Analisi Reale – Homeworks 1

Indrjo Dedej, Micael Defo Noguem,
Reema Naz Rasheed, Umberto Santero Mormile

Ultimo aggiornamento: 14 gennaio 2026.

Esercizio 1

Definito lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < +\infty \right\}.$$

Dobbiamo dimostrare che sia chiuso per convoluzioni.

Chiaramente se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora sono due funzioni $\mathcal{C}^\infty$ e quindi la loro convoluzione è ancora $\mathcal{C}^\infty$. (Da spiegare?)

Fissiamo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ due multi-indici, avremo quindi:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

Allo stesso modo per β. Con x^α si intende:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

mentre D^β si intende:

$$D^\beta := \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}.$$

Ora dunque si tratta di mostrare che fissati qualsiasi α e β si ha che:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta (f * g)(x) \right| < +\infty$$

Poiché f, g appartengono ad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le loro derivate sono maggiorabili da qualsiasi polinomio, quindi posso invertire derivazione e integrazione, avremo quindi che:

$$\begin{aligned}
\left| x^\alpha D^\beta (f * g)(x) \right| &= \left| x^\alpha (D^\beta f * g)(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha (D^\beta f)(x-y)\, g(y)\, dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha (D^\beta f)(x-y)\, g(y) \right| dy
\end{aligned}$$

Possiamo maggiorare $|x^\alpha|$ sfruttando la norma euclidea $|x|$ dei vettori di $\mathbb{R}^n$ infatti avremo:

$$|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}|$$

e, chiaramente:

$$\forall i, \quad |x_i| \leq |x| \leq 1 + |x|$$

quindi, essendo tutte potenze con esponente naturale avremo:

$$|x_i|^{\alpha_i} \leq (1 + |x|)^{\alpha_i}$$

quindi:

$$|x^\alpha| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + |x|)^{\alpha_i} = (1 + |x|)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = (1 + |x|)^{|\alpha|}.$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$

e la proprietà

$$(1 + a + b)^N \leq (1 + a)^N (1 + b)^N,$$

ottieniamo la diseguaglianza:

$$(1 + |x|)^{|\alpha|} \leq (1 + |x - y|)^{|\alpha|} (1 + |y|)^{|\alpha|}.$$

Inseriamo queste maggiorazioni nell'espressione di interesse:

$$\begin{aligned} x^\alpha D^\beta (f * g)(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{|\alpha|} |(D^\beta f)(x - y)| \, |g(y)| \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(1 + |x - y|)^{|\alpha|} |(D^\beta f)(x - y)|}_{A(x-y)} \cdot \underbrace{(1 + |y|)^{|\alpha|} |g(y)|}_{B(y)} \, dy. \end{aligned}$$

- **Per il termine** A**:** Poiché $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tutte le sue derivate decrescono più velocemente dell'inverso di qualsiasi polinomio. Esiste quindi una costante C_1 (indipendente da x e y) tale che

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} (1 + |z|)^{|\alpha|} |D^\beta f(z)| \leq C_1.$$

- **Per il termine** B**:** Poiché $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, anche la funzione $B(y)$ è a decadimento rapido. Per garantire la convergenza dell'integrale, scegliamo un intero M tale che $M > n$ (dimensione dello spazio). Esiste quindi una costante C_2 tale che

$$(1 + |y|)^{|\alpha| + M} |g(y)| \leq C_2 \quad \Longrightarrow \quad (1 + |y|)^{|\alpha|} |g(y)| \leq \frac{C_2}{(1 + |y|)^M}.$$

Sostituendo questi limiti nell'integrale, otteniamo

$$
\begin{aligned}
|x^\alpha D^\beta (f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} A(x-y)\, B(y)\, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} C_1 \cdot \frac{C_2}{(1+|y|)^M}\, dy \\
&= C_1 C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|y|)^M}\, dy.
\end{aligned}
$$

Poiché abbiamo scelto $M > n$, l'integrale $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{-M}\, dy$ converge. Pertanto, la quantità $|x^\alpha D^\beta (f * g)(x)|$ è limitata uniformemente in x.

Esercizio 2

Mostriamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x-k)_+^{n-1}$$

Per $n = 1$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{1}{0!} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (-1)^k (x-k)_+^0 = \\
&= (x)_+^0 - (x-1)_+^0 = \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) - \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(x) = \chi(x).
\end{aligned}
$$

Supponiamo la formula vera per un intero $n \geq 1$. Calcoliamo $\varphi_{n+1} = \varphi_n * \chi$:

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \chi(x-t) \mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} \varphi_n(t) \mathrm{d}t$$

Inserendo l'ipotesi induttiva:

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (t-k)_+^{n-1}\, dt$$

Per linearità dell'integrale e utilizzando la primitiva $\int (t-k)_+^{n-1} dt = \frac{(t-k)_+^n}{n}$:

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[(t-k)_+^n \right]_{x-1}^{x}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x-k)_+^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x-1-k)_+^n \right)$$

Nella seconda somma, effettuiamo il cambiamento di indice $j = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x-(k+1))_+^n = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (-1)^{j-1} (x-j)_+^n$$

Reintegrando questo nell'espressione (e sostituendo j con k):

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0}(x)_+^n + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right](-1)^k(x-k)_+^n + \binom{n}{n}(-1)^{n+1}(x-(n+1))_+^n\right)$$

In base all'identità di Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, e sapendo che $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, otteniamo:

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k(x-k)_+^n$$

La proprietà è quindi dimostrata per induzione.

Esercizio 3

Verifichiamo che $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to K$ (dove K è $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$) è un prodotto scalare.

1. Linearità nel primo argomento. Siano $f, g, h \in \mathcal{H}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

$$\begin{aligned}\langle\lambda_1 f + \lambda_2 g, h\rangle &= \int_{[0,1]}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)'(x)h'(x)\mathrm{d}x = \\ &= \lambda_1\int_{[0,1]} f'(x)h'(x)\mathrm{d}x + \lambda_2\int_{[0,1]} g'(x)h'(x)\mathrm{d}x = \\ &= \lambda_1\langle f, h\rangle + \lambda_2\langle g, h\rangle.\end{aligned}$$

2. Skew-simmetria. In realtà è proprio simmetrico, cioè $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ per ogni $f, g \in \mathcal{H}$.

3. Sia $f \in \mathcal{H}$. Allora $\langle f, f\rangle = \|f'\|_2^2 \geq 0$. Così facendo, si deduce che se $\langle f, f\rangle = 0$, allora, $f' = 0$ quasi ovunque. Poiché $f \in AC[0,1]$, si ha che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1].$$

Rimane da provare che lo spazio vettoriale $\mathcal{H}$ con la norma indotta dal prodotto scalare

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

è uno spazio di Banach. Sia quindi $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|$. Se è così, allora $\{f_n' \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[0,1]$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$. Infatti ricordare che

$$\|f\| = \|f'\|_2.$$

Poiché $\left(\mathcal{L}^2[0,1], \|\cdot\|_2\right)$ è di Banach, allora f_n' converge a un qualche elemento di $\mathcal{L}^2[0,1]$ che indichiamo con f'. A questo punto introduciamo

$$\begin{aligned} f &: [0,1] \to K \\ f(x) &:= \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Questa funzione è assolutamente continua, $f(0) = 0$ e la sua derivata quasi ovunque è proprio f': pertanto $f \in \mathcal{H}$. Concludiamo

$$\|f - f_n\| = \left\|(f - f_n)'\right\|_2 = \left\|f' - f_n'\right\|_2 \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Esercizio 4

Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ un compatto non vuoto. Mostrare che esiste un operatore $T : l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ il cui spettro è K.

1. Lo spazio $\mathbb{C}$ è separabile perché contiene $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, che è numerabile e denso. Poiché ogni sottospazio di uno spazio metrico separabile è separabile, il compatto K è separabile. Esiste quindi una successione numerabile $K_0 = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:

$$\overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} = K$$

2. Consideriamo l'operatore diagonale T definito sullo spazio di Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ da:

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Poiché K è un compatto, la successione (λ_n) è limitata da una costante $M = \sup_{\lambda\in K} |\lambda|$. Si ha allora:

$$\|T(x_n)\|_{l^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n x_n|^2 \leq M^2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = M^2 \|(x_n)\|_{l^2}^2$$

L'operatore T è quindi lineare e limitato.

3. Spettro $\sigma(T)$ Procediamo per doppia inclusione.

- $K \subseteq \sigma(T)$**:** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, λ_n è un autovalore di T associato all'autovettore e_n (il vettore della base canonica). Pertanto, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$. Poiché lo spettro di un operatore limitato è un insieme chiuso, esso contiene la chiusura di questo insieme: $K = \overline{\{\lambda_n\}} \subseteq \sigma(T)$.

- $\sigma(T) \subseteq K$**:** Sia $\mu \notin K$. Poiché K è chiuso, la distanza $d = \mathrm{dist}(\mu, K)$ è strettamente positiva. Per ogni n, $|\lambda_n - \mu| \geq d > 0$. L'operatore inverso potenziale $S = (T - \mu I)^{-1}$ sarebbe definito da $S(x_n) = (\frac{1}{\lambda_n - \mu} x_n)$. Poiché $|\frac{1}{\lambda_n-\mu}| \leq \frac{1}{d} < \infty$, questo operatore diagonale è limitato su l^2. Pertanto, μ appartiene all'insieme risolvente, quindi $\mu \notin \sigma(T)$.

Per doppia inclusione, abbiamo correttamente $\sigma(T) = K$.

Esercizio 5

Consideriamo il sottospazio

$$V := \{p : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ funzione polinomiale di grado } \leq N\}.$$

È un sottospazio lineare chiuso (i sottospazi di dimensione finita di uno spazio normato sono tutti chiusi.) Possiamo quindi usare il teorema di proiezione: esiste uno e un solo $p_f \in V$ tale che $\|f - p_f\|_2 = \inf_{p \in V} \|f - p\|_2$.

Sia quindi $f \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ e $p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la funzione polinomiale

$$p(x) := \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

e calcoliamo la distanza da f:

$$\begin{aligned}\|f-p\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))^2 \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-1}^{1} p(x)^2 \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)^2 \mathrm{d}x - 2\sum_{k=0}^{N} a_k \int_{-1}^{1} x^k f(x) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Troviamo i coefficienti $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ che minimizzano la distanza sopra, i quali sono unicamente determinati come osservato all'inizio. Derivando rispetto ad a_μ e ponendo uguale a 0 si trova il sistema

$$\sum_{j=0}^{N} a_j \int_{-1}^{1} x^{\mu+j} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^\mu f(x) \mathrm{d}x \quad \text{per } \mu \in \{0, \dots, N\}$$

nelle N incognite $a_1, \dots, a_N$.

Osserviamo inoltre che in alcuni casi il sistema è più semplice da risolvere. Se $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ è pari, allora la funzione polinomiale

$$\begin{aligned} q &: [-1,1] \to \mathbb{R} \\ q(x) &:= p_f(-x) \end{aligned}$$

soddisfa $\|f - q\|_2 = \|f - p_f\|_2$. Questo però implica che $p_f = q$ a causa dell'unicità. Quindi p_f è pari.

Le funzioni polinomiali pari sono quelle i cui coefficienti dei monomi di grado dispari sono nulli. Questo nel nostro caso significa rimangono da determinare gli a_k con k pari.

Esercizio 6

Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Si consideri l'operatore $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definito da:

$$(Tf)(x) = x\chi_{[0,1]}(x) f(x)$$

Indichiamo $h(x) = x\chi_{[0,1]}(x)$. T è quindi l'operatore di moltiplicazione per la funzione h.

1. Norma di T: Per un operatore di moltiplicazione M_h su L^2, la norma dell'operatore è data dalla norma infinito essenziale della funzione moltiplicatrice:

$$\|T\| = \|h\|_\infty$$

Qui, $h(x)$ è definita da:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sull'intervallo $[0,1]$, il valore massimo di $|x|$ è 1. Al di fuori, la funzione è nulla. Pertanto:

$$\|T\| = \sup_{x\in[0,1]} |x| = 1$$

2. Spettro $\sigma(T)$: Lo spettro di un operatore di moltiplicazione per una funzione h corrisponde all'immagine essenziale di tale funzione. L'immagine della funzione $h(x) = x\chi_{[0,1]}(x)$ è l'insieme dei valori raggiunti da h su $\mathbb{R}$:

- Per $x \in [0,1]$, $h(x)$ percorre l'intervallo $[0,1]$.
- Per $x \notin [0,1]$, $h(x) = 0$, valore già incluso nell'intervallo precedente.

Lo spettro è quindi l'intervallo chiuso:

$$\sigma(T) = [0,1]$$

3. Spettro puntuale $\sigma_p(T)$: λ è un autovalore di T se esiste una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ non nulla tale che $Tf = \lambda f$, ovvero:

$$(h(x) - \lambda)f(x) = 0 \quad \text{quasi ovunque}$$

Questo impone che f sia nulla quasi ovunque al di fuori dell'insieme $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = \lambda\}$. Affinché f sia non nulla in L^2, la misura di Lebesgue di E_λ deve essere strettamente positiva ($\mu(E_\lambda) > 0$).

- **Caso $\lambda \in (0,1]$:** L'equazione $h(x) = \lambda$ possiede un'unica soluzione $x = \lambda$. Un punto singolo ha misura nulla. Pertanto, questi valori non sono autovalori.
- **Caso $\lambda = 0$:** L'insieme $E_0 = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = 0\}$ è uguale a $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. Questo insieme ha misura infinita (quindi > 0). Possiamo definire una funzione $f = \chi_{[2,3]} \in L^2$ che soddisfa $Tf = 0$.

L'unico autovalore dell'operatore è quindi:

$$\sigma_p(T) = \{0\}$$

Esercizio 7

Sia $\mathcal{H} = L^2([0,1],\mathbb{C})$. Si considerino $A, B \in L^2([0,1],\mathbb{R})$ due funzioni linearmente indipendenti. Si definisce l'operatore $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ da:

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy \quad \text{con } K(x,y) = A(x)B(y) + A(y)B(x)$$

Per un operatore integrale, il carattere autoaggiunto è garantito se il nucleo soddisfa $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Qui, le funzioni A et B sono reali, quindi K è reale. Infatti:

$$K(y,x) = A(y)B(x) + A(x)B(y) = A(x)B(y) + A(y)B(x) = K(x,y)$$

Essendo il nucleo reale e simmetrico, l'operatore T è autoaggiunto $T = T^*$.

1. Compattezza: Si ha:

$$(Tf)(x) = A(x)\int_0^1 B(y)f(y)\,dy + B(x)\int_0^1 A(y)f(y)\,dy$$

Utilizzando il prodotto scalare standard $\langle f,g\rangle = \int f\overline{g}$, si ha:

$$(Tf)(x) = \langle f,B\rangle A(x) + \langle f,A\rangle B(x)$$

Questo mostra che $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Vect}(A,B)$. L'immagine di T è quindi di dimensione al massimo 2. T è un operatore di rango finito, il che implica direttamente che è compatto.

2. Spettro $\sigma(T)$: Poiché T è compatto in dimensione infinita, il suo spettro è composto dai suoi autovalori e da 0. Sia $\lambda \neq 0$ un autovalore. Allora $f = \frac{1}{\lambda}Tf \in \mathrm{Vect}(A,B)$. Poniamo $f = \alpha A + \beta B$. L'equazione $Tf = \lambda f$ porta al sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha\langle A,B\rangle + \beta\|B\|^2 = \lambda\alpha \\ \alpha\|A\|^2 + \beta\langle A,B\rangle = \lambda\beta \end{cases} \implies \begin{pmatrix} \langle A,B\rangle - \lambda & \|B\|^2 \\ \|A\|^2 & \langle A,B\rangle - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

Il determinante deve essere nullo: $(\langle A,B\rangle - \lambda)^2 - \|A\|^2\|B\|^2 = 0$. Gli autovalori sono $\lambda_\pm = \langle A,B\rangle \pm \|A\|\|B\|$. Pertanto, $\sigma(T) = \{0, \langle A,B\rangle + \|A\|\|B\|, \langle A,B\rangle - \|A\|\|B\|\}$.

3. $\|K\|_{L^2} > \|T\|$: 1. La norma dell'operatore è $\|T\| = \max(|\lambda_+|,|\lambda_-|) = \|A\|\|B\| + |\langle A,B\rangle|$.
2. La norma di Hilbert-Schmidt è $\|K\|_{L^2}^2 = \iint |K(x,y)|^2 dxdy = 2\|A\|^2\|B\|^2 + 2\langle A,B\rangle^2$.
Si nota che $\|K\|_{L^2}^2 - \|T\|^2 = (\|A\|\|B\| - |\langle A,B\rangle|)^2$. In base alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, poiché A e B sono linearmente indipendenti, $|\langle A,B\rangle| < \|A\|\|B\|$. La differenza è quindi strettamente positiva: $\|K\|_{L^2} > \|T\|$. Le quantità non coincidono.

Esercizio 9

Siano $\mathcal{H} := L^2([0,+\infty),\mathbb{C})$ e l'operatore $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definito da $(Tf)(x) =: f(4x)$.

(a) Mostriamo che per ogni $f \in \mathcal{H}$ si ha $Tf \in \mathcal{H}$. La linearità è immediata. Per la limitatezza osserviamo che

$$\|Tf\|^2 = \int_0^{+\infty} |f(4x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} |f(u)|^2 \mathrm{d}u = \frac{1}{4}\|f\|^2$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \frac{1}{2}.$$

Cerchiamo l'operatore T^* tale che $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^* g\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \int_0^{+\infty} f(4x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\overline{g\left(\frac{1}{4}u\right)}\frac{1}{4}\mathrm{d}u = \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\overline{\frac{1}{4}g\left(\frac{1}{4}u\right)}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Possiamo quindi scegliere $\left(T^* g\right)(x) := \frac{1}{4}g\left(\frac{1}{4}u\right)$. Verifichiamo che $TT^* = T^*T = \frac{1}{4}I$:

$$\begin{aligned}T\left(T^* f\right)(x) &= (T^* f)(4x) = \frac{1}{4}f\left(\frac{4x}{4}\right) = \frac{1}{4}f(x) \\ T^*(Tf)(x) &= \frac{1}{4}(Tf)\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{4}f\left(4\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{4}f(x)\end{aligned}$$

In particolare, l'operatore $2T$ è unitario. Poiché lo spettro di un operatore unitario è incluso nel cerchio unitario $\mathbb{S}^1$, ne deduciamo che $\sigma(T) \subseteq \frac{1}{2}\mathbb{S}^1$.

(b) Risolviamo $(\lambda I - T)f = g$.

- *Caso* $|\lambda| > 1/2$. Utilizzando l'identità della domanda (d)(i), otteniamo l'espressione di f:

  $$f = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n-1} T^n g + \lambda^{-N} T^N f$$

  da cui

  $$\left\| f - \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n-1} T^n g \right\| = |\lambda|^{-N} \left\| T^N f \right\|$$

  A secondo membro osserviamo che $\left\| T^N f \right\| = \frac{1}{2^N}\|f\|$ e quindi la formula diventa:

  $$\left\| f - \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n-1} T^n g \right\| = \left(\frac{1}{2|\lambda|}\right)^N \|f\|$$

Facendo $N \to +\infty$, possiamo ottenere la formula esplicita:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(4^n x)}{\lambda^{n+1}}.$$

- *Caso* $|\lambda| < 1/2$. Poiché T è invertibile con $T^{-1} = 4T^*$, riscriviamo l'equazione:

  $$(\lambda I - T)f = g \iff -T(I - \lambda T^{-1})f = g \iff (I - \lambda T^{-1})f = -T^{-1}g$$

  Poiché $\|T^{-1}\| = 2$ e $|\lambda| < 1/2$, si ha $\|\lambda T^{-1}\| < 1$. Si applica la serie di Neumann:

  $$f = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (T^{-1})^{n+1} g \implies f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} g\left(\frac{x}{4^n}\right)$$

(c) Supponiamo $Tf = \lambda f$. Allora $|f(4x)|^2 = |\lambda|^2 |f(x)|^2 = \frac{1}{4}|f(x)|^2$. Poniamo $I_n = \int_{4^n}^{4^{n+1}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$. Con $x = 4u$:

$$\int_{4^n}^{4^{n+1}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{4^{n-1}}^{4^n} |f(4u)|^2 4\mathrm{d}u = 4\int_{4^{n-1}}^{4^n} \frac{1}{4}|f(u)|^2 \mathrm{d}u = \cdots =$$
$$= \int_{4^0}^{4^1} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_1^4 |f(x)|^2 \mathrm{d}x$$

Pertanto, $I_n = I_o = \int_4^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}u$ per ogni n. Poiché $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_o$, se $I_o > 0$, la somma di un'infinità di termini costanti strettamente positivi divergerebbe verso l'infinito. Affinché f appartenga a L^2, la sua norma $\|f\|^2$ deve essere finita, il che impone $I_o = 0$. Poiché $I_o = \int_1^4 |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$, la funzione f è nulla quasi ovunque su $[1,4]$, e per induzione su tutto $[0,+\infty)$. Ne concludiamo che $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ per $|\lambda| = 1/2$.

(d) (i) Sostituendo successivamente $f = \lambda^{-1}g + \lambda^{-1}Tf$, nel termine residuo di $\lambda f = g + Tf$, si costruisce la somma richiesta: $\lambda f = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n} T^n g + \lambda^{-N+1} T^N f$.

(ii) Per la diseguaglianza triangolare inversa infatti:

$$\lambda f = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n} T^n g + \lambda^{-N+1} T^N f$$

Ricordiamo che $\|T^N f\| = \left(\frac{1}{2}\right)^N \|f\|$.

$$|\lambda|\|f\| \geq \left\|\sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n} T^n g\right\| - |\lambda|^{-N+1} \|T^N f\|.$$

Se $|\lambda| = \frac{1}{2}$, concludiamo

$$\|f\| \geq \left\|\sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n} T^n g\right\|.$$

(iii) Vedi punto precedente.

(iv) Se g è supportata su $[1,4]$, le funzioni $T^n g$ hanno supporti $I_n = \left[4^{-n}, 4^{-n+1}\right]$. Gli intervalli I_m e I_n sono disgiunti se $m \neq n+1$, altrimenti la loro intersezione si riduce al punto singolo $\{4^{-n}\}$. Poiché il prodotto $(T^n g)(x)\overline{(T^m g)(x)}$ è nullo ovunque tranne eventualmente in un punto, si ha

$$\langle T^n g, T^m g\rangle = \int_0^{+\infty} (T^n g)(x)\overline{(T^m g)(x)}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{se } n \neq m.$$

Usiamo il teorema di Pitagora:

$$\|f\|^2 \geq \left\|\sum_{n=0}^{N-1} \lambda^{-n} T^n g\right\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\lambda|^{-2n} \|T^n g\|^2 \quad \text{per ogni } N.$$

(v) Per quanto visto fino ad ora, $\|T^n g\| = (1/2)^n \|g\|$. Per $|\lambda| = \frac{1}{2}$, ne segue che:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{N-1} |\lambda|^{-2n} \|T^n g\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} 4^n \frac{1}{4^n} \|g\|^2 = N\|g\|^2.$$

Se $g \neq 0$, allora $N\|g\|^2 \to +\infty$ per $N \to \infty$. Ma questa è una contraddizione con $f \in L^2$. L'operatore non è surgettivo.

(e) L'operatore non è invertibile se e solo se $|\lambda| = 1/2$. Pertanto $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1/2\}$, tuttavia è iniettivo per questi valori di λ, di conseguenza lo spettro residuo è $\sigma_r(T) = \varnothing$. (Nota: σ_o è stato interpretato come spettro residuo).