

# Analisi Reale – Homeworks 1

Indrjo Dedej, Micael Defo Noguem, Reema Naz Rasheed,  
Umberto Santero Mormile, Lorenzo Torzolini

Ultimo aggiornamento: 19 novembre 2025.

## Esercizio 1

Introduciamo la funzione

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x(\ln x)^2} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo che  $f$  è integrabile.

$$\int_{(0,1)} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \frac{1}{|\ln \frac{1}{2}|} < +\infty.$$

Forniamo una stima dal basso di  $f^*$  usando le bolle  $B(x, 2x) = (0, 2x)$ . Per  $x \in (0, \frac{1}{2})$ :

$$f^*(x) \geq \frac{1}{|B(x, 2x)|} \int_{B(x, 2x)} |f(y)| dy = \frac{1}{2x |\ln x|}.$$

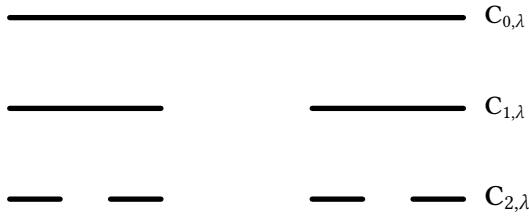
Concludiamo verificando che  $f^*$  non è localmente integrabile:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f^*(y) dy \geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y |\ln y|} dy = +\infty.$$

## Esercizio 2

1. Proviamo che l'inclusione  $AC([0, 1]) \subseteq BV([0, 1])$  è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione a variazione limitata che non è assolutamente continua.

Usiamo come esempio la funzione chiamata "scala del diavolo", data la usuale costruzione dell'insieme ternario di Cantor di parametro  $\lambda = \frac{1}{3}$ ,  $C_\lambda$ .



La funzione che vogliamo costruire sarà il limite della successione di funzioni monotone definite a partire dagli insiemi intermedi, indicati con  $C_{n,\lambda}$ :

$$f_n(x) = \frac{1}{|C_{n,\lambda}|} \cdot \int_0^x \chi_{C_{n,\lambda}}(u) du$$

Si può dimostrare<sup>1</sup> come questa successione di funzioni chiaramente monotone sia di Cauchy in  $\mathcal{C}([0, 1])$  con la norma del sup, convergendo quindi ad una funzione  $f$ , anch'essa chiaramente monotonica, e quindi sicuramente a variazione limitata.

Questa funzione però non è assolutamente continua e si può vedere ad esempio dalla condizione necessaria data dall'Esercizio 4, infatti, per come è costruita  $f$ , risulta una funzione a salti sui punti di  $[0, 1]$  che appartengono a  $C_\lambda$ , con  $f$  suriettiva sul codominio  $[0, 1]$ , abbiamo quindi:

$$f(C_\lambda) = [0, 1]$$

ma

$$|C_\lambda| = 0 \neq 1 = |[0, 1]|$$

2. Proviamo che l'inclusione  $Lip([0, 1]) \subseteq AC([0, 1])$  è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione assolutamente continua che non è lipschitziana. Un esempio classico di funzione non lipschitziana è

$$f(x) = \sqrt{x}$$

infatti in  $x = 0$  non è possibile trovare una costante di lipschitzianità valida poiché

$$\forall K \in \mathbb{R}^+; \forall y \in [0, \frac{1}{K^2}] \cap [0, 1], |f(y) - f(0)| = \sqrt{y} \geq K \cdot y = K \cdot |y - 0|$$

e quindi in tutto il sottointervallo  $[0, \frac{1}{K^2}]$  la condizione per la lipschitzianità non è soddisfatta (il "problema" è evidentemente collegato al fatto che  $f'(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$ ). Per dimostrare l'assoluta continuità utilizziamo il

---

<sup>1</sup>Vedi "Analisi Reale, Giuseppe Molteni, APPENDICE A: CANTOR E VOLTERRA"

fatto noto<sup>2</sup> per le funzioni integrali di funzioni Lebesgue-integrabili, infatti presa

$$g(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

chiaramente  $g \in L([0, 1])$  e inoltre abbiamo che:

$$f(x) = \int_0^x g(u) du$$

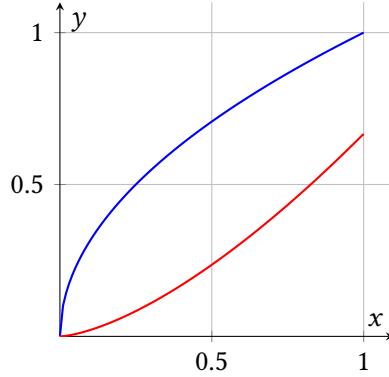


Figura 1:  $f$  in blu e  $g$  in rosso

3. Proviamo che l'inclusione  $\mathcal{C}^1([0, 1]) \subseteq Lip([0, 1])$  è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione Lipschitz che non è  $\mathcal{C}^1$ .

Una condizione semplice perché una funzione sia Lipschitz, su un intervallo limitato, è che sia polinomiale (nel nostro esempio addirittura lineare) mentre per far cadere la condizione sulla continuità della derivata basta la presenza di un punto "non-liscio", viene quindi naturale la scelta di

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

- $f$  è Lipschitz, con costante di lipschitzianità  $K = 1$  infatti:  
 $\forall x, y \in [0, \frac{1}{2}] \vee \forall x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$  abbiamo che

$$|f(x) - f(y)| = \left| \mp x \pm \frac{1}{2} \pm y \mp \frac{1}{2} \right| = 1 \cdot |x - y|$$

se invece  $x \in [0, \frac{1}{2}] \wedge y \in [\frac{1}{2}, 1]$  (o viceversa) abbiamo che

$$|f(x) - f(y)| = \left| -x + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} \right| = |x + y - 1| \leq |x - y|$$

poichè  $x - 1 \leq -x$ , se  $x \leq \frac{1}{2}$ .

- $f$  è chiaramente non  $\mathcal{C}^1$  perché la sua derivata è discontinua in  $\frac{1}{2}$ .

---

<sup>2</sup>Proposizione 1.5.5."Analisi Reale, Giuseppe Molteni, Capitolo 1, Differenziazione e Integrazione"

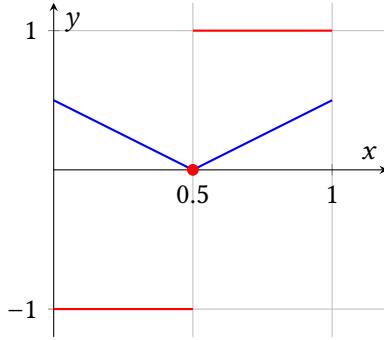


Figura 2:  $f$  in blu e  $f'$  in rosso

### Esercizio 3

Scelta una qualunque partizione  $\mathcal{P} := \{a =: a_0 < \dots < a_N := b\}$  di  $[a, b]$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} L(\Gamma_f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N \sqrt{(a_k - a_{k-1})^2 + (f(a_k) - f(a_{k-1}))^2} \geq \\ &= \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})| = V(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

da cui segue facilmente che  $L(\Gamma_f) \geq V(f)$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} L(\Gamma_f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N \sqrt{(a_k - a_{k-1})^2 + (f(a_k) - f(a_{k-1}))^2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N \{|a_k - a_{k-1}| + |f(a_k) - f(a_{k-1})|\} = b - a + V(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

da cui segue che  $L(\Gamma_f) \leq b - a + V(f)$ . Possiamo concludere che  $L(\Gamma_f) < +\infty$  se e solo se  $V(f) < +\infty$ .

### Esercizio 4

L'idea per la risoluzione di questo esercizio è quella di sfruttare la caratterizzazione degli insiemi di misura nulla per la misura di Lebesgue sulla retta reale, ovvero:

$$\forall E \subset \mathbb{R}, |E| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \{I_n = (x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ e } \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \leq \varepsilon$$

Quindi un insieme ha misura nulla se e solo se è possibile ricoprirlo con una quantità numerabile di intervalli piccoli a piacere.

Passiamo ora alla soluzione: sia  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Per definizione di assoluta continuità esiste  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti  $\{[x_k, y_k]\}_{k=1}^N$  con

$$\sum_{k=1}^N (y_k - x_k) < \delta$$

vale

$$\sum_{k=1}^N |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Utilizziamo il  $\delta$  della definizione di assoluta continuità per ottenere un ricoprimento di  $E$  tramite intervalli di misura piccola, infatti poiché  $|E| = 0$  esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti  $\{I_j\}_{j=1}^\infty$  tale che

$$E \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^\infty |I_j| < \delta.$$

Ora suddividiamo eventualmente ciascun intervallo  $I_j$  in sottointervalli  $\widetilde{I}_{j,l}$  dove  $f$  è monotona. Questo è sempre possibile grazie alla continuità di  $f$ . Applichiamo questa ulteriore divisione perché così possiamo sfruttare la proprietà dell'assoluta continuità che controlla la variazione negli estremi di ogni intervallo.

Quindi  $\{\widetilde{I}_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{N}}$  è un ricoprimento aperto di  $E$  di misura totale minore di  $\delta$ , dunque per ogni sua collezione finita di elementi la misura sarà ancora minore di  $\delta$ , concludiamo allora per l'assoluta continuità di  $f$  che la misura dell'immagine degli intervalli sarà minore di  $\varepsilon$ .

Poiché  $\{\widetilde{I}_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{N}}$  è un ricoprimento di  $E$  allora  $\{f(\widetilde{I}_{j,l})\}_{j,l \in \mathbb{N}}$  è un ricoprimento di  $f(E)$  e la cui misura è la serie delle misure degli intervalli a cui è applicata  $f$ , serie a termini positivi di cui ogni somma parziale è limitata da  $\varepsilon$  stesso, dunque la serie è maggiorata da quest'ultimo.

Poiché  $\varepsilon > 0$  era arbitrario, concludiamo che  $|f(E)| = 0$ .

## Esercizio 5

Iniziamo con il dimostrare che se  $f, g \in AC([a, b])$ , con  $g(a) = g(b) = 0$ , allora

$$\int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx = - \int_{[a,b]} f(x) g'(x) dx.$$

Come dimostrato in un altro esercizio se  $f, g \in AC([a, b])$  allora anche  $fg \in AC([a, b])$ ; in particolare (ricordando che, nelle nostre ipotesi,  $g(a) = 0$ )

$$(fg)(x) = \int_{[a,x]} (fg)'(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Ma  $(fg)' = f'g + fg'$  q.o., quindi valutando l'equazione in  $x = b$  e ricordando che  $g(b) = 0$ , si ottiene

$$\int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx = - \int_{[a,b]} f(x) g'(x) dx,$$

che era quanto voluto.

Ora scegliamo  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x)$  e  $g(x) = x(x - 1)$ . Con queste scelte risulta  $f \in BV([0, 1]) \setminus AC([0, 1])$ , perché monotona, ma non continua,  $g \in AC([0, 1])$ , perché di classe  $C^1$ ; inoltre  $f' = 0$  q.o. e  $g'(x) = 2x - 1$ . Allora si ha che

$$0 = \int_{[0,1]} f'(x) g(x) dx \neq - \int_{[0,1]} f(x) g'(x) dx = \frac{1}{4}.$$

Infine sia  $f \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$  tale che la formula

$$\int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx = - \int_{[a,b]} f(x) g'(x) dx$$

valga per ogni  $g \in AC([a, b])$  tale che  $g(a) = g(b) = 0$ . Allora possiamo scrivere, usando Fubini/Tonelli e il fatto che  $f', g' \in L^1([a, b])$ ,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx &= \int_{[a,b]} \left( f'(x) \int_a^x g'(t) dt \right) dx = \\ &= \int_{[a,b]} \left( \int_{[t,b]} f'(x) dx \right) g'(t) dt = - \int_{[a,b]} f(t) g'(t) dt. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\int_{[a,b]} \left( \int_{[t,b]} f'(x) dx + f(t) \right) g'(t) dt = 0$$

per ogni  $g \in AC([a, b])$  con  $g(a) = g(b) = 0$ . Ora usiamo il seguente risultato generale:

sia  $f \in L^1_{loc}(a, b)$  tale che  $\int_{[a,b]} f(x) \phi'(x) dx = 0$  per ogni  $\phi \in C_c^\infty(a, b)$ .  
Allora esiste  $c \in \mathbb{R}$  per cui  $f(x) = c$  per quasi ogni  $x \in [a, b]$ .

Nel nostro caso il lemma è applicabile dato che le funzioni di  $C_c^\infty(a, b)$  sono funzioni di  $AC([a, b])$  che si annullano agli estremi, e usando che  $f \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$ ; quindi otteniamo

$$\int_t^b f'(x) dx + f(t) = c$$

per qualche costante  $c \in \mathbb{R}$  e per ogni  $t \in [a, b]$  (dato che sia il membro destro che quello sinistro dell'uguaglianza sono funzioni continue); e poiché l'integrale di  $f'$  è una funzione assolutamente continua (così come le costanti), otteniamo che  $f \in AC([a, b])$ , ovvero la tesi.

## Esercizio 6

- (a) Mostriamo, dapprima, che  $T_f \in C([0, 1])$ . Sia  $x_0 \in [0, 1]$ , se  $x_0$  è uno dei due estremi dell'intervallo la continuità è intesa da destra in 0 e da sinistra in 1. Si ha che

$$|T_f(x_0 + h) - T_f(x_0)| = |V(f; [0, x_0 + h]) - V(f; [0, x_0])|.$$

Ora distinguiamo due casi e sfruttiamo la seguente identità  $V(f; [a, b]) = V(f; [a, c]) + V(f; [c, b])$ , valida per tutte le  $f \in BV([a, b])$  e  $a \leq c \leq b$ . Se  $h > 0$  si ha

$$|T_f(x_0 + h) - T_f(x_0)| = V(f; [x_0, x_0 + h]).$$

Sia  $\mathcal{P} = \{a_0 := x_0 < a_1 < \dots < a_N := x_0 + h\}$  una partizione dell'intervallo  $[x_0, x_0 + h]$ . Allora

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^N |f(a_i) - f(a_{i-1})| \leq Lh,$$

dove nell'ultima diseguaglianza si è usato il teorema di Lagrange e posto  $L = \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$ . Poiché il membro destro è indipendente dalla partizione  $\mathcal{P}$  scelta, si ha

$$V(f; [x_0, x_0 + h]) \leq Lh \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0^+.$$

In modo analogo si dimostra il caso  $h < 0$ . Quindi, quantomeno,  $T_f$  è continua. Ora dimostriamo che  $T'_f(x) = |f'(x)|$  per ogni  $x \in [0, 1]$  e questo concluderà il punto (a). Sia  $\varepsilon > 0$ ,  $h > 0$  e  $x_0 \in [0, 1]$ , allora

$$\left| \frac{T_f(x_0 + h) - T_f(x_0)}{h} - |f'(x_0)| \right| = \left| \frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} - |f'(x_0)| \right|.$$

Sia  $h$  sufficientemente piccolo tale che  $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$  si ha  $|f'(x) - f'(x_0)| \leq \varepsilon$ , (un tale  $h$  esiste perché  $f' \in C([0, 1])$ ). Sia  $\mathcal{P} = \{a_0 := x_0 < a_1 < \dots < a_N := x_0 + h\}$  una partizione dell'intervallo  $[x_0, x_0 + h]$ . Allora si ha che

$$\begin{aligned} V(f, P) &= \sum_{i=1}^N |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^N |f'(\xi_i)|(a_i - a_{i-1}) \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) + |f'(x_0)| \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) = (\varepsilon + |f'(x_0)|)h \end{aligned}$$

dove si è usato nuovamente il teorema di Lagrange con  $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$  e si è usato che  $|f'(\xi_i)| \leq |f'(\xi_i) - f'(x_0)| + |f'(x_0)| \leq \varepsilon + |f'(x_0)|$  per quanto sopra. Poiché il membro destro è indipendente dalla particolare partizione scelta si ha che

$$\frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} \leq \varepsilon + |f'(x_0)|.$$

In modo analogo, usando stavolta che  $|f'(\xi_i)| \geq |f'(x_0)| - |f'(\xi_i) - f'(x_0)| \geq |f'(x_0)| - \varepsilon$ , si ha che

$$\frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} \geq |f'(x_0)| - \varepsilon.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze si ottiene

$$\left| \frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} - |f'(x_0)| \right| \leq \varepsilon.$$

In modo analogo si ragiona per  $h < 0$ . Avendo dimostrato che  $T_f \in C^1([0, 1]) \subset AC([0, 1])$  e che  $T'_f = |f'|$  e osservando banalmente che  $T_f(0) = 0$ , si ha

$$T_f(1) = V(f; [0, 1]) = \int_{[0,1]} |f'(x)| dx.$$

(b) Ci basta far vedere che per ogni  $x \in [0, 1]$  si ha

$$T_f(x) = V(f; [0, x]) = \int_{[0,x]} |f'(u)| du.$$

Sappiamo che

$$f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} f'(u) du \quad \text{per ogni } x \in [0, 1].$$

Quindi, fissato  $x \in [0, 1]$  e data  $P = \{a_0 := 0 < a_1 < \dots < a_N := x\}$  una partizione dell'intervallo  $[0, x]$ , si ha

$$\begin{aligned} V(f, P) &= \sum_{i=1}^N |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^N \left| \int_{[a_{i-1}, a_i]} f'(u) du \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{[a_{i-1}, a_i]} |f'(u)| du = \int_{[0,x]} |f'(u)| du. \end{aligned}$$

Quindi questo dimostra che

$$T_f(x) \leq \int_{[0,x]} |f'(u)| du.$$

Per dimostrare la disegualanza opposta, fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Allora possiamo trovare una step function  $g$  su  $[0, x]$ , tale che  $f' = g + h$  con  $\int_{[0,x]} |h(t)| dt < \varepsilon$ . Per  $y \in [0, x]$  poniamo  $G(y) = \int_{[0,y]} g(u) du$  e  $H(y) = \int_{[0,y]} h(u) du$ . Sia  $F(y) = \int_{[0,y]} f'(t) dt$ , allora  $F = G + H$  e, come si vede facilmente,

$$T_F(x) = T_f(x) = V(f; [0, x]) \geq T_G(x) - T_H(x) \geq T_G(x) - \varepsilon.$$

Sia  $P = \{a_0 := 0 < a_1 < \dots < a_N := x\}$  una partizione dell'intervallo  $[0, x]$  in modo che la step function  $g$  sia costante su ciascun intervallo  $(a_{i-1}, a_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Allora

$$\begin{aligned} T_G(x) &\geq \sum_{i=1}^N |G(a_i) - G(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^N \left| \int_{[a_{i-1}, a_i]} g(t) dt \right| = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{[a_{i-1}, a_i]} |g(t)| dt = \int_{[0, x]} |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Poiché  $\int_{[0, x]} |g(t)| dt \geq \int_{[0, x]} |f'(t)| dt - \varepsilon$ , si ha

$$T_F(x) = T_f(x) \geq \int_{[0, x]} |f'(t)| dt - 2\varepsilon.$$

Questo conclude.

## Esercizio 7

- (a) Mostriamo che  $BV[0, 1]$  è uno spazio vettoriale con l'addizione e la moltiplicazione per scalare definite puntualmente. Siano  $f, g \in BV[0, 1]$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Prendiamo anche una qualsiasi partizione  $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N := 1\}$ . Allora

$$V(\alpha f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^N |\alpha f(a_k) - \alpha f(a_{k-1})| = |\alpha| V(f, \mathcal{P})$$

quindi segue immediatamente che anche  $\alpha f \in BV[0, 1]$  e  $V(\alpha f) = \alpha V(f)$ . Inoltre

$$V(f+g, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^N |f(a_k) + g(a_k) - f(a_{k-1}) - g(a_{k-1})| \leq V(f, \mathcal{P}) + V(g, \mathcal{P})$$

per cui  $f+g \in BV[0, 1]$ .

Adesso vediamo come  $\|\cdot\|_{\infty, BV} : BV[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è una norma. Per quanto abbiamo appena visto ed essendo  $\|\cdot\|_\infty$  una norma, sono automatiche la diseguaglianza triangolare e la proprietà di omogeneità. Inoltre è immediato verificare che  $\|f\|_{\infty, BV} \geq 0$  per ogni  $f \in BV[0, 1]$ . Supponiamo ora che  $\|f\|_{\infty, BV} = 0$ : allora in particolare  $\|f\|_\infty = 0$ , da cui segue che  $f = 0$ .

- (b) Sia  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N} \subseteq BV[0, 1]\}$  una successione di Cauchy. In particolare, la successione la successione è limitata, cioè possiamo scegliere  $M > 0$  tale che  $\|f_n\|_{\infty, BV} \leq M$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre la successione è di Cauchy anche rispetto alla norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Osserviamo a tal proposito che le  $f_n \in BV[0, 1]$  sono limitate, e quindi  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B[0, 1]$ : questo spazio vettoriale con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  è uno spazio di Banach. Quindi  $f_n$  converge ad  $f \in B[0, 1]$  definita come segue:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Mostreremo che

- (i)  $f \in BV[0, 1]$ .
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, BV} = 0$ .

(i) Sia  $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N := 1\}$  una partizione di  $[a, b]$ : allora

$$\begin{aligned} V(f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N |f_n(a_k) - f_n(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V(f_n) \leq M. \end{aligned}$$

(ii) Sia  $\epsilon > 0$ . Poiché la successione è di Cauchy rispetto a  $\|\cdot\|_{\infty, BV}$ , sia  $\bar{n}$  tale che  $\|f_m - f_n\|_{\infty, BV} \leq \epsilon$  per ogni  $m, n \geq \bar{n}$ .

$$\begin{aligned} V(f - f_n, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |(f - f_n)(a_k) - (f - f_n)(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N |(f_m - f_n)(a_k) - (f_m - f_n)(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} V(f_m - f_n) \end{aligned}$$

Allora per  $n \geq \bar{n}$  abbiamo

$$V(f - f_n) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} V(f_m - f_n) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m - f_n\|_{\infty, BV} \leq \epsilon.$$

Pertanto  $V(f - f_n) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  e quindi possiamo concludere.

(c) Ricordiamo che se  $f \in AC[0, 1]$ , allora

$$V(f) = \int_0^1 |f'| = \|f'\|_1.$$

Sia  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq AC[0, 1]$  convergente a qualche  $f \in BV[0, 1]$  in norma  $\|\cdot\|_{\infty, BV}$  e mostriamo che deve essere  $f \in AC[0, 1]$ . In particolare per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esistono quasi ovunque le derivate  $f'_n \in L^1[0, 1]$  si ha

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n \quad \text{per quasi ogni } x \in [0, 1].$$

Poiché una successione convergente converge secondo Cauchy, in norma  $\|\cdot\|_\infty$  la successione  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  e in norma  $\|\cdot\|_1$  la successione  $\{f'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  sono di Cauchy. Come sopra,  $f_n$  converge in norma  $\|\cdot\|_\infty$  al limite puntuale di  $f_n$  che indichiamo con  $f$ . Anche  $L^1[0, 1]$  è completo, quindi  $f'_n \rightarrow g \in L^1[0, 1]$  in norma  $\|\cdot\|_1$ . Introduciamo la funzione assolutamente continua

$$\begin{aligned} f^* &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f^*(x) &:= f(0) + \int_0^x g \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\|f^* - f_n\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} \left| f(0) + \int_0^x g - f_n(0) - \int_0^x f'_n \right| \leq \\
&\leq |f(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x (g - f'_n) \right| \leq \\
&\leq |f(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |g - f'_n| \leq \\
&\leq \|f - f_n\|_\infty + \int_0^1 |g - f'_n| = \\
&= \|f - f_n\|_\infty + \|g - f'_n\|_1
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|f^* - f_n\|_{\infty, BV} \leq \|f - f_n\|_\infty + 2 \|g - f'_n\|_1$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ha che  $f_n \rightarrow f^*$  in norma  $\|\cdot\|_{\infty, BV}$ . In particolare,  $f^* = f$ .

- (d) Abbiamo già visto che  $BV[0, 1]$  è uno spazio vettoriale: manca da dimostrare che questo spazio è chiuso anche per prodotto puntuale di funzioni e possiede un elemento neutro rispetto a questa operazione.

Siano  $f, g \in BV[0, 1]$  e mostriamo che  $fg \in BV[0, 1]$ . Fissiamo anche una qualsiasi partizione  $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N =: 1\}$ . Possiamo scrivere allora

$$\begin{aligned}
V(fg, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |f(a_k)g(a_k) - f(a_{k-1})g(a_{k-1})| = \\
&= \sum_{k=1}^N |f(a_k)(g(a_k) - g(a_{k-1})) + (f(a_k) - f(a_{k-1}))g(a_{k-1})| \leq \\
&\leq \|f\|_\infty V(g, \mathcal{P}) + V(f, \mathcal{P}) \|g\|_\infty
\end{aligned}$$

Quindi anche  $fg \in BV[0, 1]$ . La funzione costante a 1 è ovviamente a variazione limitata ed è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

- (e) Abbiamo visto che  $V(fg) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f)$ . Pertanto

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\infty, BV} \|g\|_{\infty, BV} &= \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) + V(f)V(g) \geq \\
&= \|fg\|_\infty + V(fg) = \|fg\|_{\infty, BV}.
\end{aligned}$$

- (f)  $\|f\|_{\alpha, BV} \leq \|f\|_{\infty, BV}$ . Viceversa,  $\frac{f(\alpha)}{\|f\|_\infty} \|f\|_{\infty, BV} \leq \|f\|_{\alpha, BV}$ .

## Esercizio 8

- (a) Se  $f_n \rightarrow f$  in norma  $\|\cdot\|_{\infty, BV}$ , allora  $f_n \rightarrow f$  anche in norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Quindi  $f = g$ .

(b) Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cos(2\pi n x) \quad (2)$$

Per l'esercizio 6, si ha che la variazione totale è

$$V(f_n) = \int_0^1 |f'_n(x)| dx = 4$$

Ora  $f_n$  converge in norma  $\|\cdot\|_\infty$  alla funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  costante a 0, ma non è vero che  $V(f_n) \rightarrow V(f) = 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

(c) Se esistesse una tale  $c \in \mathbb{R}$ , allora considerando la successione del punto precedente si avrebbe  $\|f\|_{\infty, BV} = 4 \leq 0 = c \|f\|_\infty$ .