# Valim ja üldkogum
# Usaldusvahemik

Kvantitatiivsete meetodite aluskursus

Indrek Soidla

# Valim ja populatsioon (ehk üldkogum)

- Eelmisel korral arvutasime erinevaid jaotusparameetreid
- Seekord on üks keskne mõiste samuti parameeter, aga mõnevõrra erinevas tähenduses
- Põhjus on selles, et jaotusparameeter on eelkõige matemaatiline termin, tänane käsitlus aga statistiline
- Ütleme, et soovime teada, milline on keskmine eluga rahulolu Eesti rahvastikus ehk populatsioonis
- Kui meil oleks sellised andmed kõigi Eesti elanike kohta, saaksime arvutada aritmeetilise keskmise
- Antud juhul oleks selle keskmise näol tegu *parameetriga* – mingi näitajaga kogu populatsiooni kohta
- Seda nimetatakse ka parameetri *tegelikuks väärtuseks (true value)*
- Selliseid andmeid meil tegelikkuses ei ole, aga saame võtta populatsioonist valimi ja seda uurida
- Arvutades valimi kohta eluga rahulolu aritmeetilise keskmise (või mingi muu tunnuse jaotust kokku võtva näitaja), saame *statistiku* ehk parameetri *hinnangu*
- Püüame hinnata parameetri väärtust valimi alusel

# Valim ja populatsioon (ehk üldkogum)

- Niisiis, kui analüüsime valimiandmeid, arvutame mingi näitaja ehk statistiku
  - Nt eluga rahulolu aritmeetiline keskmine
    - Skaalal 0-10 $m$ = 6,84
  - Erakondade reitingud – osakaal (%) vastanutest, kes valiksid teatud erakonda
    - Nt Reformierakonda toetab 26% valimiseelistust omavatest vastajatest
- Valimi alusel arvutatud statistik (nt keskmine) kehtib täpselt selle valimi kohta
- Parameetri tegelik väärtus võib sellest erineda
- Kui täpselt see statistik kirjeldab populatsiooni, st parameetri tegelikku väärtust?
- Sõltub sellest, kuivõrd on valim populatsioonis suhtes esinduslik
  - n-ö täpne väike koopia populatsioonist

# Valim ja populatsioon (ehk üldkogum)

- Mis valimi koostamisel tagab, et valim on võimalikult esinduslik populatsiooni suhtes?
- Põhimõtteliselt saaksime seada valimile seada kvoodid
  - kui palju peab valimis olema nt mehi ja naisi
  - kui palju peab valimis olema nt erinevate vanusrühmade esindajaid
- Saame valimi, mis on täpne koopia populatsioonist nende tunnuste lõikes
  - Samas ei taga see esinduslikkust teiste võimalike tunnuste suhtes
  - Nt kui arvamused, hinnangud, mida teada tahame, ei ole seotud soo ja vanusega
  - St arvamuste, hinnangute jaotus on samasugune meeste ja naiste seas

# Valim ja populatsioon (ehk üldkogum)

- Selleks, et valim oleks populatsiooni suhtes esinduslik kõikvõimalike tunnuste osas, on parim garantii valimi juhuslikkus (tõenäosuslik valim)
- Kõigil populatsiooni liikmetel nullist erinev tõenäosus sattuda valimisse
- Lihtne juhuvalim – tõenäosus valimisse sattuda on kõigil populatsiooni liikmetel võrdne
- Reeglina eeldab valikuraami (populatsiooni liikmete loendi) olemasolu
- Tänu valimi juhuslikkusele on valim võimalikult sarnane populatsioonile
- Samas võib just tänu juhuslikkusele valim siiski mingil määral populatsioonist erineda
- Mitte palju, aga teatud määral siiski
  - Nt populatsioonis on 55% naisi ja 45% mehi
  - Puhtalt juhuslikkuse tõttu võivad need osakaalud valimis natuke varieeruda, nt 57% naisi ja 43% mehi
  - Selle tõttu võivad erineda ka muud valimi alusel arvutatud parameetrid
  - Nt eluga rahulolu aritmeetiline keskmine populatsioonis on 6,77, aga meie saame valimi alusel 6,84

# Kui täpselt kirjeldab valimi alusel arvutatud näitaja populatsiooni?

- Näitaja väärtus populatsioonis – parameetri tegelik väärtus *(true value)*
  - Ei ole võimalik teada saada muidu, kui uurides kogu populatsiooni (nt rahvaloendus)
  - Teame rahvaloenduse alusel, kui palju on populatsioonis nt mehi ja naisi
  - Ei tea ega olegi võimalik teada saada paljusid muid näitajaid (nt keskmist eluga rahulolu)
  - Seega ei saa me ka teada, kui palju täpselt erineb valimi alusel saadud näitaja ehk parameetri hinnang parameetri tegelikust väärtusest
  - Küll aga saame hinnata vahemikku, kui palju valimi alusel saadud näitaja erineb selle tegelikust väärtusest
- Usaldusvahemik – valimi alusel arvutatav vahemik, mis katab parameetri tegeliku väärtuse teatud tõenäosusega
  - täpsemalt: teatud läve ületava tõenäosusega,
  - st tõenäosusega, mis ei ole väiksem kui usaldusnivoo (selgitame täpsemalt hiljem)

# Mõnede mõistete selgitus lühidalt

- Mõistete selgitus lühidalt
  - Usaldusvahemik jääb ülemise ja alumise usalduspiiri vahele
  - Punkthinnang vs vahemikhinnang
  - Erinevate näitajate puhul arvutatakse usaldusvahemik mõnevõrra erinevalt
  - Aga mõte sama
- Püüame järgnevalt selgitada usaldusvahemiku leidmise põhimõtteid

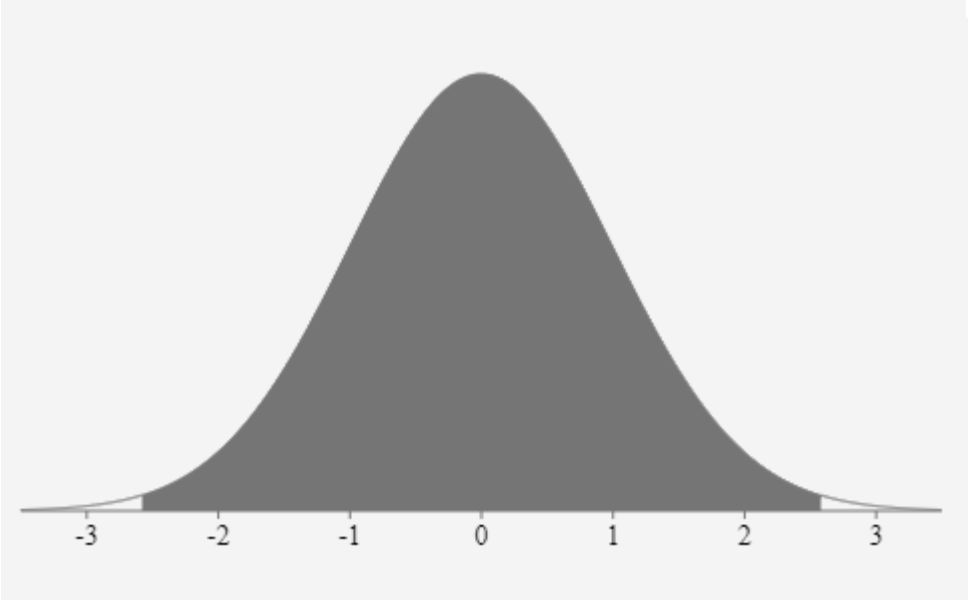
# Millel põhineb usalduspiiride arvutamine?

# Normaaljaotus ja standardhälve

- Tuletame meelde:
  - standardhälve näitab tüüpilist erinevust aritmeetilisest keskmisest
  - normaaljaotus on üks enamlevinud tüüpjaotus, paljude statistiliste meetodite rakendamise eeldus
  - standardiseeritud normaaljaotuse aritmeetiline keskmine on 0 ja standardhälve 1

# Normaaljaotus ja standardhälve

- Kui tunnus on normaaljaotusega, siis on teada, mitme standardhälbe kaugusel on teatud osa tunnuse väärtustest
  - 90% tunnuse väärtustest jääb vahemikku 1,64 standardhälvet keskmisest
  - 95% tunnuse väärtustest jääb 1,96 standardhälbe kaugusele
  - 99% tunnuse väärtustest jääb 2,58 standardhälbe kaugusele



# Teeme mõtteharjutuse

- Kujutame ette, et võtame populatsioonist 100 juhuvalimit
- Viime samade meetoditega läbi 100 uuringut
- Saame sama tunnuse kohta 100 keskmist
- Kuna tegu on juhuvalimitega, siis
  - enamiku valimite keskmised on populatsiooni keskmise lähedal
  - osad keskmised on populatsiooni keskmisest kaugemal
  - valimite alusel saadud keskmiste keskmine = populatsiooni keskmine
  - valimite keskmised jaotuvad normaaljaotuse kohaselt =>
  - sajast valimist vähemalt
    - 90 valimi keskmised jäävad vahemikku 1,64 standardhälvet populatsiooni keskmisest
    - 95 valimi keskmised jäävad vahemikku 1,96 standardhälvet populatsiooni keskmisest
    - 99 valimi keskmised jäävad vahemikku 2,58 standardhälvet populatsiooni keskmisest
- Valimite keskmiste standardhälvet nimetatakse standardveaks

# Standardviga

- Analoogselt eelnevalt kirjeldatuga saab öelda, et populatsiooni keskmisest on kuni 1,96 standardvea kaugusel vähemalt 95 valimi keskmised
- Standardviga saaks arvutada standardhälbe valemiga
  - Selleks oleks tarvis kõigi valimite põhjal arvutatud keskmisi
  - Õnneks saab standardvea arvutada lihtsamini valemiga $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ,kus
    - $\sigma$ – standardhälve populatsioonis, mis suure valimi puhul on ligilähedane standardhälbega valimis
    - $n$ – valimimaht

# Usaldusvahemik

- Seega, tähistades
  - $\mu$ – keskmine populatsioonis (keskmise tegelik väärtus)
  - $m$ – keskmine valimis,
- saab öelda, et vähemalt 95 valimis sajast kehtib tingimus:

$$\mu - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \mu + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Sellest tulenevalt saab ka öelda, et vähemalt 95 valimis sajast kehtivad tingimused:

$$\mu \geq m - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \leq m + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Olemegi jõudnud valimikeskmise alumise ja ülemise usalduspiiri ehk usaldusvahemiku valemiteni (täpsemalt: usaldusnivool 95%)
- Tuletame meelde usaldusvahemiku mõiste: vahemik, mis katab parameetri tegeliku väärtuse teatud läve ületava tõenäosusega
- Antud juhul usaldusnivoo ongi see lävi
- Mida see sisuliselt tähendab? Kuidas neid näitajaid tõlgendada? Vaatame konkreetse näite varal

# Usaldusnivoo

# Usaldusvahemiku näide

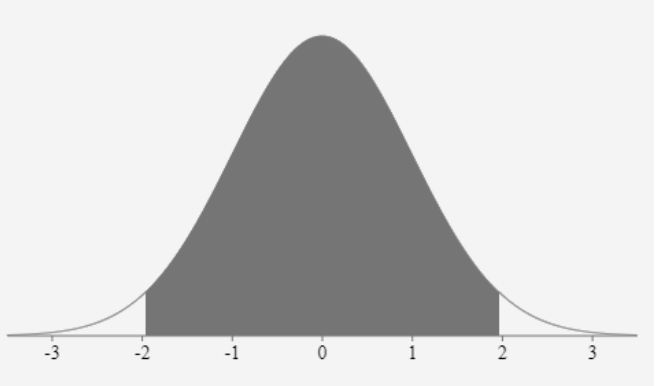
- ESS 2016 eluga rahulolu
- Valimikeskmine ehk keskmine valimis (skaalal 0-10) $m = 6{,}84$
- Arvutame keskmise usalduspiirid usaldusnivool 95%, kui
  - $n = 2019$
  - $\sigma \approx s = 2{,}02$
  - Alumine usalduspiir $m - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6{,}84 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}02}{\sqrt{2019}} = 6{,}84 - 0{,}09 = 6{,}75$
  - Ülemine usalduspiir $m + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6{,}84 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}02}{\sqrt{2019}} = 6{,}84 + 0{,}09 = 6{,}93$
- Mida saame selle põhjal öelda?
- Võttes aluseks usaldusnivoo 95%, saame öelda, et 2016. aastal oli Eesti 15+ elanikkonnas eluga rahulolu tegelik keskmine vahemikus 6,75 ja 6,93
- Mida näitab siin usaldusnivoo 95%?

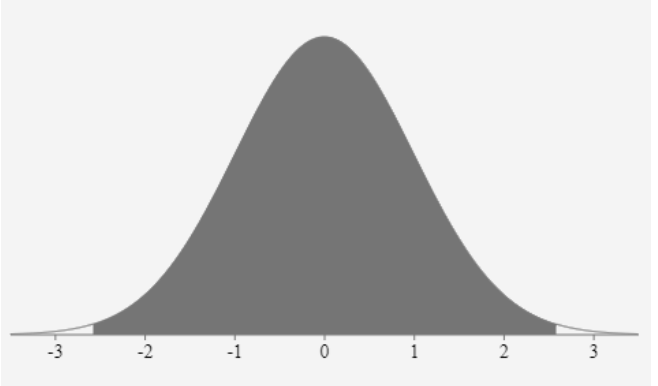
# Mida näitab siin usaldusnivoo 95%?

- Lihtsalt sõnastades: teatavat täpsuse (kindluse) astet
- Rakendades eelnevat 100 valimi hüpoteetilist näidet, siis
  - eeldades, et meie valim on üks neist 95-st valimist, mille puhul keskmine jääb 1,96 standardvea piiresse,
  - saab öelda, et eluga rahulolu tegelik keskmine populatsioonis paikneb valimi põhjal leitud usalduspiiride vahel
- Kust me teame, et meie valim on üks neist 95-st?
- Ei teagi :)
- Eeldame, et 95% on piisavalt kõrge usaldusnivoo, et meil peab väga kehv õnn olema, et juhuse tahtel võtame (oleme saanud) sellise valimi, mis on populatsioonist märkimisväärselt erinev
  - st sellise valimi, mis juhuse tahtel erineb populatsioonist niivõrd, et selle põhjal arvutatav usaldusvahemik ei kata tegelikku keskmist
- Võime valida, ka kõrgema usaldusnivoo, et olla kindlam, et usaldusvahemik katab keskmise tegeliku väärtuse
  - sel juhul on usaldusvahemik laiem

# Mida näitab usaldusnivoo?

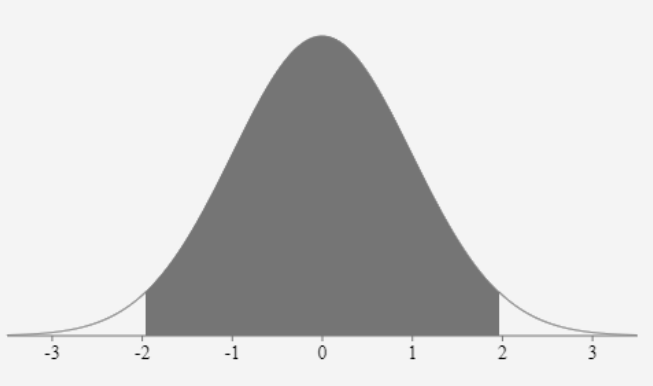
- Teisiti öeldes,
  - kui võtame usaldusnivoo 95%,
  - arvestame võimalusega, et
  - meie valim on (meie analüüsitava tunnuse jaotuse seisukohalt) 95 protsendi populatsiooniga kõige sarnasemate valimite seas;
  - me ei arvesta võimalusega, et meie valim võib olla 5 protsendi populatsioonist kõige rohkem erineva valimi seas
- Samalaadselt,
  - kui võtame rangema usaldusnivoo, 95% asemel 99%,
  - arvestame usaldusvahemiku arvutamisel võimalusega, et
  - meie valim ei pruugi olla 95 protsendi populatsiooniga kõige sarnasemate valimite seas,
  - st võib populatsioonist veel rohkem erineda;
  - seejuures ei arvesta me võimalusega, et meie valim võib olla 1 protsendi populatsioonist kõige rohkem erineva valimi seas

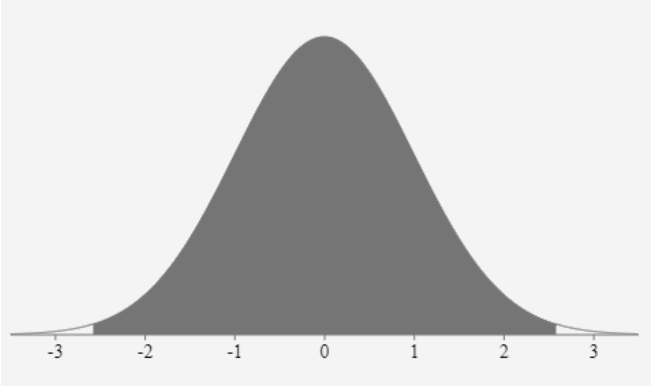


# Mida näitab usaldusnivoo?

- Mida rangema usaldusnivoo valime,
  - seda suuremat valimi erinevust populatsioonist peame võimalikuks ja
  - seda laiem on usaldusvahemik,
  - sest arvestame võimalusega, et meie valim erineb populatsioonist rohkem



# Usaldusnivoo valik

- Usaldusnivoo 95% on enim levinud usaldusnivoo (andmeanalüüsiprogrammides tihti vaikeseadena määratud)
- Kui tahame suuremat kindlust, et meie keskmise usaldusvahemik katab populatsiooni keskmise =>
  - Arvutame keskmise usaldusvahemiku usaldusnivool 99%
- Kui meil pole nii suurt kindlust vaja =>
  - Arvutame keskmise usaldusvahemiku nt usaldusnivool 90%
- Millest lähtuda usaldusnivoo valikul?
  - Kuivõrd tähtis on välistada võimalus, et usaldusvahemik ei kata tegelikku väärtust
  - Kui pole otsest vajadust tavalisest rangema/leebema usaldusnivoo järele, võib võtta 95%

# Usalduspiiride arvutamise valem

- Üldisem aritmeetilise keskmise usalduspiiride arvutamise valem (usaldusnivoo väärtus valemis fikseerimata)

$$\mu \geq m - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \leq m + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\mu$ – keskmine populatsioonis (keskmise tegelik väärtus)
- $m$ – keskmine valimis
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ – standardiseeritud normaaljaotuse $1-\frac{\alpha}{2}$-kvantiil, kus $\alpha$ on vea tõenäosuse piir
  - nt usaldusnivool 90% $\alpha = 10\%$, vastav $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}64$
  - nt usaldusnivool 95% $\alpha = 5\%$, vastav $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$
  - nt usaldusnivool 99% $\alpha = 1\%$, vastav $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$
- $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – keskmise standardviga:
  - $\sigma$ – standardhälve populatsioonis, suure valimi puhul ligilähedane standardhälbega valimis
  - $n$ – valimimaht

# Usaldusvahemik erinevatel usaldusnivoodel: näide

- ESS 2016 eluga rahulolu
- Valimikeskmine ehk keskmine valimis (skaalal 0-10) $m = 6{,}84$
- Arvutame keskmise usalduspiirid usaldusnivool 95%, kui
  - $n = 2019$
  - $\sigma \approx s = 2{,}02$
  - Alumine usalduspiir $m - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6{,}84 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}02}{\sqrt{2019}} = 6{,}84 - 0{,}09 = 6{,}75$
  - Ülemine usalduspiir $m + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6{,}84 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}02}{\sqrt{2019}} = 6{,}84 + 0{,}09 = 6{,}93$
- Usaldusnivool 99% ja 90% on kõik muud näitajad arvutustes samad, välja arvatud $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, mis on vastavalt 2,58 ja 1,64
- Eluga rahulolu keskmine hinnang oli 2016. aastal Eestis 6,84 palli,
  - 90% CI [6,77; 6,92]
  - 95% CI [6,75; 6,93]
  - 99% CI [6,73; 6,96]
- Usalduspiirid on keskmise suhtes sümmeetrilised, väikesed erinevused antud näites tulenevad ümardamisest

# Millest sõltub usaldusvahemiku laius?

$$\mu \geq m - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\mu \leq m + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Valimimaht
  - Suurem valimimaht => kitsam usaldusvahemik
- Tunnuse hajuvus
  - Väiksem hajuvus => kitsam usaldusvahemik
- Usaldusnivoo
  - Madalam usaldusnivoo => kitsam usaldusvahemik
- Kas selleks siis, et keskmise tegelikku väärtust võimalikult täpselt hinnata, on vaja suuremat valimimahtu, tunnuse väiksemat hajuvust ja madalamat usaldusnivood?
- Madalam usaldusnivoo tähendab ka suuremat eksimisvõimalust
- Kompromiss:
  - tulemuse suuremat konkreetsust taotledes kaotame tulemuse tõsikindluses,
  - tõepärasuse astet suurendades väheneb tulemuse konkreetsus

# Usaldusvahemiku tõlgendamine ja mõni praktiline aspekt veel

# Kuidas oleks õige usaldusvahemikku tõlgendada

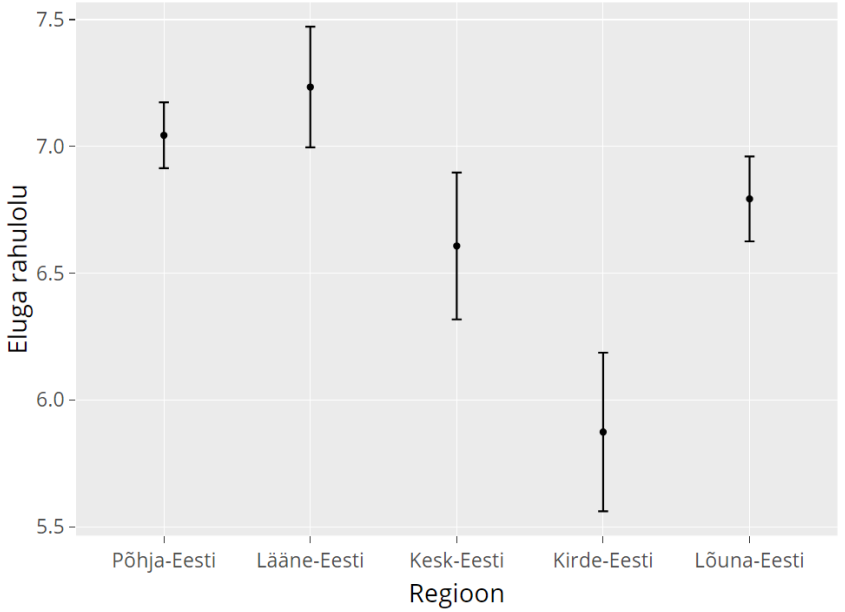
- 2016. aastal oli Eestis eluga rahulolu keskmine skaalal 0-10 6,84 palli, CI 95% [6,75; 6,93]
- Tihti tõlgendatakse nii, et tõenäosusega 95% on keskmise tegelik väärtus vahemikus 6,75 kuni 6,93
- Ei ole õige!

  Oluline vahet teha, mis on kindel ja mille kohta saab rakendada tõenäosuse (juhuslikkuse) mõistet
- Tegelik väärtus populatsioonis on kindel väärtus
  - Me ei tea selle väärtust, aga lähtume sellest, et ta on olemas
  - Võib ajas varieeruda, aga mõõtmise hetkel on konkreetne väärtus
- Valim, mille populatsioonist võtame, võib mingi tõenäosusega erineda populatsioonist
- 95% – tõenäosus saada valimit, kus eluga rahulolu keskmise usaldusvahemik (arvutatud usaldusnivool 95%) katab keskmise tegeliku väärtuse
- „Usaldusvahemik katab keskmise tegeliku väärtuse 95 juhul 100-st“
  - Õige, aga oluline teada, et „juhud“ ei viita indiviididele, vaid valimitele!
  - Sealjuures hüpoteetilistele valimitele (st tegelikkuses eksisteerib meil ainult üks valim)

# Usaldusvahemike arvutamine grupiti

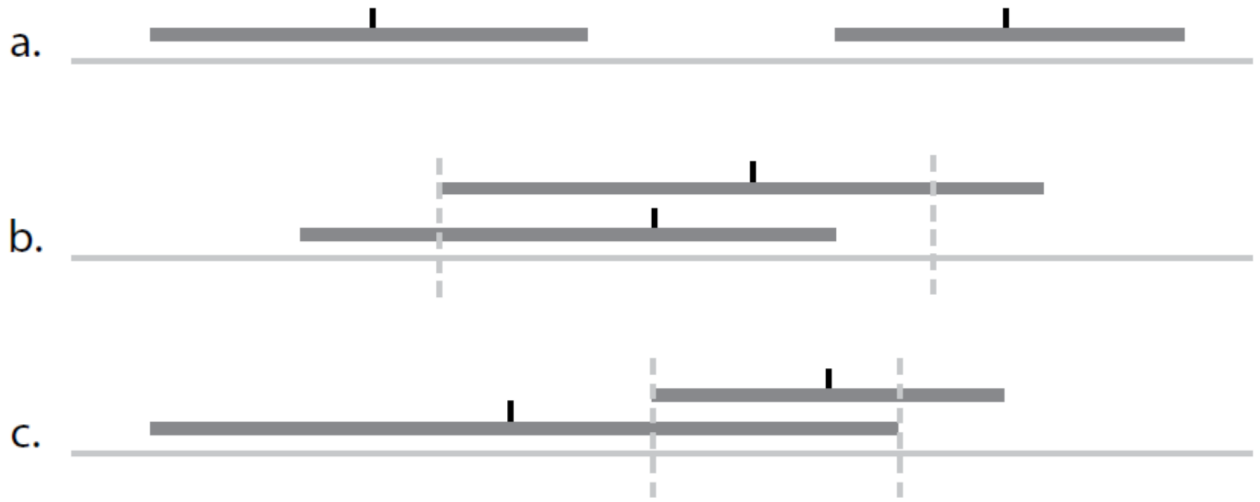
- Arvutame ESS 2016 põhjal eluga rahulolu regiooni lõikes usaldusnivool 95%
- Usaldusnivool 95% saab öelda, et
  - eluga rahulolu alusel eristuvad kolm regioonide rühma
  - Põhja- ja Lääne-Eestis oli eluga rahulolu keskmine üle 7 või 7 piirimail
  - Kesk- ja Lõuna-Eestis jäi eluga rahulolu keskmine alla 7 palli
  - Kirde-Eestis oli eluga rahulolu teistest regioonidest madalam ja keskmine jäi alla 6,2 palli
- Kas eluga rahulolu keskmised Põhja-Eestis ja Lõuna-Eestis erinevad?
- Usaldusvahemikud kattuvad, kuigi vähesel määral
- Keskmiste usaldusvahemike võrdlemisel seda väita ei saa
- Kui usaldusvahemikud kattuvad, siis keskmiste erinevuse osas saaks täpsema järelduse teha t-testi (keskmiste erinevuse usaldusvahemiku) põhjal – vaatame järgmine kord

| Regioon | Keskmine | Standardviga | Alumine usalduspiir | Ülemine usalduspiir |
|---|---|---|---|---|
| Põhja-Eesti | 7,04 | 0,07 | 6,91 | 7,17 |
| Lääne-Eesti | 7,23 | 0,12 | 7,00 | 7,47 |
| Kesk-Eesti | 6,61 | 0,15 | 6,32 | 6,90 |
| Kirde-Eesti | 5,87 | 0,16 | 5,56 | 6,19 |
| Lõuna-Eesti | 6,79 | 0,09 | 6,63 | 6,96 |



# Usaldusvahemike arvutamine grupiti

- Lihtne viis keskmiste usaldusvahemike alusel võrdlemise „usaldamiseks“




a. Saab erinevust väita
b. Erinevust ei saa väita
c. Kontrolli keskmiste erinevuse usaldusvahemikku või mõne statistilise testi alusel

Tooding (2015: 165)

# Millal ei ole kohane arvutada usaldusvahemikke

- Kui tegu pole valimiandmetega
  - Nt rahvaloendus, registriandmed
- Kui tegu pole tõenäosusliku valimi andmetega
  - AAPOR: mittetõenäosusliku valimi puhul usaldusvahemike jt statistilisi järeldusi võimaldavate näitajate esitamine eksitav, ei tohiks teha
  - Nt mugavusvalim, ekspertvalim, ka kvootvalim ei ole tõenäosuslik valim
  - Ei saa eeldada valimiliikmete juhuslikkust ja sõltumatust
  - Kvootvalim?
  - Erinevate mittetõenäosuslike valimite esinduslikkus populatsiooni suhtes erinev
  - Kui siiski arvutatakse usaldusvahemik, tuleb
    - lugejat valimi mittetõenäosuslikkusest ja usaldusvahemike ebatäpsusest selgelt teavitada
    - järelduste tegemisel olla ettevaatlik