψη Ενότητας 1.6

2

**Θέματα**

- Κανόνες Συλλογισμών με Αβέβαιες Πληροφορίες

**Υλικό**

- Διαφάνειες παρουσίασης
- Κεφάλαιο 13 Βιβλίου

# Βιβλιογραφία - Αναφορές

3

- Υλικό για αυτή τη διάλεξη συγκεντρώθηκε
  - από το βιβλίο «Τεχνητή Νοημοσύνη», Ι. Βλαχάβας κ.α, Εκδόσεις Γκιούρδας

# Αβέβαιη Γνώση

- Στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου οι αποφάσεις συνήθως λαμβάνονται υπό αβεβαιότητα (*uncertainty*), δηλαδή έλλειψη ακριβούς πληροφορίας (π.χ. επείγοντα ιατρικά περιστατικά, planning, κλπ.).
- Οι κυριότερες πηγές αβεβαιότητας είναι:
- Ανακριβή δεδομένα (*imprecise data*): π.χ. από ένα όργανο περιορισμένης ακρίβειας.
- Ελλιπή δεδομένα (*incomplete data*): π.χ. σε ένα σύστημα ελέγχου, κάποιοι αισθητήρες τίθενται εκτός λειτουργίας και πρέπει να ληφθεί άμεσα μία απόφαση με τα δεδομένα από τους υπόλοιπους.
- Υποκειμενικότητα ή/και ελλείψεις στην περιγραφή της γνώσης: π.χ. η υιοθέτηση ευριστικών μηχανισμών εισάγει πολλές φορές υποκειμενικότητα.
- Κάθε είδους περιορισμοί που κάνουν το όλο πλαίσιο λήψης απόφασης ατελές. Π.χ.:
- Οικονομικοί περιορισμοί που κάνουν ασύμφορη την πραγματοποίηση κάποιων μετρήσεων
- Χρονικοί περιορισμοί που επιβάλουν την άμεση λήψη απόφασης για την αποσόβηση επικίνδυνων καταστάσεων
- Ανάγκη ύπαρξης "μη ακριβών" μεθόδων συλλογισμού.
- *Χρήση κυρίως Θεωρίας Πιθανοτήτων* (Δύσκολη προσέγγιση)
- *Εναλλακτικές Τεχνικές: Συντελεστές Βεβαιότητας* (*Certainty Factors*), *Θεωρία Dempster-Shafer, Ασαφής Λογική* (*Fuzzy Logic*).

# Μοντέλα Αβεβαιότητας

- Θεωρία Πιθανοτήτων
- Θεωρία Συντελεστών Βεβαιότητας
  - Classificatory: "Οι παρατηρήσεις επιβεβαιώνουν την υπόθεση h"
  - Comparative: "Η παρατήρηση e1 υποστηρίζει την υπόθεση h πιο ισχυρά απ' ότι η e2 την h" ή "η παρατήρηση e υποστηρίζει την υπόθεση h1 απ' ότι την υπόθεση h2"
  - Quantitative: "Η παρατήρηση e υποστηρίζει την υπόθεση h με βεβαιότητα x" (συνήθως με τη χρήση του τελεστή C[h,e]. Εδώ σημειώστε ότι δεν ισχύει ότι C[h,e] είναι ίσο με 1-C[~h,e]
- Fuzzy sets

# Γενικά 1/3

- Όπως είδαμε στη πιο απλή της μορφή μια Βάση Γνώσης (Knowledge Base) περιέχει κανόνες της μορφής:

  **A & B & C => D**

  όπου A, B, C είναι γεγονότα (facts) των οποίων η ύπαρξη είναι η Αληθής ή Ψευδής (δηλαδή τα γεγονότα ισχύουν με πιθανότητα 0 ή 1)
- Όμως στη πράξη χρειαζόμαστε μια μέθοδο που να μας επιτρέπει να παράγουμε συλλογισμούς και αποτελέσματα σε ένα περιβάλλον όπου τα γεγονότα δεν είναι βέβαια άλλά έχουν κάποιο βαθμό «βεβαιότητας» ότι ισχύουν (ή ότι δεν ισχύουν)
- Δηλαδή θα θέλαμε να είχαμε κανόνες της μορφής :

  **A & B & C** => **D** (CF:x1)

  όπου και τα γεγονότα A, B, C έχουν και αυτά κάποιο βαθμό «βεβαιότητας»
- Ο παραπάνω κανόνας διαβάζεται ώς εξής:
  - Εάν ισχύουν με ap;olyth βεβαιότητα (CF=1) τα A, B, C τότε ισχύει το D με βεβαιότητα x1. Προφανώς χρειαζόμαστε ένα πλαίσιο να υπολογίσουμε ποια θα είναι η βεβαιότητα του D σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα όταν τα A, B, C δεν ισχύουν με απόλυτη «βεβαιότητα» 1.

# Γενικά 2/3

- Επίσης μπορούμε να έχουμε πολλούς κανόνες που υποστηρίζουν το ίδιο αποτέλεσμα με διαφορετικούς βαθμούς βεβαιότητας π.χ.

  A1 & A2 & A3 => **H** (CF=0.5)

  B1 & B2 & B3 => **H** (CF=0.6)

Εάν υποθέσουμε ότι όλα τα γεγονότα A1, A2, A3, B1, B3, B3 ισχύουν τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε την «βεβαιότητα»΄του αποτελέσματος **H** με τη χρήση μιας συνάρτησης CFcombine(0.5, 0.6))

Επίσης εάν υποθέσουμε ότι τα γεγονότα των κανόνων δεν ισχύουν με απόλυτη βεβαιότητα π.χ.

Rule: A1 => **H** (CF=0.5) και δίνεται ότι το A1 ισχύει με συντελεστή βεβαιότητας CF(A1) = 0.3 τότε **H** ισχύει με συντελεστή βεβαιότητας CF(**H**) = 0.5*0.3 = 0.15

# Γενικά 3/3(*Certainty Factors*)

- Αριθμητικές τιμές που εκφράζουν τη βεβαιότητα για την αλήθεια μιας πρότασης ή γεγονότος
- Πρωτοεισήχθησαν στο έμπειρο σύστημα Mycin για να προσδώσουν κάποιο βαθμό βεβαιότητας στα συμπεράσματα των διαφόρων κανόνων
- if *γεγονός* then *υποθετικό συμπέρασμα* με βεβαιότητα CF
  Παράδειγμα: if πυρετός then γρίπη CF 0.8
- Παίρνουν τιμές στο διάστημα [-1, +1]
  - Η τιμή –1 εκφράζει απόλυτη βεβαιότητα για το ψευδές της πρότασης.
  - Η τιμή +1 απόλυτη βεβαιότητα για την αλήθεια της πρότασης.
  - Η τιμή 0 εκφράζει άγνοια.
- Εκτός από τη βεβαιότητα που συνοδεύει τον κανόνα, είναι δυνατό να ορισθούν τιμές βεβαιότητας και στην τιμή του γεγονότος του κανόνα:
  Παράδειγμα: if πυρετός CF1 0.7 then γρίπη CF 0.8
  - Η τελική βεβαιότητα του κανόνα είναι το γινόμενο των βεβαιοτήτων: 0.7x0.8=0.56
- Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα γεγονότα στο αριστερό τμήμα του κανόνα τα οποία συνδέονται με AND (ή OR) τότε ως συντελεστής βεβαιότητας του αριστερού τμήματος θεωρείται η μικρότερη (ή η μεγαλύτερη) τιμή CF που εμφανίζεται.

# Παράδειγμα

- Έστω ότι δύο κανόνες οδηγούν στο ίδιο υποθετικό συμπέρασμα B, κάτω όμως από διαφορετικές παραδοχές, δηλαδή:
  if A then B CF 0.8
  if C AND D AND E then B CF 0.6
- Αν ο χρήστης εισάγει τα δεδομένα A, C, D και E με βεβαιότητες:
  CF(A)=0.5, CF(C)=0.9, CF(D)=0.7 και CF(E)=0.5 τότε:
- Η ενεργοποίηση του πρώτου κανόνα δίνει: CFp(B)=0.5 * 0.8 =0.4
- Η ενεργοποίηση του δεύτερου κανόνα δίνει:
  CFn(B)=0.6 * min(0.9, 0.7, 0.5) = 0.6 * 0.5 = 0.3
- Επειδή τα CFp και CFn είναι και τα δύο θετικά, η συνολική βεβαιότητα του υποθετικού συμπεράσματος B θα είναι:
  CF(B) = 0.4 + 0.3 - (0.4 x 0.3) = 0.58

# Απλό Μοντέλο Συντελεστών Βεβαιότητας

- Η βασική αρχή του μοντέλου είναι ότι δεν θα πρέπει ένα αρνητικό γεγονός να αλλάζει τελείως τη συλλογιστική όταν έχουμε αρκετά θετικά γεγονότα που υποστηρίζουν μια υπόθεση, και αντίστροφα.
- Ουσιαστικά για κάθε γεγονός μπορούμε να έχουμε ένα απλό μοντέλο όπου προσδιορίζουμε στο γεγονός ένα βαθμό πίστης (MB) και ένα «δείκτη» δυσπιστίας MD Τότε σε αυτό το απλό μοντέλο θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

  **CF = MB – MD, και**

  **Cfcombine(X, Y) = X + Y*(1-X)**

- Το πρόβλημα είναι ότι κάποια αρνητική πληροφορία έχει μεγάλη επίδραση σε πολλές θετικές

## Το Εξελιγμένο Μοντέλο

$$\mathbf{CF} = \frac{MB - MD}{1 - \min(MB, MD)}$$

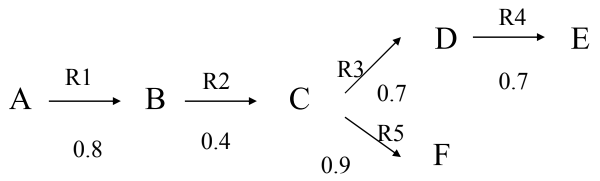
$$\text{CFcombine}(X,Y) = \begin{cases} X + Y(1 - X) & X, Y > 0 \\ \dfrac{X + Y}{1 - \min(|X|, |Y|)} & \text{One of } X, Y < 0 \\ -\text{CFcombine}(-X, -Y) & X, Y < 0 \end{cases}$$

## Άλλες Χρήσεις των CF

Κλάδεμα ενός μονοπατιού συλλογισμού

$$A \xrightarrow[0.8]{R1} B \xrightarrow[0.4]{R2} C \xrightarrow[0.7]{R3} D \xrightarrow[0.7]{R4} E$$

# Κλάδεμα Μονοπατιού




Το μονοπάτι EDC έχει CF 0.196 και μπορούμε να το κόψουμε εάν είχαμε Cutoff CF = 0.2

# Θεωρία Πιθανοτήτων

- Αν *E* είναι ένα γεγονός, η *άνευ συνθηκών πιθανότητα* (*unconditional probability*) *P*(*E*) να συμβεί το γεγονός εκφράζεται με έναν πραγματικό αριθμό για τον οποίο ισχύουν:
  - $0 \leq P(E) \leq 1$
  - $P(E) = 1$ αν E είναι ένα σίγουρο γεγονός
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$ (όπου με $\neg E$ συμβολίζεται η άρνηση του γεγονότος E)
- *Πιθανότητα υπό συνθήκη* (*conditional probability*):
  - Υποδηλώνει την πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα *H* δεδομένης της ισχύος μόνο του γεγονότος *E.*
  - *Συμβολίζεται με P(H|E)* και ορίζεται μέσω του πηλίκου της πιθανότητας να συμβούν ταυτόχρονα τα *H* και *E* προς την πιθανότητα του *E*

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \wedge E)}{P(E)}$$

- Ιδιότητες
  - *Προσθετική Ιδιότητα (η πιθανότητα να ισχύει το A ή το B)*: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο ανεξάρτητα γεγονότα A και B*: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B)$
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο μη ανεξάρτητα γεγονότα A και B*: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B|A)$

# Παράδειγμα

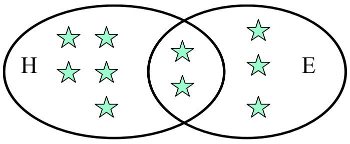
- Έστω ότι έχουμε <u>ένα</u> ζάρι:
- P(A) = P(περιττός αριθμός) = 3/6 = 0.5
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,3,5) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- P(B) = P(αριθμός $\leq$ 3) = 3/6 = 0.5
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,2,3) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- P(B|A) = P(αριθμός $\leq$3 δεδομένου ότι είναι περιττός) = 2/3
  - γιατί υπάρχουν 2 δυνατές τιμές (1,3) από σύνολο 3 δυνατών τιμών (1,3,5)
- P(A$\wedge$B) = P(περιττός αριθμός και $\leq$3) = P(A)* P(B|A) = 0.5*2/3 = 0.33
- P(A$\vee$B)=P(περιττός ή $\leq$3) = P(A) + P(B) - P(A$\wedge$B) = 0.5+0.5-0.33=0.67 (προσθετική ιδιότητα)

# Ο Νόμος του Bayes (*Bayes' rule*)

- Κάτω από μία περισσότερο υποκειμενική αντιμετώπιση της πιθανότητας που επιτρέπει τη **χρήση εκτιμήσεων αντί συχνοτήτων εμφάνισης γεγονότων**, ο νόμος του Bayes επιτρέπει τον υπολογισμό πιθανοτήτων υπό συνθήκη με χρήση άλλων πιθανοτήτων που είναι ευκολότερο να υπολογιστούν.
- Η απλούστερη εκδοχή του *νόμου του Bayes*: $P(H|E)=\frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E)}$
  - Πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί, συγκριτικά με την σχέση της *πιθανότητας υπό συνθήκη*.
  - Αν H μία ασθένεια και E ένα σύμπτωμα που σχετίζεται με αυτήν, τότε για τον υπολογισμό της *πιθανότητας υπό συνθήκη* απαιτείται πληροφορία που συνήθως δεν είναι διαθέσιμη:
  - Πόσοι άνθρωποι στον κόσμο πάσχουν από την H και ταυτόχρονα εμφανίζουν το σύμπτωμα E.
  - Πόσοι εμφανίζουν απλά το σύμπτωμα E.
- Στο νόμο του Bayes:
  - Ένας γιατρός μπορεί να δώσει μία εκτίμηση για το πόσοι ασθενείς που έπασχαν από την ασθένεια H εμφάνιζαν το σύμπτωμα E (ποσότητα P(E|H)). Αντίθετα, το κλάσμα των ασθενών με σύμπτωμα E που πάσχουν από την ασθένεια H, δηλαδή ο όρος P(H|E), τις περισσότερες φορές είναι αδύνατο να εκτιμηθεί.
  - Το P(H) μπορεί να υπολογιστεί από στατιστικά στοιχεία για τον συνολικό πληθυσμό.
  - Το P(E) από στατιστικά στοιχεία του ίδιου του γιατρού.

# Παράδειγμα 1

- Έστω τα δύο σύνολα *H* και *E* με επτά και πέντε γεγονότα αντίστοιχα από ένα συνολικό πληθυσμό δέκα γεγονότων.
- Το σχήμα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις απλές (άνευ συνθήκης) και τις υπό συνθήκη πιθανότητες με απλή εφαρμογή του ορισμού τους.




P(E) = 5/10 = 0.5
P(H) = 7/10 = 0.7
P(H|E) = 2/5 = 0.4
P(E|H) = 2/7 = 0.287514

- Στο παράδειγμα του σχήματος βλέπουμε ότι: P(H|E) * P(E) = P(E|H)*P(H)
- Άρα, γνωρίζοντας τρεις από τις πιθανότητες μπορούμε να υπολογίσουμε την τέταρτη.

# Παράδειγμα 2

*Ορισμοί Παραμέτρων*
P(H)= η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη
P(E)= η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό
P(E|H)= η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι έχει γρίπη
P(E|¬H)= η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι δεν έχει γρίπη

*Δεδομένα*
P(H)=0.0001 P(E|H)=0.8 P(E|¬H)=0.1

*Ερωτήσεις*
*1) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό;*

P(E)= P(E∧H) + P(E∧¬H) =
*(από ορισμό πιθαν. υπό συνθήκη)*
= P(E|H)*P(H) + P(E|¬H)* P(¬H) =
= 0.8 * 0.0001 + 0.1*(1-0.0001) =
= 0.0008 + 0.09999 = 0.10007

*2) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι έχει πυρετό;*
P(H|E) = P(H)*P(E|H)/P(E) = *(Bayes)*
= 0.0001 * 0.8/0.10007 =
= 0.0007994

*3) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι δεν έχει πυρετό;*
P(H|¬E) = P(H)*P(¬E|H)/P(¬E) =
*(σχέση Bayes με ¬E αντί E)*
= 0.0001*(1-0.8)/(1-0.10007) =
= 0.0000222

## Πιθανότητες και Συλλογισμοί

- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων $e_1$ και μια νέα πληροφορία $s_1$. Επιπλέον έστω e το νέο σύνολο παρατηρήσεων όταν η πληροφορία $s_1$ προστίθεται στο σύνολο $e_1$. Τότε:

$$P(d_i \mid e) = \frac{P(s_1 \mid d_i \,\&\, e1)\, P(d_i \mid e_1)}{\mathit{Sum}_j\,(P(s_1 \mid d_j \,\&\, e_1)\, P(d_j \mid e_1))}$$

- P(d|e) = x, ερμηνεύεται:

  ΕΑΝ παρατηρήσουμε το συμπτώματα e

  ΤΟΤΕ συμπέρανε την υπόθεση d με πιθανότητα x

## Προβλήματα

- Είναι πρακτικά απίθανο να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες για τα στοιχεία $P(s_k|d_j)$ για κάθε ένα από τα δεδομένα $s_k$, στο σύνολο e, και για τις σχέσεις των $s_k$ για κάθε πιθανή υπόθεση $d_j$
- Αντίθετα θα θέλαμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(d_i \mid e)$ σαν συνάρτηση των $P(d_i \mid s_k)$, όπου e είναι το σύνολο των παρατηρήσεων $s_k$

## Συντελεστές Βεβαιότητας - Ορολογία

- Η Ορολογία βασίζεται στα παρακάτω:
  - MB[h,e] = x “ο βαθμός με τον οποίο αυξάνεται η πίστη μας για κάποια υπόθεση h, δεδομένης της παρατήρησης e, είναι x”
  - MD[h,e] = y “ο βαθμός με τον οποίο αυξάνεται η δυσπιστία μας για κάποια υπόθεση h, δεδομένης της παρατήρησης e, είναι y”
  - Για παράδειγμα, MB[h,e] = 0.7 δείχνει το μέγεθος με τον οποίο κάποιος ειδικός αυξάνει την πίστη του/της ότι η υπόθεση h ισχύει δεδομένου ότι παρατηρεί το γεγονός e
  - Παρόμοια MB[h,e] = 0 δείχνει ότι ο ειδικός δεν έχει λόγο να αυξήσει την πίστη/δυσπιστία του για την υπόθεση h με βάση τη παρατήρηση e

## Σχέση Συντελεστών Βεβαιότητας και Πιθανοτήτων

- Σύμφωνα με τη πιθανοθεωρητική προσέγγιση P(h) μοντελοποιεί την πίστη του ειδικού για την υπόθεση h. Συνεπώς 1 - P(h) μοντελοποιεί την δυσπιστία του ειδικού για το γεγονός ότι μπορεί η υπόθεση h να ισχύει
- Εάν P(h|e) > P(h), τότε αυτό σημαίνει ότι η παρατήρηση e αυξάνει την πίστη του ειδικού στην υπόθεση h ενώ παράλληλα μειώνει την δυσπιστία του για την υπόθεση h
- Στη πράξη η αναλογική μείωση της δυσπιστίας δύνεται από τον λόγο

$$\frac{P(h|e) - P(h)}{1 - P(h)}$$

- Αυτός ο λόγος λέγεται «βαθμός αύξησης πίστης» (measure of increased belief) στην υπόθεση h από τη παρατήρηση e (MB[h,e])
- Ανάλογα όταν P(h|e) < P(h), τότε αυτό σημαίνει μείωση της πίστης για την h και η αναλογική μείωση την πίστης είναι

$$\frac{P(h) - P(h|e)}{P(h)}$$

και συμβολίζεται με (MD[h,e])

## Ορισμοί

$$MB[h,e] = \begin{cases} 1 & \text{if } P(h) = 1 \\ \dfrac{\max[P(h|e), P(h)] - P(h)}{1 - P(h)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$MD[h,e] = \begin{cases} 1 & \text{if } P(h) = 0 \\ \dfrac{\min[P(h|e), P(h)] - P(h)}{- P(h)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$CF[h,e] = MB[h,e] - MD[h,e]$$

## Χαρακτηριστικά

- Όρια και τιμές:
  - 0 <= MB[h,e] <= 1
  - 0 <= MD[h,e] <= 1
  - -1 <= CF[h,e] <= +1
- mutually exclusive hypotheses
  - Εάν P(h|e) = 1
    - MB[[h,e] = 1
    - MD[h,e] = 0
    - CF[h,e] = 1
  - Εάν P(~h|e) = 1
    - MB[h,e] = 0
    - MD[h,e] = 1
    - CF[h,e] = -1

## Χαρακτηριστικά

- Όρια και τιμές:

  -1 = CF[h,~h] <= CF[h,e] <= C[h,h] = +1
- Σημ.  MB[~h,e] = 1 if and only if MD[h,e] = 1
- Για mutually exclusive υποθέσεις h1 και h2,

  if  MB[h1,e] = 1, then MD[h2,e] = 1
- Έλλειψη στοιχείων:
  - MB[h,e] = 0 εάν η *h* δεν υποστηρίζεται από την παρατήρηση *e* (i.e. e and h are independent or *e* disconfirms *h*)
  - MD[h,e] = 0 εάν η  *h* δεν αναιρείται από την παρατήρηση *e* (i.e. e and h are independent or *e* confirms *h*)
  - CF[h,e] = 0 όταν η παρατήρηση *e* δεν υποστηρίζει ούτε αναιρεί την υπόθεση *h* (i.e. *e* and *h* are independent)

## Χαρακτηριστικά

- CF[h,e] + CF[~h,e] =/= 1

- MB[h,e] = MD[~h,e]

## Measure of Beliefs και Πιθανότητες

- We can define then the MB and MD as:

$$MB[h,e] = 1 - \frac{P(e \mid \sim h]}{P(e)}$$

and

$$MD[h,e] = 1 - \frac{P(e \mid h)}{P(e)}$$

## Combining Functions

$$MB[h, s1\&s2] = \begin{cases} 0 & \text{If } MD[h, s1\&s2] = 1 \\ MB[h, s1] + MB[h, s2](1 - MB[h, s1]) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$MD[h, s1\&s2] = \begin{cases} 0 & \text{If } MB[h, s1\&s2] = 1 \\ MD[h, s1] + MD[h, s2](1 - MD[h, s1]) & \text{otherwise} \end{cases}$$

MB[h1 or h2, e] = max(MB[h1, e], MB[h2, e])
MD[h1 or h2, e] = min(MD[h1, e], MD[h2, e])

MB[h, s1] = MB'[h, s1] * max(0, CF[s1, e])
MD[h,s1] = MD'[h, s1] * max(0, CF[s1, e])

## The MYCIN Model

- MB[h1 & h2, e] = min(MB[h1,e], MB[h2,e])
- MD[h1 & h2, e] = max(MD[h1,e], MD[h2,e])

- MB[h1 or h2, e) = max(MB[h1,e], MB[h2,e])
- MD[h1 or h2, e) = min(MD[h1,e], MDh2,e])

- 1 - MD[h, e1 & e2] = (1 - MD[h,e1])*(1-MD[h,e2])
- 1- MB[h, e1 & e2] = (1 - MB[h,e1])*(1-MB[h, e2])

- CF(h, $e_f$ & $e_a$) = MB[h, $e_f$] - MD[h,$e_a$]

## Προσέγγιση Dempster-Shafer (D-S) (1/2)

- Ο χειρισμός της αβεβαιότητας γίνεται πιο εύκολα απ' ότι κατά Bayes, καθώς δεν απαιτείται η συλλογή όλων των απλών και των υπό συνθήκη πιθανοτήτων
- Βασίζεται σε λογισμό με αριθμητικές τιμές *πεποίθησης* (*belief*),
  - δηλαδή πίστης για την ισχύ κάποιου υποθετικού συμπεράσματος για το οποίο υπάρχουν κάποιες ενδείξεις (γεγονότα).

**Βασικά Στοιχεία**

- *Πλαίσιο διάκρισης* (*frame of discernment*): το σύνολο U των διακριτών και αμοιβαία αποκλειόμενων προτάσεων ενός τομέα γνώσης.
  - π.χ. αν εξετάζεται η ασθένεια κάποιου, το U αντιπροσωπεύει όλες τις πιθανές διαγνώσεις, δηλαδή τα υποθετικά συμπεράσματα.
- Pow(U): Το σύνολο των υποσυνόλων του U (δυναμοσύνολο)
  - Αν U={A, B, C} είναι το σύνολο των πιθανών ασθενειών τότε το σύνολο:
    Pow(U) = { {}, {A}, {B}, {C}, {A, B}, {A, C}, {B, C}, {A, B, C} }
    υποδηλώνει τις πιθανές διαγνώσεις για μια περίπτωση ασθένειας.
  - Κάθε στοιχείο του Pow(U) αντιστοιχεί σε διαζευγμένες προτάσεις.
    Π.χ. {A, B} σημαίνει "ασθένεια A ή B".
  - Στοιχεία του U που δεν ανήκουν σε ένα στοιχείο του Pow(U), (π.χ. η ασθένεια C στο {A, B}), κάνουν σαφή την άρνηση του αντίστοιχου υποθετικού συμπεράσματος.
  - Το κενό υποσύνολο {} αντιστοιχεί στην περίπτωση που όλα τα υποθετικά συμπεράσματα είναι ψευδή (*null hypothesis*).

# Προσέγγιση Dempster-Shafer (2/2)

- Η *βασική κατανομή πιθανότητας* (*basic probability assignment - bpa*) είναι μία απεικόνιση: m: Pow(U) → [0,1]
  δηλαδή το μέτρο της πεποίθησης που υπάρχει για το κατά πόσο ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα που εκφράζεται με το συγκεκριμένο στοιχείο του U.
  - Υποκειμενική ποσότητα που δε μοιράζεται στα επιμέρους στοιχεία κάθε στοιχείου του Pow(U).
    - π.χ. αν m({A, B})=0.3, τότε αυτή η πεποίθηση δε μοιράζεται στα {A} και {B} αλλά αφορά το {A, B}.
  - Για το στοιχείο {} ισχύει m({})=0
  - Δεδομένου ότι το αληθές υποθετικό συμπέρασμα βρίσκεται κάπου μέσα στα στοιχεία του Pow(U), ισχύει:
  - Η ποσότητα m(X) εκφράζει το πόσο ισχυρή είναι η πεποίθηση για το ότι ένα συγκεκριμένο στοιχείο του U ανήκει στο X αλλά όχι σε κάποιο από τα τυχόν υποσύνολα του X.
- Η συνολική πεποίθηση (*belief*) ότι ένα στοιχείο του U ανήκει στο X καθώς και στα τυχόν υποσύνολα του X συμβολίζεται με *Bel(X)*

# Dempster-Shafer vs. Bayes

- Bayes: η απουσία άλλων ενδείξεων για τις δυνατές εκδοχές τις καθιστά ισοπίθανες.
- Dempster-Shafer: η απουσία κάποιων ενδείξεων θέτει την πιθανότητα (*likelihood*) κάθε εκδοχής κάπου στο διάστημα [0, 1].
  - Καθώς συγκεντρώνονται ενδείξεις, τα διαστήματα αυτά αναμένεται να συρρικνωθούν, άλλα περισσότερο και άλλα λιγότερο.
  - Η συρρίκνωση αναπαριστά την αυξημένη ή όχι εμπιστοσύνη με την οποία αντιμετωπίζονται οι δυνατές εκδοχές.
- Η κατά Dempster-Shafer αντιμετώπιση της αρχικής κατάστασης αποτυπώνει καλύτερα την έλλειψη ενδείξεων.
  - Η ισοπίθανη αντιμετώπιση των διαφόρων εκδοχών ελλείψει άλλης πληροφορίας στη θεωρία του Bayes, γίνεται κατά σύμβαση και είναι λιγότερο αντικειμενική.
  - Εάν ένα από τα ζητούμενα είναι η συλλογή ή όχι επιπλέον ενδείξεων ώστε να αξιολογηθούν καλύτερα οι εναλλακτικές εκδοχές, τότε η προσέγγιση D-S υπερτερεί.

# Κανόνας Dempster-Shafer

- Αν *m1* και *m2* δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις (βασικές κατανομές πιθανότητας) που αποδίδουν κάποιο βαθμό πεποίθησης στα στοιχεία του Pow(U), τότε αυτές συνδυάζονται σε μία τρίτη εκτίμηση *m3=m1*⊕*m2* με τρόπο που ορίζεται με τον *κανόνα D-S*:

$$\underset{A \in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y \in U : X \cap Y = A}} m_1(\mathrm{X}) \bullet m_2(\mathrm{Y})}{1 - \sum_{\mathrm{X,Y \in U : X \cap Y = \varnothing}} m_1(\mathrm{X}) \bullet m_2(\mathrm{Y})}$$

# Παράδειγμα: Διάγνωση Ασθένειας

- Έστω *U*={*A*, *B*, *C*} το σύνολο των δυνατών ασθενειών που μπορεί να διαγνωσθούν.
- *Pow*(*U*) = { { }, {*A*}, {*B*}, {*C*}, {*A*, *B*}, {*A*, *C*}, {*B*, *C*}, {*A*, *B*, *C*} }
  - εκφράζει τις πιθανές διαγνώσεις για μια περίπτωση ασθενούς
- *m*( {{ }, {*A*}, {*B*}, {*C*}, {*A*, *B*}, {*A*, *C*}, {*B*, *C*}, {*A*, *B*, *C*} } ) = 1
  - υποδηλώνει τη βεβαιότητα ότι η διάγνωση βρίσκεται κάπου στα στοιχεία του *Pow*(*U*) αλλά ελλείψει άλλων ενδείξεων δεν είναι δυνατό να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα σε κάποιο
  - Bayes: θα έπρεπε κάθε στοιχείο του *Pow*(*U*) να θεωρηθεί ισοπίθανο
- Έστω ότι γίνεται διαθέσιμη επιπλέον πληροφορία, (π.χ. πραγματοποιούνται ιατρικές εξετάσεις) και προκύπτει ότι η ασθένεια είναι μία από τις *A* ή *B* με βαθμό πίστης 0.7
  - *m1*( {*A*, *B*} ) = 0.7
  - *m1*( {{ }, {*A*}, {*B*}, {*C*}, {*A*, *C*}, {*B*, *C*}, {*A*, *B*, *C*}} ) = 0.3
  - Δηλαδή, η έλλειψη πίστης σε ένα από τα υποθετικά συμπεράσματα του *Pow*(*U*), ισοδυναμεί αυτόματα με ισόποσο βαθμό πίστης στα υπόλοιπα στοιχεία του *Pow*(*U*), χωρίς όμως να δίνεται ιδιαίτερη προτίμηση σε κάποιο από αυτά.
  - Bayes: απαιτείται ο υπολογισμός μεγάλου αριθμού υπό συνθήκη πιθανοτήτων, κάτι που είναι υπολογιστικά ακριβό και πολλές φορές αδύνατο.
- Πώς μπορεί να συνδυαστούν δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις (π.χ. δύο ιατρών) σε μία;

# Παράδειγμα: Συνδυασμός Διαγνώσεων

- Έστω ότι δύο γιατροί εξετάζουν ανεξάρτητα τον ασθενή και δίνουν την εκτίμησή τους *m1* και *m2* αντίστοιχα, για την αρρώστια από την οποία αυτός πάσχει.

| | Γιατρός 1 | | Γιατρός 2 | |
|---|---|---|---|---|
| Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης | $m_1$ | $Bel_1$ | $m_2$ | $Bel_2$ |
| {A} | 0.05 | 0.05 | 0.15 | 0.15 |
| {B} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| {C} | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 |
| {A, B} | 0.15 | 0.2 | 0.05 | 0.2 |
| {A, C} | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| {B, C} | 0.05 | 0.1 | 0.05 | 0.1 |
| {A, B, C} | 0.6 | 1 | 0.5 | 1 |

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

π.χ. *Bel1*({*A*,*B*}) = *m1*({*A*,*B*}) + *m1*({*A*}) + *m1*({*B*}) = 0.015 + 0.05 + 0 = 0.2
Οι δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις *m1* και *m2* μπορεί να συνδυαστούν στην *m3* χρησιμοποιώντας τον κανόνα Dempster-Shafer:

$$\underset{A \in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}):\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{A}} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}{1 - \sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}):\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}$$

# Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων (1/2)

- Ο πίνακας αποτελεί έναν εποπτικό τρόπο για τον υπολογισμό της σχέσης D-S.

| $m_3 = m_1 \oplus m_2$ | | $m_1$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | {A} | {B} | {C} | {A,B} | {A,C} | {B,C} | {A,B,C} |
| $m_2$ | | 0.05 | 0 | 0.05 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.6 |
| {A} | 0.15 | {A) 0075 | { } 0 | { } 0075 | {A} .0225 | {A} .015 | { } .0075 | {A} .09 |
| {B} | 0 | { } .0 | {B} 0 | { } .0 | {B} .0 | { } .0 | {B} .0 | {B} .0 |
| {C} | 0.05 | { } .0025 | { } 0 | {C} 0025 | { } .0075 | {C} .005 | {C} .0025 | {C} .03 |
| {A,B} | 0.05 | {A} .0025 | {B} 0 | { } .0025 | {A,B} .0075 | {A} .005 | {B} .0025 | {A,B} .03 |
| {A,C} | 0.2 | {A} .01 | { } 0 | {C} .01 | {A} .03 | {A,C} .02 | {C} .01 | {A,C} .012 |
| {B,C} | 0.05 | { } .0025 | {B} 0 | {C} .0025 | {B} 0075 | {C} .005 | {B,C} .0025 | {B,C} .03 |
| {A,B,C} | 0.5 | {A} .025 | {B} 0 | {C} 025 | {A,B} .075 | {A,C} .05 | {B,C} .025 | {A,B,C} .3 |

Κάθε στοιχείο του εσωτερικού πίνακα (σκιασμένη περιοχή) προκύπτει παίρνοντας την τομή των στοιχείων των *m1* και *m2* που βρίσκονται στην αντίστοιχη γραμμή και στήλη, όπως ορίζει δηλαδή ο αριθμητής της σχέσης D-S. Οι τιμές πεποίθησης για τις παραπάνω τομές προκύπτουν από το γινόμενο των τιμών πεποίθησης των στοιχείων των *m1* και *m2* που βρίσκονται στην αντίστοιχη γραμμή και στήλη.

# Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων (2/2)

- Η αρχική εκτίμηση ότι η ασθένεια είναι μία από τις *A* ή *B* αποδυναμώθηκε.
  - Αν εξαιρεθεί η περίπτωση {*A*,*B*,*C*} που περιέχει όλες τις διαγνώσεις, οι συνολικές τιμές πεποίθησης *Bel3*, υποδεικνύουν τώρα ότι η διάγνωση βρίσκεται μάλλον στο σύνολο {*A*,*C*} καθώς η τιμή *Bel3*({*A*,*C*})=0.5 υπερτερεί των υπολοίπων.
  - Επιπλέον, επειδή *Bel3*({*A*})>*Bel3*({*C*}), αρχίζει να διαφαίνεται ότι η τελική διάγνωση είναι μάλλον η *A*.
- Η παραπάνω συνδυασμένη εκτίμηση μπορεί να συνδυαστεί εκ νέου με μια άλλη εκτίμηση (π.χ. 3ου ιατρού).

| | **Γιατρός 1** | | **Γιατρός 2** | |
|---|---|---|---|---|
| **Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης** | $\mathbf{m_1}$ | $\mathbf{Bel_1}$ | $\mathbf{m_2}$ | $\mathbf{Bel_2}$ |
| {A} | 0.05 | 0.05 | 0.15 | 0.15 |
| {B} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| {C} | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 |
| {A, B} | 0.15 | 0.2 | 0.05 | 0.2 |
| {A, C} | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| {B, C} | 0.05 | 0.1 | 0.05 | 0.1 |
| {A, B, C} | 0.6 | 1 | 0.5 | 1 |

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$