

# Analisi Reale – Homeworks 1

Nome Cognome

Ultimo aggiornamento: 16 novembre 2025.

## 1 Esercizio 1

## 2 Esercizio 2

## 3 Esercizio 3

Scelta una qualunque partizione  $\mathcal{P} := \{a =: a_0 < \dots < a_N := b\}$  di  $[a, b]$ , abbiamo che

$$L(\Gamma_f, \mathcal{P}) \geq \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})| = V(f, \mathcal{P})$$

da cui segue facilmente che  $L(\Gamma_f) \geq V(f)$ . D'altra parte

$$L(\Gamma_f, \mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^N \{|a_k - a_{k-1}| + |f(a_k) - f(a_{k-1})|\} = b - a + V(f, \mathcal{P})$$

da cui segue che  $L(\Gamma_f) \leq b - a + V(f)$ . Possiamo concludere che  $L(\Gamma_f) < +\infty$  se e solo se  $V(f) < +\infty$ .

## 4 Esercizio 4

## 5 Esercizio 5

## 6 Esercizio 6

## 7 Esercizio 7

(a)

(b) Sia  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N} \subseteq BV[0, 1]\}$  una successione di Cauchy. In particolare, la successione la successione è limitata, cioè possiamo scegliere  $M > 0$  tale che  $\|f_n\|_{\infty, BV} \leq M$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre la successione è di Cauchy anche rispetto alla norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Osserviamo a tal proposito che le  $f \in BV[0, 1]$  sono limitate, e quindi  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B[0, 1]$ : questo spazio vettoriale con la

norma  $\|\cdot\|_\infty$  è uno spazio di Banach. Quindi  $f_n$  converge  $f \in B[0, 1]$  definita come segue:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Mostreremo che

(i)  $f \in BV[0, 1]$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, BV} = 0$ .

(i) Sia  $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N := 1\}$  una partizione di  $[a, b]$ : allora

$$\begin{aligned} V(f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N |f_n(a_k) - f_n(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V(f_n) \leq M. \end{aligned}$$

(ii) Sia  $\epsilon > 0$ . Poiché la successione è di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_{\infty, BV}$ , sia  $\bar{n}$  tale che  $\|f_m - f_n\|_{\infty, BV} \leq \epsilon$  per ogni  $m, n \geq \bar{n}$ .

$$\begin{aligned} V(f - f_n, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |(f - f_n)(a_k) - (f - f_n)(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N |(f_m - f_n)(a_k) - (f_m - f_n)(a_{k-1})|. \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} V(f_m - f_n) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m - f_n\|_{\infty, BV} \leq \epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di  $\epsilon$  concludiamo.

(c) Ricordiamo che se  $f \in AC[0, 1]$ , allora

$$V(f) = \int_0^1 |f'| = \|f'\|_1.$$

Sia  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq AC[0, 1]$  convergente a qualche  $f \in BV[0, 1]$  in norma  $\|\cdot\|_{\infty, BV}$  e mostriamo che deve essere  $f \in AC[0, 1]$ . In particolare per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esistono quasi ovunque le derivate  $f'_n \in L^1[0, 1]$  si ha

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n \quad \text{per quasi ogni } x \in [0, 1].$$

Poiché una successione convergente converge secondo Cauchy, in norma  $\|\cdot\|_\infty$  la successione  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  e in norma  $\|\cdot\|_1$  la successione  $\{f'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  sono di Cauchy. Come sopra,  $f_n$  converge in norma  $\|\cdot\|_\infty$  al limite puntuale di

$f_n$  che indichiamo con  $f$ . Anche  $L^1[0, 1]$  è completo, quindi  $f'_n \rightarrow g \in L^1[0, 1]$  in norma  $\|\cdot\|_1$ . Introduciamo la funzione assolutamente continua

$$\begin{aligned} f^* : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f^*(x) &:= f(0) + \int_0^x g \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \|f^* - f_n\|_\infty &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| f(0) + \int_0^x g - f_n(0) - \int_0^x f'_n \right| \leq \\ &\leq |f^*(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^x (g - f'_n) \right| \leq \\ &\leq |f^*(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^x |g - f'_n| \leq \\ &\leq \|f^* - f_n\|_\infty + \int_0^1 |g - f'_n| = \\ &= \|f^* - f_n\|_\infty + \|g - f'_n\|_1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\|f^* - f_n\|_{\infty, BV} \leq \|f - f_n\|_\infty + 2 \|g - f'_n\|_1$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ha che  $f_n \rightarrow f^*$  in norma  $\|\cdot\|_{\infty, BV}$ . In particolare,  $f^* = f$ .

(d)

(e) Mostriamo che  $V(fg) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f)$ . Fissata una qualunque partizione  $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N =: 1\}$  di  $[0, 1]$ , si ha

$$\begin{aligned} V(fg, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |[f(a_k) - f(a_{k-1})]g(a_k) + f(a_{k-1})[g(a_k) - g(a_{k-1})]| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})| |g(a_k)| + \sum_{k=1}^N |f(a_{k-1})| |g(a_k) - g(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \|g\|_\infty V(f) + \|f\|_\infty V(g) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la disuguaglianza che ci serviva. Pertanto

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty, BV} \|g\|_{\infty, BV} &= \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) + V(f)V(g) \geq \\ &= \|fg\|_\infty + V(fg) = \|fg\|_{\infty, BV}. \end{aligned}$$

(f)  $\|f\|_{\alpha, BV} \leq \|f\|_{\infty, BV}$ . Viceversa,  $\frac{f(\alpha)}{\|f\|_\infty} \|f\|_{\infty, BV} \leq \|f\|_{\alpha, BV}$ .

## 8 Esercizio 8

- (a) Se  $f_n \rightarrow f$  in norma  $\|\cdot\|_{BV}$ , allora  $f_n \rightarrow f$  anche in norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Quindi  $f = g$ .
- (b) Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cos(2\pi nx) \tag{2}$$

Per l'esercizio 6, si ha che la variazione totale è

$$V(f_n) = \int_0^1 |f'_n(x)| dx = 4$$

Ora  $f_n$  converge in norma  $\|\cdot\|_\infty$  alla funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  costante a 0, ma non è vero che  $V(f_n) \rightarrow V(f) = 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

- (c) Se esistesse una tale  $c \in \mathbb{R}$ , allora considerando la successione del punto precedente si avrebbe  $\|f\|_{\infty, BV} = 4 \leq 0 = c \|f\|_\infty$ .