

# Usalduspiirid

Kvantitatiivsed meetodid

Indrek Soidla

# Usaldusvahemik

- Valimi alusel arvutatud statistik (nt aritmeetiline keskmine) kehtib täpselt valimi kohta
- Kui täpselt kirjeldab see populatsiooni?
- Usaldusvahemik – vahemik, mis katab statistiku tegeliku väärtuse populatsioonis teatud tõenäosusega (täpsemalt: teatud läve ületava tõenäosusega)
  - NB! Eeldab, et valim on juhuslik kogum populatsioonist
  - = tõenäosuslik valim
- Punkthinnang vs vahemikhinnang
- Erinevate statistikute puhul arvutatakse mõnevõrra erinevalt, aga mõte sama

# Usaldusvahemik

- Usalduspiirid aritmeetilise keskmise puhul

$$\mu \geq m - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu \leq m + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\mu$  – keskmine populatsioonis
- $m$  – keskmine valimis
- $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  – standardiseeritud normaaljaotuse  $1 - \frac{\alpha}{2}$  kvantiil, kus  $\alpha$  on vea tõenäosuse piir
  - nt usaldusnivool 90%  $\alpha = 10\%$ , vastav  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$
  - nt usaldusnivool 95%  $\alpha = 5\%$ , vastav  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$
  - nt usaldusnivool 99%  $\alpha = 1\%$ , vastav  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$
- $\sigma$  – dispersioon
- $n$  – valimimaht
- Näide R-s

# Millest sõltub usaldusvahemiku laius?

- Valimimaht
  - Suurem valimimaht => kitsam usaldusvahemik
- Tunnuse hajuvus
  - Väiksem hajuvus => kitsam usaldusvahemik
- Usaldusnivoo
  - Madalam usaldusnivoo => kitsam usaldusvahemik
- Kas selleks siis, et tulemuses maksimaalselt kindel olla, on vaja suuremat valimimahtu, tunnuse väiksemat hajuvust ja madalamat usaldusnivood?
- Madalam usaldusnivoo tähendab ka suuremat eksimisvõimalust

# Usaldusvahemik

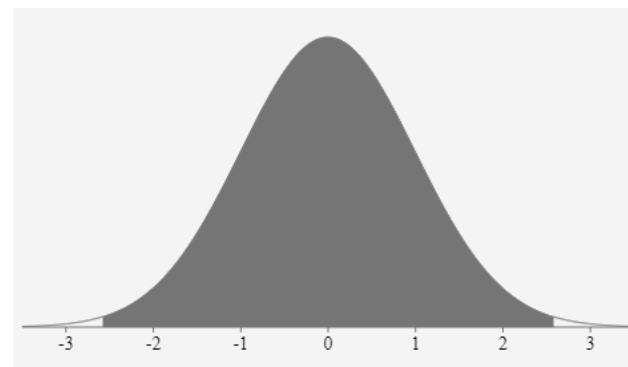
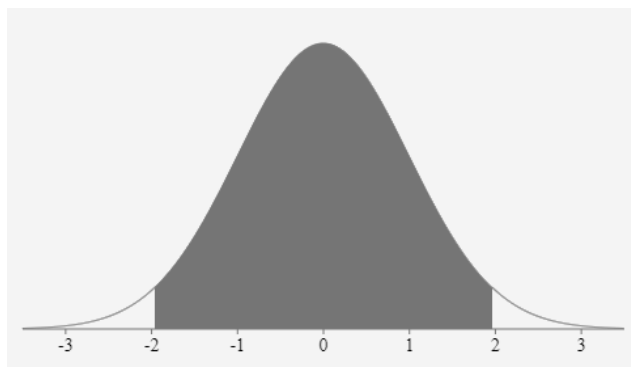
- Mida saame väita usalduspiiride põhjal?
- Usaldusnivool 95% saame väita, et...
  - nt Kesk-Eestis on hinnangute tegelik keskmine vahemikus 4,14 ja 4,92

# Mida näitab usaldusnivoo?

- Valikuviga – juhuslik viga, mille põhjus on see, et üldkogumi asemel käsitletakse juhuvalimit
  - Üldkogumi asemel käsitletakse juhuvalimit – valim ei pruugi olla täpne koopia populatsioonist
  - St tunnuste jaotused valimis ei pruugi olla identsed tunnuste jaotustega populatsioonis
  - Jahuvaliku tõttu ei saa jaotused valimis ja üldkogumis erineda väga palju, aga teatud (väikeses) ulatuses saavad
  - St meil võib juhuslikult olla valim, mis (meie analüüsitava tunnuse jaotuse seisukohalt) erineb populatsioonist vähe, aga võib juhuslikult olla ka valim, mis erineb populatsioonist rohkem
- Usaldusnivood võib tõlgendada kui indikaatorit selle kohta, kas usaldusvahemiku arvutamisel arvestatakse suurema või väiksema valikuveaga (valitakse vastavalt kas rangem või leebem usaldusnivoo)

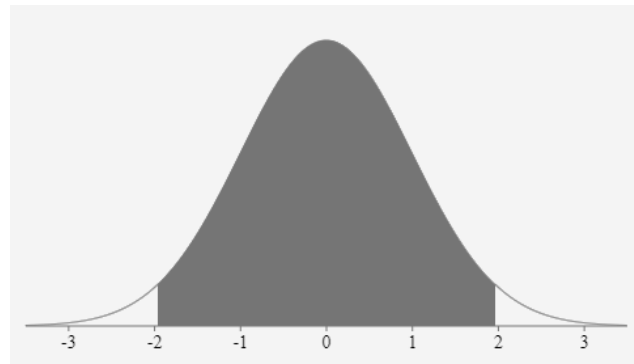
# Mida näitab usaldusnivoo?

- Teisiti öeldes,
  - kui võtame usaldusnivoo 95%,
  - arvestame võimalusega, et
  - meie valim on (meie analüüsitava tunnuse jaotuse seisukohalt) 95 protsendi populatsiooniga kõige sarnasemate valimite seas;
  - me ei arvesta võimalusega, et meie valim võib olla 5 protsendi populatsioonist kõige rohkem erineva valimi seas
- Samalaadselt,
  - kui võtame rangema usaldusnivoo, 95% asemel 99%,
  - arvestame usaldusvahemiku arvutamisel võimalusega, et
  - meie valim ei pruugi olla isegi 95 protsendi populatsiooniga kõige sarnasemate valimite seas,
  - st võib populatsioonist veel rohkem erineda;
  - samas ei arvesta me võimalusega, et meie valim võib olla 1 protsendi populatsioonist kõige rohkem erineva valimi seas



# Mida näitab usaldusnivoo?

- Mida rangema usaldusnivoo valime,
  - seda suuremat valimi erinevust populatsioonist peame võimalikuks ja
  - seda laiem on usaldusvahemik (sest arvestame võimalusega, et meie valim erineb populatsioonist rohkem)





# Kuidas tõlgendada usaldusvahemikku?

- Millised tõlgendused alljärgnevaist on õiged?
- *Keskmise usaldusvahemik sisaldab 95% indiviidide väärtused*
- *95%-lise tõenäosusega sisaldab usaldusvahemik keskmise tegelikku väärtust*
- *Usaldusvahemik katab keskmise tegeliku väärtuse 95 juhul 100-st*
  - Mida siin tähendab „95 juhul 100-st“?
- *Tõenäosus, et keskmise tegelik väärtus on usaldusvahemikus, on 95%*
  - Miks on selline väide problemaatiline? Vaatame lähemalt

# Usaldusvahemik ja tõenäosus

- Ei ole täpne öelda, et saame usaldusvahemikku 95% usaldada, või usaldusvahemikus 95% kindel olla
- Tõsi, meie ei tea täpselt, kas arvutatud usaldusvahemik katab tegeliku väärtuse või mitte, aga
- mingi valimi alusel juba leitud usaldusvahemik kas katab tegeliku väärtuse või ei kata
- Kui ikkagi tahame rääkida tõenäosusest, et juba arvutatud usaldusvahemik katab tegeliku väärtuse, siis see tõenäosus on kas 100% või 0%, mitte 95%
  - St usaldusvahemik kas katab tegeliku väärtuse või ei kata
- Tiit ja Tooding (2019: 275): *keskväärtuse hinnangu kahepoolne 0,95-usalduspiirkond on lõik, mis katab üldkogumi keskväärtuse vähemalt tõenäosusega 0,95*
- Ei tule eesti keeles hästi välja: mõeldud on üldist definitsiooni, st olukorda, kus meil ei ole andmeid ega usaldusvahemikku

# Usaldusvahemik ja tõenäosus

- *Confidence level – the probability the interval **will** contain the true value* ([MacKenzie 2017](#))
  - Kui võtame populatsioonist valimi, siis
  - vähemalt 95%-lise tõenäosusega saame valimi (ehk andmed), mille alusel arvutatava keskmise usaldusvahemik (arvutatud usaldusnivool 95%) katab keskmise tegeliku väärtuse
- Arvutades mitmete valimite põhjal keskmiste usaldusvahemikud usaldusnivool 95%, katavad neist vähemalt 95% keskmise tegelikku väärtust
- Usaldusnivoo – tegelikku väärtust katvate usaldusvahemike minimaalne sagedus hüpoteetiliste valimite korral
- NB! Enamik valetõlgendusi tulevad sisse seal, kus kasutatakse tõenäosuse terminit
- Kui pole kindel, et tõlgendada õigesti, ära tõenäosuse (ega muud sarnast) mõistet sisse too
- Oluline: kui kõneleme tõenäosusest, siis tähendab see
  - tõenäosust saada andmeid (mille puhul keskmise usaldusvahemik katab tegeliku väärtuse)
  - mitte tõenäosust, et statistik (nt keskmine) või selle tegelik väärtus on mingi väärtusega

# Miks on oluline terminoloogias täpne olla?

- Et potentsiaalset lugejat mitte eksitada :)
- Et ise kompetentseid järeldusi teha

# Mida saame väita usalduspiiride põhjal?

- Usaldusnivool 95% saame väita, et...
  - Kesk-Eestis on hinnangute tegelik keskmine vahemikus 4,14 ja 4,92
  - Kirde-Eestis on hinnangute tegelik keskmine vahemikus 3,73 ja 4,43
  - Lääne-Eestis on hinnangute tegelik keskmine vahemikus 4,26 ja 4,88
  - keskmised võivad neis regioonides kattuda
- Kas saame väita, et usaldusnivool 95% keskmised neis regioonides ei erine?
- Kui statistiliselt täpne olla, siis ei saa
- Miks?
- Täpsema hinnangu annab keskmiste erinevuse (vahe) usaldusvahemik

# Keskmiste vahe usalduspiirid

- Keskmiste vahe usalduspiiride arvutamine

$$\mu_1 - \mu_2 = m_1 - m_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

- R-s võimalik arvutada, lihtsamalt saab t-testiga
  - Nt sõltumatute kogumite t-test hindabki, kas kahe grupi keskmiste vahe erineb nullist
- Meie näites Kirde- ja Lääne-Eesti keskmiste vahe usaldusvahemik ei sisalda nulli, seega
  - hoolimata keskmise rahulolu usaldusvahemike kattumisest saame väita, et
  - usaldusnivool 95% keskmine hinnang Kirde- ja Lääne-Eestis erineb

# Usaldusvahemik

- Lihtne viis keskmiste usaldusvahemike alusel võrdlemise „usaldamiseks“



- a. Saab erinevust väita
- b. Erinevust ei saa väita
- c. Kontrolli keskmiste erinevuse usaldusvahemikku või mõne statistilise testi alusel

# Usaldusvahemik

- Praktikumiülesanne
  - Vastajatelt küsiti ka, kui tõenäoline on, et piisaval hulgal valitsusi rakendab meetmeid kliimamuutuse vähendamiseks (tunnus gvsrdcc)
  - Millised on selle arvamuse keskmise punkthinnangud ja vahemikhinnangud haridustasemeti?
  - Mida saab väita nende usaldusvahemike võrdlemise põhjal?
  - Milliste gruppide vahel saab populatsiooni tasandil väita erinevuste esinemist usaldusnivool 95%?
  - Tehke arvutused lihtsuse mõttes kaalumata andmetega, kui aega jääb, proovige ka kaalutud andmetega



# Usaldusvahemik: osakaalud

- Usalduspiirid osakaalude (protsentide) puhul

$$p \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_p$$
$$s_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- $p$  – osakaal
- $s_p$  – osakaalu standardviga
- Mida lähemal osakaal 50%-le, seda laiem on usaldusvahemik
  - Näide R-s
- Pool usaldusvahemikust ehk  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_p$  = veapiir
- Korrektne kasutada ainult tõenäosusliku valimiga uuringu puhul
  - See eeldus kehtib igasuguse järeltava analüüsi kohta

# Osakaalude võrdlemine

- Samamoodi nagu keskmiste puhul, tuleks täpsema erinevuste väitmise jaoks ka osakaalude puhul arvesse võtta osakaalude erinevuse usalduspiire
- Kuidas osakaalude vahe usalduspiire arvutada?
- Sõltub sellest, kas osakaalud on kahest erinevast jaotusest või samast jaotusest
- Nt erakondade reitingute uurimise puhul: kas uurime erinevust ühe erakonna reitingutes kahel erineval ajahetkel või erakondade reitingute erinevusi samal ajahetkel
- Esimene juhtum: kahe osakaalu z-test (sõltumatute kogumite z-test)

$$Z_p = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- Näide R-s
- Enam-vähem täpne osakaalude erinevuse usaldusvahemiku kiirhinnang: veapiir\*1,5 (eeldusel, et veapiirid on mõlema kogumi puhul sarnased)

# Osakaalude võrdlemine

- Teine juhtum (erakondade reitingute erinevused samal ajahetkel): Scott ja Seber (1983)

$$p_1 - p_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_1 + p_2 - (p_1 - p_2)^2}{n}}$$

- Kas saame uuringu andmetel usaldusnivool 95% öelda, et RE ja KE reiting septembris on populatsiooni tasandil erinev (eeldades, et täisarvulised protsendid on täpsed ja et vastajad moodustavad juhusliku kogumi populatsioonist)?
- Enam-vähem täpne vahe usaldusvahemiku kiirhinnang: veapiir\*2 (eeldusel, et veapiirid on mõlema kogumi puhul sarnased)

# Mida me tegelikult eeldame, kui teeme järeldavat statistilist analüüsi

- Usaldusvahemik / olulisuse tõenäosus on täpne eeldusel, et arvutuse aluseks olnud meetodite eeldused kehtivad
- St kehtivad KÕIK meetodite eeldused, sh
  - konkreetse analüüsimeetodi eeldused (nt tunnuste tüübiga seotud eeldused, regressioonanalüüsi puhul jääkide homoskedastilisus jm)
  - hüpoteesid on korrektselt sõnastatud ja operatsionaliseeritud
  - andmetele esitatavad eeldused (tõenäosuslik valim, indiviidide sõltumatus üksteisest)
  - ei esine teisi uuringuvigu (nt kaetuse viga, mittevastamise viga, mõõtmisviga – vt uuring koguvea kontseptsioon)

# Mida me tegelikult eeldame, kui teeme järeldavat statistilist analüüsi

- Pole realistlik, et eeldused on 100% täidetud
- *All models are wrong, but some are useful*
- Realistlik mitte küsida, kas saadud näitajad on õiged või valed, vaid mil määral võime järelduste tegemisel eksida
- Oluline!
  - Tunda analüüsimeetodeid
  - Tunda andmekogumismeetodeid ja teada, kuidas andmed on saadud
  - Mõista, kui kategoorilisi järeldusi on mõistlik teha