Note di Teoria della Misura

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 11 ottobre 2022.

Indice

1 Spazi di misura

Definizione 1.1 (Spazi misurabili)**.** Una *σ-algebra* su un insieme Ω è una qualsiasi famiglia $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ tale che:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha $\Omega - A \in \mathcal{A}$
3. per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ si ha $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

I sottoinsiemi di Ω che appartengono a $\mathcal{A}$ sono chiamati *misurabili*. Uno *spazio misurabile* consiste di un insieme Ω e una sua σ-algebra $\mathcal{A}$. Di solito ci riferiremo a questo nuovo oggetto attraverso la coppia $(\Omega, \mathcal{A})$.

Osservazione 1.2. La terza condizione della definizione sembra essere non dire nulla sulle unioni finite di insiemi, ma non è così. Basta scegliere una successione in cui tutti tranne un numero finito di termini sono nulli.

Proposizione 1.3. Sia Ω un insieme e $F \subseteq 2^\Omega$ qualsiasi. Allora esiste una e una sola σ-algebra $\mathcal{A}$ su Ω tale che

1. $F \subseteq \mathcal{A}$
2. per ogni σ-algebra $\mathcal{B}$ su Ω tale che $F \subseteq \mathcal{B}$ si ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Almeno una σ-algebra contenente F esiste ed è 2^Ω. Inoltre si mostra facilmente che l'intersezione di σ-algebre è ancora una σ-algebra, quindi indichiamo con $\mathcal{A}$ l'intersezione di tutte le σ-algebre di Ω che contengono F. Si può verificare facilmente che questa è la σ-algebra cercata. □

Definizione 1.4 (σ-algebra generata)**.** La σ-algebra $\mathcal{A}$ della proposizione precedente viene detta *σ-algebra generata* da F.

Definizione 1.5 (Spazi di misura)**.** Una *misura* su uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ è una funzione

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

tale che:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

Uno *spazio di misura* è il dato di uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ e di una misura $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ su questo. Come prima, raccogliamo questi tre dati in una tripla $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$.

[Fare osservazione sulla convergenza della serie in definizione. Parlare anche delle unioni finite.]

Esempio 1.6. Un esempio particolarmente importante per la Teoria della Probabilità e per la Statistica è il seguente. Sia Ω un insieme che in genere viene chiamato *insieme degli eventi elementari*; supponiamo per di più che abbia cardinalità finita n e scriviamo x_1, … e x_n i suoi elementi. Una volta scelti

n numeri reali $p_1, \dots, p_n \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, sullo spazio misurabile discreto $(\Omega, 2^\Omega)$ esiste una e una sola misura

$$\pi : 2^\Omega \to [0, +\infty]$$

tale che $\pi(\{x_i\}) = p_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. A seconda che si è nella Teoria della Probabilità o nella Statistica, i numeri p_1, … e p_n possono essere visti come probabilità di un evento elementare oppure come la frequenza di un evento. Essendo poi che π assume valori in $[0, 1]$, si sceglie solitamente questo come codominio della misura.

Esempio 1.7. Un altro esempio importante è questo. Preso uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$, la *misura di Dirac* concentrata in $x_0 \in \Omega$ è la funzione

$$\delta_{x_0} : \mathcal{A} \to [0, +\infty], \ \delta_{x_0}(E) := \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Vedremo l'importanza delle delta di Dirac quando parleremo di integrazione.

Esempio 1.8. Banalmente, il conteggio degli elementi può fornire una misura. Per $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, definiamo la misura

$$\# : \mathcal{A} \to [0, +\infty], \ \#(E) := \begin{cases} \text{numero di elementi di } E & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Tuttavia, non è un modo raffinato di dire la cardinalità di un insieme dato che non distingue insiemi infiniti ma che hanno diverse cardinalità.

Altri esempi di misure notevoli verranno in seguito.

Definizione 1.9 (Insieme trascurabile)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Un insieme $A \in \mathcal{A}$ si dice *trascurabile* qualora $\mu(A) = 0$.

Lemma 1.10. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.

1. Per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ tali che $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$
2. Per ogni successione $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ tali che $B_{n+1} \subseteq B_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(B_0) < +\infty$ si ha
$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n).$$

Dimostrazione. Osserviamo che qualunque sia la successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, possiamo costruirne un'altra, che chiamiamo $\{A'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, i cui elementi sono a due a due disgiunti e la cui unione sia proprio $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$:

$$A'_0 := A_0, \ A'_n := A_n - A_{n-1}.$$

Inoltre si può provare (per induzione, per esempio) che

$$A_n = \bigcup_{i \leq n} A'_i \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Possiamo quindi provare il primo punto:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{i\leq n} A'_i\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A'_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Rimane da provare il secondo punto. Consideriamo la successione $\{B'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ assegnata come

$$B'_n := B_0 - B_n.$$

Essendo $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ decrescente, allora $\{B'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è crescente. Quello che ci permette di concludere la dimostrazione è:

$$B_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B'_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

in cui l'unione e l'intersezione sono chiaramente disgiunti. Quindi:

$$\mu(B_0) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B'_n\right) + \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

Nel membro a destra, il primo addendo è uguale a $\lim_{n\to+\infty} \mu(B'_n) = \mu(B_0) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$ per il primo punto di questa proposizione. (Abbiamo appena usato il fatto che $\mu(B_0) < +\infty$. Precisamente dove?) Concludiamo che

$$0 = -\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) + \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

e cioè la tesi. □

2 Funzioni misurabili

Definizione 2.1 (Funzione misurabili)**.** Siano $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ due spazi misurabili. Una *funzione misurabile* da $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ a $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ è una qualsiasi funzione $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}_2$ si ha $f^{-1}E \in \mathcal{A}_1$. Per dire che f è una funzione misurabile da $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ a $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ scriveremo

$$f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$$

oppure semplicemente $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ quando è chiaro dal contesto quali sono le rispettive σ-algebre.

La verifica della misurabilità di una funzione può semplificarsi "drasticamente" nella caso in cui la σ-algebra del codominio sia generata:

Lemma 2.2. Siano due spazi misurabili $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ e $\Omega_2, \mathcal{A}_2$ con $\mathcal{A}_2$ una σ-algebra generata da una famiglia S. Allora sono equivalenti:

1. $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ è misurabile
2. per ogni $E \in S$ si ha $f^{-1}E \in \mathcal{A}_1$.

Dimostrazione. L'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$ è ovvia, proviamo l'altro verso. L'insieme

$$\mathcal{U} := \left\{ E \in \mathcal{A}_2 \mid f^{-1}E \in \mathcal{A}_1 \right\}$$

contiene S ed è una σ-algebra per $\mathcal{A}_2$: per la definizione di σ-algebra generata, abbiamo quindi che $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{U}$, e l'asserto può considerarsi provato. □

Noi in particolare ci interesseremo di una classe di funzioni misurabili. Prima di tutto, chiamiamo *algebra di Borel* la più piccola σ-algebra contente gli aperti della topologia euclidea di $\mathbb{R}$. Indichiamo questa σ-algebra con $\mathbb{B}$. Il lemma che segue dice che per l'algebra di borel si possono scegliere altre base che possono fare comodo in certe situazioni.

Lemma 2.3. Altre basi dell'algebra di Borel sono:

- la famiglia degli intervalli aperti e limitati
- la famiglia degli intervalli chiusi e limitati
- la famiglia degli intervalli della forma $[a, b)$ (oppure $(a, b]$), per $a, b \in \mathbb{R}$
- la famiglia degli intervalli del tipo $(-\infty, a)$ (oppure $(a, +\infty)$), per $a \in \mathbb{R}$
- la famiglia degli intervalli del tipo $(-\infty, a]$ (oppure $[a, +\infty)$), per $a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Essenzialmente, basta ricordarsi cosa significa "σ-algebra generata" e qualche fatto topologico. La topologia euclidea ha una base numerabile fatta di intervalli aperti e limitati, quindi il primo punto è provato. Dimostriamo alcuni degli punti, i restanti vengono lasciati per esercizio.
Facciamo vedere che la sigma algebra generata dagli intervalli $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, è quella di Borel. Una inclusione è banale, per far vedere l'altra osserviamo che

$$(a, b) = (-\infty, b) - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right).$$

Per definizione di σ-algebra, gli intervalli (a, b) appartengono alla σ-algebra generata dagli intervalli $(-\infty, c)$. □

D'ora in poi quando si parla di $\mathbb{R}$, si suppone che questa abbia con sé l'algebra di Borel.

Proposizione 2.4. Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Sono misurabili le funzioni

$$f_+ : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_- : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Lo sono anche kf, con $k \in \mathbb{R}$, e $|f|$. Inoltre se $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è una altra funzione misurabile, allora lo sono anche $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$.

Dimostrazione. Useremo il Lemma 2.3. [Ancora da terminare...] □

[C'è qualche altra proposizione riguardante le funzioni misurabili. Ancora da TEXare...]

3 Integrazione secondo Lebesgue

Diciamo che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è *semplice* nel caso in cui la sua immagine abbia cardinalità finita, cioè $f\Omega = \{c_1, \dots, c_n\}$. In generale, le fibre delle immagini di una funzione partizionano il dominio; nel nostro caso, abbiamo un numero finito di fibre $E_1 := f^{-1}\{c_1\}$, ..., e $E_n := f^{-1}\{c_n\}$ che partizionano Ω. Quindi le funzioni semplici sono funzioni "costanti a tratti", cioè funzioni introdotte come segue

$$f(x) := \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in E_1 \\ \vdots & \quad\vdots \\ c_i & \text{se } x \in E_i \\ \vdots & \quad\vdots \\ c_n & \text{se } x \in E_n \end{cases} \tag{3.1}$$

Tuttavia, per funzioni con dominio $\mathbb{R}$, esiste un modo molto compatto e comodo di dire (3.1). Per questo abbiamo bisogno di più notazione.

Sia Ω un qualsiasi insieme; ogni suo sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ ha una sua *funzione caratteristica*

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

È immediato verificare che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice se e solo se si può scrivere come combinazione finita di funzioni caratteristiche:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$
$$\text{dove } E_i := f^{-1}\{c_i\}$$

In realtà, si possono scegliere degli E_i che partizionino Ω e che siano contenuti in qualche fibra di f; noi scegliamo $E_i = f^{-1}\{c_i\}$ per pura comodità.

Lemma 3.1. Per ogni funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ esiste una successione di funzioni semplici $\{s_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ tali che $s_n \to f$ puntualmente. Se f è pure misurabile (ciò presuppone che Ω sia uno spazio misurabile), allora le s_n possono essere scelte misurabili. Se $f \geq 0$, allora la successione può essere presa crescente.

Dimostrazione. Ricordiamo che ogni funzione $\Omega \to \mathbb{R}$ è la differenza tra la sua parte positiva e quella negativa, dove queste due sono entrambe non negative. Pertanto se riusciamo a costruire per ogni funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ non negativa una successione di funzioni semplici convergenti puntualmente a f abbiamo finito. L'idea è di approssimare per difetto $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con funzioni semplici di volta in volta più vicini a f. Consideriamo, per $n \in \mathbb{N}$, gli insiemi

$$E_{n,i} := f^{-1}\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \quad \text{con } i \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$$
$$F_n := f^{-1}[n, +\infty).$$

Osserviamo che questi insiemi partizionano Ω. La suddivisione di $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ha un senso: fissato un certo n, l'unione degli intervalli $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)$ è $[0, n)$, e questo intervallo è suddiviso in sotto-intervalli di lunghezza $\frac{1}{2^n}$. Consideriamo le funzioni semplici

$$\begin{aligned} s_n &: \Omega \to \mathbb{R} \\ s_n(x) &:= \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x). \end{aligned}$$

Facciamo vedere la convergenza puntuale. Per costruzione, comunque preso $x \in \Omega$, esiste $n_x \in \mathbb{N}$ per cui per ogni $n \geq n_x$ si ha x sta in uno e un solo $E_{n,i}$; allora, per $n \geq n_x$,

$$|f(x) - s_n(x)| = \underbrace{\left| f(x) - \frac{i}{2^n} \right|}_{i \text{ è quello per cui } x \in E_{n,i}} < \left| \frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Possiamo quindi concludere

$$\lim_{n \to +\infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Il resto della proposizione è semplice da dimostrare. Se f è misurabile, allora gli $E_{n,i}$ e gli F_n sono insiemi misurabili, e quindi le s_n sono misurabili a causa della Proposizione 2.4. Se $f \geq 0$, allora è anche $s_n \leq s_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Ora per parlare di integrazione, entrano nel discorso le misure.

Definizione 3.2 (Integrale di funzioni misurabili)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $s : \Omega \to \mathbb{R}$ una semplice funzione misurabile, cioè

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

per opportuni E_1, ... e E_n misurabili che partizionano Ω. Chiamiamo *integrale* di s il numero (eventualmente infinito)

$$\int s \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i).$$

Sia ora $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa. L'*integrale* di f è il numero reale

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{s:\Omega\to\mathbb{R} \text{ semplice,} \\ \text{misurabile e } 0 \leq s \leq f}} \int_{\Omega} s \mathrm{d}\mu.$$

Qualora sia un numero reale eventualmente infinito, l'*integrale* (*di Lebesgue*) di una funzione misurabile qualsiasi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int f_+ \mathrm{d}\mu - \int f_- \mathrm{d}\mu.$$

Molto spesso però, si vuole integrare solo sua una parte del dominio: se $E \in \mathcal{A}$, allora

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \int \chi_E f \mathrm{d}\mu.$$

Una funzione misurabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile* su $E \subseteq \Omega$ misurabile se e solo se sono finiti $\int_E f_+ \mathrm{d}\mu$ e $\int_E f_- \mathrm{d}\mu$.

Un criterio molto semplice per verificare l'integrabilità di una funzione misurabile è il seguente.

Proposizione 3.3. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e $E \in \mathcal{A}$. Se esiste una funzione misurabile $g : \Omega \to \mathbb{R}$ che sia integrabile su E e che $|f| \leq g$ su E, allora f è integrabile su E.

Dimostrazione. Infatti dalle ipotesi segue che $0 \leq f_+, f_- \leq g$ e quindi $\int_E f_+ \mathrm{d}\mu$ e $\int_E f_- \mathrm{d}\mu$ sono compresi tra 0 e $\int_E g \mathrm{d}\mu$, che è finito. □

[Fare esempi di funzioni integrabili. È troppo presto?]

Lemma 3.4. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione semplice, misurabile e non negativa. Allora

$$\begin{aligned} \nu &: \mathcal{A} \to [0, +\infty] \\ \nu(E) &:= \int_E f \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

è una misura per lo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$.

Dimostrazione. È banale verificare che $\nu(\varnothing) = 0$. Sia ora $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti. Per comodità, $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Inoltre, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice,

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}$$

con gli E_i che partizionano Ω e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che (è facile da dimostrare)

$$\int \chi_E f \mathrm{d}\mu = \left(\int f \mathrm{d}\mu \right) \chi_E$$

con $E \in \mathcal{A}$ qualsiasi. Abbiamo quindi che

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int \chi_A f \mathrm{d}\mu = \underbrace{\left(\int f \mathrm{d}\mu \right) \chi_A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int f \mathrm{d}\mu \right) \chi_{A_n}}_{\text{le funzioni caratteristiche sono misure}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

Con la proposizione che segue togliamo l'ipotesi della semplicità.

Proposizione 3.5. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e non negativa. Allora la funzione

$$\begin{aligned} \nu &: \mathcal{A} \to [0, +\infty] \\ \nu(E) &:= \int_E f \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

è una misura per lo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$.

Dimostrazione. È immediato vedere che $\nu(\varnothing) = 0$. Sia ora una $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di elementi $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, e per comodità $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Facciamo vedere che $\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$, vale a dire

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

Per ogni funzione semplice, misurabile e tale che $0 \leq s \leq f$ si ha

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu \geq \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} s \mathrm{d}\mu = \int_A s \mathrm{d}\mu}_{\text{vedi lemma precedente}}$$

e quindi, per definizione di integrale, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) \geq \nu(A)$.
Rimane solo da provare la disuguaglianza opposta. Osserviamo preliminarmente che se qualche $\nu(A_n)$ è infinito, allora, questa disuguaglianza è verificata. Ragione per cui d'ora in poi si suppone che tutti gli $\nu(A_n)$ siano finiti. Fissato $\varepsilon > 0$, per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ si ha che esiste una funzione $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$ semplice, misurabile e tale che $0 \leq s_n \leq f$ per cui

$$\int_{A_n} f \mathrm{d}\mu - \frac{\varepsilon}{n} \leq \int_{A_n} s_n \mathrm{d}\mu.$$

Se ne deduce che

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu - \varepsilon \leq \underbrace{\sum_{n=0} \int_{A_n} s_n \mathrm{d}\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} \left(\sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} s_n \right) \mathrm{d}\mu}_{\text{esercizio}} \leq \int_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

E quindi per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu \leq \int_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

Pertanto per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{k} \nu(A_k) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \right) \leq \nu(A)$$

e, a maggior ragione, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) \leq \nu(A)$. Dove è stata usata la non negatività di f? $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$ è una serie che converge oppure diverge a $+\infty$ dato che i singoli $\nu(A_n) \geq 0$ proprio perché $f \geq 0$. □

Corollario 3.6. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e integrabile. Allora per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti si ha

$$\int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

Proposizione 3.7. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $E \in \mathcal{A}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e integrabile. Allora $|f|$ è integrabile su E e

$$\left| \int_E f \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \mathrm{d}\mu.$$

Uno potrebbe pensare di procedere così. Si ricorda che $|f| = f_+ + f_-$, e poi di fare

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A f_+ \mathrm{d}\mu + \int_A f_- \mathrm{d}\mu.$$

Il punto è questo fatto verrà provato solo dopo aver provato qualche risultato sulla convergenza. Si potrebbe dimostrare questo teorema una volta arrivati là, ma si può fare anche già adesso.

Dimostrazione. E è partizionato egli insiemi misurabili $E_1 := \{x \in A \mid f(x) \geq 0\}$ ed $E_2 := \{x \in A \mid f(x) < 0\}$. Abbiamo visto poi che se f è misurabile allora pure $|f|$ lo è. In questo caso,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} |f|\,\mathrm{d}\mu + \int_{E_2} |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f\mathrm{d}\mu + \int_{E_2} (-f)\mathrm{d}\mu$$

e quindi $|f|$ è integrabile sopra E. Rimangono dei conti da fare:

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu}_{\int_E f_+\mathrm{d}\mu} + \underbrace{\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu}_{\int_E f_-\mathrm{d}\mu} \geq \left|\int_E f_+\mathrm{d}\mu - \int_E f_-\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|. \qquad \square$$

Proposizione 3.8 (Teorema di Beppo-Levi, o della "convergenza dominata")**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione crescente di funzioni misurabili e non negative. Considerata la funzione

$$\begin{aligned} &f : \Omega \to \mathbb{R} \\ &f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

si ha, per $E \in \mathcal{A}$,

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\mathrm{d}\mu.$$

Vale la pena osservare che, essendo la successione di funzioni crescente, lo è anche la successione degli integrali $\int_E f\mathrm{d}\mu$: ragione per cui il limite $\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\mathrm{d}\mu$ è definito.

Dimostrazione. Poiché la successione è crescente, sia ha subito che $\int_E f_n\mathrm{d}\mu \leq \int_E f\mathrm{d}\mu$ e quindi la disuguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\mathrm{d}\mu \leq \int_E f\mathrm{d}\mu.$$

Proviamo la disuguaglianza opposta. Per pura comodità, $\alpha := \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\mathrm{d}\mu$. Se proviamo che $\alpha \geq \int_E s\mathrm{d}\mu$ per ogni funzione misurabile semplice $s : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $0 \leq s \leq f$, possiamo anche che $\alpha \geq \int_E f\mathrm{d}\mu$. Consideriamo infatti una qualsiasi di queste funzioni. Preso $\delta \in (0,1)$ gli insiemi misurabili

$$E_n := \{x \in E \mid f_n(x) \geq \delta s(x)\}$$

sono tali che $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ricoprono E (quest'ultimo è un semplice fatto pertinente i limiti di successione). Quindi

$$\int_E f_n\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} \delta s\mathrm{d}\mu \geq \delta \int_{E_n} s\mathrm{d}\mu \geq \delta \int_{\bigcup_{i=0}^n E_i} s\mathrm{d}\mu.$$

Dato che ciò accade per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in (0,1)$, possiamo dire di aver provato anche la disuguaglianza restante. $\square$

Possiamo ora dimostrare un fatto veramente classico.

Corollario 3.9. Se due funzioni misurabili $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sono integrabili, allora pure $f + g$ lo è e

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu + \int_E g\mathrm{d}\mu$$

per ogni $E \subseteq \Omega$ misurabile.

Dimostrazione. Anzitutto, $f + g$ è misurabile, perché lo sono i singoli addendi. Supponiamo preliminarmente $f, g \geq 0$. Per il Lemma 3.1, possimao scegliere due successioni $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{g_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ crescenti di funzioni misurabili e non negative convergenti puntualmente a f e a g rispettivamente. Siamo nelle ipotesi della Proposizione 3.8, e quindi

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E (f_n + g_n)\mathrm{d}\mu.$$

Ora è facile verificare che $\int_E (f_n + g_n)\mathrm{d}\mu = \int_E f_n \mathrm{d}\mu + \int_E g_n \mathrm{d}\mu$. Applicando di nuovo la Proposizione 3.8, abbiamo

$$\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to+\infty} \int_E g_n \mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu + \int_E g\mathrm{d}\mu.$$

In particolare, ricaviamo che la somma di sue funzioni integrabili non negative è integrabile. Possiamo a questo punto verificare pure l'integrabilità di $f + g$ senza l'ipotesi aggiuntiva non negatività delle due funzioni. Sappiamo che $|f|$ e $|g|$ sono integrabili perché lo sono f e g. Ora $|f + g| \leq |f| + |g|$ dove

$$\int_E (|f| + |g|)\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu + \int_E |g|\,\mathrm{d}\mu < +\infty}_{\text{perché } f \text{ e } g \text{ sono integrabili}}.$$

La Proposizione 3.3 ci permette di dire che $f + g$ è integrabile. Possiamo quindi dimostrare la proposizione nel caso generale di f e g di segno variabile, ricordando che le funzioni $\Omega \to \mathbb{R}$ possono essere scritte come differenza di funzioni non negative, $f = f_+ - f_-$ e $g = g_+ - g_-$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu &= \int_E [(f_+ + g_+) - (f_- + g_-)]\mathrm{d}\mu = \\
&= \int_E (f_+ + g_+)\mathrm{d}\mu - \int_E (f_- + g_-)\mathrm{d}\mu = \\
&= \int_E f_+ \mathrm{d}\mu + \int_E g_+ \mathrm{d}\mu - \int_E f_- \mathrm{d}\mu - \int_E g_- \mathrm{d}\mu = \\
&= \int_E f\mathrm{d}\mu + \int_E g\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

e abbiamo concluso. □

Lemma 3.10 (di Fatou)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e prendiamo una successione $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ di funzioni misurabili e non negative su un $E \in \mathcal{A}$. Allora, preso

$$\begin{aligned}
&f : \Omega \to \mathbb{R} \\
&f(x) := \liminf_{n\to+\infty} f_n(x),
\end{aligned}$$

si ha

$$\int_E f\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu.$$

Qualche volta, al posto della disuguaglianza appena scritta si scrive

$$\int_E \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right)\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$$

per dire che il $\liminf_{n\to+\infty}$ non proprio si può tirare fuori dall'integrale.

Per comodità, richiamiamo come è definito il *limite inferiore* di una successione:

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n := \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{m\geq n} x_m\right).$$

Ricordiamo anche che, essendo $\{\inf_{m\geq n} x_m \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione crescente, questo oggetto è sempre definito (finito od al più infinito). Inoltre è immediato verificare che se una successione ha limite, allora questo coincide con il suo limite inferiore.

Dimostrazione del Lemma 3.10. [Questa è una cosa di cui scrivere...] Sappiamo che f è misurabile; ovviamente è anche non negativa. Anche $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := \inf_{m\geq n} f_m(x)$ è misurabile [anche di questa cosa bisogna scrivere...]; inoltre è non negativa e crescente. Quindi per il Teorema di Beppo-Levi (Proposizione 3.8) si ha

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E g_n \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to+\infty}\int_E g_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu$$ □

Proposizione 3.11 (Teorema di Beppo-Levi II)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $E \in \mathcal{A}$ e consideriamo una successione monotona $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ di funzioni integrabili su E e tali che la successione $\left\{\int_E f_n \mathrm{d}\mu \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ sia limitata. Presa

$$\begin{aligned} &f : \Omega \to \mathbb{R} \\ &f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \end{aligned}$$

si ha che f è integrabile su E e

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu.$$

Una delle conclusioni di questa proposizione ricorda la Proposizione 3.8: in più però fornisce un criterio per verificare l'integrabilità di una funzione. Questo però non viene senza fatica perché bisogna trovare una successione che di funzioni che converga puntualmente verso di lei, ma nel caso di serie può fare molto comodo.

Dimostrazione Proposizione 3.11. Supponiamo che le f_n siano crescenti, se sono decrescenti si procede analogamente. Qui $f_n - f_0 \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; la successione $\{f_n - f_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ è crescente e di funzioni misurabili non negative. Per la Proposizione 3.8 si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E (f_n - f_0)\mathrm{d}\mu = \int_E (f - f_0)\mathrm{d}\mu.$$

Poiché il primo membro è finito, allora $f - f_0$ è integrabile in E, e quindi lo è pure f. La conclusione è immediata. [Ma quindi non serve il Lemma di Fatou?] □

Lemma 3.12 (di Lebesgue-Fatou)**.** [Ancora da TEXare...]

Proposizione 3.13 (Teorema di Lebesgue della convergenza dominata)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni misurabili convergenti puntualmente a $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se esiste $g : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile che sia integrabile e tale che $|f_n| \leq g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora f è integrabile e

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Dimostrazione. [Ancora da TEXare...] □

4 Convergenze

Indice Analitico