Note di

Teoria delle Categorie

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 7 dicembre 2021

Indice

1

Categorie

1.1 Definizione

Esempio 1.1. Assumiamo che il lettore abbia almeno una vaga idea di cosa sia un insieme e cosa una funzione tra insiemi; in tal caso, se A e B sono due insiemi, per indicare una funzione f da A a B scriviamo $f : A \to B$. Due funzioni si possono comporre: se abbiamo due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, abbiamo anche la funzione $g \circ f : A \to C$, che manda ciascun $x \in A$ in $g(f(x)) \in C$. L'operazione di composizione ha un paio di proprietà notevoli. La prima è che vale

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.1}$$

per ogni terna di funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$. La seconda è che su ogni insieme A la funzione $1_A : A \to A$, $1_A(x) := x$ è tale che

$$f \circ 1_A = f \text{ per ogni } f : A \to B \tag{1.2}$$

$$1_A \circ g = g \text{ per ogni } g : C \to A\,. \tag{1.3}$$

Quanto appena evidenziato fa la categoria degli insiemi.

Esempio 1.2 (La categoria degli spazi topologici)**.** Adesso spostiamo l'attenzione alla Topologia: qui abbiamo gli spazi topologici e le funzioni continue tra spazi topologici. Uno spazio topologico è precisamente un insieme in cui si stabilisce quali sottoinsiemi sono aperti (ci sono degli assiomi ovviamente). Una funzione continua $f : X \to Y$, con X e Y spazi topologici, è esattamente una funzione di insiemi $f : X \to Y$ tale che per ogni aperto U di Y l'insieme $f^{-1}U$ è un aperto di X. Il primo fatto importante di tutto questo è: componendo due funzioni continue si ottiene una funzione continua, il che è molto rapido da provare. Visto che in primo luogo le funzioni continue sono funzioni di insiemi, vale anche per le funzioni continue la proprietà (1.1). Anche la funzione identità è una funzione continua e si comporta come (1.2) e (1.3).

categoria

- oggetti
- frecce
- composizioni
- assiomi categoriali

Figura 1.1. "Ontologia" di una categoria: dare una categoria significa dare assieme questi dati..

Esercizio 1.3. Si potrebbe fare lo stesso con i gruppi, gli spazi vettoriali, gli spazi misurabili, gli spazi di probabilità... Imita quello che abbiamo fatto, cioè rilevare una certa struttura.

Insomma, dovrebbe essere chiara l'idea di categoria che possiamo astrarre da questi esempi.

Definizione 1.4 (Categorie)**.** Un *categoria* $\mathcal{C}$ consiste di quanto segue:

- una collezione di *oggetti*, denotata con $|\mathcal{C}|$
- per ogni coppia di oggetti x e y di $\mathcal{C}$ di una collezione di *frecce* da x a y, indicata con $\mathcal{C}(x, y)$
- per ogni terna x, y e z di oggetti di $\mathcal{C}$ una funzione

$$\mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z)\,, \quad (g,f) \to gf$$

  detta *composizione*

con i seguenti assiomi, che per noi sono gli *assiomi categoriali*:

1. *associatività delle composizioni*: per ogni $a, b, c, d \in |\mathcal{C}|$ e per ogni $f \in \mathcal{C}(a, b)$, $g \in \mathcal{C}(b, c)$ e $h \in \mathcal{C}(c, d)$ si ha che

$$(hg)f = h(gf)$$

2. *esistenza delle identità*: per ogni oggetto $x \in |\mathcal{C}|$ esiste una freccia $i \in \mathcal{C}(x, x)$, *identità* su x, tale che

$$if = f \text{ per ogni } f \in \bigcup_{a\in|\mathcal{C}|} \mathcal{C}(a,x)$$
$$gi = g \text{ per ogni } g \in \bigcup_{b\in|\mathcal{C}|} \mathcal{C}(x,b)\,.$$

Come sempre, le notazioni possono variare. Alcuni scrivono $x \in \mathcal{C}$ per dire che x è un oggetto della categoria $\mathcal{C}$, invece del più corretto $x \in |\mathcal{C}|$. Alcuni al posto di $f \in \mathcal{C}(x, y)$ scrivono $f : x \to y$ lasciando intuire dal contesto in quale categoria si sta lavorando; quando tipograficamente sia possibile, esiste anche la scrittura

$$x \xrightarrow{f} y.$$

Senza contare che esiste anche la notazione $\hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ per indicare $\mathcal{C}(x, y)$; anche qui, se il contesto è chiaro si può scrivere semplicemente $\hom(x, y)$.

Alcuni usano il simbolo $\circ$ esplicitamente per indicare le composizioni, altri scrivono gf invece di $g \circ f$, ritenendo che non sia possibile alcuna ambiguità di significato. Il punto è che ogni notazione ha i suoi vantaggi e svantaggi, e noi potremmo usarne di diverse.

Se $f \in \mathcal{C}(x, y)$, gli oggetti x e y vengono chiamati *dominio* e *codominio* di f, rispettivamente. Diremo che due frecce f e g sono *componibili* quando si può fare la composizione gf, vale a dire quando il dominio di g è il codominio di f. Generalizzando, delle frecce $f_0, \dots, f_n$, con $n \geq 1$, si dicono componibili quando il codominio di f_i è il dominio di f_{i+1} per ogni $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Essendo le composizioni associative, $(hg)f$ e $h(gf)$ sono la stessa cosa, e questo elimina ogni ambiguità sul cosa si intende con hgf; generalizzando ad un numero finito di composizioni, neppure la scrittura

$$f_n f_{n-1} \cdots f_1 f_0$$

è fraintendibile (certo, viene più naturale effettuare le composizioni procedendo da sinistra a destra).

Nota 1.5 (Questioni di grandezza)**.** Nella definizione 1.4 abbiamo volutamente usato il termine vago di “collezione” per un motivo: non è affatto scontato che uno sia andato oltre la Teoria Naïve degli Insiemi (quelle nozioni elementari di insiemistica impartite all'Università, per esempio) e, a dire il vero, non è nemmeno pensabile pretendere ciò.[1]
Se a qualcuno interessa, chi ha scritto queste pagine ha studiato la Teoria degli Insiemi alla Von Neumann-Bernays-Gödel, in sigla NBG (vedi [Ber16]). Per esempio, si potrebbe richiedere in definizione che in una categoria $\mathcal{C}$ la collezione $|\mathcal{C}|$ sia una classe e che le collezioni $\mathcal{C}(a, b)$ insiemi, al variare di $a, b \in |\mathcal{C}|$, lasciando tutto il resto della definizione 1.4 invariato. Esistono poi altre impostazioni anche: ad esempio in [AHS04] si contemplano addirittura i *conglomerati* che rendono possibili le *quasi-categorie*.
La domanda che uno potrebbe farsi allora è: per fare Teoria delle Categorie serve avere fatto una qualche Teoria Assiomatica degli Insiemi? Certamente male non fa, ma tendenzialmente non lo si considera un prerequisito stretto: sono ristretti, infatti, i punti in cui bisogna usare prudenza, per il resto si va abbastanza tranquilli.
Comunque sia, in queste pagine si adotta un approccio abbastanza spensierato rispetto a questi temi, come in [Gol06] o in [Lei16].

Teorema 1.6. In una categoria, ogni oggetto ha a sé una sola identità.

Dimostrazione. Sia x un oggetto di una categoria qualsiasi (in questa sede non è necessario darle un nome) con l'identità $u : x \to x$. Sia $v : x \to x$ un'altra freccia della stessa categoria che sia un'identità su x. Allora abbiamo che, applicando il secondo degli assiomi categoriali, $u = uv = v$. □

Esercizio 1.7. Eppure un teorema così semplice ha delle conseguenze non da poco: in una categoria “ci sono tanti oggetti quante sono le identità in tutta la categoria”; oppure, in termini dal sapore più matematico, esiste una biezione

$$|\mathcal{C}| \to \{1_x\}_{x \in |\mathcal{C}|}.$$

E se si pensasse, proprio in virtù di questo fatto, di fare di ciascun oggetto e della sua identità la stessa cosa? In tal caso le conseguenze sulla definizione di categoria sarebbero che gli attori di una categoria si ridurrebbero a due: frecce e composizioni tra frecce. Fatti suggestionare da questa idea e prova a dare tu una definizione in questo senso.

Vogliamo avere anche la nozione di sotto-categoria.

Definizione 1.8 (Sottocategorie)**.** Data una categoria $\mathcal{C}$, una *sottocategoria* $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ è una categoria che consta di:

- una collezione di oggetti $|\mathcal{D}| \subseteq |\mathcal{C}|$
- per ogni coppia di oggetti x e y di $\mathcal{D}$ una collezione di frecce $\mathcal{D}(x, y) \subseteq \mathcal{C}(x, y)$ chiusa composizioni (ovvero: per ogni coppia di frecce f e g di $\mathcal{D}$ componibili anche gf è una freccia di $\mathcal{D}$).

La sottocategoria $\mathcal{D}$ è detta *piena* qualora $\mathcal{D}(x, y) = \mathcal{C}(x, y)$ per ogni oggetto x e y di $\mathcal{D}$.

1 Una quasi provocazione: prendere un matematico a caso, e chiedergli se conosce gli assiomi di Von Neumann-Bernays-Gödel o di Zermelo-Fraenkel.

1.2 Diagrammi commutativi

La Teoria delle Categorie si porta con sé un elegante e trasparente linguaggio: quello dei digrammi commutativi.

Un *diagramma*, in parole povere, è un disegno fatto di posizioni e frecce: le posizioni sono i posti da riempire con i nomi di oggetti e le frecce stanno a rappresentare, appunto, le frecce tra oggetti. Visto che le identità ci sono sempre, non ci scomodiamo a disegnarle. Una freccia che non sia l'identità e che abbia dominio e codominio uguali si può disegnare come

$$\circlearrowleft$$

oppure ripetere il nome dell'oggetto due volte e connettere le copie (non importa in questo caso il verso). La cosa importante è che frecce disegnate consecutivamente rappresentano composizioni di frecce. Due frecce consecutive

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] & & c \end{tikzcd}$$

si riducono naturalmente alla freccia composizione

$$a \xrightarrow{gf} c \ .$$

Si può generalizzare ovviamente:

$$x_0 \xrightarrow{f_0} x_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} x_n$$

dà naturalmente la composizione

$$x_0 \xrightarrow{f_{n-1}\cdots f_0} x_n \ .$$

Nota 1.9. Uno di istinto si aspetterebbe, per esempio, di ottenere

$$x \xrightarrow{fg} z$$

da

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$$

vale a dire comporre assecondando il verso delle frecce. E invece no. Questa non è una patologia del linguaggio appena introdotto, quanto una caratteristica dell'operazione di composizione: infatti (e questo lo insegnano anche alle Scuole Superiori) la scrittura $(g \circ f)(x)$ significa $g(f(x))$, cioè in sostanza "si valuta prima f e poi g", ritrovando così l'ordine di lettura invertito dei diagrammi. Questo modo di fare è talmente radicato nella pratica che tendenzialmente ci si conforma. Esiste comunque una notazione, comoda molte volte e scomoda molte altre, che vuole assecondare lo scorrimento nella lettura:

$$f; g := g \circ f = gf.$$

In queste pagine useremo la notazione classica, quella che abbiamo dato dall'inizio. Va da sé che uno, tranquillamente, potrebbe riscrivere queste pagine usando la notazione alternativa. L'importante è fare una scelta e mantenersi fedeli e coerenti a questa.

Un diagramma è detto *commutativo* quando, comunque presi due oggetti nel diagramma, danno la stessa composizione percorsi di frecce consecutive che partono da uno qi questi due e terminano nell'altro.

Esempio 1.10.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] & \bullet \arrow[dr, "f_2"] & \\
\bullet \arrow[r, "g_2"'] & \bullet & \bullet \arrow[l, "f_3"]
\end{tikzcd}$$

commuta quando $f_3 f_2 f_1 = g_2 g_1$.

Esempio 1.11.

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "g_1"] \arrow[r, "g_2"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

commuta quando $f_1 = g_1 h$ e $f_2 = g_2 h$.

Nota 1.12 (Assiomi Categoriali, riscritti)**.** Cosa significa che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "g"] & & d \\
a \arrow[ur, "f"] & & c \arrow[ur, "h"] &
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

commuta? Coomponendo le prime due e le ultime due frecce abbiamo

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "g"] \arrow[rr, red, "hg"] & & d \\
a \arrow[ur, red, "f"] \arrow[rr, blue, "gf"'] & & c \arrow[ur, blue, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

in cui abbiamo evidenziato con due colori diversi due percorsi di frecce consecutive. Il fatto che (1.4) commuta significa precisamente che questi due percorsi danno la stessa composizione: ovvero $h(gf) = (hg)f$.
Invece, cosa significa che

$$a \xrightarrow{f} b \tag{1.5}$$

commuta? C'è l'identità su $1_a : a \to a$, e questo ci porta a considerare un ulteriore percorso di frecce consecutive da a a b

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "1_a"'] & \\
& b \, . \\
a \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Pertanto il fatto che commuta (1.5), implica che $f 1_a = f$; si riesce a vedere anche che segue $1_b f = f$.

1.3 Esempi

Esempio 1.13. Diamo un po' di nomi.
Set è la *categoria degli insiemi*: gli insiemi assumono il ruolo degli oggetti, le funzioni quello delle frecce e le composizioni di funzioni quello delle composizioni. Le nozioni basilari date sull'insiemistica sono sufficienti a verificare gli assiomi categoriali.

Grp è la *categoria dei gruppi*: gli oggetti sono i gruppi, le frecce sono gli omomorfismi di gruppo, e le composizioni sono le composizioni di omomorfismi (che alla fine ha nulla in più rispetto alla composizione di funzioni).
$\mathbf{Vect}_k$ è la *categoria degli spazi vettoriali* su un dato campo k: gli oggetti sono gli spazi vettoriali su k, le frecce sono le applicazioni lineari e le composizioni sono le composizioni di applicazioni lineari. Una sua sottocategoria piena notevole è $\mathbf{FDVect}_k$: in questo caso gli oggetti sono gli spazi vettoriali a dimensione finita.
Top è la *categoria degli spazi topologici*: gli oggetti sono gli spazi topologici, le frecce sono le funzioni continue e le composizioni sono composizioni di funzioni continue.

Esempio 1.14. Una categoria molto semplice è quella che consiste di un solo oggetto e di una sola freccia, che si può disegnare come

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right, "1_\bullet"] \end{tikzcd}$$

Osserviamo che come freccia c'è almeno l'identità e quindi quell'unica freccia deve essere l'identità. Per questo motivo il precedente disegno si riduce al più minimale

$$\bullet$$

Una siffatta categoria si indica con $\mathbf{1}$.

Nota 1.15. Qua c'è già un cavillo: cos'è $\bullet$? Qualsiasi cosa tu voglia. E poi cosa può essere l'identità su, ad esempio, un fiore? Prendi qualcosa e (importante) imponigli di rispettare delle proprietà astratte. Potrebbe essere benissimo la coppia (❀, ❀). Quando parleremo di funtori, capiremo in in che senso non importa cosa sia sia precisamente quell'oggetto e, conseguentemente, la sua identità.

Esempio 1.16. Si può generalizzare quanto visto nell'esempio precedente: una collezione qualsiasi di oggetti può essere pensata come una categoria in cui gli oggetti sono gli elementi della collezione e le uniche frecce sono le identità sui rispettivi elementi.

Esempio 1.17 (Categoria vuota)**.** Invero esiste una *categoria vuota.* Prendiamo l'insieme $\varnothing$: in tal caso gli assiomi categoriali sono verificati perché sono verità vuote! L'insieme $\varnothing$ quindi forma una categoria della stessa dignità di altre, e lo indica con $\varnothing$, come il vuoto, oppure con $\mathbf{0}$.

Questo ci porta a parlare di categorie in cui gli oggetti, se ci sono, vivono isolati dagli altri.

Definizione 1.18 (Categorie discrete)**.** Una categoria è *discreta* quando come frecce ha solamente le identità.

Nota 1.19. Queste prime categorie possono sembrare davvero banali, ma sono importanti: primo, perché si impara a vedere categorie oltre a "casi comodi"; secondo, perché sono degli esercizi di astrazione e interiorizzazione della definizione di categoria; terzo, perché saranno utili in seguito.

Esempio 1.20 (I monoidi sono categorie)**.** Richiamiamo dall'algebra il concetto di monoide. Un *monoide* consta di:

- un insieme M
- una funzione $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to xy$

con i seguenti assiomi:

1. per ogni $x, y, z \in M$ si ha $(xy)z = x(yz)$
2. esiste un $u \in M$ tale che per ogni $x \in M$ si ha $xu = ux = x$

Consideriamo una categoria $\mathcal{G}$ avente un solo oggetto, che ci limitiamo a chiamare $\bullet$: in tal caso (ed è immediato vederlo) la collezione $\mathcal{G}(\bullet, \bullet)$ è un monoide. Anzi, potremmo addirittura dire che $\mathcal{G}$ tutta è un monoide, perché quel $\bullet$ non è altro che un appoggio per le frecce. Tuttavia, non c'è motivo di non pensare che M è proprio $\mathcal{G}$. Se adottiamo la concezione della Teoria delle Categorie come un puro linguaggio, possiamo dire che gli elementi di M sono frecce $\bullet \to \bullet$ e $*$ la composizione in senso categoriale; proseguendo per questa strada, l'associatività di $*$ è l'associatività categoriale, l'identità del monoide è l'identità categoriale su $\bullet$.

Nota 1.21. Chiaramente $\bullet$ è un "appiglio formale", necessario se si vuole formulare in termini categoriali i concetti di monoide e gruppo.

Esercizio 1.22. Anche un gruppo è una categoria con una proprietà in più: quale?.

Esempio 1.23 (La categoria $\mathbf{Mat}_k$)**.** In primo luogo consideriamo l'insieme dei numeri interi positivi. Consideriamo poi che, fissato un campo k, per ogni coppia di interi positivi m e n abbiamo l'insieme

$$\mathbf{Mat}_k(m, n) := \{\text{matrici } n \times m \text{ su campo } k\}.$$

Chi conosce un po' di Algebra Lineare sa che si possono moltiplicare[2] (nell'ordine) una matrice $m \times n$ ed una matrice $n \times r$ per ottenere una matrice $m \times r$. Questo prodotto altro non è che una funzione

$$\mathbf{Mat}_k(n, m) \times \mathbf{Mat}_k(r, n) \to \mathbf{Mat}_k(r, m).$$

Dovrebbe essere noto che questa è associativa e che la matrice identità $I_n \in \mathbf{Mat}_k(n, n)$ è tale che

$$AI_n = A \text{ per ogni } A \in \mathbf{Mat}_k(n, m)$$
$$I_n B = B \text{ per ogni } B \in \mathbf{Mat}_k(r, n).$$

La categoria è presto fatta e la indichiamo con $\mathbf{Mat}_k$: i numeri interi positivi nel ruolo di oggetti, al variare di m e n le matrici $n \times m$ come frecce da m a n e la moltiplicazione tra matrici come composizione; gli assiomi categoriali sono esattamente l'associatività del prodotto tra matrici e il fatto che la matrice identità è identità in senso categoriale.

Esempio 1.24 (Insiemi preordinati come categorie)**.** Un insieme A su cui è definita una relazione $\leqslant$ tale che

1. per ogni $x \in A$ si ha $x \leqslant x$ (riflessività)
2. per ogni $x, y, z \in A$ se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, allora $x \leqslant z$ (transitività)

2 Rimandiamo il lettore ovviamente ad un testo di Algebra Lineare se non si ricorda o non sa ancora queste cose.

è detto *preordinato*. Vogliamo vedere se si può rivedere in luce categoriale questa struttura.
Ricordiamo a tal fine la natura insiemistica delle relazioni, ovvero $\leqslant$ è un sottoinsieme di $A \times A$. Sembra ragionevole pensare di prendere elementi di A come gli oggetti della categoria che stiamo passo passo costruendo. E le coppie ordinate di $\leqslant$ sono i nostri candidati a frecce. La (2) definisce una nozione di composizione nell'unico modo sensato: se (x, y) e (y, x) sono in $\leqslant$, allora pure (x, z) sta in $\leqslant$, e quindi possiamo porre

$$(y, z)(x, y) = (x, z).$$

Il lavoro è quasi fatto, verifichiamo gli assiomi di categoria. L'associatività è ovvia, in quanto

$$\begin{aligned} ((c, d)(b, c))(a, b) &= (b, d)(a, b) = (a, d) \\ (c, d)((b, c)(a, b)) &= (c, d)(a, c) = (a, d) \,. \end{aligned}$$

Infine la coppia (x, x) è adatta al ruolo di identità su x: per ogni coppia (x, y) di $\leqslant$ si ha $(x, y)(x, x) = (x, y)$ mentre per ogni (z, x) di $\leqslant$ si ha $(x, x)(z, x) = (z, x)$. Ecco l'insieme preordinato $(A, \leqslant)$ visto come una categoria!

1.4 Costruzioni

Questa è la sezione delle prime costruzioni categoriali.

Costruzione 1.25 (Categorie duali)**.** Data una categoria $\mathcal{C}$, la corrispondente *categoria duale* od *opposta*, indicata con $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, è fatta come segue.

- $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ hanno gli stessi oggetti, ovvero

  $$|\mathcal{C}^{\mathrm{op}}| := |\mathcal{C}|.$$

- le frecce di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ da x a y sono precisamente le frecce $y \to x$ di $\mathcal{C}$, ovvero formalmente

  $$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(x, y) := \mathcal{C}(y, x).$$

  Si noti che nella duale si trovano esattamente le stesse frecce della categoria di partenza, solo che si stabilisce costruttivamente che "essere una freccia $x \to y$ di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$" significa "essere una freccia $y \to x$ di $\mathcal{C}$". In tal senso, ad uno stesso nome di freccia corrispondono due "versi di percorrenza" opposti: f è freccia $a \to b$ di $\mathcal{C}$ se e solo se f è freccia $b \to a$ di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
- Prese due frecce $f : x \to y$ e $g : y \to z$ di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, la composizione gf in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ è precisamente la freccia $\mathcal{C}$ di $\mathcal{C}$. Questo è coerente a pensarci bene: f e g secondo $\mathcal{C}$ sono frecce $y \to x$ e $z \to y$ rispettivamente, e quindi in $\mathcal{C}$ è sensata la composizione fg. Notare però che, imponendo $gf = fg$, non vogliamo dire che la composizione è commutativa, ma

  $$\underbrace{gf}_{\substack{\text{intesa come} \\ \text{composizione in } \mathcal{C}^{\mathrm{op}}}} := \underbrace{fg}_{\substack{\text{intesa come} \\ \text{composizione in } \mathcal{C}}} .$$

  In effetti, delle ambiguità potrebbero sorgere dal fatto che abbiamo rinunciato ad usare dei simboli per denotare le composizioni. Uno, se si trova più a suo agio, può usare dei simboli diversi per denotare le composizioni:

ad esempio, se le composizioni in $\mathcal{C}$ vengono indicate con $\circ$, uno potrebbe indicare le composizioni in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ con $\circ^{\mathrm{op}}$, e quindi dare questa definizione:

$$g \circ^{\mathrm{op}} f := f \circ g.$$

Comunque sia, questa incertezza notazionale si supera presto abituandosi a capire e tenere a mente il contesto in cui avvengono le composizioni.

Verifichiamo gli assiomi categoriali. Usiamo pure i simboli $\circ$ e $\circ^{\mathrm{op}}$ per maggiore chiarezza. Se abbiamo tre frecce f, g e h di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ componibili, allora

$$h \circ^{\mathrm{op}} (g \circ^{\mathrm{op}} f) = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = (h \circ^{\mathrm{op}} g) \circ^{\mathrm{op}} f,$$

e quindi la proprietà associativa è verificata. Facciamo notare che al primo e ultimo membro le frecce sono viste come all'interno di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, mentre in quelli di mezzo, sono viste come frecce di $\mathcal{C}$. Poi per ogni freccia p di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ con codominio x si ha

$$1_x \circ^{\mathrm{op}} p = p \circ 1_x = p$$

e per ogni freccia q di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ con dominio x si ha

$$q \circ^{\mathrm{op}} 1_x = 1_x \circ q = q.$$

Anche in questa sede, sottolineamo che la freccia p di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ con codominio x in $\mathcal{C}$, invece, è una freccia con dominio x; analogamente, se q in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ha dominio x, in $\mathcal{C}$ ha x come codominio.

Nota 1.26. È immediato notare che $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ è proprio $\mathcal{C}$.

Esercizio 1.27. Preso un insieme preordinato $(X, \leqslant)$, visto come una categoria cos'è X^{op}?

Costruzione 1.28 (Categorie prodotto)**.** Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie. La *categoria prodotto* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ è così descritta.

- Poniamo $|\mathcal{A} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$.
- Le frecce da (x, y) a (x', y') sono tutte e sole le coppie (f, g) con $f : x \to x'$ e $g : y \to y'$ frecce in $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente:

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B})\big((x, y), (x', y')\big) := \mathcal{A}(x, x') \times \mathcal{B}(y, y').$$

- Date due frecce

$$(x, y) \xrightarrow{(f,g)} (x', y') \xrightarrow{(f',g')} (x'', y'')$$

di $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, la composizione avviene in questo modo

$$\underbrace{(f', g')(f, g)}_{\text{composizione in } \mathcal{A}\times\mathcal{B}} := (\underbrace{f'f}_{\text{composizione in } \mathcal{A}}, \underbrace{g'g}_{\text{composizione in } \mathcal{B}}).$$

Per essere chiamata categoria a buon diritto, questo prodotto tra categorie deve soddisfare gli assiomi categoriali. Facciamo vedere anzitutto l'associatività della composizione:

$$\begin{aligned}((h, h')(g, g'))(f, f') &= (hg, h'g')(f, f') = \\ &= ((hg)f, (h'g')f') = (h(gf), h'(g'f')) = \\ &= (h, h')(gf, g'f') = (h, h')((g, g')(f, f')),\end{aligned}$$

dove, ovviamente, all'inizio di questa catena di uguaglianze hanno senso le composizioni. E $(1_x, 1_y)$ è l'identità su (x, y): infatti, per ogni freccia (u, v) con dominio (x, y) si ha

$$(u, v)(1_x, 1_y) = (u1_x, v1_y) = (u, v)$$

mentre per ogni freccia (h, k) con codominio (x, y) si ha

$$(1_x, 1_y)(h, k) = (1_x h, 1_y k) = (h, k).$$

E una volta constatato ciò, possiamo dire che $1_{(x,y)} = (1_x, 1_y)$.

Esercizio 1.29. Descrivere $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$.

Costruzione 1.30 (Categorie taglio e cotaglio)**.** Prendiamo una categoria $\mathcal{C}$ ed un suo oggetto c: costruiamo così due nuove categorie.
La *categoria taglio* $\mathcal{C}/c$ è così fatta:

- i suoi oggetti sono tutte e sole le frecce di $\mathcal{C}$ con codominio c;
- le frecce da $f : x \to c$ a $g : y \to c$, oggetti di $\mathcal{C}/c$, sono tutte e sole le frecce $h : x \to y$ di $\mathcal{C}$ tali che $f = gh$, ovvero commuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & y \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd} ;$$

- date due frecce s e t come segue

$$\left(x \xrightarrow{f} c\right) \xrightarrow{s} \left(y \xrightarrow{g} c\right) \xrightarrow{t} \left(z \xrightarrow{h} c\right),$$

  la composizione ts è esattamente la composizione ts in $\mathcal{C}$. In particolare, quest'ultima manda il dominio di f nel dominio di h ed è tale che $f = h(ts)$.

La *categoria cotaglio* $c/\mathcal{C}$ invece è così fatta:

- i suoi oggetti sono tutte e sole le frecce di $\mathcal{C}$ con dominio c;
- le frecce da $f : c \to x$ a $g : c \to y$ sono tutte e sole le frecce $h : x \to y$ di $\mathcal{C}$ tali che $g = hf$, ovvero commuta

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[rr, "h"'] & & y \end{tikzcd} ;$$

- in analogia a prima, date due frecce s e t come segue

$$\left(c \xrightarrow{f} x\right) \xrightarrow{s} \left(c \xrightarrow{g} y\right) \xrightarrow{t} \left(c \xrightarrow{h} z\right)$$

  la composizione ts è esattamente la composizione ts in $\mathcal{C}$.

È facile verificare che per entrambe valgono gli assiomi categoriali (Esercizio 1.31).

Esercizio 1.32. Cos'è $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}/c)^{\mathrm{op}}$?

Costruzione 1.33 (Categorie freccia)**.** Presa una categoria $\mathcal{C}$, costruiamo la *categoria freccia* $\overrightarrow{\mathcal{C}}$.

- I suoi oggetti sono tutte e sole le frecce in $\mathcal{C}$.
- Le frecce da $f : a \to b$ a $g : c \to d$ sono tutte e sole le coppie (h, k) dove $h : a \to c$ e $k : b \to d$ sono frecce di $\mathcal{C}$ per le quali $kf = gh$, ovvero commuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd}$$

- Prese due frecce componibili

$$\left(a \xrightarrow{f} b\right) \xrightarrow{(h,k)} \left(a' \xrightarrow{f'} b'\right) \xrightarrow{(h',k')} \left(a'' \xrightarrow{f''} b''\right),$$

  diamo la composizione "per componenti", ovvero in questo modo

$$\underbrace{(h', k')(h, k)}_{\text{composizione in } \overrightarrow{\mathcal{C}}} := (\underbrace{h'h}_{\text{composizione in } \mathcal{C}} , \underbrace{k'k}_{\text{composizione in } \mathcal{C}}).$$

La composizione è definita nel modo più immediato suggerito dal commutare del "rettangolo" esterno in

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "h'h"] & a' \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "f'"] & a'' \arrow[d, "f''"] \\ b \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "k'k"'] & b' \arrow[r, "k'"] & b'' \end{tikzcd}$$

La verifica degli assiomi categoriali è lasciata ad esercizio (Esercizio 1.34).

1.5 Isomorfismi, monomorfismi ed epimorfismi

Definizione 1.35 (Oggetti isomorfi)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria e x e y due suoi oggetti. Una sua freccia $f : x \to y$ è detta *isomorfismo* quando esiste una freccia $g : y \to x$ di $\mathcal{C}$ per la quale

$$gf = 1_x \text{ e } fg = 1_y.$$

Un oggetto x si dice *isomorfo* a y, e scriviamo $x \cong y$, qualora esista un isomorfismo da x a y.

Esempio 1.36. In **Set** gli isomorfismi sono tutte e sole le funzioni biunivoche (per quanto ovvio possa sembrare questo fatto, non è così immediato da dimostrare). In **Grp** gli isomorfismi sono precisamente gli isomorfismi di gruppo, così come in **Rng** gli isomorfismi sono esattamente gli isomorfismi di anelli. In **Top**, come ci si potrebbe aspettare, gli isomorfismi sono tutti e soli gli omeomorfismi.

Esempio 1.37 (Appartenenza come funzione)**.** Per ogni insieme A si ha

$$A \cong \mathbf{Set}(1, A),$$

dove 1 è un qualsiasi singoletto (insieme con un solo elemento). Basta prendere la funzione $\epsilon : A \to \mathbf{Set}(1, A)$, che manda un elemento $x \in A$ nella funzione $f \in \mathbf{Set}(1, A)$ che manda l'unico elemento di 1 in x; si vede subito che questa è una biezione.
Per quanto inutile possa sembrare, l'isomorfismo di **Set** appena citato *identifica* un elemento $x \in A$ con una funzione $1 \to A$ che assume x come unico valore. Con "identifica" vogliamo dire che, alla fin della fiera, che "sono la stessa cosa": e cosa ci impedisce di dire che un elemento x di A è una funzione $1 \to A$?
Questa domanda apre una interessante via: dato un insieme A, un suo *elemento* è una qualsiasi funzione $x : 1 \to A$. Diventano così sinonimi "$x \in A$" e "$x : 1 \to A$". Inoltre, se abbiamo una funzione $f : A \to B$ e un $x \in A$, vengono identificati $f(x)$ e $f \circ x$:

$$\underbrace{1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} B}_{f(x)}.$$

Esercizio 1.38. Dimostra che l'inversa di una freccia se esiste è unica.

Denoteremo l'inversa di una freccia f con f^{-1}.

Esercizio 1.39. Dimostrare che in una qualsiasi categoria

1. $(f^{-1})^{-1} = f$ per ogni isomorfismo f;
2. per ogni coppia di isomorfismi f e g componibili si ha $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Esercizio 1.40. Prova che l'isomorfismo è una relazione di equivalenza.

Nota 1.41. La relazione di isomorfismo non poteva non essere introdotta: ci serve qualche nozione che veicoli il concetto di "essere la stessa cosa". Se il lettore ha un po' di esperienza, sa che la relazione di isomorfismo è ben più importante della relazione di uguaglianza dato che non è interessante, e nemmeno proficuo, insistere a chiedersi se due cose sono "esattamente la stessa cosa". Immagina anche solo la Teoria degli Insiemi senza la relazione di equipotenza: non avresti a disposizione in tal caso molti risultati fondamentali! Figurarsi poi dell'Algebra, della Topologia, ...
La relazione di isomorfismo, col senno di poi, è la scelta giusta per il concetto di "essere la stessa cosa". Comunque sia, continuerà ad esistere ancora il predicato di uguaglianza per gli oggetti.

Definizione 1.42. Una categoria $\mathcal{C}$ è detta *scheletrica* quando per ogni coppia x e y di suoi oggetti si ha che se $x \cong y$ allora $x = y$.

Nota 1.43. È ovvio che due oggetti uguali sono isomorfi, in quanto l'identità è un isomorfismo. Per questa ragione è stata data la definizione 1.42 con un'implicazione in un preciso verso.

Esempio 1.44 (Gli insiemi ordinati sono categorie scheletriche)**.** Un *insieme ordinato* è un inseme preordinato con questa proprietà: se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, allora $x = y$.

Costruzione 1.45 (Scheletri di una categoria)**.** Uno *scheletro* di una categoria $\mathcal{C}$ è costruita come segue.

- La collezione degli oggetti di $\mathcal{C}$ è partizionata dalla relazione di isomorfismo (vedi esercizio 1.40), e per l'assioma della scelta esiste una collezione che interseca ciascuna delle classi di equivalenza in uno e un solo elemento. Una qualsiasi di queste collezioni è la nostra candidata a collezione di oggetti dello scheletro: chiamiamola S.
- Per ogni $x, y \in S$ stabiliamo che $\mathcal{C}(x, y)$ è l'insieme delle frecce da x a y dello scheletro.
- Due frecce dello scheletro si compongono come in $\mathcal{C}$.

È evidente che ogni scheletro di $\mathcal{C}$ è una sua sottocategoria piena.
Per come abbiamo definito lo scheletro, la costruzione non è univoca: ci possono essere più scheletri in quanto tutto dipende dalla collezione designata ad essere la collezione dei suoi oggetti.

Esercizio 1.46. Trova uno scheletro di $\mathbf{FDVect}_k$.

Esercizio 1.47. **FinSet** è la categoria degli insiemi finiti, delle funzioni tra questi ultimi e delle loro composizioni: trovale uno scheletro.

Come nella categoria degli insiemi e delle funzioni abbiamo funzioni iniettive e suriettive, vogliamo avere qualcosa di simile con un sapore un po' più generale.

Esempio 1.48 (Definizioni equivalenti di iniettività e suriettività)**.** Lavoriamo nel più noto ambiente **Set**. Classicamente, si danno le seguenti definizioni:

- una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva quando per ogni $a, b \in X$ si ha che se $f(a) = f(b)$ allora $a = b$
- una funzione $f : X \to Y$ è suriettiva qualora per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ per cui $f(x) = y$.

Quello che vogliamo fare è vedere se ci sono forme equivalenti che si possono prestare ad un generalizzazione. Si può dimostrare, e non è difficile farlo, che

> una funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se per ogni coppia di funzioni g e h con stesso dominio e codominio X si ha
>
> $$fg = fh \Rightarrow g = h.$$

Lo facciamo subito. Sia $f : X \to Y$ iniettiva e siano g e h due qualsiasi funzioni con codominio X, tali che per ogni $x \in X$ si abbia $f(g(x)) = f(h(x))$. Allora $g(x) = h(x)$ per ogni x del dominio di g e h (che abbiamo supposto essere lo stesso), e pertanto $g = h$.
Viceversa, assumiamo che f sia tale che per ogni coppia di funzioni g e h con codominio X si ha che se $fg = fh$, allora $g = h$. Sia anche $f(x) = f(y)$; come abbiamo visto, $f(x)$ è la composizione fx, e lo stesso per $f(y)$. Quindi se $fx = fy$, allora $x = y$.
Possiamo fare qualcosa dello stesso sapore:

> una funzione $f : X \to Y$ è suriettiva se e solo se per ogni coppia di funzioni g e h con dominio Y si ha
>
> $$gf = hf \Rightarrow g = h.$$

La prova di ciò è lasciata come esercizio per il lettore (Esercizio 1.49).

Nota 1.50. Ora, è vero che abbiamo dato in questo modo delle definizioni logicamente equivalenti, però, per come sono scritte, hanno qualcosa di distintivo. Nelle definizioni "classiche" si menziona il comportamento sugli elementi del dominio, mentre nelle forme equivalenti le funzioni non vivono isolate dalle altre, anzi le si vuole caratterizzare per come si pongono tra queste. Queste ultime sono adatte ad essere esportate in una trattazione più generale, quale la Teoria delle Categorie è, perché gli oggetti categoriali non sono necessariamente insiemi (con roba addosso eventualmente).

Fatta questa parentesi, diamo le seguenti definizioni.

Definizione 1.51 (Monomorfismi ed epimorfismi)**.** In una categoria $\mathcal{C}$

- una sua freccia $f : x \to y$ è un *monomorfismo* quando per ogni coppia di frecce g e h di $\mathcal{C}$ con lo stesso dominio e con codominio x si ha che se $fg = fh$, allora $g = h$;
- una sua freccia $f : x \to y$ è un *epimorfismo* quando per ogni coppia di frecce f e g di $\mathcal{C}$ con dominio y e con lo stesso codominio si ha che se $gf = hf$, allora $g = h$.

Teorema 1.52. Gli isomorfismi sono monomorfismi ed epimorfismi.

Dimostrazione. Siano f un isomorfismo e siano g e h due frecce tali che $fg = fh$. Essendo f isomorfismo, allora è definita f^{-1} e quindi

$$g = f^{-1}(fg) = f^{-1}(fh) = h.$$

Abbiamo provato che f è un monomorfismo. Assumendo $gf = hf$, abbiamo invece

$$g = (gf)f^{-1} = (hf)f^{-1} = h,$$

e f è un epimorfismo. □

Il viceversa, purtroppo, non vale in generale.

Esempio 1.53. Abbiamo visto nell'esempio 1.20 che un monoide è una categoria. L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è un monoide se preso assieme all'addizione +. Quindi è una categoria in cui la composizione è +

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "n"] \arrow[ur, "m+n"'] & \end{tikzcd}$$

Ogni numero naturale x è sia monomorfismo che epimorfismo. Infatti valgono

$$\begin{aligned} x + p = x + q \Rightarrow p = q \quad &\text{per ogni } p, q \in \mathbb{N} \\ u + x = v + x \Rightarrow s = t \quad &\text{per ogni } u, v \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Ma se $x \neq 0$, allora x non è un isomorfismo. Infatti, essendo 0 l'identità, per ogni $x \neq 0$ e non c'è alcun y per cui $x + y = 0$.

Esercizio 1.54. Richiama se serve quanto detto nell'esempio 1.24. In un insieme preordinato chi sono i monomorfismi e chi gli epimorfismi? È vero che i monomorfismi e gli epimorfismi sono isomorfismi?

Esercizio 1.55. Siano

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

due frecce di una stessa categoria. Se f e g sono monomorfismi, pure gf lo è. Se gf è un monomorfismo, allora anche f lo è (in generale, niente è dato sapere su g).

Costruzione 1.56 (La categoria **Monic**(c) e sottoggetti)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria e c un suo oggetto: definiamo **Monic**(c) come la sottocategoria piena di $\mathcal{C}/c$ avente come oggetti tutti e soli i monomorfismi di $\mathcal{C}/c$. [Proseguire...]

1.6 Il principio di dualità

[Perché non introdurre la costruzione della categoria duale qui, piuttosto che anticiparla? Così poi per parlare di dualità.]

Partiamo con un esempio per dare una prima idea di un principio che incarna un modo di fare.

Esempio 1.57 (Monomorfismi ed epimorfismi sono duali)**.** Come esperimento, consideriamo un monomorfismo $f : x \to y$ di una generica categoria $\mathcal{C}$. Operiamo una traduzione nel senso dello schema che segue:

f monomorfismo di $\mathcal{C}$		
per ogni oggetto a di $\mathcal{C}$	$\leftrightsquigarrow$	per ogni oggetto a di $\mathcal{C}^{\text{op}}$
e per ogni freccia $g : a \to y$ di $\mathcal{C}$	$\leftrightsquigarrow$	e per ogni freccia $g : y \to a$ di $\mathcal{C}^{\text{op}}$
esiste al più una freccia $h : a \to x$ di $\mathcal{C}$	$\leftrightsquigarrow$	esiste al più una freccia $h : x \to a$ di $\mathcal{C}^{\text{op}}$
tale che $g = fh$	$\leftrightsquigarrow$	tale che $g = hf$

L'ultima colonna ci dice proprio che f, vista come freccia di $\mathcal{C}^{\text{op}}$ questa volta, è un epimorfismo di $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

Esercizio 1.58. Ragionando esattamente come abbiamo appena fatto, si può costatare facilmente come un epimorfismo in una categoria è un monomorfismo nella categoria duale.

Il *principio di dualità* sancisce proprio questo: una proposizione in linguaggio categoriale vale per due, dove

- con "proposizione in linguaggio categoriale" intendiamo una qualsiasi proposizione sensata, costruita secondo le regole della Logica di base (connettivi e quantificatori) e che parli di oggetti, frecce e composizioni.
- "vale per due" vuol dire che, siccome una categoria e la sua duale coesistono intimamente, una proposizione in linguaggio categoriale si può riformulare in termini duali; nella pratica si tratta di mantenere gli stessi oggetti, di invertire i ruoli di dominio e codominio ("cambia il verso delle frecce") e di scambiare di posto le frecce nelle composizioni.

Questo significa che, ad esempio, possiamo limitarci a dare la definizione di monomorfismo (epimorfismo), per poi dire che una freccia f di una categoria è epimorfismo (monomorfismo) qualora f è un monomorfismo (epimorfismo) della categoria duale.

Questo principio riduce il nostro lavoro a metà oppure, equivalentemente, raddoppia i nostri risultati: un teorema in linguaggio categoriale rimane tale se lo si riscrive in termini duali e, anche qui, una dimostrazione fatta vale per due nel senso che ti aspetteresti.

2

Funtori

2.1 Definizione

Fino ad ora abbiamo visto le categorie camminandoci dentro, mentre il passo successivo è quello di camminare fra le categorie. Per fare questo abbiamo bisogno anzitutto di una qualche nozione di frecce tra categorie: i funtori sono destinati a ricoprire questi ruoli. Il concetto di funtore deve essere pensato adeguatamente, vale a dire deve preservare della struttura. Abbiamo bisogno di qualcosa che accorpi oggetti, frecce e composizioni.

Definizione 2.1 (Funtori)**.** Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un *funtore* F da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ si indica con $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e consta delle seguenti funzioni indicate tutte con lo stesso nome F:

- una funzione su oggetti $F : |\mathcal{C}| \to |\mathcal{D}|$
- funzioni su frecce, ovvero per ogni $x, y \in |\mathcal{C}|$ di una funzione

$$F : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(F(x), F(y)), f \to F(f)$$

con i seguenti assiomi, che per noi sono gli *assiomi funtoriali* o *di funtorialità*:

1. $F(1_x) = 1_{F(x)}$ per ogni oggetto x di $\mathcal{C}$
2. $F(gf) = F(g)F(f)$ per ogni coppia di frecce f e g di $\mathcal{C}$ componibili.

I funtori della definizione appena data si dicono *covarianti*, anche se questo aggettivo è ormai desueto: quando si dice funtore, si sottointende questo aggettivo.

Definizione 2.2 (Funtori controvarianti)**.** Un *funtore controvariante* da una categoria $\mathcal{C}$ ad una categoria $\mathcal{D}$ è un funtore $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{D}$.

Nota 2.3. La definizione di funtore controvariante è molto ermetica, vediamo quindi cosa la rende particolare da meritarsi un nuovo aggettivo. Un qualche funtore $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{D}$, da definizione, fa esattamente questo: manda ogni oggetto di $\mathcal{C}^{\text{op}}$ in uno e un solo oggetto di $\mathcal{D}$; manda una freccia $f : a \to b$ di $\mathcal{C}^{\text{op}}$ in nella $F(f) : F(a) \to F(b)$ in $\mathcal{D}$. Ma gli oggetti di $\mathcal{C}^{\text{op}}$ sono esattamente quelli di $\mathcal{C}$ e una freccia $f : a \to b$ di $\mathcal{C}^{\text{op}}$ in $\mathcal{C}$ è una freccia $b \to a$. Quindi in pratica il funtore $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{D}$ manda oggetti di $\mathcal{C}$ in oggetti di $\mathcal{D}$, e frecce $b \to a$ di $\mathcal{C}$ in frecce $F(a) \to F(b)$ di $\mathcal{D}$.
Rimane ora da vedere osa succede agli assiomi di funtorialità. $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^{\text{op}}$ condividono le stesse identità, quindi con le identità non fa nulla di diverso dalla definizione 2.1. Prendiamo ora due frecce

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$: da definizione di funtore, quindi abbiamo $F(gf) = F(g)F(f)$. Ma le frecce prese in esame diventano

$$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$$

in $\mathcal{C}$, con la composizione gf di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ è fg in $\mathcal{C}$. In definitiva succede quanto segue:

$$F(\underbrace{fg}_{\substack{f \text{ e } g \text{ come frecce di } \mathcal{C} \text{ e} \\ \text{composte come tali in } \mathcal{C}}}) = F(\underbrace{gf}_{\substack{f \text{ e } g \text{ come frecce di } \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \text{ e} \\ \text{composte come tali in } \mathcal{C}^{\mathrm{op}}}}) = F(g)F(f).$$

Esercizio 2.4. Cos'è un funtore $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$?

Costruzione 2.5 (Categoria delle categorie?)**.** C'è un modo sensato di comporre due funtori: se $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sono funtori, la composizione $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ è così fatta:

- manda un oggetto a di $\mathcal{A}$ nell'oggetto $G(F(a))$ di $\mathcal{C}$
- manda una freccia $f : x \to y$ di $\mathcal{A}$ nella freccia

  $$G(F(f)) : G(F(x)) \to G(F(y))$$

  di $\mathcal{C}$.

È immediato verificare che questa composizione di funtori è associativa, e il funtore identità $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ su una categoria $\mathcal{A}$ fa quello che ti aspetteresti. Ci sono insomma i presupposti per formare una "categoria delle categorie", solo che si rischia di incappare in cavilli fondazionali! Immagina infatti che tra gli oggetti di questa categoria ce ne sia una (e perché dovrebbe non esserci?) i cui oggetti formano una classe propria: se si costruisce la Teoria delle Categorie sopra la Teoria degli Insiemi secondo NBG, questo non è possibile, vedi [Ber16]. Ci sono tuttavia altre Teorie degli Insiemi che permettono la "categoria di tutte le categorie", come fatto in [AHS04].

Vogliamo avere qualcosa come nell'esempio 1.37.

Definizione 2.6 (Elemento di una categoria)**.** I funtori $\mathbf{1} \to \mathcal{C}$ si chiamano *elementi* di $\mathcal{C}$. Adotteremo la seguente convenzione: se x è un oggetto di $\mathcal{C}$, allora x indica anche l'elemento di $\mathcal{C}$ che manda l'unico oggetto di $\mathbf{1}$ in x e l'unica identità di $\mathbf{1}$ in 1_x.

2.2 Esempi

Come nella scorsa sezione, facciamo degli esempi, giusto per rendersi conto che, tra le conoscenze che già si hanno, ci sono già queste idee: non resta che farle emergere.

Esempio 2.7 (Omomorfismi come funtori)**.** Abbiamo visto nell'esempio 1.20 che un monoide è una categoria. Ci ricolleghiamo a questo per vedere come interpretare gli omomorfismi di monoidi come funtori.
Ricordiamo che dati due monoidi A e B, un omomorfismo f da A a B è una funzione $f : A \to B$ tale che

- $f(1_A) = 1_B$, dove 1_A e 1_B sono le identità di A e B rispettivamente

- per ogni $x, y \in A$ si ha $f(xy) = f(x)f(y)$.

Guardiamo ora i due monoidi come categorie ad un solo oggetto, chiamandoli $\bullet_A$ e $\bullet_B$ rispettivamente. Il comportamento di f rispetto alle frecce (gli elementi del monoide) è il secondo assioma di funtorialità. Basta imporre che $f(\bullet_A) = \bullet_B$, e f è un funtore in piena regola.

Esempio 2.8 (Azioni su gruppi)**.** Sia un gruppo G, visto come una categoria ad un oggetto, e vediamo cosa può essere un funtore $\phi : G \to \mathbf{Set}$. Da definizione, ϕ manda l'unico oggetto di G in qualche insieme X e una freccia (un elemento) x di G in una funzione $\phi(x) : X \to X$; ci sono assiomi di funtorialità anche: $\phi(e)$, con $e \in G$ l'elemento neutro, è la funzione identità di X, e $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Sostanzialmente, un funtore $\phi : G \to \mathbf{Set}$ si riduce ad un insieme X e con una collezione $\{\phi(x) : X \to X\}_{x \in G}$ di funzioni; queste funzioni, poi, sono tutte biunivoche: infatti per ogni $x \in G$ si ha

$$1_X = \begin{cases} \phi(x)\phi(x^{-1}) \\ \phi(x^{-1})\phi(x) \end{cases} \quad \text{per funtorialità di } \phi.$$

Il funtore ϕ altro non è che un omomorfismo di gruppi $G \to S(X)$, dove $S(X) := \{f : X \to X \text{ biunivoche}\}$, che in Algebra prende il nome di *azione* di G su X.

Esempio 2.9 (Il funtore potenza)**.** Lo scopo di questo esempio è analogo a quello dell'esempio 2.14, ma questa volta con l'insieme delle parti di un insieme. Il funtore

$$\wp : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

è così descritto. Per quanto riguarda gli oggetti, manda un insieme X nell'insieme delle parti $\wp(X)$. Per quanto riguarda le frecce, spedisce una funzione $f : A \to B$ nella funzione $\wp(f) : \wp(B) \to \wp(A)$ tale che $(\wp(f))(C) = f^{-1}(C)$. Manca la verifica degli assiomi di funtorialità di $\wp$, ma lo lasciamo come esercizio (Esercizio 2.10), ricordando che si tratta di un funtore controvariante.

Esempio 2.11 (Le funzioni monotone sono funtori)**.** Questa volta ci appigliamo all'esempio 1.24. Dati due insiemi preordinati $(A, \leqslant_A$ e $(B, \leqslant_B)$, una funzione $f : A \to B$ è detta *monotona* quando per ogni $x, y \in A$ si ha che se $x \leqslant_A y$ allora $f(x) \leqslant_B f(y)$. In parole povere, una funzione monotona preserva l'ordinamento. In termini puramente insiemistici questo significa: se la coppia (x, y) appartiene a $\leqslant_A$, allora $(f(x), f(y))$ è un elemento di $\leqslant_B$. In termini categoriali questa frase si rende così: se (x, y) è una freccia di A, allora $(f(x), f(y))$ è una freccia di B. Questo ci suggerisce in che modo possiamo pensare $f : A \to B$ come un funtore: manda un oggetto $x \in A$ in $f(x) \in B$ e una freccia (x, y) in $(f(x), f(y))$.Passiamo alla verifica della funtorialità. Per ogni oggetto a di A, l'identità (a, a) viene mandata in tal senso in $(f(a), f(a))$, l'identità su $f(a)$. Poi, prese le frecce componibili (x, y) e (y, z) si ha

$$\begin{aligned} f((y,z)(x,y)) &= f((x,z)) = (f(x), f(z)) = \\ &= (f(y), f(z))(f(x), f(y)) = f((y,z))f((x,y)) . \end{aligned}$$

Esercizio 2.12. Presi due insiemi preordinati $(A, \leqslant_A$ e $(B, \leqslant_B)$, una funzione $f : A \to B$ è detta *antitona* se e solo se per ogni $x, y \in A$ si ha se $x \leqslant_A y$ allora $f(y) \leqslant_B f(x)$. Interpretare le funzioni antitone come funtori.

Esempio 2.13 (Spazi vettoriali duali)**.** Preso uno spazio vettoriale V su campo k, lo *spazio vettoriale duale* di V è lo spazio vettoriale

$$V^* := \{\text{applicazioni lineari } V \to k\}.$$

C'è un funtore

$$(\_)^* : \mathbf{Vect}_k^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_k$$

così descritto: uno spazio vettoriale viene mandato nel corrispettivo spazio vettoriale duale; per ogni coppia di spazi vettoriali V e W, una freccia $f : V \to W$ di $\mathbf{Vect}_k^{\mathrm{op}}$ (ovvero una freccia $W \to V$ di $\mathbf{Vect}_k$) viene mandata nella freccia $f^* := \_f : V^* \to W^*$.

Esempio 2.14 (La dimensione è un funtore)**.** Questa volta gli attori sono le categorie $\mathbf{FDVect}_k$ e $\mathbf{Mat}_k$, fissato un campo k (quest'ultima categoria è stata vista con l'esempio 1.23). Il nostro scopo è di far vedere come funtore la dimensione di uno spazio vettoriale a dimensione finita. Un teorema fondamentale dell'Algebra Lineare (uno dei primi anche) è questo:

> Siano V un k-spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_1$ e dimensione m e W un k-spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_2$ e dimensione n.[1] Per ogni applicazione lineare $f : V \to W$ esiste una e una sola matrice A del tipo $n \times m$ per cui commuta il diagramma
>
> $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & W \arrow[d, "p_2"] \\ k^m \arrow[r, "A\_"'] & k^n \end{tikzcd}$$
>
> dove p_1 e p_2 sono le mappe coordinate relative alle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ rispettivamente.[2] A è chiamata *matrice associata* a f.

Questo teorema ci suggerisce in che senso può aversi un funtore

$$\dim : \mathbf{FDVect}_k \to \mathbf{Mat}_k.$$

È bene prima osservare che bisogna scegliere in ciascuno degli spazi vettoriali una base: non viene sancita infatti l'unicità in assoluto della matrice associata, ma viene detto che la matrice associata dipende dalle basi scelte in partenza e in arrivo, e che, una volta fatta questa scelta, vale l'unicità della matrice associata.
Questo funtore manda un oggetto di $\mathbf{FDVect}_k$ nella sua dimensione n e una applicazione lineare $f : V \to W$ nella sua matrice associata $\dim f : \dim V \to \dim W$, la quale è totalmente descritta dal teorema che abbiamo riportato all'inizio di questo esempio. Ci resta quindi da verificare effettivamente che dim sia un funtore. Preso uno spazio vettoriale con una sua base, all'applicazione lineare identità è associata la matrice identità. Scelte delle basi per gli spazi vettoriali, alla composizione gf di applicazioni lineari viene associata

1 Per il Lemma di Zorn ogni spazio vettoriale ha una base.

2 Dato uno spazio vettoriale V su campo k con base $\{e_1, \dots, e_n\}$, la *mappa coordinate* di V rispetto a tale base è la funzione $p : V \to k^n$ che manda un vettore $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ nella n-upla $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

il prodotto matriciale $\dim g \dim f$. Questo fatto è puramente deducibile dal commutare del rettangolo più grande

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[rr, bend left, "gf"] & V_2 \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "p_2"] & V_3 \arrow[d, "p_3"] \\
k^m \arrow[r, "\dim f_"] \arrow[rr, bend right, "(\dim g \dim f)_"'] & k^n \arrow[r, "\dim g_"] & k^p
\end{tikzcd}$$

dove V_1, V_2 e V_3 sono spazi vettoriali a dimensione finita con una base ciascuna, f e g sono applicazioni lineari, p_1, p_2 e p_3 sono le rispettive mappe coordinate. Con queste verifiche possiamo dire di aver finito.

Esercizio 2.15. Sicuramente è più ovvio un funtore $\mathbf{Mat}_k \to \mathbf{FDVect}_k$: trovalo e descrivilo.

2.3 Costruzioni coi funtori

Costruzione 2.16 (Categoria virgola)**.** Date delle categorie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e due funtori

$$\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{C} \xleftarrow{T} \mathcal{B}$$

la *categoria virgola* indicata con (S/T) è così fatta[3]:

- gli oggetti sono tutte e sole le terne (x, y, f), dove x è oggetto di $\mathcal{A}$ e y oggetto di $\mathcal{B}$ e $f : S(x) \to T(y)$ è una freccia di $\mathcal{C}$;
- le frecce da (x, y, f) a (x', y', f') sono tutte e sole le coppie (g, g') con $g : x \to x'$ e $g' : y \to y'$ frecce di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente e tali che

  $$\begin{tikzcd}
  S(x) \arrow[r, "S(g)"] \arrow[d, "f"'] & S(x') \arrow[d, "f'"] \\
  T(y) \arrow[r, "T(g')"'] & T(y')
  \end{tikzcd}$$

  commuta;
- la composizione è così definita

  $$\underbrace{(f', g')(f, g)}_{\text{composizione in } (S{\downarrow}T)} := (\underbrace{f'f}_{\text{composizione in } \mathcal{A}}, \underbrace{g'g}_{\text{composizione in } \mathcal{B}}),$$

  qualora abbiano senso le composizioni al secondo membro, ovviamente.

3 Questa categoria fece il suo debutto in qualche articolo del matematico F. W. Lawvere nel 1963 con una notazione che contemplava una virgola: nel nostro caso, ad esempio, avrebbe scritto (S, T). Questa venne abbandonata anche presto perché ritenuta fonte di ambiguità. Ad oggi resiste soltanto il nome a ricordo di questo segno grafico, e una notazione alternativa è $(S \downarrow T)$.

La composizione di frecce della categoria virgola è suggerita dal commutare del rettangolo esterno

$$\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r, "S(f)"'] \arrow[rr, bend left, "S(f'f)"] \arrow[d, "h"'] & S(x') \arrow[r, "S(f')"'] \arrow[d, "h'"] & S(x'') \arrow[d, "h''"] \\
T(y) \arrow[r, "T(g)"] \arrow[rr, bend right, "S(g'g)"'] & T(y') \arrow[r, "T(g')"] & T(y'')
\end{tikzcd}$$

una volta presi dei suoi oggetti e delle sue frecce

$$(x, y, h) \xrightarrow{(f,g)} (x', y', h') \xrightarrow{(f',g')} (x'', y'', h'')$$

Lasciamo come esercizio al lettore la verifica degli assiomi di categoria per la costruzione appena presentata (Esercizio 2.17).

La cosa interessante è che le categorie taglio e frecce possono essere pensati come casi speciali di categoria virgola.

Esempio 2.18 (Categoria taglio come categoria virgola)**.** Consideriamo una categoria $\mathcal{C}$ e la coppia di funtori

$$\mathcal{C} \xrightarrow{1_\mathcal{C}} \mathcal{C} \xleftarrow{c} \mathbf{1}$$

dove c è un elemento di $\mathcal{C}$ (nel senso precisato nella definizione 2.6). Ci chiediamo com'è fatta la categoria $(1_\mathcal{C}/c)$ e come possa essere pensata come la categoria taglio $\mathcal{C}/c$.
I suoi oggetti sono precisamente le triple

$$(x, *, f : 1_\mathcal{C}(x) \to c(*)) = (a, *, f : x \to c)$$

dove $x \in |\mathcal{C}|$ e con $*$ abbiamo scelto di indicare l'unico oggetto di $\mathbf{1}$. Il fatto è che $*$ è un oggetto fissato del quale non ci interessa il nome e che la terza componente contiene tutte le informazioni necessarie della tripla: quindi questa può stare da sola senza perdita di dati. In altri termini, la tripla è essenzialmente la freccia $f : x \to c$. Ed abbiamo ritrovato gli oggetti di $\mathcal{C}/c$.
Le frecce di $(1_\mathcal{C}/c)$ da $(x, *, f : x \to x)$ a $(y, *, g : y \to c)$ sono le coppie $(h, 1_*)$, con h una freccia $x \to y$ di $\mathcal{C}$, per cui commuta

$$\begin{tikzcd}
1_\mathcal{C}(x) \arrow[r, "1_\mathcal{C}(h)"] \arrow[d, "f"'] & 1_\mathcal{C}(y) \arrow[d, "g"] \\
c(*) \arrow[r, "c(1_*)"'] & c(*)
\end{tikzcd}$$

il quale si riduce al più semplice

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & y \arrow[dl, "g"] \\
& c &
\end{tikzcd} .$$

L'informazione significativa in "$(h, 1_*)$" è h, e quindi praticamente questa coppia di frecce si riduce ad h.
Lasciamo al lettore come esercizio il semplice esame delle composizioni (Esercizio 2.19).

Esercizio 2.20 (Categoria freccia come categoria virgola)**.** Far veder come $\overrightarrow{\mathcal{C}}$, con $\mathcal{C}$ categoria, possa essere pensata come la categoria $(1_{\mathcal{C}}/1_{\mathcal{C}})$.

Costruzione 2.21 (Un diagramma è un funtore)**.** [Rimuovere questa parte da qui?] Adesso possiamo formalizzare il concetto di diagramma, e per farlo iniziamo con un esempio per spiegarne l'idea di fondo. Prendiamo il seguente triangolo (tre nodi e tre archi)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & b \arrow[d, "h"] \\ & c \end{tikzcd}$$

Questa rappresentazione può essere pensata come questo disegno muto

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

al quale vengono messe delle etichette. Questo disegno, per quanto inespressivo, può essere pensato ad una categoria (basta imporgli di rispettare gli assiomi di categoria), ed è questo che ci interessa. Ecco che si può pensare ad un diagramma come un opportuno funtore da una categoria indice (in questa sede la categoria "muta", ad una categoria desiderata) ad incarnare l'atto di mettere etichette a nodi e archi:

$$\left(\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ & \bullet \end{tikzcd}\right) \longrightarrow \left(\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & b \arrow[d, "h"] \\ & c \end{tikzcd}\right).$$

Seguendo questo esempio, passiamo quindi a dare la definizione di diagramma commutativo.
Un *diagramma* in una categoria $\mathcal{A}$ è un funtore $D : \mathbf{I} \to \mathcal{A}$ per qualche categoria $\mathbf{I}$. In tal senso D è detto "avere la forma $\mathbf{I}$" o "di forma $\mathbf{I}$". Queste locuzioni rispecchiano in pieno il ruolo di $\mathbf{I}$: questa consente infatti di ritagliare una determinata situazione all'interno di una situazione più complessa (un intera categoria). E se fatti in maniera opportuna questi ritagli, ci consentiranno di fare cose interessanti. Avremo modo di parlarne diffusamente tra qualche capitolo.

2.4 Equivalenza funtoriale di categorie

Vogliamo avere con i funtori qualche nozione di iniettività e suriettività, sulle frecce però.

Definizione 2.22 (Funtori fedeli e pieni)**.** Date due categorie $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è detto *fedele* (rispettivamente *pieno*), se e solo se per ogni coppia di oggetti x e y di $\mathcal{A}$ la funzione

$$\mathcal{A}(x, y) \to \mathcal{B}(F(x), F(y)), f \to F(f)$$

è inettiva (rispettivamente suriettiva).

Abbiamo bisogno anche questa definizione.

Definizione 2.23 (Funtori essenzialmente suriettivi)**.** Date due categorie $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è detto *essenzialmente suriettivo sugli oggetti* qualora per ogni oggetto y di $\mathcal{B}$ si ha che esiste almeno uno oggetto x di $\mathcal{A}$ tale che $F(x) \cong y$.

È il momento di dare una qualche nozione di equivalenze tra categorie. Quando due categorie possono considerarsi "essenzialmente la stessa cosa"? Non va bene l'isomorfismo tra categorie? Non tanto, perché se prendiamo un funtore $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ isomorfismo, questo ci porterebbe all'esistenza di $F^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tale che a $F^{-1}F = 1_{\mathcal{A}}$ e $FF^{-1} = 1_{\mathcal{B}}$, delle uguaglianze insomma. Ci serve qualcosa di "rilassato" quanto basta.

Una buona nozione di equivalenza deve agire ovviamente su più livelli, sia su oggetti e che su frecce. Un funtore in questo senso sembra quello che fa al caso nostro, ma deve avere certe caratteristiche. Pretenderlo suriettivo sugli oggetti è troppo perché questo richiederebbe l'impiego dell'uguaglianza: lo vogliamo essenzialmente suriettivo allora. Deve essere anche fedele e pieno: infatti questo è equivalente al fatto che per ogni coppia di oggetti x e y di $\mathcal{A}$ si ha un biezione

$$\mathcal{A}(x, y) \to \mathcal{B}(F(x), F(y)).$$

Definizione 2.24 (Categorie funtorialmente equivalenti)**.** Una categoria $\mathcal{A}$ si dice *funtorialmente equivalente* a una categoria $\mathcal{B}$ se e solo se esiste un funtore $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ fedele, pieno ed essenzialmente suriettivo. In tal caso scriveremo $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Esercizio 2.25 ($\mathbf{FDVect}_k \simeq \mathbf{Mat}_k$). Un leitmotiv dell'Algebra Lineare è quello di passare dalle applicazioni lineari alle matrici, e viceversa, con molta spensieratezza, quasi senza avvisare a momenti, come se fossero la stessa cosa. In effetti sono essenzialmente la stessa cosa. Lo scopo di questo esercizio è di concludere quanto iniziato con l'esempio 2.14, formalizzando così questo atteggiamento: dimostra che $\mathbf{FDVect}_k \simeq \mathbf{Mat}_k$. Notare anche quanto è molto meno contorto provare $\mathbf{Mat}_k \simeq \mathbf{FDVect}_k$.

Esercizio 2.26 ($\mathbf{Set}_* \simeq \mathbf{Par}$). Chiariamo anzi tutto i nostri protagonisti. $\mathbf{Set}_*$ è la *categoria degli insiemi puntati*: gli oggetti sono le coppie (X, a) con X insieme e $a \in X$; una freccia da (X, a) a (Y, b) è una funzione $X \to Y$ che manda a in b; date due frecce $f : (X, a) \to (Y, b)$ e $g : (Y, b) \to (Z, c)$, la composizione gf è una comune composizione di funzioni. **Par** è la *categoria delle funzioni parziali*: gli oggetti sono insiemi; le frecce sono funzioni parziali[4]; le composizioni sono praticamente composizioni di funzioni. Mostra che $\mathbf{Set}_* \simeq \mathbf{Par}$.

4 Una *funzione parziale* da un insieme A ad un altro insieme B è una funzione da qualche $A' \subseteq A$ a B.

3

Trasformazioni Naturali

3.1 Definizione

È come se dopo aver passeggiato tra le categorie con i funtori, adesso si vuole pure camminare tra i funtori. Il leitmotiv è oramai chiaro: vogliamo avere una qualche nozione di frecce pure tra funtori.

Definizione 3.1 (Trasformazione naturale)**.** Prese due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e dati due funtori $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una *trasformazione naturale* da F a G è una collezione di frecce di $\mathcal{D}$

$$\eta := \left\{ F(x) \xrightarrow{\eta_x} G(x) \right\}_{x \in |\mathcal{C}|}$$

(una e una sola per ciascun $x \in |\mathcal{C}|$) tale che

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(x) \arrow[r, "\eta_y"'] & G(x) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

commuta per ogni $x, y \in |\mathcal{C}|$ e $f \in \mathcal{C}(x, y)$. Il commutare di (3.1) prende il nome di *naturalezza* di η. Ci sono vari modi di indicare una trasformazione naturale:

$$\eta : F \Rightarrow G \text{ oppure } \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} .$$

Nota 3.2. Esiste anche una locuzione diversa per dire che $F \cong G$:

$$F(x) \cong G(x) \text{ naturalmente in } x \in |\mathcal{C}|. \tag{3.2}$$

Attenzione che non si sta dicendo questo

$$F(x) \cong G(x) \text{ per ogni } x \in |\mathcal{C}|. \tag{3.3}$$

La (3.3) sancisce l'isomorfismo degli oggetti $F(x)$ e $G(x)$ di $\mathcal{D}$, al variare di x tra gli oggetti di $\mathcal{C}$; mentre con la (3.2) vogliamo dire di più: non solo (3.3), ma anche la naturalezza della definizione 3.1.

Esiste un modo sensato di comporre due trasformazioni naturali: siano due trasformazioni naturali

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\zeta"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

La collezione $\theta\zeta := \{\theta_x\zeta_x : F(x) \to H(x)\}_{x\in|\mathcal{C}|}$ è davvero una trasformazione naturale: commuta infatti il rettangolo perimetrale qui sotto

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "\zeta_x"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[r, "\theta_x"] \arrow[d, "G(f)"] & H(x) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(y) \arrow[r, "\zeta_y"'] & G(y) \arrow[r, "\theta_y"'] & H(y)
\end{tikzcd}$$

per ogni freccia $f : x \to y$ di $\mathcal{C}$. La trasformazione naturale identità $1_F : F \Rightarrow F$ è fatta come te lo potresti aspettare:

$$1_F = \left\{1_{F(x)} : F(x) \to F(x)\right\}_{x\in|\mathcal{C}|} .$$

Questo fatto ci porta a definire una nuova categoria.

Definizione 3.3 (Categoria funtore)**.** Prese due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, la *categoria dei funtori* da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ ha i funtori $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ come oggetti, le trasformazioni naturali tra funtori come frecce e le composizioni di trasformazioni naturali sono definite come abbiamo visto poc'anzi. Indicheremo questa categoria con $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Gli isomorfismi di $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ prendono il nome di *isomorfismi naturali*. In tal caso, $F \cong G$ sta a significare che F è isomorfo a G.

Teorema 3.4. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie e i funtori $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Una trasformazione naturale

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

è un isomorfismo naturale se e solo se $F(x) \xrightarrow{\eta_x} G(x)$ è un isomorfismo di $\mathcal{D}$ per ogni $x \in |\mathcal{C}|$.

Dimostrazione. Se η è un isomorfismo naturale, allora esiste una trasformazione naturale $\theta : G \Rightarrow F$ tale che $\theta\eta = 1_F$ e $\eta\theta = 1_G$. Ovvero per ogni oggetto x di $\mathcal{C}$ si ha che $\theta_x\eta_x = 1_{F(x)}$ e $\eta_x\theta_x = 1_{G(x)}$.
Viceversa, sia la trasformazione naturale η tale che $\eta_x : F(x) \to G(x)$ è un isomorfismo in $\mathcal{D}$ per ogni oggetto x di $\mathcal{C}$. Allora per ciascuna di queste frecce abbiamo $\eta_x^{-1} : G(x) \to F(x)$ tale che $\eta_x^{-1}\eta_x = 1_{F(x)}$ e $\eta_x\eta_x^{-1} = 1_{G(x)}$. Si costruisce così una collezione

$$\eta^{-1} := \left\{\eta_x^{-1}\right\}_{x\in|\mathcal{C}|}$$

che però dobbiamo ancora verificare essere una trasformazione naturale $G \Rightarrow F$. Essendo η una trasformazione naturale, abbiamo che per ogni freccia $f : x \to y$ di $\mathcal{C}$ si ha $G(f)\eta_x = \eta_y F(f)$, da cui segue che $\eta_y^{-1}G(f) = F(f)\eta_x^{-1}$, cioè commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd}
G(x) \arrow[r, "\eta_x^{-1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(x) \arrow[d, "F(f)"] \\
G(y) \arrow[r, "\eta_y^{-1}"'] & F(y)
\end{tikzcd} .$$

Questo basta per dire che η è un isomorfismo di $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. □

Esempio 3.5 (Il funtore di valutazione)**.** [Questo per ora rimane qui.] Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie: abbiamo il *funtore di valutazione*

$$\mathrm{ev} : \mathcal{C} \times [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}$$

che su oggetti agisce come

$$\mathrm{ev}(x, F) := F(x)$$

mentre su frecce

$$\mathrm{ev}\left(\begin{tikzcd} x \arrow[d, "f"'] \\ y \end{tikzcd} , \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \right) := G(f)\alpha_x = \alpha_y F(f) .$$

Mostriamo che effettivamente sia un funtore. [Da TEXare ancora. Oppure no: come "esercizio per il lettore"?]

4

Limiti e colimiti

4.1 Oggetti iniziali e terminali

Definizione 4.1 (Oggetti iniziali e terminali)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Un suo oggetto a è detto *terminale* quando per ogni oggetto x di $\mathcal{C}$ esiste una e una sola freccia $x \to a$ di $\mathcal{C}$, *iniziale* quando per ogni oggetto x di $\mathcal{C}$ esiste una e una sola freccia $a \to x$ di $\mathcal{C}$.

Per costruzione, una categoria e la sua duale condividono gli stessi oggetti. Il seguente teorema consente di definire gli oggetti terminali (iniziali) di una categoria come oggetti iniziali (terminali) della duale.

Teorema 4.2. Un oggetto terminale (iniziale) di una categoria è oggetto iniziale (terminale) della duale.

Dimostrazione. Da definizione, a è oggetto terminale di $\mathcal{C}$ se e solo se per ogni oggetto x di $\mathcal{C}$ esiste una e un'unica freccia $x \to a$ di $\mathcal{C}$. Questa proprietà universale si riscrive subito in termini duali: per ogni oggetto x di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ esiste una e una sola freccia $a \to x$ di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Ovvero a come oggetto di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ è iniziale. Ragionando analogamente, si riesce a mostrare che un oggetto terminale in una categoria è iniziale nella duale. □

Teorema 4.3 (Unicità a meno di isomorfismi)**.** Due oggetti terminali sono isomorfi, due oggetti iniziali pure.

Dimostrazione. Infatti se 0 e $0'$ sono due oggetti iniziali, allora abbiamo due frecce $f : 0 \to 0'$ e $g : 0' \to 0$ che sono uniche. Abbiamo così le composizioni $gf : 0 \to 0$ e $fg : 0' \to 0'$; e, visto che 0 e $0'$ sono iniziali, gf e fg sono le uniche frecce su 0 e $0'$. Ora essendoci per forza le identità, queste due composizioni sono identità sui rispettivi oggetti. Quindi $0 \cong 0'$.
Il fatto che i terminali siano unici a meno di isomorfismi si può provare con un ragionamento simile a quanto fatto adesso oppure si può usare il teorema 4.2, visto che oggetti isomorfi in una categoria sono isomorfi pure nella duale. □

Esercizio 4.4. Se $\mathcal{C}$ è una categoria con oggetto terminale $1 \in |\mathcal{C}|$, allora per ogni $a \in |\mathcal{C}|$ le frecce $1 \to a$ sono monomorfismi. Se $\mathcal{C}$ è una categoria con oggetto iniziale $0 \in |\mathcal{C}|$, allora per ogni $a \in |\mathcal{C}|$ le frecce $a \to 0$ sono epimorfismi.

Esempio 4.5 (Oggetti iniziali e terminali di **Set**)**.** È forse un fatto poco noto, ma per un qualsiasi insieme X esiste una e una sola funzione $\varnothing \to X$. Sì, ci sono funzioni con dominio vuoto, solo che nella pratica si richiedono dominio e codominio di funzioni non vuoti. Secondo la Teoria degli Insiemi, una funzione da un insieme A ad un insieme B è uno qualsiasi degli insiemi $f \subseteq A \times B$ con questa proprietà: per ogni $x \in A$ esiste uno e un solo $y \in B$ tale che $(x, y) \in f$. Ecco che se $A = \varnothing$, allora l'unico sottoinsieme di $\varnothing \times B = \varnothing$ è proprio $\varnothing$ e la precedente proprietà diventa una verità vuota. Questo significa che $\varnothing$ è l'unica funzione $\varnothing \to B$ e, quindi, in linguaggio categoriale $\varnothing$ è oggetto iniziale di **Set**. Sia ora 1 un qualsiasi singoletto: è immediato in questo caso che per ogni insieme X esiste una e una sola funzione $X \to 1$ (precisamente la funzione in questione è quella che manda ogni $x \in X$ nell'unico elemento di 1). In linguaggio categoriale, i singoletti sono gli oggetti terminali di **Set**.

Esercizio 4.6. Gli oggetti terminali di **Set** sono tra loro isomorfi, ma non necessariamente uguali (nel senso della Teoria degli Insiemi). Invece, $\varnothing$ è proprio l'unico oggetto iniziale di **Set**: dimostralo.

Esercizio 4.7 (Oggetti iniziali e terminali di **Cat**)**.** Se ci sono, in **Cat** chi sono gli oggetti terminali e iniziali?

Costruzione 4.8 (Elementi di oggetti)**.** Come nell'esempio 1.37, un elemento di un insieme X è una qualsiasi funzione $1 \to X$; parallelamente, dalla definizione 2.6, un elemento di una categoria piccola $\mathcal{C}$ è un qualsiasi funtore $\mathbf{1} \to \mathcal{C}$. Il fatto è che sia 1 che **1** sono terminali in **Set** e in **Cat** rispettivamente. Traendo ispirazione da questi semplici fenomeni, possiamo formulare una definizione generale: data un categoria $\mathcal{C}$ con elemento terminale 1, un *elemento* di un oggetto x di $\mathcal{C}$ è una qualsiasi freccia $1 \to x$ di $\mathcal{C}$.

Esercizio 4.9 (Induzione $\Leftrightarrow$ ricorsione)**.** La categoria Dyn è così fatta:

- gli oggetti sono tutte e sole le triple (X, a, s), dove X è un insieme non vuoto, con $a \in X$ e $s : X \to X$ una funzione di insiemi;
- le frecce da (X, a, s) e (Y, b, t) sono tutte e sole le funzioni di insiemi $f : X \to Y$ per cui commuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & Y \arrow[r, "t"'] & Y \end{tikzcd}$$

  ovvero $f(a) = b$ e $fs = tf$ (nota che gli elementi a e b sono visti come funzioni, vedi esempio 1.37);
- prese delle frecce

$$(X, a, p) \xrightarrow{f} (Y, b, q) \xrightarrow{g} (Z, c, r)$$

  la loro composizione è semplicemente la composizione di funzioni di insiemi gf.

Il Principio d'Induzione implica il teorema di ricorsione, il quale dice:

> per ogni insieme X non vuoto, con $a \in X$ e $f : X \to X$ esiste una e una sola funzione $x : \mathbb{N} \to X$ tale che $x_0 = a$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questo teorema in termini categoriali diventa molto conciso e denso allo stesso tempo:

> $(\mathbb{N}, 0, \_ + 1)$ è un oggetto iniziale di Dyn.

Un buon esercizio è quello di dimostrare il teorema di ricorsione (questo è un fatto della Teoria degli Insiemi). Più in tema invece è la richiesta di dimostrare il principio di induzione assumendo che $(\mathbb{N}, 0, \_ + 1)$ sia un oggetto iniziale di Dyn.

Esempio 4.10 (Iniziali e terminali in insiemi preordinati)**.** Sia $(X, \leqslant)$ un insieme preordinato: vedendolo come una categoria, ci chiediamo cosa siano gli oggetti terminali e iniziali. Un oggetto iniziale di $(X, \leqslant)$ è precisamente un elemento $m_1 \in X$ tale che

$$m_1 \leqslant x \text{ per ogni } x \in X,$$

mentre un oggetto terminale $m_2 \in X$ è tale che

$$x \leqslant m_2 \text{ per ogni } x \in X.$$

Nella Teoria degli Insiemi gli oggetti iniziali sono detti *minimali*, mentre quelli terminali sono detti *massimali*.
In un insieme preordinato i minimali non è detto che siano unici, ma almeno sono isomorfi; lo stesso per i massimali. In un insieme ordinato, essendo un insieme preordinato scheletrico, l'isomorfismo è uguaglianza: in tal caso i minimali diventano *minimi* e i massimali *massimi*.

Esempio 4.11. Le categorie discrete non hanno né oggetti terminali né iniziali. È molto facile rendersene conto: da un oggetto verso ad uno diverso non parte alcuna freccia.

Esercizio 4.12. Cos'è una proposizione falsa? E una proposizione vera?

4.2 Prodotti e coprodotti

Definizione 4.13 (Prodotti e coprodotti)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria e $\{x_i\}_{i \in I}$ una collezione di suoi oggetti. Un oggetto $\overline{x}$ di $\mathcal{C}$ con una collezione di frecce $\{\mathrm{pr}_i : \overline{x} \to x_i\}_{i \in I}$ di $\mathcal{C}$ è un *prodotto* in $\mathcal{C}$ di $\{x_i\}_{i \in I}$ qualora per ogni oggetto a di $\mathcal{C}$ con una collezione $\{f_i : a \to x_i\}_{i \in I}$ di frecce di $\mathcal{C}$ esiste una e una sola freccia $h : a \to \overline{x}$ di $\mathcal{C}$ per cui

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f_i"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & x_i \\ \overline{x} \arrow[ur, "\mathrm{pr}_i"'] & \end{tikzcd}$$

commuta per ogni $i \in I$. Un oggetto $\underline{x}$ di $\mathcal{C}$ con una collezione $\{\mathrm{in}_i : x_i \to \underline{x}\}_{i \in I}$ di frecce di $\mathcal{C}$ è un *coprodotto* in $\mathcal{C}$ di $\{x_i\}_{i \in I}$ quando è un prodotto in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ di $\{x_i\}_{i \in I}$.

Esercizio 4.14. Quindi che cos'è un coprodotto, se dovessi spendere molte più parole per definirlo?

Qui uno potrebbe aspettarsi un qualcosa del tipo "i prodotti (coprodotti) sono isomorfi tra di loro", ma ci sono dei problemi non da poco: per parlare di isomorfismo ci dovrebbe essere, a monte di tutto, una nozione di freccia da un prodotto all'altro; ed un prodotto di una collezione $\{x_i\}_{i \in I}$ è fatto di un oggetto $\overline{x}$ e di una collezione di frecce uscenti $f_i : \overline{x} \to x_i$, e quindi è il solo oggetto $\overline{x}$. Il problema si risolve costruendo una categoria opportuna in cui accade quello che vogliamo.

Costruzione 4.15 (Coni sopra una collezione)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria. La *categoria dei coni* sopra una collezione $E \subseteq |\mathcal{C}|$ è fatta così:

- gli oggetti sono gli oggetti a di $\mathcal{C}$ con una collezione $\{f_x : a \to x\}_{x\in E}$ di frecce di $\mathcal{C}$ uscenti da a: questa cosa si chiama *cono* di vertice a su E e la si indica con $\{f_x : a \to x\}_{x\in E}$;
- le frecce da un cono $\{f_x : a \to x\}_{x\in E}$ ad un cono $\{g_x : b \to x\}_{x\in E}$ sono tutte e sole le frecce $h : a \to b$ di $\mathcal{C}$ per cui per ogni $x \in E$ commuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f_x"] & \\ b \arrow[r, "g_x"'] & x \end{tikzcd}$$

- la composizione di due frecce

$$\{f_x : a \to x\}_{x\in E} \xrightarrow{h} \{g_x : b \to x\}_{x\in E} \xrightarrow{k} \{h_x : c \to x\}_{x\in E}$$

  è esattamente la composizione $kh : a \to c$ di $\mathcal{C}$.

La verifica degli assiomi categoriali è immediata.

La definizione di prodotto viene facilmente riformulata in questo modo: un prodotto di $\{x_i\}_{i\in I}$ è esattamente un oggetto terminale della categoria dei coni su $\{x_i\}_{i\in I}$. Questo basta per dire a rigore che i prodotti su una stessa collezione sono tra loro isomorfi.

Esercizio 4.16 (Coconi sotto una collezione)**.** Emula quanto fatto nella costruzione precedente: costruisci una categoria in cui un coprodotto può essere visto come oggetto iniziale.

Osservando le precedenti costruzioni, è importante notare questo: un isomorfismo di (co)coni, induce un isomorfismo dei rispettivi vertici; mentre, il viceversa non sempre accade.

Esercizio 4.17. Abbiamo visto che i prodotti (coprodotti) sono oggetti terminali (iniziali) di una categoria ad hoc. Invero, vale anche il viceversa: i terminali (iniziali) possono essere visti come prodotti (coprodotti).

Esercizio 4.18. Cos'è il (co)prodotto di una collezione con un solo elemento?

Esempio 4.19. Facciamo vedere come il prodotto cartesiano di due insiemi sia prodotto in senso categoriale (e quindi in **Set** i prodotti di due oggetti ci sono). Se A e B due insiemi, dall'insieme $A \times B$ partono le funzioni *componenti*:

$$\begin{aligned} p_A &: A \times B \to A\,,\ (x, y) \to x \\ p_B &: A \times B \to B\,,\ (x, y) \to y\,. \end{aligned}$$

Consideriamo ora un qualsiasi insieme C con una coppia di funzioni uscenti $f : C \to A$ e $g : C \to B$: la funzione $h : C \to A \times B$, $h(x) := (f(x), g(x))$ è tale da far commutare

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Facciamo vedere che è l'unica a farlo: a tal scopo sia anche $h' : C \to A \times B$ tale che $f = p_A h'$ e $g = p_B h'$. Abbiamo così che per ogni $x \in C$

$$h(x) = (f(x), g(x)) = (p_A h'(x), p_B h'(x)) = h'(x).$$

In definitiva, $A \times B$ con le due funzioni p_A e p_B è un prodotto di $\{A, B\}$.
Secondo la Teoria degli Insiemi, il coprodotto di due insiemi A e B è l'insieme

$$A + B := (A \times \{A\}) \cup (B \times \{B\}).$$

Questo insieme se viene con due funzioni piuttosto naturali

$$\begin{aligned} q_A &: A \to A + B\,,\ q_A(x) := (x, A) \\ q_B &: B \to A + B\,,\ q_B(x) := (x, B)\,. \end{aligned}$$

Sia ora un qualsiasi insieme C e due funzioni $f : A \to C$ e $g : B \to C$: consideriamo così la funzione

$$h : A + B \to C\,,\ h(x, A) := f(x)\,,\ h(x, B) := g(x).$$

Questa funzione fa commutare

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "q_A"'] & & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "q_B"] \\ & A + B \arrow[uu, "h"] & \end{tikzcd}$$

Come ti aspetteresti, facciamo vedere che solo h fa questo. Sia $h' : A + B \to C$ per cui $f = h' q_A$ e $g = h' q_B$. È immediato infatti verificare che $h = h'$:

$$\begin{aligned} h(x, A) &= f(x) = h'(x, A) \text{ per ogni } x \in A \\ h(x, B) &= g(x) = h'(x, B) \text{ per ogni } x \in B\,. \end{aligned}$$

Quindi, in questo caso l'insieme $A + B$ con la coppia di funzioni q_A e q_B è un coprodotto di $\{A, B\}$.

Esercizio 4.20. Quindi cos'è una coppia ordinata?

Esercizio 4.21. In generale, il prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi $\{X_i\}_{i \in I}$ è l'insieme

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \,\middle|\, f(i) \in X_i \text{ per ogni } i \in I \right\},$$

i cui elementi si chiamano I-uple.[1] A questa si associano le funzioni

$$p_k : \prod_{i \in I} X_i \to X_k\,,\ p_k(f) := f(k) \quad \text{per } k \in I.$$

L'insieme $\prod_{i \in I} X_i$ affiancato dalle frecce $\{p_i\}_{i \in I}$ è un prodotto di $\{X_i\}_{i \in I}$?
Nella Teoria degli Insiemi il coprodotto di una famiglia in insiemi $\{X_i\}_{i \in I}$ è

$$\coprod_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}\,.$$

Questo insieme se ne viene con funzioni piuttosto naturali, per $j \in I$,

$$q_j : X_j \to \coprod_{i \in I} X_i\,,\ q_j(x) := (x, j).$$

Anche qui, vedere se $\coprod_{i \in I} X_i$ con $\{q_i\}_{i \in I}$ è un coprodotto di $\{X_i\}_{i \in I}$.

1 Nel caso finito, prendendo $I = \{1, \dots, n\}$, una I-upla f viene scritta sotto forma di n-upla $(f(1), \dots, f(n))$.

Esercizio 4.22. Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici.
Lo spazio topologico prodotto di $\{X_i\}_{i\in I}$ è l'insieme $\prod_{i\in I} X_i$ con la *topologia di Tychonoff*, definita come la più piccola delle topologie su $\prod_{i\in I} X_i$ che rendono continue le funzioni componenti p_i, per $i \in I$. Mostrare che lo spazio $\prod_{i\in I} X_i$ con le funzioni continue $\{p_i\}_{i\in I}$ è un prodotto in **Top**. [Non è meglio parlare del prodotto di due spazi topologici, piuttosto che mettere tutto sul generale?]
La *topologia dell'unione disgiunta*, invece, è la più grande delle topologie su $\coprod_{i\in I} X_i$ per cui sono continue le iniezioni q_i, al variare di $i \in I$: come prima, provare che $\coprod_{i\in I} X_i$ con la topologia dell'unione disgiunta e le iniezioni $\{q_i\}_{i\in I}$ è un coprodotto in **Top**. [Stessa cosa.]

Esercizio 4.23. Sia V uno spazio vettoriale su campo k e $V_1, \dots, V_n$ suoi sottospazi: abbiamo così lo *spazio vettoriale somma*

$$\sum_{i=1}^{n} V_n := \left\{ v \in V \,\middle|\, \exists v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n : v = \sum_{i=1}^{n} v_i \right\}. \tag{4.1}$$

Lo spazio (4.1) è detto *diretto* quando per ogni $v \in \sum_{i=1}^{n} V_i$ sono anche unici i vettori $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ tali che $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$; in tal caso, questo spazio si scrive come $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Questo spazio vettoriale ha sia funzioni componenti che iniezioni:

$$p_j : \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \to V_j\,,\ \sum_{i=1}^{n} v_i \to v_j$$
$$q_j : V_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} V_i\,,\ v \to v\,.$$

Far vedere che $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ è un prodotto o un coprodotto in $\mathbf{Vect}_k$ a seconda che lo si prenda in esame con $\{p_i\}_{i=1,\dots,n}$ o $\{q_i\}_{i=1,\dots,n}$. [Non è meglio che questo sia un esempio?]

Esempio 4.24. Sia $(X, \leqslant)$ un insieme preordinato, visto come categoria ovviamente; sia $S \subseteq X$ è vediamo cosa sono, se esistono, prodotti e i coprodotti di S.
Anzitutto, un $p \in X$ con una collezione di frecce $p \to x$, una per ogni $x \in S$ è un $p \in X$ tale che $p \leqslant x$ per ogni $x \in S$. Quindi, un prodotto di S è un qualche $p \in X$ soddisfacente le seguenti proprietà

1. $p \leqslant x$ per ogni $x \in S$
2. per ogni $c \in X$ per cui $c \leqslant x$ per ogni $x \in S$ si ha $c \leqslant p$.

Vediamo ora cosa può essere un coprodotto di S. Un $q \in X$ con frecce $x \to q$, una per ogni $x \in S$, è un $q \in X$ tale che $x \leqslant q$ per ogni $x \in S$. Analogamente a prima, un coprodotto di S è un $q \in X$ tale che

1. $x \leqslant q$ per ogni $x \in S$
2. per ogni $c \in X$ per cui $x \leqslant c$ per ogni $x \in S$ si ha $q \leqslant c$.

Nella Teoria degli Insiemi, i prodotti sono detti *estremi inferiori*, mentre i coprodotti sono chiamati *estremi superiori*. Come in generale, i prodotti e i coprodotti sono unici a meno di isomorfismi; tuttavia, nel caso in cui $(X, \leqslant)$ sia un insieme ordinato (cioè nel quale l'isomorfismo è uguaglianza), se esistono, i prodotti e i coprodotti sono unici. In questo caso, il prodotto e il coprodotto di S si indicarli con $\inf S$ e $\sup S$ rispettivamente.
L'insieme $\mathbb{R}$ con l'usuale ordine $\leq$ è un insieme ordinato. La cosa interessante

di questo insieme è la completezza: ogni insieme inferiormente limitato ha estremo inferiore e ogni insieme superiormente limitato ha estremo superiore. Non è un fatto scontato questo: per esempio in $(\mathbb{Q}, \leq)$ queste cose non succedono!

Esercizio 4.25. Prendi $\mathbb{N}$ con la relazione di divisibilità $|$:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m \mid n \overset{\text{def}}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} : mk = n.$$

Questa relazione è d'ordine. Dimostrare che esistono e sono unici i prodotti e i coprodotti di $(\mathbb{N}, |)$. A proposito, cosa sono precisamente?

Esercizio 4.26. Questo esercizio è ambientato in una qualche categoria, non importa quale; il tutto accade lì dentro. Siano x_1, x_2 e x_3 degli oggetti, $x_1 \times x_2$ un oggetto con le frecce uscenti

$$x_1 \xleftarrow{p_1} x_1 \times x_2 \xrightarrow{p_2} x_2$$

un prodotto di $\{x_1, x_2\}$ e $(x_1 \times x_2) \times x_3$ un oggetto con le frecce

$$x_1 \times x_2 \xleftarrow{p_{12}} (x_1 \times x_2) \times x_3 \xrightarrow{p_3} x_3$$

un prodotto di $\{x_1 \times x_2, x_3\}$. Dimostrare che $(x_1 \times x_2) \times x_3$ con opportune frecce è un prodotto di $\{x_1, x_2, x_3\}$. (Parte dell'esercizio è capire quali sono queste frecce.) Ora prendi un prodotto di $\{x_2, x_3\}$ fatto di un oggetto chiamato $x_2 \times x_3$ con frecce

$$x_2 \xleftarrow{p_2} x_2 \times x_3 \xrightarrow{p_3} x_3$$

e un prodotto di $\{x_1, x_2 \times x_3\}$ consistente di un oggetto scritto come $x_1 \times (x_2 \times x_3)$ e di due frecce

$$x_1 \xleftarrow{p_1} x_1 \times (x_2 \times x_3) \xrightarrow{p_{23}} x_2 \times x_3.$$

Come prima mostra che $x_1 \times (x_2 \times x_3)$, affiancato da opportune frecce uscenti, è un prodotto di $\{x_1, x_2, x_3\}$.
Da questo esercizio deduci che

$$(x_1 \times x_2) \times x_3 \cong x_1 \times (x_2 \times x_3)$$

ovvero una sorta di "associatività del prodotto (binario)".

Esercizio 4.27. Riusciresti a fare una cosa simile per il coprodotto di tre oggetti?

4.3 Pullbacks e pushouts

Definizione 4.28 (Pullbacks e pushouts)**.** [Pullbacks (pushouts) di collezioni di frecce aventi codominio (dominio) comune?] Sia $\mathcal{C}$ una categoria: un *pullback* in $\mathcal{C}$ di una coppia di frecce di $\mathcal{C}$ con codominio comune

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "s"] \\ b \arrow[r, "t"'] & c \end{tikzcd}$$

è un qualsiasi oggetto p di $\mathcal{C}$ con una coppia di frecce $f : p \to a$ e $g : p \to b$ di $\mathcal{C}$ tali da far commutare

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & a \arrow[d, "s"] \\ b \arrow[r, "t"'] & c \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

e con la seguente proprietà: per ogni oggetto q di $\mathcal{C}$ con frecce $h : q \to a$ e $k : q \to b$ di $\mathcal{C}$ per le quali commuta

$$\begin{tikzcd} q \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & a \arrow[d, "s"] \\ b \arrow[r, "t"'] & c \end{tikzcd}$$

esiste una e una sola freccia $l : q \to p$ di $\mathcal{C}$ tale che $fl = h$ e $gl = k$. Il quadrato[2] (4.2) è detto "di pullback". Dualmente, un *pushout* in $\mathcal{C}$ di due frecce

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & a \\ b & \end{tikzcd}$$

di $\mathcal{C}$ è uno qualsiasi dei pullback in $\mathcal{C}^{\text{op}}$ della stessa coppia di frecce, questa volta viste come frecce di $\mathcal{C}^{\text{op}}$. Esiste anche un'ovvia nozione di "quadrato di pushout".

Esercizio 4.29. Come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, costruire una categoria apposita in cui un pullback (pushout) risulta un oggetto terminale (iniziale). In altre parole costruirai la *categoria dei coni* su

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d] \\ b \arrow[r] & c \end{tikzcd}.$$

Fatto questo, puoi dire che un pullback (pushout) di una stessa coppia di frecce è unico a meno di isomorfismi. Anche in questo caso, osserva che un isomorfismo di coni è un isomorfismo di vertici.

Esempio 4.30 (Le preimmagini)**.** Sia $f : X \to Y$ una funzione di insiemi e $C \subseteq Y$. Facciamo vedere che

$$\begin{tikzcd} f^{-1}C \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "i_X"'] & C \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

è un quadrato di pullback di **Set**, dove $\overline{f}(c) := f(c)$, $i_X(a) := a$ e $i_Y(b) := b$. Anzitutto è facile vedere che il quadrato sopra commuta. Prendiamo un qualsiasi insieme A con due funzioni $h : A \to X$ e $k : A \to C$ per le quali

2 Nulla di strettamente geometrico, quattro oggetti e quattro frecce

commuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} :$$

la funzione $j : A \to f^{-1}C$ tale che $j(z) := h(z)$ soddisfa $h = i_X j$ e $k = \overline{f} j$ (fai i conti!). Sia ora una funzione $j' : A \to f^{-1}C$ tale che $h = i_X j'$ e $k = \overline{f} j'$: dalla prima di queste due abbiamo che $h(x) = i_X j'(x) = j'(x)$ per ogni $x \in A$ e quindi $j' = j$.

Esercizio 4.31 (La funzione caratteristica)**.** Dati un insieme X e $A \subseteq X$, la *funzione caratteristica* di A è

$$\chi_A : X \to 2\,,\ \chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

nella quale $2 := \{0, 1\}$. Abbiamo così il quadrato di **Set**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\exists!"'] & X \arrow[d, "\chi_A"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & 2 \end{tikzcd} , \tag{4.3}$$

dove $\top$ manda l'unico elemento del singoletto 1 in $1 \in 2$. Provare che (4.3) è un quadrato di pullback in **Set**.

Teorema 4.32 (Lemma dei pullbacks, o PBL[3])**.** Si consideri il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"'] & \bullet \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, "c"] \\ \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \arrow[r, "f"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

in cui il rettangolo esterno commuta e il quadrato a destra è di pullback. Il quadrato a sinistra è di pullback se e solo se il rettangolo esterno lo è.

Dimostrazione. Assumiamo che il quadrato a sinistra sia di pullback e sia $*$ un oggetto qualsiasi e h, k due frecce tali che il rettangolo in colore qui sotto

$$\begin{tikzcd} * \arrow[drrr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & & \\ & \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"] & \bullet \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, "c"] \\ & \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \arrow[r, "f"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

3 Sigla dell'espressione inglese "Pullback Lemma".

commuta, ovvero $ch = f(ek)$. Da ipotesi, però $\bullet \xleftarrow{b} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ è un pullback di $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xleftarrow{c} \bullet$, e quindi esiste una e una sola freccia l tale che $h = bl$ e $gl = ek$:

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[drrr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & & \\
& \bullet \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "d"] & \bullet \arrow[r, "b"'] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, "c"] \\
& \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \arrow[r, "f"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Abbiamo appena detto anche che quanto evidenziato qui sotto commuta

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[drrr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & & \\
& \bullet \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "d"] & \bullet \arrow[r, "b"'] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, "c"] \\
& \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \arrow[r, "f"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Di nuovo, essendo da ipotesi $\bullet \xleftarrow{a} \bullet \xrightarrow{d} \bullet$ un pullback di $\bullet \xrightarrow{e} \bullet \xleftarrow{g} \bullet$, esiste una e una sola freccia m tale che $l = am$ e $k = dm$:

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[dr, "m"] \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[drrr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & & \\
& \bullet \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "d"] & \bullet \arrow[r, "b"'] \arrow[d, "g"] & \bullet \arrow[d, "c"] \\
& \bullet \arrow[r, "e"'] & \bullet \arrow[r, "f"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Ci sono tutte le carte in gioco per dire che $h = bam$ e $k = dm$, e che le nostre costruzioni ci portano necessariamente a m: pertanto $\bullet \xleftarrow{d} \bullet \xrightarrow{ba} \bullet$ è un pullback di $\bullet \xrightarrow{fe} \bullet \xleftarrow{c} \bullet$.

□

Esercizio 4.33. Completare la dimostrazione del teorema 4.32 provado l'implicazione restante.

Esercizio 4.34. Provare: $f : a \to b$ è un monomorfismo se e solo se

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "1_a"] \arrow[d, "1_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

è un quadrato di pullback.

Esercizio 4.35. Considera il quadrato di pullback

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet
\end{tikzcd} :$$

dimostra che se g è un monomorfismo, allora anche f lo è.

Teorema 4.36. Sia $\mathcal{C}$ una categoria, $1 \in |\mathcal{C}|$ oggetto terminale, $a, b, p \in |\mathcal{C}|$ e due frecce di $\mathcal{C}$

$$a \xleftarrow{\pi_1} p \xrightarrow{\pi_2} b$$

Sono equivalenti:

1. p assieme a π_1 e π_2 è un prodotto di a e b in $\mathcal{C}$.
2. p con π_1 e π_2 è un pullback in $\mathcal{C}$ di $a \to 1 \leftarrow b$.

Dimostrazione. Sia

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & a \arrow[d, "\exists!"] \\ b \arrow[r, "\exists!"'] & 1 \end{tikzcd}$$

un quadrato di $\mathcal{C}$. Questo commuta perché 1 è oggetto terminale; se poi p con le due frecce π_1 e π_2 è un prodotto in $\mathcal{C}$ di a e b, allora abbiamo che esiste una e una sola freccia $h : c \to p$ tale che $\pi_1 h = f$ e $\pi_2 h = g$.
Viceversa, per ogni $c \in |\mathcal{C}|$ con due frecce

$$a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$$

di $\mathcal{C}$ si ha il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & a \arrow[d, "\exists!"] \\ b \arrow[r, "\exists!"'] & 1 \end{tikzcd}$$

di $\mathcal{C}$: da definizione, esiste una e una sola freccia $k : c \to p$ tale che $\pi_1 h = f$ e $\pi_2 h = g$. Trascurando le due frecce puntanti ad 1, abbiamo costruito all'interno di $\mathcal{C}$ un prodotto di a e b. $\square$

Esercizio 4.37. Dualizza il teorema precedente.

Esercizio 4.38. Cosa sono i pullbacks e i pushouts dell'insieme ordinato $(\wp X, \subseteq)$, per X insieme?

4.4 Equalizzatori e coequalizzatori

Definizione 4.39 (Equalizzatori e coequalizzatori)**.** [Generalizzare con una generica collezione di frecce parallele?] Sia $\mathcal{C}$ una categoria e $a, b \in |\mathcal{C}|$. Un *equalizzatore* in $\mathcal{C}$ di due frecce

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

di $\mathcal{C}$ è un $e \in |\mathcal{C}|$ con una freccia $i : e \to a$ tale che $fi = gi$ con la seguente proprietà: per ogni $d \in |\mathcal{C}|$ con una freccia $j : d \to a$ di $\mathcal{C}$ tale che $fj = gj$ esiste una e una sola freccia $k : d \to e$ di $\mathcal{C}$ per cui commuta

$$\begin{tikzcd} d \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "k"'] & \\ & a \\ e \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Abbiamo il concetto duale: un *coequalizzatore* di (4.4) all'interno di $\mathcal{C}$ è esattamente un equalizzatore delle stesse frecce viste come frecce di $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Esempio 4.40. Siamo in **Set**: presi due insiemi A e B e due funzioni

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

abbiamo l'*equalizzatore* delle due funzioni

$$\mathrm{eq}(f,g) := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}\,.$$

Il nome suggerisce che è un equalizzatore nel senso che vogliamo: $\mathrm{eq}(f,g)$ con l'inclusione $i : \mathrm{eq}(f,g) \hookrightarrow A$ è un equalizzatore di f e g. Infatti presa un qualsiasi insieme C con una funzione $j : C \to A$ tale che $fj = gj$, la funzione

$$h : C \to \mathrm{eq}(f,g)\,,\ h(x) = j(x)$$

fa al caso nostro, ovvero fa commutare

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "j"] & \\ & A\,. \\ \mathrm{eq}(f,g) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

(Notare che la definizione di h è proprio possibile in quanto $fj = gj$.) È immediato vedere che h è l'unica per cui le cose funzionano.

Esercizio 4.41 (Pullbacks ed equalizzatori)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Se

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

è un suo quadrato di pullback, allora e con i è un equalizzatore di f e g? È vero il viceversa? Esiste un'ovvia dualizzazione di questo esercizio.

4.5 Limiti e colimiti

Definizione 4.42 (Limiti e colimiti)**.** Siano $\mathcal{C}$ ed $\mathbf{I}$ due categorie.

- Un *diagramma* di forma $\mathbf{I}$ è un funtore $D : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$. [Un... *codiagramma* o *diagramma duale*?]
- Sia $v \in |\mathcal{C}|$ e il funtore $k_v : \mathbf{I} \to \mathcal{C}$ che manda qualsiasi oggetto di $\mathbf{I}$ in v e qualsiasi freccia di $\mathbf{I}$ in 1_v. Un *cono* sopra D di vertice v è una qualsiasi trasformazione naturale

  $$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[r, bend left, "k_v"{name=U}] \arrow[r, bend right, "D"'{name=L}] & \mathcal{C}\,. \arrow[from=U, to=L, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

  Dualmente, un *cocono* sotto D di vertice v è una qualsiasi trasformazione naturale

  $$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[r, bend left, "D"{name=U}] \arrow[r, bend right, "k_v"'{name=L}] & \mathcal{C}\,. \arrow[from=U, to=L, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

  [Dare la definizione di cocono attraverso diagrammi duali?]

- Un *limite* di D è un cono $\left\{L \xrightarrow{\lambda_i} D(i)\right\}_{i\in|\mathbf{I}|}$ su D tale che per ogni cono $\left\{A \xrightarrow{\alpha_i} D(i)\right\}_{i\in|\mathbf{I}|}$ su D si ha che esiste una e una sola freccia $h : A \to L$ di $\mathcal{C}$ per la quale commuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\ L \arrow[r, "\lambda_i"'] & D(i) \end{tikzcd}$$

per ogni $i \in |\mathbf{I}|$. [Da dare ancora la nozione di colimite...]

4.6 Completezza

5

Aggiunzioni

5.1 Definizione

Definizione 5.1 (Aggiunzioni)**.** Sia $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie e due funtori

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "L"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd} .$$

Un *aggiunzione* da L a R è un isomorfismo naturale

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\hom_{\mathcal{C}}(-,R(\cdot))"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\hom_{\mathcal{C}}(L(-),\cdot)"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow] \end{tikzcd} . \tag{5.1}$$

Scriveremo $L \dashv R$ per indicare che c'è una una aggiunzione da L a R; in tal caso, diciamo che L è l'*aggiunto sinistro* mentre R quello *destro*.

Per una trattazione il più generale possibile possiamo usare una notazione molto più leggera: per $a \in \mathcal{C}$, $b \in \mathcal{D}$ e $f \in \hom_{\mathcal{C}}(a, R(b))$, indichiamo con $\overline{f} \in \hom_{\mathcal{D}}(L(a), b)$ l'unica freccia che corrisponde a f attraverso l'isomorfismo naturale 5.1; analogamente, per $c \in \mathcal{D}$, $d \in \mathcal{C}$ e $g \in \hom_{\mathcal{D}}(L(c), d)$, indichiamo con $\overline{g} \in \hom_{\mathcal{C}}(c, R(d))$ l'unica freccia che corrisponde a g attraverso l'isomorfismo naturale 5.1.

$$\overline{a \xrightarrow{f} R(b)} = \left(L(a) \xrightarrow{\overline{f}} b\right)$$
$$\overline{L(c) \xrightarrow{g} d} = \left(c \xrightarrow{\overline{g}} R(d)\right)$$

Il fatto che una aggiunzione sia un isomorfismo naturale implica che non ci sia verso privilegiato tra

$$\hom_{\mathcal{C}}(x, R(y)) \to \hom_{\mathcal{D}}(L(x), y)$$

e

$$\hom_{\mathcal{D}}(L(x), y) \to \hom_{\mathcal{C}}(x, R(y))$$

con $x \in \mathcal{C}$ e $y \in \mathcal{D}$. Indicando tutte queste funzione con la barra, potrebbe creare un po' di confusione, ma questa si elimina facilmente tenendo conto da dove si parte e dove si arriva.

Bibliografia

[AHS04] Jiří Adámek, Horst Herrlich e George E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. 2004. URL: `http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf`.

[Ber16] Alessandro Berarducci. *Elementi di Teoria degli Insiemi*. 2016. URL: `http://people.dm.unipi.it/berardu/Didattica/2012-13ETI/Insiemi2012-13/insiemi2016.pdf`.

[Gol06] Robert Goldblatt. *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. Dover Publications, Inc., 2006.

[Lei16] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. 2016. URL: `https://arxiv.org/pdf/1612.09375.pdf`.

Indice analitico