АНАЛИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЕТЕЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

П.А. Рахман

Введение

В последние три десятилетия наблюдается бурное развитие информационных технологий и их внедрение в самые различные сферы деятельности человека, и сети передачи данных стали неотъемлемой частью жизни людей, без которой практически уже немыслим информационный обмен. В такой ситуации анализ технических характеристик существующих сетей передачи данных и проектирование новых сетей с учетом заданных характеристик была и остается одной из наиболее актуальных задач в области информационных технологий.

Помимо таких технических характеристик сетей, как: производительность, латентность, масштабируемость, степень прозрачности для конечных пользователей, также крайне важными характеристиками являются комплексные показатели надежности такие как: коэффициент готовности и среднее время недоступности в год. От показателей надежности напрямую зависит доступность информационных сервисов для пользователей. Кроме того, от надежности сети косвенно также зависят производительность и латентность сети, поскольку возникновение сбоев и отказов в сети влечет к необходимости повторной передачи блоков данных, а это в итоге ведет к увеличению задержек при передаче и уменьшению объемов передаваемых данных в единицу времени. Наконец, от надежности сети также косвенно зависит безопасность функционирования систем управления какими-либо объектами, в которых несвоевременная реакция (из-за отказов и сбоев в сети передачи данных) системы управления на какие-либо критические изменения в объекте управления могут привести к серьезным последствиям. В такой ситуации анализ показателей надежности сетей передачи данных является особенно актуальной проблемой.

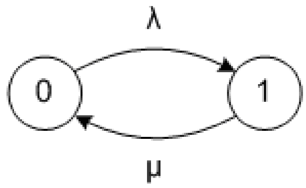
В рамках данной статьи автор рассматривает применение теоретической модели надежности восстанавливаемых систем [1, 2], состоящих из одной или нескольких групп однородных объектов, на несколько типовых топологий локальных сетей и на магистральные сети с задаваемой топологией с целью анализа коэффициента готовности сетей. В основе модели лежит математический аппарат теории вероятностей [3]. Для максимального упрощения конечных формул для расчета коэффициента готовности автором делается допущение о полной независимости объектов как внутри групп, так и между группами, как по отказам, так и по восстановлениям. Кроме того, также для упрощения анализа не учитывается возможность отказов самих каналов связи в сетях передачи данных.

В первой части статьи рассматриваются модели надежности восстанавливаемых систем с конечными формулами для расчета вероятностей всех состояний систем. Во второй части рассматриваются несколько простейших видов топологий современных локальных сетей [5, 6] с некоторыми топологическими допущениями (достаточно распространенными на практике), существенно упрощающими итоговые формулы расчета коэффициента готовности этих сетей. Наконец, в третьей части рассматриваются магистральные сети [5, 7] с произвольно задаваемой топологией, и приведена методика расчета коэффициента готовности, использующая в своей основе алгоритмы комбинаторики и теории графов [4]. Для каждой из рассматриваемых топологий сетей приводятся примеры расчета коэффициента готовности.

1. Марковские модели надежности восстанавливаемых систем

1.1. Марковская модель восстанавливаемого объекта

Пусть имеется восстанавливаемый объект с заданными интенсивностями отказов λ и восстановления μ. Тогда марковская модель надежности объекта:



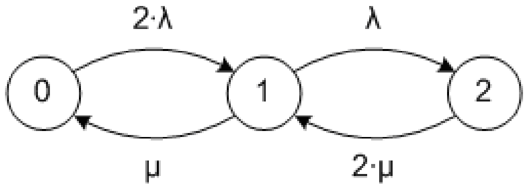
$$\begin{cases} P_0(0)=1; \quad P_1(0)=0 \\ P_0(t)+P_1(t)=1 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda\cdot P_0(t)+\mu\cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt}=\lambda\cdot P_0(t)-\mu\cdot P_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0(t)=\dfrac{1}{1+\rho}\cdot\left(1+\rho\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right) \\ P_1(t)=\dfrac{\rho}{1+\rho}\cdot\left(1-e^{-\alpha\cdot t}\right) \end{cases}$$

$$\rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu;$$

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t)=\frac{1}{1+\rho}; \quad \lim_{t\to\infty} P_1(t)=\frac{\rho}{1+\rho};$$

1.2. Марковская модель пары независимых восстанавливаемых объектов

Пусть имеется пара восстанавливаемых объектов с одинаковыми интенсивностями отказов λ и восстановления μ. Оба объекта могут независимо отказывать и независимо восстанавливаться без каких-либо ограничений. Тогда марковская модель надежности объекта:



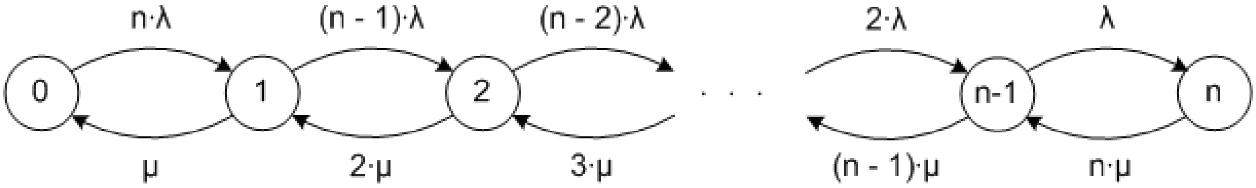
$$\begin{cases} P_0(0)=1; \quad P_1(0)=0; \quad P_2(0)=0 \\ P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)=1 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt}=-2\cdot\lambda\cdot P_0(t)+\mu\cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt}=2\cdot\lambda\cdot P_0(t)-(\lambda+\mu)\cdot P_1(t)+2\cdot\mu\cdot P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt}=\lambda\cdot P_1(t)-2\cdot\mu\cdot P_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0(t)=\dfrac{1}{(1+\rho)^2}\cdot\left(1+\rho\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right)^2 \\ P_1(t)=\dfrac{2\cdot\rho}{(1+\rho)^2}\cdot\left(1-e^{-\alpha\cdot t}\right)\cdot\left(1+\rho\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right) \\ P_2(t)=\dfrac{\rho^2}{(1+\rho)^2}\cdot\left(1-e^{-\alpha\cdot t}\right)^2 \end{cases}$$

$$\rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu;$$

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t)=\frac{1}{(1+\rho)^2}; \quad \lim_{t\to\infty} P_1(t)=\frac{2\cdot\rho}{(1+\rho)^2}; \quad \lim_{t\to\infty} P_2(t)=\frac{\rho^2}{(1+\rho)^2};$$

1.3. Марковская модель группы независимых восстанавливаемых объектов

Пусть имеется n восстанавливаемых объектов с одинаковыми интенсивностями отказов λ и восстановления μ. Объекты могут независимо отказывать и независимо восстанавливаться без каких-либо ограничений. Тогда марковская модель надежности объекта:



$$\begin{cases} P_0(0)=1; \quad P_1(0)=0; \quad \ldots \quad P_n(0)=0 \\ \sum_{i=0}^{n} P_i(t)=1 \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -n\cdot\lambda\cdot P_0(t)+\mu\cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = n\cdot\lambda\cdot P_0(t)-(\mu+(n-1)\cdot\lambda)\cdot P_1(t)+2\cdot\mu\cdot P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = (n-1)\cdot\lambda\cdot P_1(t)-(2\cdot\mu+(n-2)\cdot\lambda)\cdot P_2(t)+3\cdot\mu\cdot P_3(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dP_{n-1}(t)}{dt} = 2\cdot\lambda\cdot P_{n-2}(t)-((n-1)\cdot\mu+\lambda)\cdot P_{n-1}(t)+n\cdot\mu\cdot P_n(t) \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda\cdot P_{n-1}(t)-n\cdot\mu\cdot P_n(t) \end{cases}$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений в аналитическом виде (выведено автором путем индуктивных обобщений) выглядит следующим образом:

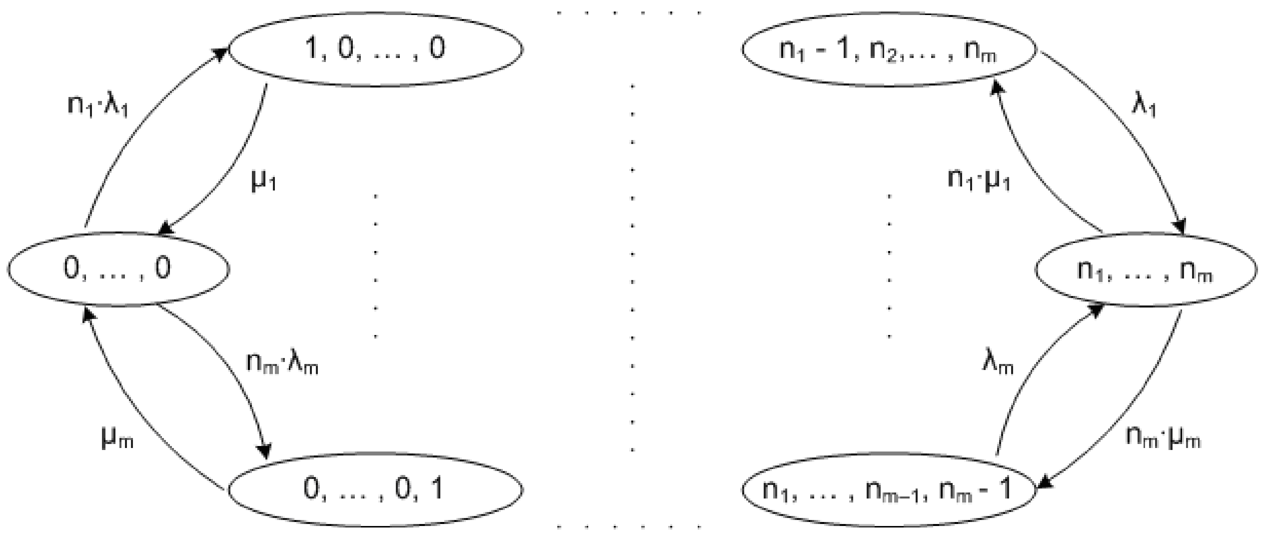
$$P_i(t) = C_n^i \cdot \frac{\rho^i}{(1+\rho)^n}\cdot\left(1-e^{-\alpha\cdot t}\right)^i\cdot\left(1+\rho\cdot e^{-\alpha\cdot t}\right)^{n-i}$$
$$i=0\ldots n \qquad (1.1)$$
$$\rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu;$$

При $t\to\infty$ марковский процесс становится установившимся, и вероятности уже не меняются с течением времени:

$$\lim_{t\to\infty} P_i(t) = C_n^i\cdot\frac{\rho^i}{(1+\rho)^n}$$
$$i=0\ldots n \qquad (1.2)$$
$$\rho=\lambda/\mu$$

1.4. Марковская модель множества групп независимых объектов

Пусть имеется m независимых групп восстанавливаемых объектов с заданными количествами объектов в группах: $n_1,\ldots,n_m$. Объекты внутри группы $l=1\ldots m$ имеют одинаковые интенсивности отказов λ_l и одинаковые интенсивности восстановления μ_l. Объекты могут независимо отказывать и независимо восстанавливаться без каких-либо ограничений. Тогда марковская модель надежности объекта:



Общее решение модели (системы дифференциальных уравнений) в аналитическом виде получается путем прямого произведения соответствующих вероятностей внутри отдельных групп (поскольку группы независимы с точки зрения модели надежности):

$$P_{j_1,\ldots,j_m}(t)=\prod_{l=1}^{m}\left(C_{n_l}^{j_l}\cdot\frac{\rho_l^{j_l}}{\left(1+\rho_l\right)^{n_l}}\cdot\left(1-e^{-\alpha_l\cdot t}\right)^{j_l}\cdot\left(1+\rho_l\cdot e^{-\alpha_l\cdot t}\right)^{n_l-j_l}\right)$$

$$j_l=0\ldots n_l\,;\quad l=1\ldots m \tag{1.3}$$

$$\rho_l=\lambda_l/\mu_l\,;\quad \alpha_l=\lambda_l+\mu_l\,;$$

$$P_{0,\ldots,0}(0)=1\,;\qquad \sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\ldots\sum_{j_m=0}^{n_m}P_{j_1,\ldots,j_m}(t)=1\,;$$

При $t\to\infty$ марковский процесс становится установившимся, и вероятности уже не меняются с течением времени:

$$\lim_{t\to\infty}\left(P_{j_1,\ldots,j_m}(t)\right)=\prod_{l=1}^{m}\left(C_{n_l}^{j_l}\cdot\frac{\rho_l^{j_l}}{\left(1+\rho_l\right)^{n_l}}\right)$$

$$j_l=0\ldots n_l\,;\quad l=1\ldots m \tag{1.4}$$

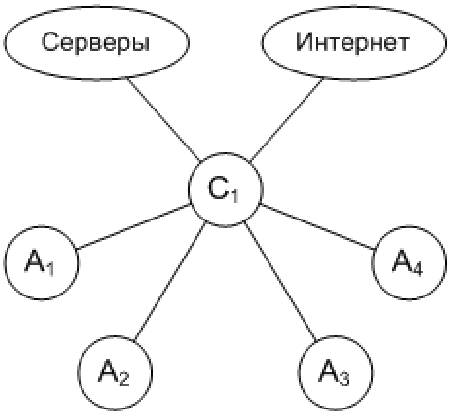
$$\rho_l=\lambda_l/\mu_l$$

2. Анализ комплексных показателей надежности локальных сетей

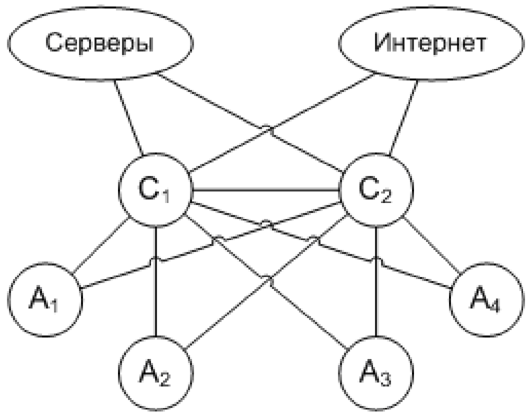
2.1. Двухуровневые локальные сети с выделенным ядром

- Сеть содержит $r \geq 1$ коммутаторов ядра (Core) и $k \geq 1$ коммутаторов доступа (Access).
- Серверы локальной сети и Интернет доступны через каждый коммутатор ядра.
- Коммутаторы ядра связаны между собой каждый с каждым. Коммутаторы доступа между собой не связаны, но они связаны с каждым коммутатором ядра.
- Отказ любого коммутатора доступа, также как и нарушение связи любого коммутатора доступа с серверами или Интернет, считается отказом всей сети целом.
- Коммутаторы ядра имеют интенсивность отказов λ_C и восстановления μ_C, коммутаторы доступа имеют интенсивность отказов λ_A и восстановления μ_A.

Двухуровневая сеть из r = 1 коммутаторов ядра и k = 4 коммутаторов доступа.



Двухуровневая сеть из r = 2 коммутаторов ядра и k = 4 коммутаторов доступа.



В двухуровневой сети можно выделить две независимые с точки зрения модели надежности группы объектов – группа коммутаторов ядра и группа коммутаторов доступа.

Что касается группы коммутаторов ядра, то поскольку каждый из них связан с каждым из коммутаторов доступа и каждый связан с серверами и Интернет, то сеть считается работоспособной при первом условии, что хотя бы один коммутатор в группе коммутаторов ядра работоспособен. Вероятность этого равна сумме вероятностей от нулевого состояния до предпоследнего состояния в марковской модели надежности группы из r объектов:

$$P_{core}(t) = \sum_{i=0}^{r-1} P_i(t) = 1 - P_r(t) = 1 - \frac{\rho_C{}^r}{(1+\rho_C)^r} \cdot \left(1 - e^{-\alpha_C \cdot t}\right)^r$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C \ ; \quad \alpha_C = \lambda_C + \mu_C \ ;$$

Поскольку отказ любого коммутатора доступа считается отказом всей сети в целом, то очевидно, сеть считается работоспособной при втором условии, что все k коммутаторов в группе коммутаторов доступа работоспособны. Вероятность этого равна вероятности нулевого состояния в марковской модели надежности группы из k объектов:

$$P_{access}(t) = P_0(t) = \frac{1}{(1+\rho_A)^k} \cdot \left(1 + \rho_A \cdot e^{-\alpha_A \cdot t}\right)^k$$

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A \ ; \quad \alpha_A = \lambda_A + \mu_A \ ;$$

Объединим оба условия работоспособности сети, перемножив их вероятности, и получим окончательную формулу для вероятности работоспособности двухуровневой сети в целом:

$$P_{net}(t) = \left(1 - \left(\frac{\rho_C}{1+\rho_C} \cdot \left(1 - e^{-\alpha_C \cdot t}\right)\right)^r\right) \cdot \left(\frac{1+\rho_A \cdot e^{-\alpha_A \cdot t}}{1+\rho_A}\right)^k$$

Тогда, стационарный коэффициент готовности двухуровневой сети:

$$K_{net} = \lim_{t \to \infty} P_{net}(t) = \frac{(1+\rho_C)^r - (\rho_C)^r}{(1+\rho_C)^r \cdot (1+\rho_A)^k} \qquad (2)$$

<u>Пример</u>. Пусть имеется двухуровневая сеть из k = 6 коммутаторов доступа и r = 1 коммутатора ядра. С целью повышения отказоустойчивости сети был внедрен второй коммутатор ядра (r = 2).

Интенсивность отказов коммутатора ядра $\lambda_C = 1/8760$ часов$^{-1}$ (в среднем коммутатор отказывает раз в год), а интенсивность восстановления $\mu_C = 1/24$ часов$^{-1}$ (в среднем восстановление коммутатора занимает одни сутки). Интенсивность отказов коммутатора доступа $\lambda_A = 1/8760$ часов$^{-1}$ (в среднем коммутатор отказывает раз в год), а интенсивность восстановления $\mu_A = 1$ часов$^{-1}$ (в среднем восстановление коммутатора занимает один час).

Оценить коэффициент готовности сети до и после ее модернизации.

<u>Решение</u>. Имеем $\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 1/365$ и $\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 1/8760$.

Тогда коэффициент готовности до модернизации сети (r = 1, k = 6) составит:

$$K_{net} = \frac{(1+\rho_C)^1 - (\rho_C)^1}{(1+\rho_C)^1 \cdot (1+\rho_A)^6} = \frac{1}{(1+1/365)^1 \cdot (1+1/8760)^6} \approx 0{,}996585$$

А после модернизации сети (r = 2, k = 6) коэффициент готовности составит:

$$K_{net} = \frac{(1+\rho_C)^2 - (\rho_C)^2}{(1+\rho_C)^2 \cdot (1+\rho_A)^6} = \frac{1+2\cdot\rho_C}{(1+\rho_C)^2 \cdot (1+\rho_A)^6} = \frac{1+2\cdot(1/365)}{(1+1/365)^2 \cdot (1+1/8760)^6} \approx 0{,}999308$$

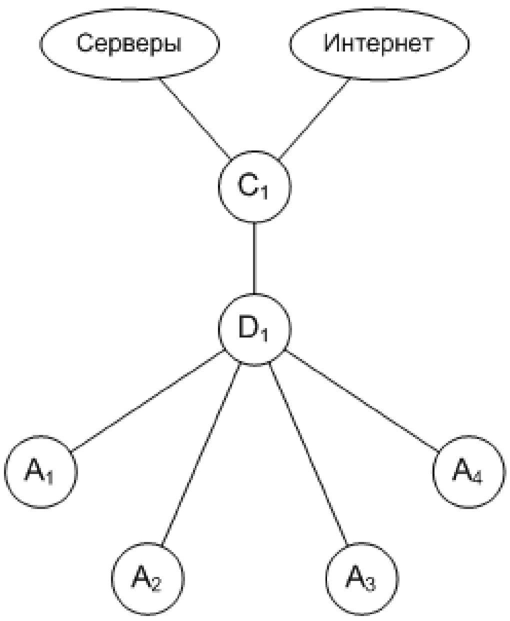
На первый взгляд прирост коэффициента готовности сети незначителен, но если оценить среднее количество часов недоступности сети в год (8760 часов) по формуле $8760 \cdot (1 - K_{net})$, то до модернизации имеем около **30 часов** недоступности в год, а после – около **6 часов** в год.

2.2. Трехуровневые локальные сети с ядром и одной подгруппой распределения

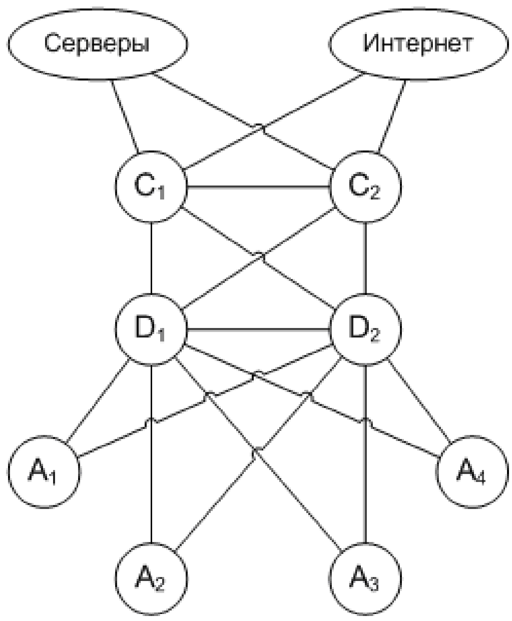
- Сеть содержит $r \geq 1$ коммутаторов ядра (Core), $s \geq 1$ коммутаторов распределения (Distribution) и $k \geq 1$ коммутаторов уровня доступа (Access).
- Серверы локальной сети и Интернет доступны через каждый коммутатор ядра.
- Коммутаторы ядра и коммутаторы распределения связаны между собой каждый с каждым. Коммутаторы доступа между собой не связаны, но они связаны с каждым коммутатором распределения.
- Отказ любого коммутатора доступа, также как и нарушение связи любого коммутатора доступа с серверами или Интернет, считается отказом всей сети целом.

- Коммутаторы ядра имеют интенсивность отказов λ_C и восстановления μ_C, коммутаторы распределения имеют интенсивность отказов λ_D и восстановления μ_D, коммутаторы доступа имеют интенсивность отказов λ_A и восстановления μ_A.

Трехуровневая сеть из r = 1 коммутаторов ядра, s = 1 коммутаторов распределения, k = 4 коммутаторов уровня доступа.



Трехуровневая сеть из r = 2 коммутаторов ядра, s = 2 коммутаторов распределения, k = 4 коммутаторов уровня доступа.



В трехуровневой сети можно выделить три независимые с точки зрения модели надежности группы объектов – группа коммутаторов ядра, группа коммутаторов распределения и группа коммутаторов уровня доступа.

Что касается группы коммутаторов ядра, то поскольку каждый из них связан с каждым с коммутатором распределения и каждый связан с серверами и Интернет, то сеть считается работоспособной при первом условии, что хотя бы один коммутатор в группе коммутаторов ядра работоспособен. Вероятность этого равна сумме вероятностей от нулевого состояния до предпоследнего состояния в марковской модели надежности группы из r объектов:

$$P_{core}(t) = \sum_{i=0}^{r-1} P_i(t) = 1 - P_r(t) = 1 - \frac{\rho_C{}^r}{(1+\rho_C)^r} \cdot \left(1 - e^{-\alpha_C \cdot t}\right)^r$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C \; ; \quad \alpha_C = \lambda_C + \mu_C \; ;$$

Что касается группы коммутаторов распределения, то поскольку каждый из них связан с каждым с коммутатором ядра и с каждым коммутатором уровня доступа, то сеть считается работоспособной при втором условии, что хотя бы один коммутатор в группе коммутаторов распределения работоспособен. Вероятность этого равна сумме вероятностей от нулевого состояния до предпоследнего состояния в марковской модели надежности группы из s объектов:

$$P_{distrib}(t) = \sum_{i=0}^{s-1} P_i(t) = 1 - P_s(t) = 1 - \frac{\rho_D{}^s}{(1+\rho_D)^s} \cdot \left(1 - e^{-\alpha_D \cdot t}\right)^s$$

$$\rho_D = \lambda_D / \mu_D \; ; \quad \alpha_D = \lambda_D + \mu_D \; ;$$

Наконец, поскольку отказ любого коммутатора доступа считается отказом всей сети в целом, то очевидно, сеть считается работоспособной при третьем условии, что все k коммутаторов в группе коммутаторов доступа работоспособны. Вероятность этого равна вероятности нулевого состояния в марковской модели надежности группы из k объектов:

$$P_{access}(t) = P_0(t) = \frac{1}{(1+\rho_A)^k} \cdot \left(1 + \rho_A \cdot e^{-\alpha_A \cdot t}\right)^k$$

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A \, ; \quad \alpha_A = \lambda_A + \mu_A \, ;$$

Объединим три условия работоспособности сети, перемножив их вероятности, и получим окончательную формулу для вероятности работоспособности двухуровневой сети в целом:

$$P_{net}(t) = \left(1 - \left(\frac{\rho_C}{1+\rho_C} \cdot \left(1 - e^{-\alpha_C \cdot t}\right)\right)^r\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho_D}{1+\rho_D} \cdot \left(1 - e^{-\alpha_D \cdot t}\right)\right)^s\right) \cdot \left(\frac{1 + \rho_A \cdot e^{-\alpha_A \cdot t}}{1+\rho_A}\right)^k$$

Тогда, стационарный коэффициент готовности трехуровневой сети:

$$K_{net} = \lim_{t \to \infty} P_{net}(t) = \frac{\left((1+\rho_C)^r - (\rho_C)^r\right) \cdot \left((1+\rho_D)^s - (\rho_D)^s\right)}{(1+\rho_C)^r \cdot (1+\rho_D)^s \cdot (1+\rho_A)^k} \qquad (3)$$

Пример. Пусть имеется двухуровневая сеть из k = 6 коммутаторов доступа, s = 1 коммутатора распределения и r = 1 коммутатора ядра. С целью повышения отказоустойчивости сети был внедрен второй коммутатор ядра (r = 2) и второй коммутатор распределения (s = 2).

Интенсивность отказов коммутатора ядра $\lambda_C = 1/8760$ часов$^{-1}$, а интенсивность восстановления $\mu_C = 1/24$ часов$^{-1}$. Интенсивность отказов коммутатора распределения $\lambda_D = 1/8760$ часов$^{-1}$, а интенсивность восстановления $\mu_D = 1/6$ часов$^{-1}$. Интенсивность отказов коммутатора доступа $\lambda_A = 1/8760$ часов$^{-1}$, а интенсивность восстановления $\mu_A = 1$ часов$^{-1}$.

Оценить коэффициент готовности сети до и после ее модернизации.

Решение. Имеем $\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 1/365$, $\rho_D = \lambda_D / \mu_D = 1/1460$ и $\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 1/8760$.

Тогда коэффициент готовности до модернизации сети (r = 1, s = 1, k = 6) составит:

$$K_{net} = \frac{1}{(1+\rho_C)^1 \cdot (1+\rho_D)^1 \cdot (1+\rho_A)^6} = \frac{1}{(1+1/365)^1 \cdot (1+1/1460)^1 \cdot (1+1/8760)^6} \approx 0{,}995903$$

А после модернизации сети (r = 2, s = 2, k = 6) коэффициент готовности составит:

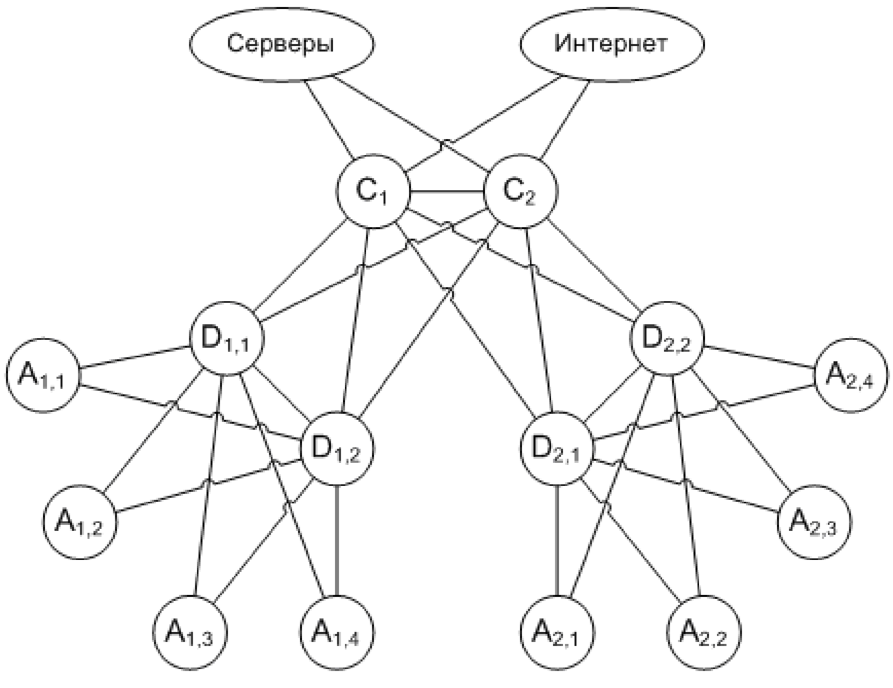
$$K_{net} = \frac{(1+2\cdot\rho_C)\cdot(1+2\cdot\rho_D)}{(1+\rho_C)^2 \cdot (1+\rho_D)^2 \cdot (1+\rho_A)^6} = \frac{(1+2\cdot(1/365))\cdot(1+2\cdot(1/1460))}{(1+1/365)^2 \cdot (1+1/1460)^2 \cdot (1+1/8760)^6} \approx 0{,}999307$$

На первый взгляд прирост коэффициента готовности сети незначителен, но если оценить среднее количество часов недоступности сети в год (8760 часов) по формуле $8760 \cdot (1 - K_{net})$, то до модернизации имеем около **36 часов** недоступности в год, а после – около **6 часов** в год.

2.3. Трехуровневые локальные сети с ядром и с подгруппами распределения

- Сеть содержит $r \geq 1$ коммутаторов ядра (Core), и $m \geq 1$ подгрупп по $s_l \geq 1$ коммутаторов распределения (Distribution) и по $k_l \geq 1$ коммутаторов доступа (Access) в каждой.
- Серверы локальной сети и Интернет доступны через каждый коммутатор ядра. Коммутаторы ядра (Core) связаны между собой каждый с каждым.
- Коммутаторы распределения (Distribution) разбиты по подгруппам и внутри подгруппы связаны между собой каждый с каждым, а между подгруппами связей нет. Во всех подгруппах каждый коммутатор распределения связан с каждым коммутатором ядра.
- Коммутаторы доступа (Access) между собой не связаны, но распределены по подгруппам и связаны с каждым коммутатором распределения соответствующей подгруппы.
- Отказ любого коммутатора доступа, также как и нарушение связи любого коммутатора доступа с серверами или Интернет, считается отказом всей сети целом.
- Коммутаторы ядра имеют интенсивность отказов λ_C и восстановления μ_C, коммутаторы распределения имеют интенсивность отказов λ_D и восстановления μ_D, коммутаторы доступа имеют интенсивность отказов λ_A и восстановления μ_A.

Трехуровневая сеть из r = 2 коммутаторов ядра, m = 2 подгрупп распределения, s_1 = 2 коммутаторов распределения и k_1 = 4 коммутаторов доступа в подгруппе 1, s_2 = 2 коммутаторов распределения и k_2 = 4 коммутаторов доступа подгруппе 2.



В трехуровневой сети можно выделить три независимые с точки зрения модели надежности группы объектов – группа коммутаторов ядра, группа коммутаторов распределения, содержащая m подгрупп коммутаторов распределения и группа коммутаторов уровня доступа, содержащая m подгрупп коммутаторов доступа. Кроме того, подгруппы между собой также независимы с точки зрения модели надежности.

Что касается группы коммутаторов ядра, то поскольку каждый из них связан с каждым с коммутатором распределения каждой из подгрупп, а также связан с серверами и Интернет, то сеть считается работоспособной при первом условии, что хотя бы один коммутатор в группе коммутаторов ядра работоспособен. Вероятность этого равна сумме вероятностей от нулевого состояния до предпоследнего состояния в марковской модели надежности группы из r объектов:

$$P_{core}(t)=\sum_{i=0}^{r-1}P_i(t)=1-P_r(t)=1-\frac{\rho_C{}^r}{(1+\rho_C)^r}\cdot\left(1-e^{-\alpha_C\cdot t}\right)^r$$

$$\rho_C=\lambda_C/\mu_C\ ;\quad \alpha_C=\lambda_C+\mu_C\ ;$$

Что касается группы коммутаторов распределения, то поскольку в каждой подгруппе каждый коммутатор распределения с каждым с коммутатором ядра и с каждым коммутатором уровня доступа соответствующей подгруппы, то сеть считается работоспособной при втором условии, что хотя бы один коммутатор в каждой подгруппе коммутаторов распределения работоспособен. Вероятность этого равна произведению по всем подгруппам $l=1\ldots m$ вероятностей того, что в подгруппе хотя бы один коммутатор распределения работоспособен, каждая из которых, в свою очередь, равна сумме вероятностей от нулевого состояния до предпоследнего состояния в марковской модели надежности подгруппы из s_l объектов:

$$P_{distrib}(t)=\prod_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=0}^{s_l-1}P_i(t)\right)=\prod_{l=1}^{m}\left(1-P_{s_l}(t)\right)=\prod_{l=1}^{m}\left(1-\frac{\rho_D{}^{s_l}}{(1+\rho_D)^{s_l}}\cdot\left(1-e^{-\alpha_D\cdot t}\right)^{s_l}\right)$$

$$\rho_D=\lambda_D/\mu_D\ ;\quad \alpha_D=\lambda_D+\mu_D\ ;$$

Наконец, поскольку отказ любого коммутатора доступа считается отказом всей сети в целом, то очевидно, сеть считается работоспособной при третьем условии, что все коммутаторы во всех подгруппах коммутаторов доступа работоспособны. Вероятность этого равна произведению по всем подгруппам $l=1\ldots m$ вероятностей нулевого состояния в марковской модели надежности подгруппы из k_l объектов:

$$P_{access}(t)=\prod_{l=1}^{m}\left(P_0(t)\right)=\prod_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{(1+\rho_A)^{k_l}}\cdot\left(1+\rho_A\cdot e^{-\alpha_A\cdot t}\right)^{k_l}\right)$$

$$\rho_A=\lambda_A/\mu_A\ ;\quad \alpha_A=\lambda_A+\mu_A\ ;$$

Объединим три условия работоспособности сети, перемножив их вероятности, и получим окончательную формулу для вероятности работоспособности двухуровневой сети в целом:

$$P_{net}(t)=\left(1-\left(\frac{\rho_C}{1+\rho_C}\cdot\left(1-e^{-\alpha_C\cdot t}\right)\right)^r\right)\cdot\prod_{l=1}^{m}\left(\left(1-\left(\frac{\rho_D}{1+\rho_D}\cdot\left(1-e^{-\alpha_D\cdot t}\right)\right)^{s_l}\right)\cdot\left(\frac{1+\rho_A\cdot e^{-\alpha_A\cdot t}}{1+\rho_A}\right)^{k_l}\right)$$

Тогда, стационарный коэффициент готовности трехуровневой сети:

$$K_{net}=\lim_{t\to\infty}P_{net}(t)=\frac{\left((1+\rho_C)^r-(\rho_C)^r\right)}{(1+\rho_C)^r}\cdot\prod_{l=1}^{m}\left(\frac{\left((1+\rho_D)^{s_l}-(\rho_D)^{s_l}\right)}{(1+\rho_D)^{s_l}\cdot(1+\rho_A)^{k_l}}\right)\qquad(4)$$

Пример. Пусть имеется трехуровневая сеть с одним коммутатором ядра (r = 1), с тремя подгруппами (m = 3) распределения по 1 коммутатору распределения (s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 1), и по 2 коммутатора доступа (k_1 = 2, k_2 = 2, k_3 = 2) в каждой подгруппе.

С целью повышения отказоустойчивости сети были внедрены 2-й коммутатор ядра (r = 2) и 2-й коммутатор распределения в каждую из подгрупп (s_1 = 2, s_2 = 2, s_3 = 2).

Интенсивность отказов коммутатора ядра $\lambda_C = 1/8760$ часов$^{-1}$, а интенсивность восстановления $\mu_C = 1/24$ часов$^{-1}$. Интенсивность отказов коммутатора распределения $\lambda_D = 1/8760$ часов$^{-1}$, а интенсивность восстановления $\mu_D = 1/6$ часов$^{-1}$. Интенсивность отказов коммутатора доступа $\lambda_A = 1/8760$ часов$^{-1}$, а интенсивность восстановления $\mu_A = 1$ часов$^{-1}$.

Оценить коэффициент готовности сети до и после ее модернизации.

Решение. Имеем $\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 1/365$, $\rho_D = \lambda_D / \mu_D = 1/1460$ и $\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 1/8760$.

Коэффициент готовности до модернизации (r = 1, m = 3, $s_1 = s_2 = s_3$ = 1, $k_1 = k_2 = k_3$ = 2):

$$K_{net} = \frac{1}{(1+\rho_C)^1} \cdot \left(\frac{1}{(1+\rho_D)^1 \cdot (1+\rho_A)^2} \right)^3 = \frac{1}{(1+1/365)^1 \cdot (1+1/1460)^3 \cdot (1+1/8760)^6} \approx 0{,}99454$$

Коэффициент готовности после модернизации (r = 2, m = 3, $s_1 = s_2 = s_3$ = 2, $k_1 = k_2 = k_3$ = 2):

$$K_{net} = \frac{1+2\cdot\rho_C}{(1+\rho_C)^2} \cdot \left(\frac{1+2\cdot\rho_D}{(1+\rho_D)^2 \cdot (1+\rho_A)^2} \right)^3 = \frac{(1+2/365)^1 \cdot (1+2/1460)^3}{(1+1/365)^2 \cdot (1+1/1460)^6 \cdot (1+1/8760)^6} \approx 0{,}999306$$

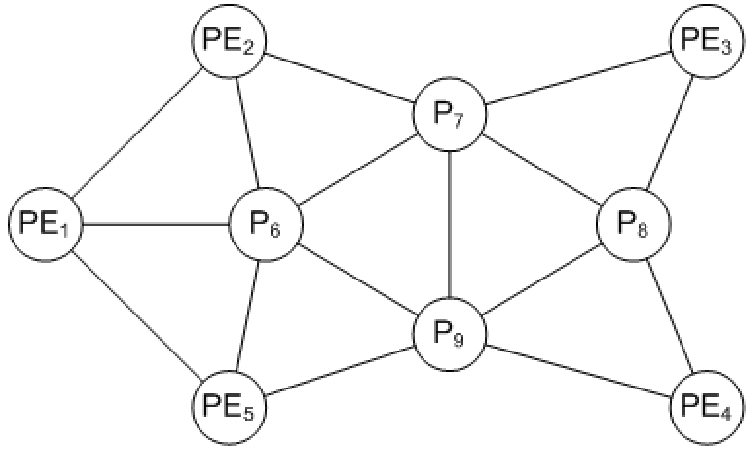
На первый взгляд прирост коэффициента готовности сети незначителен, но если оценить среднее количество часов недоступности сети в год (8760 часов) по формуле $8760 \cdot (1 - K_{net})$, то до модернизации имеем около **48 часов** недоступности в год, а после – около **6 часов** в год.

3. Анализ показателей надежности магистральных сетей

3.1. Двухуровневые магистральные сети провайдеров с заданной топологией

- Магистральная сеть содержит $n \geq 1$ коммутаторов, в том числе $r \geq 1$ опорных коммутаторов провайдера (**P**) и $n - r \geq 1$ граничных коммутаторов провайдера (**PE**).
- Используется единая нумерация коммутаторов сети. Множество всех коммутаторов нумеруется числами из множества $V = \{1, \ldots, n\}$. Подмножество опорных коммутаторов нумеруется числами из подмножества $PV = \{n - r + 1, \ldots, n\}$ множества V.
- Связи между коммутаторами задаются при помощи списка $L = \{(i, j)\}, i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots n$ пар номеров связанных коммутаторов. Связи между коммутаторами симметричные.
- Отказ любого граничного коммутатора, также как и нарушение связи любого граничного коммутатора с любым другим граничным коммутатором, считается отказом всей магистральной сети провайдера в целом.
- Опорные коммутаторы имеют интенсивность отказов λ_P и восстановления μ_P, граничные коммутаторы имеют интенсивность отказов λ_{PE} и восстановления μ_{PE}.

Двухуровневая магистральная сеть из n = 9 коммутаторов,
в том числе r = 4 опорных коммутаторов провайдера (P)
и $n - r$ = 5 граничных коммутаторов провайдера (PE).



В двухуровневой магистральной сети можно выделить две независимые с точки зрения модели надежности группы объектов – группа опорных коммутаторов (**P**) и группа граничных коммутаторов (**PE**) магистральной сети провайдера.

Поскольку отказ любого граничного коммутатора считается отказом всей магистральной сети в целом, то очевидно, сеть считается работоспособной при первом условии, что все $n - r$ коммутаторов в группе граничных коммутаторов работоспособны. Вероятность этого равна вероятности нулевого состояния в марковской модели надежности группы из $n - r$ объектов:

$$P_{edge}(t) = \frac{1}{(1+\rho_{PE})^{n-r}} \cdot \left(1 + \rho_{PE} \cdot e^{-\alpha_{PE} \cdot t}\right)^{n-r}$$

$$\rho_{PE} = \lambda_{PE} / \mu_{PE} \; ; \quad \alpha_{PE} = \lambda_{PE} + \mu_{PE} \; ;$$

Что касается отказов опорных коммутаторов, здесь следует особо учитывать то, что при определенных сочетаниях отказов опорных коммутаторов граничные коммутаторы сохраняют связность, а при других сочетаниях – нет. Связность граничных коммутаторов полностью определяется топологией связей между коммутаторами и сочетанием отказов опорных коммутаторов. Общее число сочетаний для $q = 0 \ldots r$ отказавших из r опорных коммутаторов определяется при помощи биномиального коэффициента C_r^q. Из них только при некотором числе $\psi_q \le C_r^q$ сочетаний граничные коммутаторы сохраняют связность. Как определить неизвестные коэффициенты $\psi_0, \ldots, \psi_r$ мы рассмотрим ниже, а пока продолжим анализ вероятностей отказов в группе опорных коммутаторов. Вероятность отказа ровно q коммутаторов среди r опорных коммутаторов определяется по формуле:

$$P_q(t) = C_r^q \cdot \frac{(\rho_P)^q}{(1+\rho_P)^r} \cdot \left(1 - e^{-\alpha_P \cdot t}\right)^q \cdot \left(1 + \rho_P \cdot e^{-\alpha_P \cdot t}\right)^{r-q}$$

$$q = 0 \ldots r$$

$$\rho_P = \lambda_P / \mu_P \; ; \quad \alpha_P = \lambda_P + \mu_P \; ;$$

Заметим, что в формуле учитываются всевозможные сочетания отказов q из r опорных коммутаторов. Чтобы, учитывать только те сочетания, при котором граничные коммутаторы сохраняются связность достаточно заменить биномиальные коэффициенты $C_r^0 \ldots C_r^r$, на введенные нами коэффициенты $\psi_0, \ldots, \psi_r$, выполняющих роль «счетчика работоспособных сочетаний» для каждого $q = 0 \ldots r$, причем $0 \le \psi_q \le C_r^q$.

Наконец, чтобы учесть различные конфигурации отказов для каждого $q = 0 \ldots r$, нам необходимо просуммировать соответствующие вероятности для $q = 0 \ldots r$. В итоге получаем вероятность для второго условия работоспособности сети:

$$P_{core}(t) = \frac{1}{(1+\rho_P)^r} \cdot \sum_{q=0}^{r} \left(\psi_q \cdot (\rho_P)^q \cdot \left(1 - e^{-\alpha_P \cdot t}\right)^q \cdot \left(1 + \rho_P \cdot e^{-\alpha_P \cdot t}\right)^{r-q} \right)$$
$$\rho_P = \lambda_P / \mu_P \ ; \quad \alpha_P = \lambda_P + \mu_P ;$$

Объединим оба условия работоспособности сети, перемножив их вероятности, и получим окончательную формулу для вероятности работоспособности магистральной сети в целом:

$$P_{net}(t) = \frac{\left(1 + \rho_{PE} \cdot e^{-\alpha_{PE} \cdot t}\right)^{n-r}}{(1+\rho_P)^r \cdot (1+\rho_{PE})^{n-r}} \cdot \sum_{q=0}^{r} \left(\psi_q \cdot (\rho_P)^q \cdot \left(1 - e^{-\alpha_P \cdot t}\right)^q \cdot \left(1 + \rho_P \cdot e^{-\alpha_P \cdot t}\right)^{r-q} \right)$$
$$\rho_P = \lambda_P / \mu_P \ ; \quad \alpha_P = \lambda_P + \mu_P \ ; \quad \rho_{PE} = \lambda_{PE} / \mu_{PE} \ ; \quad \alpha_{PE} = \lambda_{PE} + \mu_{PE} ;$$

Тогда, стационарный коэффициент готовности магистральной сети:

$$K_{net} = \lim_{t \to \infty} P_{net}(t) = \frac{1}{(1+\rho_P)^r \cdot (1+\rho_{PE})^{n-r}} \cdot \sum_{q=0}^{r} \left(\psi_q \cdot (\rho_P)^q \right) \tag{5}$$
$$\rho_P = \lambda_P / \mu_P \ ; \quad \rho_{PE} = \lambda_{PE} / \mu_{PE} \ ;$$

Теперь же вернемся к вопросу определения неизвестных коэффициентов $\psi_0, \ldots, \psi_r$, указывающих на количество сочетаний отказов q из r опорных коммутаторов, при которых граничные коммутаторы сохраняют связность, для каждого $q = 0 \ldots r$.

Чтобы подсчитать коэффициент ψ_q при конкретном q необходимо проанализировать взаимную достижимость граничных узлов при каждом сочетании отказов q из r опорных коммутаторов. Для этого нам необходимо рассчитывать матрицу достижимости коммутаторов для каждого конкретного сочетания отказа с учетом топологии связей, а для этого, в свою очередь, нам потребуется матрица смежности магистральной сети.

Матрица смежности A вычисляется по заданному списку L пар связанных коммутаторов с номерами $i = 1 \ldots n$ и $j = 1 \ldots n$ следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in L \lor (j,i) \in L \\ 0, & (i,j) \notin L \land (j,i) \notin L \end{cases}$$
$$i = 1 \ldots n \quad j = 1 \ldots n$$

Матрица смежности A является булевой и симметрична относительно главной диагонали, поскольку связи между коммутаторами симметричные (двусторонние).

Матрица достижимости R для заданной матрицы смежности A без учета отказов опорных коммутаторов вычисляется по рекуррентной схеме, основанной на алгоритме нахождения транзитивного замыкания для бинарного отношения. В качестве начальной матрицы достижимости $R_{ij}^{(0)}$ принимается сама матрица смежности A_{ij}:

$$\begin{cases} R_{ij}^{(0)} = A_{ij} \\ i = 1\ldots n \quad j = 1\ldots n \end{cases}$$

$$s = 1\ldots n$$

$$\begin{cases} R_{ij}^{(s)} = R_{ij}^{(s-1)} \bigvee \left(R_{is}^{(s-1)} \bigwedge R_{sj}^{(s-1)} \right) \\ i = 1\ldots n \quad j = 1\ldots n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{ij} = R_{ij}^{(n)} \\ i = 1\ldots n \quad j = 1\ldots n \end{cases}$$

Теперь обозначим конкретное сочетание отказов q из r опорных коммутаторов как $FV \subseteq PV$, являющееся подмножеством множества опорных коммутаторов PV. Очевидно, что $|FV| = q$. Тогда, для учета конкретного сочетания отказов FV в рекуррентной схеме вычисления матрицы достижимости R в качестве начальной матрицы достижимости $R_{ij}^{(0)}$ принимается матрица смежности A_{ij} с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в рассматриваемое сочетание отказов FV:

$$\begin{cases} R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} A_{ij}, & i \notin FV \wedge j \notin FV \\ 0, & i \in FV \vee j \in FV \end{cases} \\ i = 1\ldots n \quad j = 1\ldots n \end{cases}$$

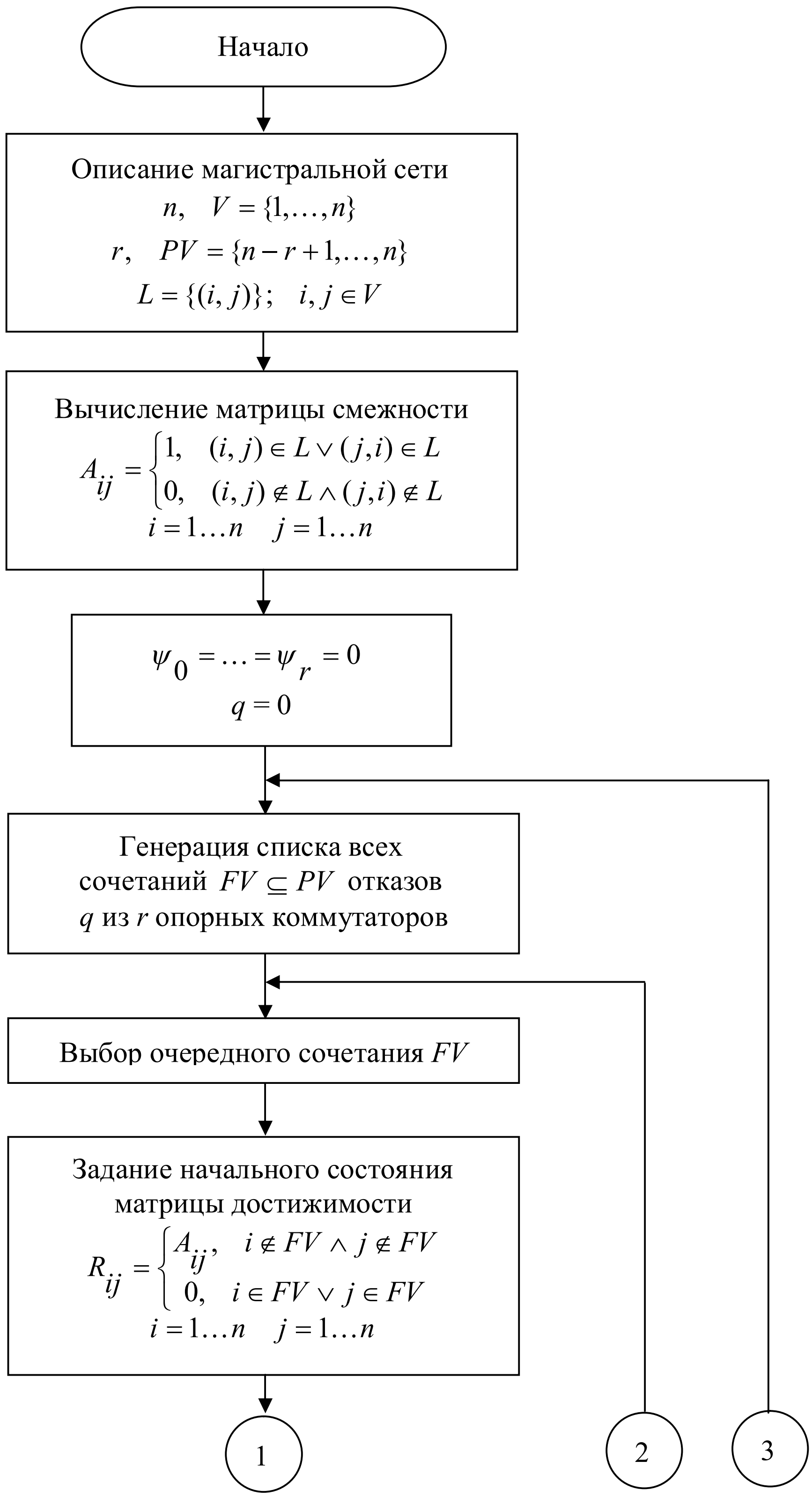
Тогда, для определения связности граничных коммутаторов при конкретном сочетании отказов FV достаточно проанализировать соответствующую матрицу достижимости R, вычисленную для рассматриваемого сочетания отказов FV, и убедиться в том, что от любого коммутатора, не являющегося опорным, достижим любой другой коммутатор, также не являющийся опорным. Очевидно, что данное условие выполняется, только когда $\forall i \notin PE \,\&\, \forall j \notin PE \,\&\, (i \neq j) \Rightarrow R_{ij} = 1$. Введем индикатор связности граничных коммутаторов и обозначим его как W, который равен 1, если условие выполняется, и равен 0, если нет. Тогда, индикатор связности W граничных коммутаторов может быть вычислен по формуле:

$$W = \bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \notin PV}}^{n} \; \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \notin PV;\, j \neq i}}^{n} R_{ij}$$

Тогда, перебрав все сочетания $FV \subseteq PV$ отказов q из r опорных коммутаторов для конкретного q, и вычисляя для каждого сочетания отказов FV индикатор связности W граничных коммутаторов, и подсчитывая число сочетаний, при которых $W = 1$, мы найдем искомый коэффициент ψ_q.

Наконец, выполнив данную процедуру для каждого $q = 0\ldots r$, мы найдем все коэффициенты $\psi_0,\ldots,\psi_r$. Также особо отметим, что если для какого-либо $q^* < r$ мы получаем коэффициент $\psi_{q^*} = 0$, то, очевидно, все остальные коэффициенты ψ_q при $q = q^*+1\ldots r$ также будут равны нулю, и мы можем досрочно завершить алгоритм, приняв $\psi_{q^*+1} = \ldots = \psi_r = 0$.

Подводя итог ко всему вышесказанному, приведем схему алгоритма (рис. 1) вычисления коэффициентов $\psi_0,\ldots,\psi_r$, обозначающих для каждого $q = 0\ldots r$ количество сочетаний отказов q из r опорных коммутаторов, при которых сохраняется связность граничных коммутаторов.



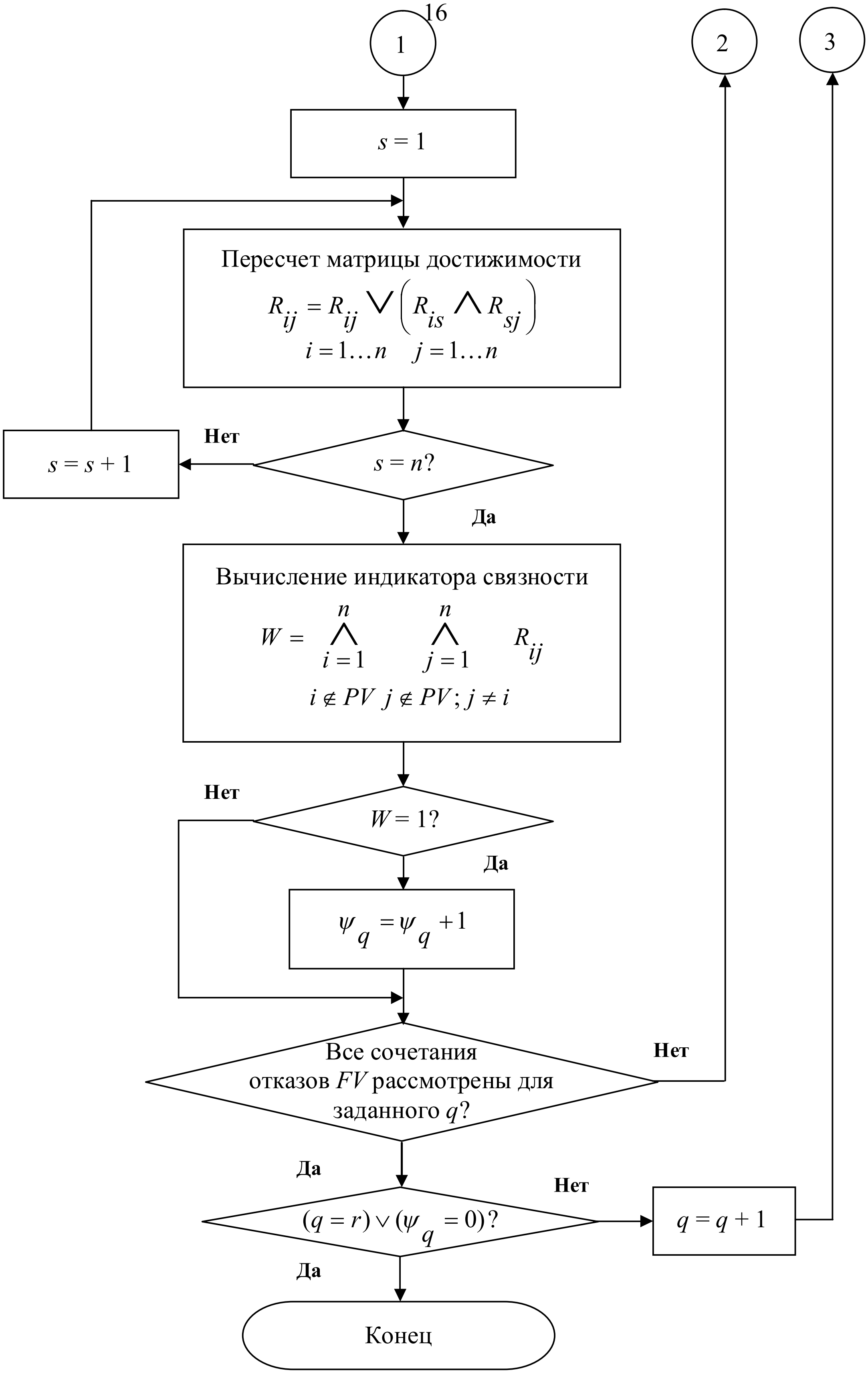
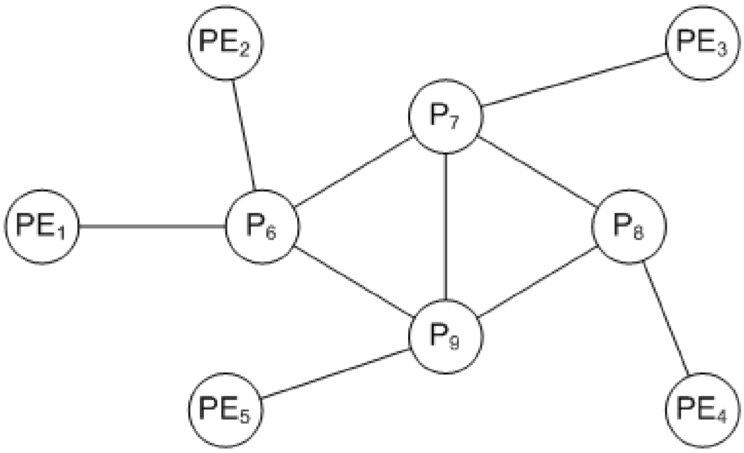


Рис. 1. Схема алгоритма вычисления коэффициентов $\psi_0, \ldots, \psi_r$.

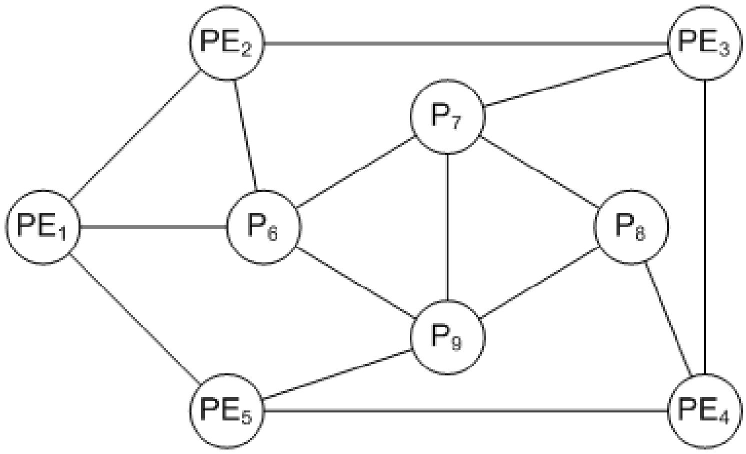
<u>Частный случай 1</u>. Топология связей L такова, что связность граничных коммутаторов **PE** сохраняется только при работе всех опорных коммутаторов **P**. Пример такой топологии:



Очевидно, что при такой топологии граничные коммутаторы сохраняют связность только при единственном пустом сочетании $FV = \{\}$ отказов опорных коммутаторов при $q = 0$. Во всех остальных случаях при любом сочетании отказов при любом $q = 1 \ldots r$ связность нарушается. Тогда, очевидно, что только коэффициент $\psi_0 = 1$, а остальные $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_r = 0$.

Соответственно, коэффициент готовности такой магистральной сети, учитывая что $\sum_{q=0}^{r} \left(\psi_q \cdot (\rho_P)^q \right) = \psi_0 \cdot (\rho_P)^0 = 1$, определяется по формуле: $K_{net} = \dfrac{1}{(1+\rho_P)^r \cdot (1+\rho_{PE})^{n-r}}$.

<u>Частный случай 2</u>. Топология связей L такова, что связность граничных коммутаторов **PE** сохраняется даже при отказе всех опорных коммутаторов **P**. Пример такой топологии:



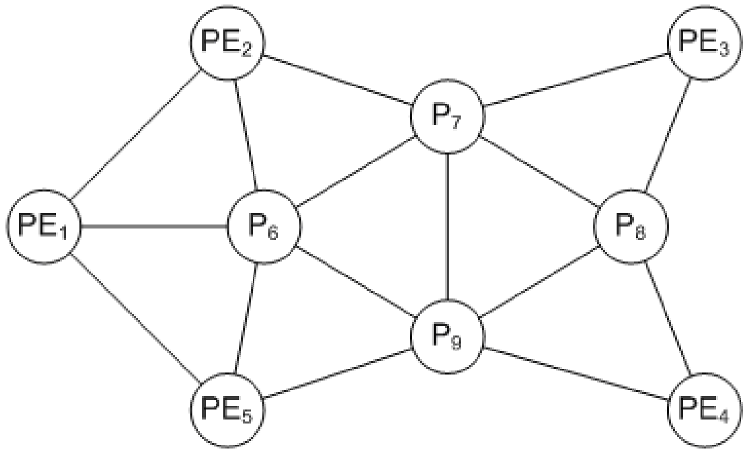
Очевидно, что при такой топологии граничные коммутаторы сохраняют связность при любых сочетаниях FV отказов q из r опорных коммутаторов для всех $q = 0 \ldots r$. Количество таких сочетаний для конкретного q вычисляется при помощи биномиального коэффициента. Тогда, очевидно, что коэффициенты $\psi_q = C_r^q$, $q = 0 \ldots r$.

Тогда коэффициент готовности такой магистральной сети, учитывая, что $\sum_{q=0}^{r} \left(C_r^q \cdot (\rho_P)^q \right) = (1+\rho_P)^r$, определяется по формуле: $K_{net} = \dfrac{1}{(1+\rho_{PE})^{n-r}}$.

<u>Пример</u>. Задана двухуровневая магистральная сеть провайдера, содержащая $n = 9$ коммутаторов $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, в том числе $r = 4$ опорных коммутаторов $PV = \{6,7,8,9\}$.

Топология связей задана при помощи списка пар связанных между собой коммутаторов: $L = \{(1,2),(1,5),(1,6),(2,6),(2,7),(3,7),(3,8),(4,8),(4,9),(5,6),(5,9),(6,7),(6,9),(7,8),(7,9),(8,9)\}$.

Для наглядности также приведем графическую схему магистральной сети.



Опорные коммутаторы (**P**) имеют интенсивность отказов $\lambda_P = 1/8760$ часов$^{-1}$ и восстановления $\mu_P = 1/3$ часов$^{-1}$, граничные коммутаторы (**PE**) имеют интенсивность отказов $\lambda_{PE} = 1/8760$ часов$^{-1}$ и восстановления $\mu_{PE} = 1$ часов$^{-1}$.

Определить коэффициент готовности магистральной сети.

<u>Решение</u>. Сначала выполним наиболее трудоемкую часть задачи – найдем коэффициенты $\psi_0,\ldots,\psi_4$ для определения количества сочетаний отказов q из 4 опорных коммутаторов, при которых сохраняется связность граничных коммутаторов, для каждого $q = 0\ldots4$.

Согласно алгоритму (рис. 1.) определяем матрицу смежности по заданному количеству коммутаторов n и топологии связей L, и получаем:

$$A := \begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

Теперь для каждого $q = 0\ldots4$ генерируем все сочетания $FV \subseteq PV = \{6,7,8,9\}$ отказов q из 4 опорных коммутаторов, и для каждого сочетания FV строим матрицу достижимости R по матрице смежности A и по сочетанию FV, вычисляем индикатор связности W по матрице достижимости R и подмножеству опорных коммутаторов PV, и подсчитываем количество сочетаний, при которых $W = 1$, это количество и будет искомым коэффициентом ψ_q.

При q = 0 имеем единственное вырожденное сочетание отказов $FV = \{\}$. В этом случае, в качестве начального состояния матрицы достижимости принимается матрица смежности A в неизменном виде, и далее по рекуррентной схеме вычисляется матрица достижимости:

$$R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Из полученной матрицы достижимости, очевидно, что все коммутаторы (в том числе и граничные) достижимы друг для друга. Соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов, который, учитывая, что $PV = \{6,7,8,9\}$, определяется по угловой подматрице достижимости $R_{ij}, i = 1\ldots5, j = 1\ldots5$, равен: $W = \bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \notin PV}}^{9} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \notin PV; j \neq i}}^{9} R_{ij} = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1; j \neq i}^{5} R_{ij} = 1$.

Поскольку вырожденное сочетание отказов единственное и при нем индикатор связности равен W = 1, то, очевидно, $\psi_0 = 1$.

При q = 1 имеем $C_4^1 = 4$ сочетания $FV = \{6\}$, $FV = \{7\}$, $FV = \{8\}$, $FV = \{9\}$ отказов 1 из 4 опорных коммутаторов. Для каждого сочетания вычисляем матрицу достижимости, принимая в качестве начальной матрицы достижимости матрицу смежности A с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в сочетание FV.

В результате вычислений получаем 4 матрицы достижимости:

$$R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Во всех 4-х случаях граничные коммутаторы остаются связанными между собой, поскольку, в угловой подматрице $R_{ij}, i = 1\ldots5, j = 1\ldots5$ все элементы во всех 4 случаях равны 1, и, соответственно индикатор связности граничных коммутаторов: $W = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1; j \neq i}^{5} R_{ij} = 1$.

Тогда, поскольку во всех 4-х случаях W = 1, то коэффициент $\psi_1 = 4$.

При *q* = 2 имеем $C_4^2 = 6$ сочетаний *FV* = {6,7}, *FV* = {6,8}, *FV* = {6,9}, *FV* = {7,8}, *FV* = {7,9}, *FV* = {8,9} отказов 2 из 4 опорных коммутаторов. Для каждого сочетания вычисляем матрицу достижимости, принимая в качестве начальной матрицы достижимости матрицу смежности *A* с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в сочетание *FV*. В результате вычислений получаем 6 матриц достижимости:

$$R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$R := \begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Заметим, что в 3-х случаях *FV* = {6,7}, *FV* = {6,8}, *FV* = {6,9}, граничные коммутаторы сохраняются связность, поскольку в угловой подматрице $R_{ij}, i = 1 \ldots 5, j = 1 \ldots 5$ матрицы достижимости все элементы во всех этих случаях равны 1, и, соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов $W = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1;\, j \neq i}^{5} R_{ij} = 1$.

В других же 3-х случаях *FV* = {7,8}, *FV* = {7,9}, *FV* = {8,9}, отказ соответствующих опорных коммутаторов приводит к нарушению связности между граничными коммутаторами и, соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов $W = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1;\, j \neq i}^{5} R_{ij} = 0$. Так, например, отказ опорных коммутаторов P_7 и P_8 приводит к изоляции граничного коммутатора PE_3, а отказ опорных коммутаторов P_8 и P_9 приводит к изоляции граничного коммутатора PE_4, наконец, отказ опорных коммутаторов P_7 и P_9 приводит к образованию двух несвязанных подгрупп граничных коммутаторов $\{PE_1, PE_2, PE_5\}$ и $\{PE_3, PE_4\}$.

Тогда, поскольку только в 3-х из 6 случаев сохраняется связность граничных коммутаторов (*W* = 1), то коэффициент $\psi_2 = 3$.

При q = 3 имеем $C_4^3 = 4$ сочетания $FV = \{6,7,8\}$, $FV = \{6,7,9\}$, $FV = \{6,8,9\}$, $FV = \{7,8,9\}$ отказов 3 из 4 опорных коммутаторов. Для каждого сочетания вычисляем матрицу достижимости, принимая в качестве начальной матрицы достижимости матрицу смежности *A* с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в сочетание *FV*.

В результате вычислений получаем 4 матрицы достижимости:

$$R := \begin{bmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Заметим, что во всех 4-х случаях нарушается связность граничных коммутаторов, и, соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов $W = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1;\, j \ne i}^{5} R_{ij} = 0$.

Тогда, поскольку ни в одном из 4-х случаев не сохраняется связность граничных коммутаторов ($W = 0$), то коэффициент $\psi_3 = 0$.

Поскольку мы при $q = 3$ получили нулевой коэффициент, то есть ни при одном сочетании тройных отказов опорных коммутаторов не сохраняется связность граничных коммутаторов, то **при q = 4** тем более не найдется ни одного сочетания, при котором сохранялась бы связность, поэтому мы завершаем вычисления, приняв коэффициент $\psi_4 = 0$.

Таким образом, мы вычислили все коэффициенты: $\psi_0 = 1; \psi_1 = 4; \psi_2 = 3; \psi_3 = 0; \psi_4 = 0$. Остается только подставить их в формулу для вычисления коэффициента готовности сети.

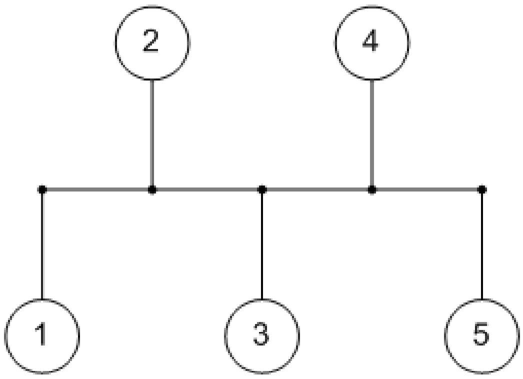
Учитывая, что $\rho_P = \lambda_P / \mu_P = 1/2920$, $\rho_{PE} = \lambda_{PE} / \mu_{PE} = 1/8760$ в итоге получаем:

$$K_{net} = \frac{\sum\limits_{q=0}^{4} \left(\psi_q \cdot (\rho_P)^q \right)}{(1+\rho_P)^4 \cdot (1+\rho_{PE})^5} = \frac{1 + 4 \cdot \rho_P + 3 \cdot \rho_P{}^2}{(1+\rho_P)^4 \cdot (1+\rho_{PE})^5} \approx 0{,}999429$$

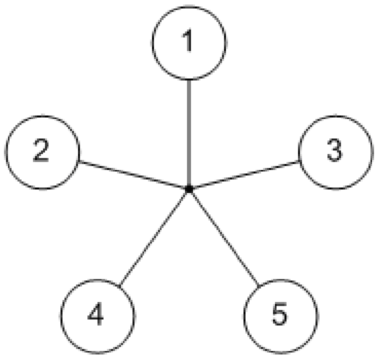
Если оценить среднее количество часов недоступности магистральной сети провайдера в год (8760 часов) по формуле $8760 \cdot (1 - K_{net})$, то получаем около **5 часов** недоступности в год.

3.2. Преобразование разделяемых и многоточечных соединений

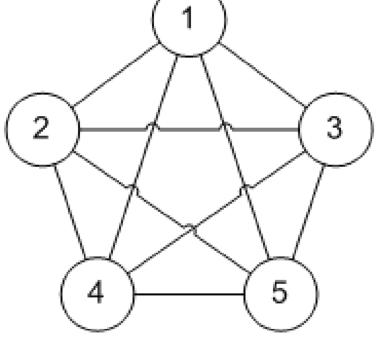
Как в локальных сетях, так и в магистральных сетях могут встречаться разделяемые среды передачи данных, когда к одной линии связи подключено более двух узлов сети по топологии «шина». Классическим примером являются сети, построенные на коаксиальном кабеле, устаревшем на сегодняшний день, но все-таки иногда встречающимся в сетях.



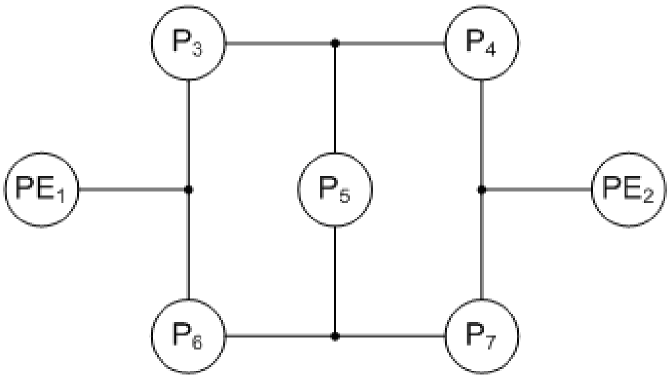
Кроме того, иногда при рассмотрении множества узлов более высокого уровня (маршрутизаторов, например), подключенных по топологии «звезда» к устройству более низкого уровня (Ethernet, ATM или Frame-Relay коммутатор, например), связующее устройство не принимается во внимание при анализе надежности для сокращения числа типов и количества рассматриваемых объектов. В таких случаях мы имеем многоточечное соединение.



Если на разделяемые и многоточечные соединения не накладываются какие-либо специальные ограничения на взаимодействие узлов, и каждый узел может связываться с каждым другим, то, очевидно, такие соединения всегда могут быть преобразованы в набор из C_n^2 двухточечных логических соединений, попарно связывающих узлы.



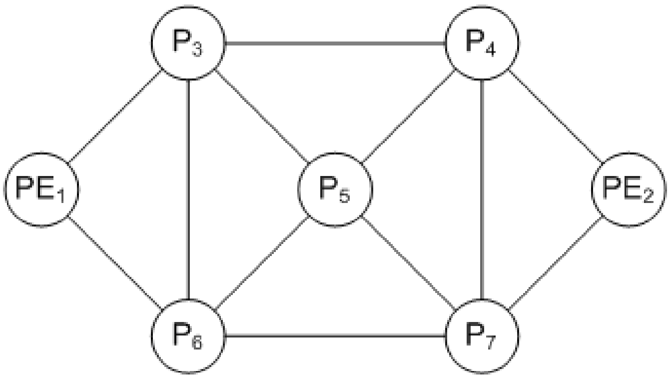
<u>Пример</u>. Задана двухуровневая магистральная сеть провайдера, содержащая n = 7 коммутаторов V = {1,2,3,4,5,6,7}, в том числе r = 5 опорных коммутаторов PV = {3,4,5,6,7} со следующей физической топологией связей.



Опорные коммутаторы (**P**) имеют интенсивность отказов $\lambda_P = 1/8760$ часов$^{-1}$ и восстановления $\mu_P = 1/3$ часов$^{-1}$, граничные коммутаторы (**PE**) имеют интенсивность отказов $\lambda_{PE} = 1/8760$ часов$^{-1}$ и восстановления $\mu_{PE} = 1$ часов$^{-1}$.

Определить коэффициент готовности магистральной сети.

<u>Решение</u>. Преобразуем все многоточечные соединения в соответствующие наборы двухточечных соединений и в итоге получим следующую логическую топологию связей.



Логическая топология может быть описана при помощи списка пар связанных между собой коммутаторов: L:= {(1,3),(1,6),(2,4),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)}.

Соответственно, матрица смежности для данной топологии имеет вид:

$$A := \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1 \\ 1&0&0&1&1&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

Теперь для каждого q = 0…5 генерируем все сочетания $FV \subseteq PV = \{3,4,5,6,7\}$ отказов q из 5 опорных коммутаторов, и для каждого сочетания FV строим матрицу достижимости R по матрице смежности A и по сочетанию FV, вычисляем индикатор связности W по матрице достижимости R и подмножеству опорных коммутаторов PV, и подсчитываем количество сочетаний, при которых W = 1, это количество и будет искомым коэффициентом ψ_q.

При $q = 0$ имеем единственное вырожденное сочетание отказов $FV = \{\}$, и в этом случае граничные коммутаторы сохраняют связность. Соответственно, коэффициент $\psi_0 = 1$.

При $q = 1$ имеем $C_5^1 = 5$ сочетаний отказов опорных коммутаторов $FV = \{3\}$, $FV = \{4\}$, $FV = \{5\}$, $FV = \{6\}$, $FV = \{7\}$, и, анализируя матрицы достижимости, можно увидеть, что во всех случаях граничные коммутаторы сохраняют связность. Соответственно, коэффициент $\psi_1 = 5$.

При $q = 2$ имеем $C_5^2 = 10$ сочетаний отказов $FV = \{3,4\}$, $FV = \{3,5\}$, $FV = \{3,6\}$, $FV = \{3,7\}$, $FV = \{4,5\}$, $FV = \{4,6\}$, $FV = \{4,7\}$, $FV = \{5,6\}$, $FV = \{5,7\}$, $FV = \{6,7\}$. Анализируя матрицы достижимости, можно увидеть, что только в 8 случаях $FV = \{3,4\}$, $FV = \{3,5\}$, $FV = \{3,7\}$, $FV = \{4,5\}$, $FV = \{4,6\}$, $FV = \{5,6\}$, $FV = \{5,7\}$, $FV = \{6,7\}$ граничные коммутаторы сохраняют связность. Соответственно, коэффициент $\psi_2 = 8$.

При $q = 3$ имеем $C_5^3 = 10$ сочетаний $FV = \{3,4,5\}$, $FV = \{3,4,6\}$, $FV = \{3,4,7\}$, $FV = \{3,5,6\}$, $FV = \{3,5,7\}$, $FV = \{3,6,7\}$, $FV = \{4,5,6\}$, $FV = \{4,5,7\}$, $FV = \{4,6,7\}$, $FV = \{5,6,7\}$. Анализируя матрицы достижимости, можно увидеть, что только в 2 случаях $FV = \{3,4,5\}$ и $FV = \{5,6,7\}$ граничные коммутаторы сохраняют связность. Соответственно, коэффициент $\psi_3 = 2$.

При $q = 4$ имеем $C_5^4 = 5$ сочетаний отказов опорных коммутаторов $FV = \{3,4,5,6\}$, $FV = \{3,4,5,7\}$, $FV = \{3,4,6,7\}$, $FV = \{3,5,6,7\}$, $FV = \{4,5,6,7\}$, и, анализируя матрицы достижимости, можно увидеть, что ни в одном из случаев граничные коммутаторы не сохраняют связность. Соответственно, коэффициент $\psi_4 = 0$.

Тогда, очевидно, **при $q = 5$**, тем более нет случаев, при которых сохраняется связность граничных коммутаторов и, соответственно, коэффициент $\psi_5 = 0$.

В итоге мы вычислили все коэффициенты: $\psi_0 = 1; \psi_1 = 5; \psi_2 = 8; \psi_3 = 2; \psi_4 = 0; \psi_5 = 0$. Остается только подставить их в формулу для вычисления коэффициента готовности сети.

Учитывая, что $\rho_P = \lambda_P / \mu_P = 1/2920$, $\rho_{PE} = \lambda_{PE} / \mu_{PE} = 1/8760$ в итоге получаем:

$$K_{net} = \frac{\sum\limits_{q=0}^{5}\left(\psi_q \cdot (\rho_P)^q\right)}{(1+\rho_P)^5 \cdot (1+\rho_{PE})^2} = \frac{1 + 5\cdot\rho_P + 8\cdot{\rho_P}^2 + 2\cdot{\rho_P}^3}{(1+\rho_P)^5 \cdot (1+\rho_{PE})^2} \approx 0{,}9997715$$

Если оценить среднее количество часов недоступности магистральной сети провайдера в год (8760 часов) по формуле $8760 \cdot (1 - K_{net})$, то получаем около **2 часов** недоступности в год.

Приложение. Пример расчета в математическом пакете Maple 15.

```
restart;
with(combinat) :
with(plots) :
with(plottools) :

# TOPOLOGY AVAILABILITY CALCULATION FUNCTIONS (Pavel A. Rahman, 2010)

# Nodes Adjancency Matrix Calculation Procedure
# for given number of nodes and list of linked pairs

NC_Adj := proc(n, Links) local res, i :
 res := Matrix(n, n, 0) :
 for i in Links do
  res[i[1], i[2]] := 1;
  res[i[2], i[1]] := 1;
 end do:
 return(res) :
end proc:

# Nodes Reachibility Matrix Calculation Procedure for given
# number of nodes, list of linked pairs and list of failed nodes

NC_Reach := proc(n, Links, FV) local i, j, s, res, AM :
 AM := NC_Adj(n, Links) :
 res := Matrix(n, n) :
 for i from 1 to n do
  for j from 1 to n do
   if ((i in FV) or (j in FV)) then
    res[i, j] := 0 :
   else
    res[i, j] := AM[i, j] :
   end if:
  end do:
 end do:
 for s from 1 to n do
  for i from 1 to n do
   for j from 1 to n do
    res[i, j] := max(res[i, j], min(res[i, s], res[s, j])) :
   end do:
  end do:
 end do:
 return(res) :
end proc:
```

```
# Edge Nodes Connectivity Check Procedure for given number of
# nodes, list of linked pairs, list of failed nodes, list of core P-nodes

NC_Connected := proc(n, Links, FV, PV) local i, j, res, RM, EV :
 RM := NC_Reach(n, Links, FV) :
 EV := [ ] :
 for i from 1 to n do
  if not(i in PV) then
   EV := [op(EV), i] :
  end if:
 end do:
 res := 1 :
 for i in EV do
  for j in EV do
   if (i ≠ j) then
    res := min(res, RM[i, j]) :
   end if:
  end do:
 end do:
 return(res) :
end proc:

# Edge Nodes Successful Connectivity Counts Procedure for given
# number of nodes, number of core P-nodes and list of linked pairs

NC_Stats := proc(n, r, Links) local i, q, PV, FV, res, flag :
 PV := [seq(i, i = n−r + 1 ..n)] :
 flag := 0 : res := Array(0 ..r, 0) :
 for q from 0 to r while (flag = 0) do
  for FV in choose(PV, q) do
   if (NC_Connected(n, Links, FV, PV) = 1) then
    res[q] := res[q] + 1 :
   end if:
  end do:
  if (res[q] = 0) then
   flag := 1 :
  end if:
 end do:
 return(res) :
end proc:

# Network Availability (Edge Nodes Connectivity) Calculation Procedure
# for given number of nodes, number of core P-nodes, list of linked pairs,
# failure to recovery intensity ratio for edge PE-nodes and
# failure to recovery intensity ratio for core P-nodes

KNET := proc(n, r, rho_PE, rho_P, Links) local res, psi :
 psi := NC_Stats(n, r, Links) :
 res := add(psi[q] * rho_P^q, q = 0 ..r) / (((1 + rho_PE)^(n−r)) * ((1 + rho_P)^r)) :
 return(res) :
end proc:
```

```
# NETWORK TOPOLOGY VISUALIZATION FUNCTION (Pavel A. Rahman, 2012)

GPLOT := proc(n, r, Links, PCL) local i, Edge, PA, PB, PointSet, TextSet, LineSet, res,
        dist, alpha, radius, x, y, z, x1, x2, y1, y2, z1, z2 :
 PointSet := { } : TextSet := { } : LineSet := { } :
 radius := 15 :
 for i from 1 to n-r do
  x := PCL[i, 1] : y := PCL[i, 2] : z := PCL[i, 3] :
  PointSet := PointSet union {sphere([x, y, z], radius, color = green, style = patchnogrid, transparency
     = 0.7)} :
  TextSet := TextSet union {textplot3d([x, y, z, i, font = [TIMES, ROMAN, 14], color = black])} :
 end do:
 for i from n-r + 1 to n do
  x := PCL[i, 1] : y := PCL[i, 2] : z := PCL[i, 3] :
  PointSet := PointSet union {sphere([x, y, z], radius, color = cyan, style = patchnogrid, transparency
     = 0.7)} :
  TextSet := TextSet union {textplot3d([x, y, z, i, font = [TIMES, ROMAN, 14], color = black])} :
 end do:
 for Edge in Links do
  PA := Edge[1] : PB := Edge[2] :
  dist := sqrt((PCL[PA, 1]-PCL[PB, 1])^2 + (PCL[PA, 2]-PCL[PB, 2])^2 + (PCL[PA, 3]
     -PCL[PB, 3])^2) :
  alpha := radius / dist :
  x1 := trunc(alpha*PCL[PA, 1] + (1-alpha)*PCL[PB, 1]) : x2 := trunc((1-alpha)*PCL[PA, 1]
     + alpha*PCL[PB, 1]) :
  y1 := trunc(alpha*PCL[PA, 2] + (1-alpha)*PCL[PB, 2]) : y2 := trunc((1-alpha)*PCL[PA, 2]
     + alpha*PCL[PB, 2]) :
  z1 := trunc(alpha*PCL[PA, 3] + (1-alpha)*PCL[PB, 3]) : z2 := trunc((1-alpha)*PCL[PA, 3]
     + alpha*PCL[PB, 3]) :
  LineSet := LineSet union {line([x1, y1, z1], [x2, y2, z2], color = blue, thickness = 2)} :
 end do:
 res := PointSet union TextSet union LineSet :
 return(res) :
end proc:

# NETWORK TOPOLOGY AVAILABILITY (Edge nodes connectivity) CALCULATION EXAMPLE

# Total number and list of nodes (P and PE)
n := 9; V := [seq(i, i = 1 ..n)];
 # Number and list of provider core P-nodes
r := 4; PV := [seq(i, i = n-r + 1 ..n)];
```

$$9$$

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

$$4$$

$$[6, 7, 8, 9] \tag{1}$$

```
# Reliability parameters
lambda_P := 1/8760 : mu_P := 1/3 : rho_P := lambda_P/mu_P;
lambda_PE := 1/8760 : mu_PE := 1/1 : rho_PE := lambda_PE/mu_PE;
```

$$\frac{1}{2920}$$

$$\frac{1}{8760} \quad (2)$$

```
# Network graph as a list of pair of linked nodes
L := [[1, 2], [1, 5], [1, 6], [2, 6], [2, 7], [3, 7], [3, 8], [4, 8], [4, 9], [5, 6], [5, 9], [6, 7], [6, 9], [7, 8], [7,
    9], [8, 9]];
```

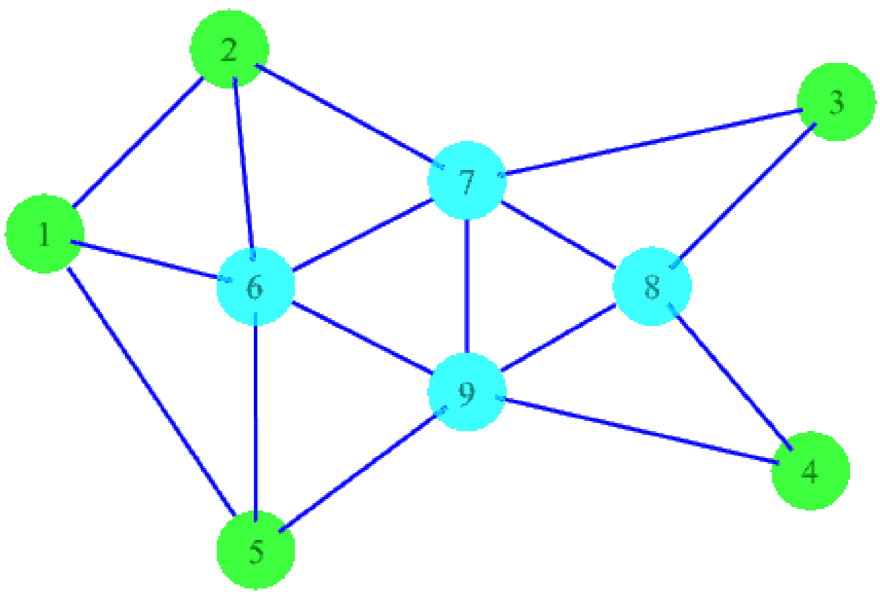
[[1, 2], [1, 5], [1, 6], [2, 6], [2, 7], [3, 7], [3, 8], [4, 8], [4, 9], [5, 6], [5, 9], [6, 7], [6, 9], [7, 8], [7, 9], [8, 9]] **(3)**

```
# Network Availibility (Edge Nodes Connectivity)
# and expected number of days of unavailibility
NET_AV := evalf(KNET(n, 4, rho_PE, rho_P, L));
(1-NET_AV)*8760;
```

0.9994290678

5.001366 **(4)**

```
# Building points coordinates list (for topology visualization)
CoordsList := [[-160, 20,-50], [-90, 90,-50], [140, 70,-50],
        [130,-70,-50], [-80,-100,-50], [-80, 0, 50],
        [0, 40, 50], [70, 0, 50], [0,-40, 50]] :
# Drawing network topology using visualization function
display(GPLOT(n, r, L, CoordsList), scaling = constrained, axes = none, orientation = [270, 0, 0]);
```



Список литературы

1. **Черкесов Г.Н.** Надежность аппаратно-программных комплексов. – СПб.: Питер, 2005.

2. **Половко А.М.**, **Гуров С.В.** Основы теории надежности. – 2-е изд., переработанное и дополненное. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.

3. **Гнеденко Б.В.** Курс теории вероятностей. – М.: Едиториал УРСС, 2005.

4. **Новиков Ф**.**А**. Дискретная математика для программистов. – 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009.

5. **Олифер В.Г.**, **Олифер Н.А.** Компьютерные сети. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2010.

6. **Diane Teare, Catherine Paquet**. Campus Network Design Fundamentals. – Cisco Press, 2005.

7. **Iftekhar Hussain**. Fault-Tolerant IP and MPLS Networks. – Cisco Press, 2004.

Содержание

© Pavel A. Rahman, 2012