ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.2
Συλλογιστική στη Λογική Πρώτης Τάξης

Γιώργος Στάμου

ΜΕΡΟΣ 2: Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική

Περίληψη Ενότητας 2.2

2

Θέματα

- Πώς ορίζω τυπικά το πρόβλημα της συλλογιστικής;
- Υπάρχει ορθός και πλήρης αλγόριθμος για συλλογιστική στην Προτασιακή Λογική;
- Πώς επεκτείνεται ο αλγόριθμος για τη Λογική Πρώτης Τάξης;
- Πόσο πολύπλοκη είναι η συλλογιστική στην Λογική Πρώτης Τάξης;
- Μπορεί η υπολογιστική δισεπιλυσιμότητα να αντιμετωπιστεί;

Υλικό

- Διαφάνειες παρουσίασης
- Κεφάλαια 8, 9 Βιβλίου Βλαχάβα κα
- Κεφάλαιο 9 Βιβλίου Russel-Norvig
- Κεφάλαιο 4 Βιβλίου Brachman-Levesque

Μέρος 2 – Ενότητα 2

Η διαδικασία της συλλογιστικής

3

Επαγωγική διαδικασία

- Πρόβλημα

  Δεδομένης μίας γνώσης *KB*, χρειαζόμαστε μια τυπική διαδικασία για να μπορούμε να αποφανθούμε αν $KB \vDash \alpha$
  Επίσης, αν $\beta[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ μία φόρμουλα, να μπορούμε μέσω μίας τυπικής διαδικασίας να βρούμε τα $t_1, t_2, \ldots, t_n$ για τα οποία ισχύει $KB \vDash \beta[t_1, t_2, \ldots, t_n]$

- Προσέγγιση προβλήματος

  $KB \vDash \alpha$
  ανν $\vDash [(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \supset \alpha]$
  ανν $KB \cup \{\neg\alpha\}$ μη-ικανοποιήσιμη
  ανν $KB \cup \{\neg\alpha\} \vDash \neg$TRUE

Συλλογιστική στην Προτασιακή Λογική

4

Συζευκτική κανονική μορφή (CNF)

Κάθε φόρμουλα α μπορεί να μετατραπεί σε μία άλλη φόρμουλα α', η οποία είναι σύζευξη διαζεύξεων και για την οποία ισχύει $\vDash (\alpha \equiv \alpha')$

Θα λέμε τότε ότι οι α και α' είναι λογικά ισοδύναμες και ότι η α' βρίσκεται σε κανονική συζευκτική μορφή (conjunctive normal form – CNF)

Παράδειγμα

$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee \neg s \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$

Συνοπτική γραφή CNF

5

Διαζευκτικές προτάσεις

Διαζευκτική πρόταση (clause) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο (διάζευξη) από λεκτικά (literals), δηλαδή θετικά ή αρνητικά άτομα.

Φόρμουλα διαζευκτικών προτάσεων (clausal formula) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο (σύζευξη) διαζευκτικών προτάσεων.

Συμβολισμός

Αν ρ ένα λεκτικό, τότε με $\overline{\rho}$ συμβολίζουμε το συμπλήρωμά του, το οποίο ορίζεται από τις σχέσεις $\overline{p} = \neg p$ και $\overline{\neg p} = p$ για κάθε άτομο p

Θα χρησιμοποιούμε τα '{' και '}' ('[' και ']') για το συμβολισμό μιας φόρμουλας διαζευκτικών προτάσεων (διαζευκτικής πρότασης).

Παράδειγμα

$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee \neg s \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \quad \leftrightarrow \quad \{[p, \neg q], [q, r, \neg s, p], [\neg r, p]\}$

Μέρος 2 – Ενότητα 2

Μετατροπή σε CNF

6

Βήμα 1

Αντικαθιστούμε όλες τις συντομεύσεις $\supset$ και $\equiv$

Βήμα 2

Μετακινούμε την άρνηση $\neg$ προς το εσωτερικό της έκφρασης, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις: $\models \neg\neg\alpha \equiv \alpha, \models \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta), \models \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

Βήμα 3

Επιμερίζουμε τα $\wedge, \vee$ σύμφωνα με τις σχέσεις

$\models (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\beta \wedge \gamma) \vee \alpha) \equiv (\alpha \vee \beta \wedge (\alpha \vee \gamma))$

Βήμα 4

Απλοποιούμε σύμφωνα με τις σχέσεις

$\models (\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha \quad \models (\alpha \wedge \alpha) \equiv \alpha$

Μέρος 2 – Ενότητα 2

Κανόνας της ανάλυσης

7

Κανόνες συμπερασματολογίας (rules of inference)

Αξιώματα μέσω των οποίων μπορούμε να παράγουμε νέες φόρμουλες από άλλες.

Κανόνας της ανάλυσης

Αν στη γνώση μου υπάρχει μία πρόταση της μορφής $c_1 \cup \{\rho\}$ που περιέχει το λεκτικό ρ και μία πρόταση της μορφής $c_2 \cup \{\overline{\rho}\}$ που περιέχει το συμπλήρωμα του ρ, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε την πρόταση $c_1 \cup c_2$ την οποία θα ονομάζουμε *αναλυθέν* των αρχικών προτάσεων.

Παράδειγμα

Από τις προτάσεις $[w,p,q]$ και $[s,w,\neg p]$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει η $[w,s,q]$ αναλύοντας σε σχέση με το p. Οι προτάσεις $[p,q]$ και $[\neg p,\neg q]$ έχουν δύο αναλυθέντα: την $[q,\neg q]$ σε σχέση με το p και την $[p,\neg p]$ σε σχέση με το q.

Ανάλυση και συλλογιστική (1)

8

Παράγωγα ανάλυσης

Μία ακολουθία προτάσεων $c_1, c_2, \ldots, c$ είναι *αναλυτική παραγωγή* (resolution derivation) μιας πρότασης c από ένα σύνολο προτάσεων S όταν κάθε πρόταση c_i είναι ή στοιχείο του S ή αναλυθέν δύο προηγούμενων προτάσεων της παραγωγής. Γράφουμε $S \vdash c$ όταν υπάρχει παραγωγή του c από το S.

Σχέση ανάλυσης με συλλογιστική

Κάθε αναλυθέν δύο προτάσεων μίας βάσης γνώσης ικανοποιείται στη βάση γνώσης. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\{c_1 \cup \{\rho\}, c_2 \cup \{\overline{\rho}\}\} \vDash c_1 \cup c_2$$

Μπορούμε, επιπλέον, εύκολα να αποδείξουμε ότι αν $S \vdash c$ τότε $S \vDash c$. Ισχύει όμως το αντίστροφο;

Ανάλυση και συλλογιστική (2)

9

Παράδειγμα

Έστω ότι η γνώση S αποτελείται από τη μοναδική πρόταση $[\neg p]$ και έστω ότι η πρόταση c που ελέγχουμε είναι η $[\neg q, q]$. Τότε, ενώ προφανώς ισχύει ότι $S \models c$, είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει αναλυτική παραγωγή της c από την S. Άρα δεν ισχύει ότι $S \vdash c$.

Πληρότητα της ανάλυσης

Η συλλογιστική με βάση την ανάλυση είναι πλήρης στην εύρεση αντιφάσεων, δηλαδή ισχύει ότι:

$$S \models [] \text{ αν και μόνο αν } S \vdash []$$

Μέρος 2 – Ενότητα 2

Ανάλυση και συλλογιστική (3)

10

Αλγόριθμος συλλογιστικής με ανάλυση

Είσοδος: Ένα σύνολο S από διαζευκτικές προτάσεις (προτασιακής λογικής) σε συζευκτική κανονική μορφή

Έξοδος: *ικανοποιήσιμο* ή *μη-ικανοποιήσιμο*

Βήματα

1. Έλεγξε αν $[] \in S$. Αν ναι επέστρεψε *μη-ικανοποιήσιμο*.
2. Αν όχι, έλεγξε αν υπάρχουν στο S δύο προτάσεις οι οποίες να μπορούν να παράγουν μέσω ανάλυσης κάποια άλλη πρόταση που δεν υπάρχει ήδη στο S. Αν όχι, επέστρεψε *ικανοποιήσιμη*.
3. Αλλιώς, πρόσθεσε στο S το νέο αναλυθέν και συνέχισε από το Βήμα 1.

Μέρος 2 – Ενότητα 2

Ανάλυση και συλλογιστική (4)

Παράδειγμα

Βρέφος

Βρέφος ⊃ Παιδί

Παιδί ∧ Αρσενικό ⊃ Αγόρι

Νήπιο ⊃ Παιδί

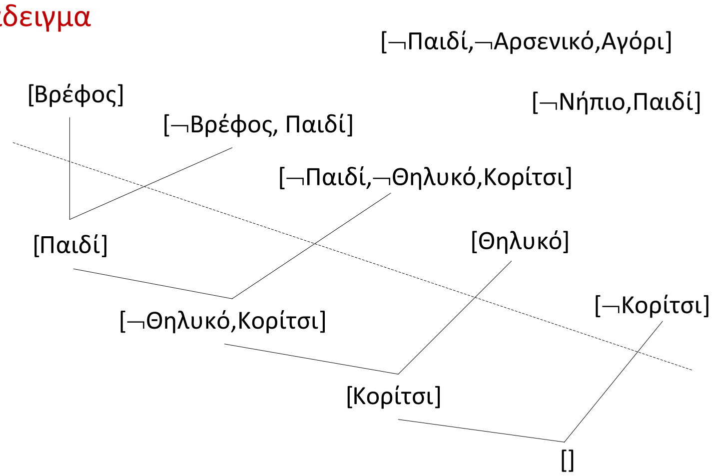
Παιδί ∧ Θηλυκό ⊃ Κορίτσι

Θηλυκό

Ισχύει ότι αν ένα άτομο πληροί τα παραπάνω αξιώματα είναι Κορίτσι,
δηλαδή ότι ΚΒ ⊨ Κορίτσι;

Ανάλυση και συλλογιστική (5)

Παράδειγμα



Ανάλυση στη Λογική Πρώτης Τάξης

13

Προσέγγιση

1. Αγνοούνται οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες και οι ισότητες (που απαιτούν αναφορά σε συγκεκριμένα αντικείμενα του κόσμου).
2. Επεκτείνεται η έννοια της συζευκτικής κανονικής μορφής και επανακαθορίζεται η μετατροπή σε CNF.
3. Οργανώνονται οι αντικαταστάσεις μεταβλητών.
4. Επανακαθορίζεται ο κανόνας της ανάλυσης ώστε να καλύπτει τη γενικευμένη μορφή CNF.
5. Εισάγονται τρόποι χειρισμού των υπαρξιακών ποσοδεικτών και της ισότητας.

Μετατροπή σε CNF (1)

14

Βήμα 1

Αντικαθιστούμε όλες τις συντομεύσεις $\supset$ και $\equiv$, όπως πριν

Βήμα 2

Μετακινούμε την άρνηση $\neg$ προς το εσωτερικό της έκφρασης, χρησιμοποιώντας επιπλέον τις σχέσεις: $\models \neg\forall x.\alpha \equiv \exists x.\neg\alpha$, $\models \neg\exists x.\alpha \equiv \forall x.\neg\alpha$

Βήμα 3

Αλλάζουμε τα ονόματα των μεταβλητών αν χρειάζεται, δίνοντάς τους διαφορετικά ονόματα, σύμφωνα με τις σχέσεις

$\models \forall y.\alpha \equiv \forall x.\alpha^y_x$ ·; $\models \exists y.\alpha \equiv \exists x.\alpha^y_x$ (το x δεν εμφανίζεται στην α)

Μετατροπή σε CNF (2)

15

Βήμα 4

Διαγράφουμε τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες (θα μελετηθούν σε επόμενη φάση)

Βήμα 5

Μετακινούμε τους καθολικούς ποσοδείκτες εκτός του εύρους των $\wedge$ και $\vee$, σύμφωνα με τις σχέσεις (θεωρώντας ότι το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην α):

$\models (\alpha \wedge \forall x.\beta) \equiv (\forall x.\beta \wedge \alpha) \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$

$\models (\alpha \vee \forall x.\beta) \equiv (\forall x.\beta \vee \alpha) \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$

Βήμα 6

Επιμερίζουμε τα $\wedge,\vee$ όπως προηγούμενα

Βήμα 7

Απλοποιούμε όπως προηγούμενα

Συνοπτική γραφή CNF

16

Μορφή διαζευτικών προτάσεων

Διαγράφουμε τους καθολικούς ποσοδείκτες.

Μένουμε με ένα σύνολο από διαζεύξεις λεκτικών της μορφής $P(t_1,t_2,...,t_n)$ ή $\neg P(t_1,t_2,...,t_n)$, όπου t_i όροι που περιέχουν σταθερές, μεταβλητές, συναρτήσεις κλπ.

Με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιούμε τα '{', '}', '[' και ']' για το συμβολισμό μιας φόρμουλας διαζευκτικών προτάσεων.

Παράδειγμα

$\forall x \forall y \big([P(x) \vee \neg R(\alpha, f(b,x))] \wedge Q(x,y)\big) \leftrightarrow$

$\{[P(x), \neg R(\alpha, f(b,x))], [Q(x,y)]\}$

Αντικαταστάσεις μεταβλητών (1)

17

Ορισμοί

Αντικατάσταση μεταβλητών (substitution) θ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ζευγών $\{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$, όπου x_i διακριτές μεταβλητές και t_i όροι.

Αν θ μία αντικατάσταση μεταβλητών και ρ ένα λεκτικό, τότε $\rho\theta$ είναι το λεκτικό που παίρνουμε από το ρ αν αντικαταστήσουμε όλα τα x_i με t_i.

Παράδειγμα

$$\theta = \{x/\alpha, y/g(x,b,z)\}$$
$$\rho = P(x,z,f(x,y))$$
$$\rho\theta = P(\alpha,z,f(\alpha,g(x,b,z)))$$

Αντικαταστάσεις μεταβλητών (2)

18

Επιπλέον συμβολισμοί και ορολογίες

Αν c διαζευκτική πρόταση, τότε $c\theta$ είναι η αντίστοιχη πρόταση που λαμβάνουμε με αντικατάσταση με βάση τη θ σε όλα τα λεκτικά.

Θα λέμε ότι ένας όρος, ένα λεκτικό ή μία διαζευκτική πρόταση είναι *βασικά* (ground) αν δεν περιέχουν μεταβλητές.

Θα λέμε ότι ένα λεκτικό ρ είναι *στιγμιότυπο* (instance) ενός άλλου ρ', για κάποια αντικατάσταση θ ανν $\rho = \rho'\theta$.

Ανάλυση στη ΛΠΤ

19

Παράδειγμα

Έστω οι προτάσεις:

$[P(x,a),\neg Q(x)]$ και $[\neg P(b,y),\neg R(b,f(y))]$.

Επειδή, υπονοείται ότι (για την αντικατάσταση $\theta=\{x/b,y/a\}$) έχουμε

$[P(b,a),\neg Q(b)]$ και $[\neg P(b,a),\neg R(b,f(a))]$,

το κατηγόρημα

$[\neg Q(b),\neg R(b,f(a))]$

είναι αναλυθέν των παραπάνω προτάσεων.

Κανόνας ανάλυσης στη ΛΠΤ

20

Έστω ότι στη γνώση υπάρχει μία πρόταση της μορφής $c_1\cup\{\rho_1\}$ που περιέχει το λεκτικό ρ_1 και μία πρόταση της μορφής $c_2\cup\{\overline{\rho}_2\}$ που περιέχει το συμπλήρωμα του ρ_2. Έστω επίσης ότι αλλάζουμε τα ονόματα όλων των μεταβλητών ώστε όλες οι προτάσεις να έχουν διακριτές μεταβλητές και υπάρχει μία αντικατάσταση για την οποία $\rho_1\theta=\rho_2\theta$. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε την πρόταση $(c_1\cup c_2)\theta$ την οποία θα ονομάζουμε *αναλυθέν* των αρχικών προτάσεων.

Επιπλέον, θα λέμε ότι η αντικατάσταση θ είναι ένας ενοποιητής (unifier) για τα δύο λεκτικά ρ_1 και ρ_2.

Παράδειγμα 1 (1)

21

Γνώση

$\forall x.$ΠροπτυχιακόςΦοιτητής(x) $\supset$ Φοιτητής(x)

$\forall x.$Φοιτητής(x) $\supset$ Εργατικός(x)

ΠροπτυχιακόςΦοιτητής(μαρία)

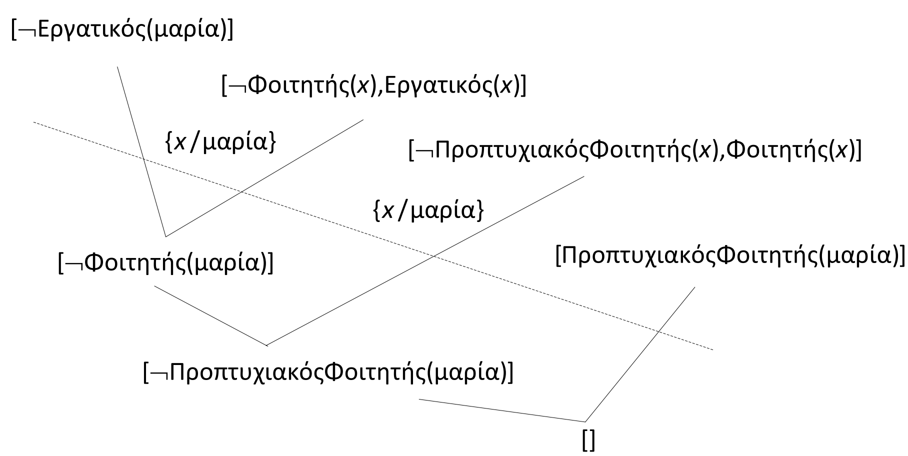
Ερώτημα: Ισχύει ότι KB $\models$ Εργατικός(μαρία);

Μορφή CNF:

{[¬ΠροπτυχιακόςΦοιτητής(x),Φοιτητής(x)],
[¬Φοιτητής(x),Εργατικός(x)],
[ΠροπτυχιακόςΦοιτητής(μαρία)],
[¬Εργατικός(μαρία)]}

Παράδειγμα 1 (2)

22



Παράδειγμα 2 (1)

23

Γνώση

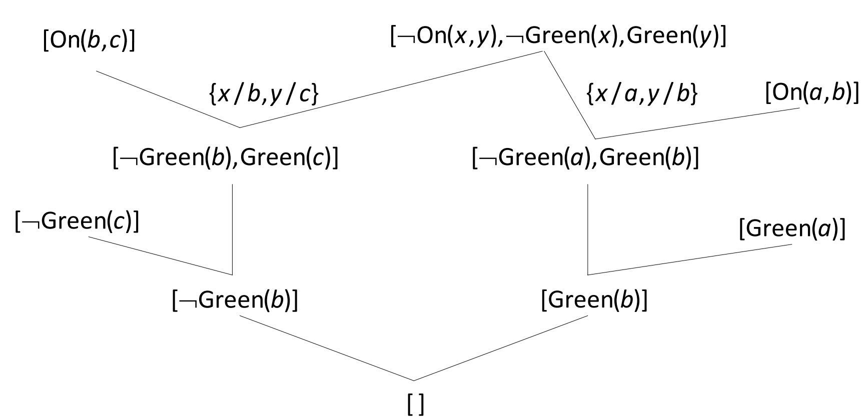
On(a,b)
On(b,c)
Green(a)
$\neg$Green(c)

Ερώτημα: Ισχύει ότι KB $\models \exists x.\exists y.\text{On}(x,y) \wedge \text{Green}(x) \wedge \neg\text{Green}(y)$;

Μορφή CNF:
{[On(a,b)],[On(b,c)],
[Green(a),$\neg$Green(c)],
[$\neg$On(x,y),$\neg$Green(x),Green(y)]}

Παράδειγμα 2 (2)

24



Εξαγωγή απαντήσεων σε ΛΠΤ

25

Πρόβλημα

Ο αλγόριθμος ανάλυσης σε ΛΠΤ, απαντάει σε ερώτημα του τύπου $\exists x.P(x)$ για την ικανοποίηση του αξιώματος, χωρίς να μας δίνει πληροφορία για το ποια άτομα (ποιες αντικαταστάσεις για το x) το ικανοποιούν.

Είναι δυνατόν χωρίς να αλλάξουμε τον αλγόριθμο να βρίσκουμε τα άτομα αυτά;

Λύση – (Διαδικασία εξαγωγής απαντήσεων)

Αντικαθιστούμε το ερώτημα $\exists x.c(x)$ με το $\exists x.c(x) \wedge \neg \mathrm{A}(x)$, όπου A ένα νέο κατηγόρημα που το ονομάζουμε *κατηγόρημα απάντησης*.

Τερματίζοντας τη διαδικασία της ανάλυσης το A θα περιέχει πιθανές απαντήσεις.

Μέρος 2 – Ενότητα 2

Παράδειγμα εξαγωγής απαντήσεων 1 (1)

26

Γνώση

Φοιτητής(γιάννης)

Φοιτητής(μαρία)

Χαρούμενος(μαρία)

Ερώτημα: Ισχύει ότι ΚΒ$\models \exists x.$Φοιτητής$(x) \wedge$ Χαρούμενος(x);

Μορφή CNF:

{[Φοιτητής(γιάννης)],
[Φοιτητής(μαρία)],
[Χαρούμενος(μαρία)],
[¬Φοιτητής(x),¬Χαρούμενος(x),$A(x)$]}

Μέρος 2 – Ενότητα 2

Παράδειγμα εξαγωγής απαντήσεων 1 (2)

27

[Φοιτητής(μαρία)]

[Χαρούμενος(γιάννης)] [¬Χαρούμενος(x),¬Φοιτητής(x),A(x)]

{x / γιάννης}

[Φοιτητής(γιάννης)]

[¬Φοιτητής(γιάννης),A(γιάννης)]

[A(γιάννης)]

Παράδειγμα εξαγωγής απαντήσεων 2 (1)

28

Γνώση

On(a,b)
On(b,c)
Green(a)
¬Green(c)

Ερώτημα: Ισχύει ότι KB ⊨ $\exists x.\exists y.\mathrm{On}(x,y) \land \mathrm{Green}(x) \land \neg\mathrm{Green}(y)$;

Μορφή CNF:

{[On(a,b)],[On(b,c)],
[Green(a),¬Green(c)],
[¬On(x,y),¬Green(x),Green(y),A(x,y)]}

Παράδειγμα εξαγωγής απαντήσεων 2 (2)

$[\mathrm{On}(b,c)]$ $\quad$ $[\neg\mathrm{On}(x,y), \neg\mathrm{Green}(x), \mathrm{Green}(y), A(x,y)]$

$\{x/b, y/c\}$ $\quad$ $\{x/a, y/b\}$ $\quad$ $[\mathrm{On}(a,b)]$

$[\neg\mathrm{Green}(b), \mathrm{Green}(c), A(b,c)]$ $\quad$ $[\neg\mathrm{Green}(a), \mathrm{Green}(b), A(a,b)]$

$[\neg\mathrm{Green}(c)]$ $\quad$ $[\mathrm{Green}(a)]$

$[\neg\mathrm{Green}(b), A(b,c)]$ $\quad$ $[\mathrm{Green}(b), A(a,b)]$

$[A(a,b), A(b,c)]$

Χειρισμός υπαρξιακών ποσοδεικτών (1)

Πρόβλημα

Ο αλγόριθμος ανάλυσης σε ΛΠΤ, δεν χειρίζεται προτάσεις της μορφής $\exists x \forall y \exists z. P(x,y,z)$ διότι δεν μπορούν να μετατραπούν σε CNF.

Λύση – (Διαδικασία skolemisation)

Κανόνας 1. Αν μία μεταβλητή είναι περιορισμένη από υπαρξιακό ποσοδείκτη που δεν είναι στο εύρος κάποιου καθολικού, τότε αντικατέστησέ την με μία σταθερά που δεν εμφανίζεται στη γνώση (σταθερά Skolem).

Κανόνας 2. Αν μία μεταβλητή είναι περιορισμένη από υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists x$ που είναι στο εύρος κάποιου καθολικού $\forall y$, τότε αντικατέστησέ την με μία συνάρτηση $f(y)$ που δεν εμφανίζεται στη γνώση (συνάρτηση Skolem).

Χειρισμός υπαρξιακών ποσοδεικτών (2)

31

Παράδειγμα

Αν έχουμε την πρόταση $\exists x \forall y \exists z.P(x,y,z)$ χρησιμοποιούμε στον αλγόριθμο συλλογιστικής την πρόταση $\forall y.P(a,y,f(y))$, όπου a και f μία νέα σταθερά και μία νέα συνάρτηση, αντίστοιχα.

Skolemisation και συλλογιστική

Αν α η αρχική φόρμουλα και α' η αντίστοιχη φόρμουλα μετά το skolemisation, τότε δεν ισχύει ότι $\models (\alpha \equiv \alpha')$, διότι για παράδειγμα το $\exists x.P(x)$ δεν είναι λογικά ισοδύναμο με το $P(a)$.

Ισχύει όμως ότι α ικανοποιήσιμη ανν α' ικανοποιήσιμη (αυτό είναι που χρειαζόμαστε για την ορθότητα της ανάλυσης).

Χειρισμός ισότητας (1)

32

Πρόβλημα

Ο αλγόριθμος ανάλυσης σε ΛΠΤ, δεν χειρίζεται προτάσεις στις οποίες εμπλέκεται ισότητα, διότι και να τη χειριστούμε σαν ένα απλό κατηγόρημα θα χάσουμε μη-ικανοποιησιμότητες της μορφής $\{a=b, b=c, a\neq c\}$.

Λύση

Χειριζόμαστε την ισότητα σαν ένα απλό κατηγόρημα, προσθέτοντας στη γνώση μας τα παρακάτω αξιώματα (σε CNF):

ανακλαστικότητα: $\forall x.x=x$

συμμετρικότητα: $\forall x \forall y.x=y \supset y=x$

μεταβατικότητα: $\forall x \forall y \forall z.x=y \wedge y=z \supset x=z$

Χειρισμός ισότητας (2)

33

Λύση (συνέχεια)

Αντικατάσταση για συναρτήσεις:

για κάθε συνάρτηση f τάξης n προσθέτουμε ένα αξίωμα

$$\forall x_1 \forall y_1 \cdots \forall x_n \forall y_n . x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \supset$$
$$f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n)$$

Αντικατάσταση για κατηγορήματα:

για κάθε κατηγόρημα P τάξης n προσθέτουμε ένα αξίωμα

$$\forall x_1 \forall y_1 \cdots \forall x_n \forall y_n . x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \supset$$
$$P(x_1,\ldots,x_n) = P(y_1,\ldots,y_n)$$

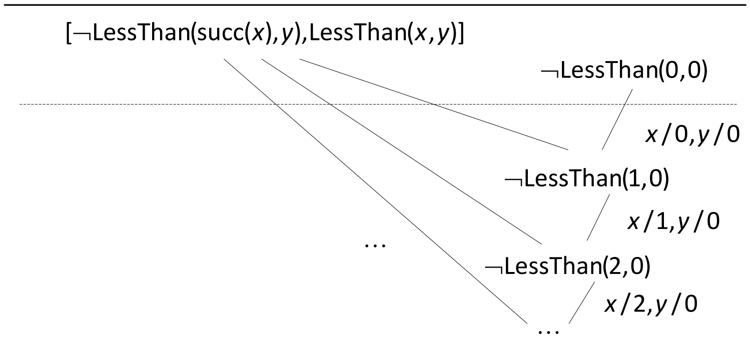
Αποδεικνύεται ότι αν προσθέσουμε στη γνώση όλα τα παραπάνω αξιώματα, τότε η ισότητα μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα απλό κατηγόρημα.

Πολυπλοκότητα συλλογιστικής ΛΠΤ (1)

34

Παράδειγμα

$KB: \forall x \forall y.\text{LessThan}(\text{succ}(x), y) \supset \text{LessThan}(x, y)$
Query : ?LessThan(0,0)



Πολυπλοκότητα συλλογιστικής ΛΠΤ (2)

35

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν το σύνολο των προτάσεων που ελέγχουμε είναι μη-ικανοποιήσιμο, τότε κάποιο κλαδί θα περιέχει την κενή πρόταση, έστω κι αν μπορεί να υπάρχουν ενδεχομένως κάποια κλαδιά άπειρου μήκους. Συνεπώς, μέσω μίας διαδικασίας αναζήτησης κατά-πλάτος θα μπορούσαμε ενδεχομένως να βρούμε τη λύση.
- Αν όμως το σύνολο των προτάσεων που ελέγχουμε είναι ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει περίπτωση να ακολουθήσουμε ένα άπειρο μονοπάτι, ψάχνοντας για την κενή πρόταση (με όποιο τρόπο και να την αναζητούμε).
- Το χειρότερο όμως είναι, ότι δεν υπάρχει τρόπος να γνωσίζουμε ότι βρισκόμαστε σε άπειρη διαδικασία, ούτε καν κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου...

Προσέγγιση Herbrand (1)

36

Αιτία μη αποφανσιμότητας

Ενώ η Προτασιακή Λογική είναι αποφάνσιμη, η ΛΠΤ δεν είναι.

- Μήπως αυτό οφείλεται στις μεταβλητές;
- Υπάρχει τρόπος να τις διαγράψουμε πριν τη διαδικασία συλλογιστικής;

Ορισμοί

Έστω S ένα σύνολο από προτάσεις. *Πεδίο Herbrand* του S είναι το σύνολο όλων των βασικών όρων του S.

Βάση Herbrand του S είναι το σύνολο όλων των βασικών προτάσεων $c\theta$ όπου $c \in S$ και θ αντικατάσταση όρων στο πεδίο Herbrand του S.

Παράδειγμα

Αν το S περιέχει μόνο τις σταθερές a και b και τη συνάρτηση (τάξης 1) f, το πεδίο Herbrand του S είναι το $\{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots\}$.

Προσέγγιση Herbrand

37

Θεώρημα Herbrand

Ένα σύνολο προτάσεων ΛΠΤ είναι ικανοποιήσιμο ανν η αντίστοιχη βάση Herbrand είναι ικανοποιήσιμη.

Σημαντικό!

Το πρόβλημα της μη-αποφανσιμότητας δεν είναι αυτές καθ'εαυτές οι μεταβλητές αλλά ο απειρισμός της βάσης Herbrand.

Συνεπώς

Για να εξασφαλίσουμε την αποφανσιμότητα αρκεί να διατηρούμε πεπερασμένο το σύνολο των σταθερών και να μην χρησιμοποιούμε συναρτήσεις.

Δισεπιλυσιμότητα στην ΠΛ

38

Αποδεικνύεται ότι:

- Ο αλγόριθμος της ανάλυσης για την Προτασιακή Λογική είναι εκθετικής πολυπλοκότητας (Haken 1985).
- Το πρόβλημα της συλλογιστικής στην Προτασιακή Λογική είναι NP-complete (συμβατό με το προηγούμενο).
- Το χειρότερο όμως είναι ότι ο αλγόριθμος της ανάλυσης για την Προτασιακή Λογική, είναι και πρακτικά υψηλής πολυπλοκότητας, ή τουλάχιστον δεν είναι τόσο γρήγορος όσο θα περιμέναμε για την εκφραστικότητα που έχουμε.

Συμπέρασμα

Είναι απαραίτητη η μείωση της εκφραστικότητας της ΛΠΤ προς κατευθύνσεις τέτοιες που να είναι δυνατόν να αναπτυχθούν πρακτικά συστήματα συλλογιστικής.

Επίλογος

Βασικά συμπεράσματα

- Η συλλογιστική στη ΛΠΤ είναι χαρακτηρίζεται από μη αποφανσιμότητα
- Η συλλογιστική στην Προτασιακή Λογική χαρακτηρίζεται από υπολογιστική δισεπιλυσιμότητα
- Ενώ η μη-αποφανσιμότητα οφείλεται στον απειρισμό του πεδίου, η δισεπιλυσιμότητα φαίνεται να οφείλεται στην εκφραστικότητα της γλώσσας

Ανοικτά θέματα

- Βελτιώσεις του αλγορίθμου ανάλυσης για Λογικής Πρώτης Τάξης οι οποίες οδηγούν σε καλύτερη πρακτική πολυπλοκότητα
- Εναλακτικοί αλγόριθμοι για συλλογιστική σε ΛΠΤ
- Υποσύνολα Λογικής Πρώτης Τάξης τα οποία είναι πιο εύκολα επιλύσιμα, παραμένοντας όμως εκφραστικά για να μπορούν να αναπαραστήσουν πολύπλοκους κόσμους