Analisi Reale – Homeworks 1

Indrjo Dedej, Micael Defo Noguem, Reema Naz Rasheed,
Umberto Santero Mormile, Lorenzo Torzolini

Ultimo aggiornamento: 14 dicembre 2025.

Esercizio 1

Obiettivo

Mostrare che $L^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ per $p \neq p'$.

Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$

Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Definiamo le coordinate polari come segue:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ x_4 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4, \\ \vdots \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{cases}$$

dove $r \geq 0$ e

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = |x|, \qquad \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in (0, \pi), \quad \theta_{n-1} \in [0, 2\pi].$$

In queste coordinate, si ha

$$dx = \det J \, dr \, d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1},$$

dove il determinante della matrice jacobiana vale

$$\det J = r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin^2\theta_{n-3} \sin\theta_{n-2},$$

e la matrice jacobiana si scrive

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial r} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Caso 1: $p < p'$ (Problema di singolarità locale)

Consideriamo la funzione sulla palla unitaria $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < 1\}$:

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \mathbf{1}_{B(0,1)}(x)$$

e cerchiamo α tale che $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ma $f \notin L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Calcoliamo la norma L^p della funzione f:

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{\alpha p}} \mathbf{1}_{B(0,1)} \, dx.$$

Effettuando il cambio di variabile in coordinate polari ($r = |x|$ e $dx = J \, dr \, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$):

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_0^1 \int_{[0,\pi]^{n-2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha p}} \cdot r^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \dots \sin\theta_{n-2} \, dr \, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&= \left[\int_{[0,\pi]^{n-2}} \int_0^{2\pi} \sin^{n-2}\theta_1 \dots \sin\theta_{n-2} \, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \right] \cdot \left[\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^{\alpha p}} \, dr \right] \\
&= C \int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha p - n + 1}} \, dr.
\end{aligned}$$

Secondo il criterio di Riemann, l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{r^a} \, dr$ converge se e solo se $a < 1$. Pertanto:

- $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se $\alpha p - n + 1 < 1 \implies \alpha < \dfrac{n}{p}$.
- $f \notin L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ se $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha p' - n + 1}} \, dr$ diverge, il che accade quando l'esponente è ≥ 1:

$$\alpha p' - n + 1 \geq 1 \implies \alpha \geq \frac{n}{p'}.$$

Cerchiamo dunque α tale che:

$$\frac{n}{p'} \leq \alpha < \frac{n}{p}.$$

Un tale α esiste? Sì, poiché $p < p' \implies \dfrac{1}{p'} < \dfrac{1}{p} \implies \dfrac{n}{p'} < \dfrac{n}{p}$.

Passando in coordinate polari, basta scegliere $\alpha \in \left[\dfrac{n}{p'}, \dfrac{n}{p} \right[$.

Caso 2: $p > p'$ (Problema di decrescita all'infinito)

Consideriamo la funzione sul complementare della palla unitaria

$$\mathbb{R}^n \setminus B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \geq 1\} :$$

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\beta} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)}(x).$$

Calcoliamo la norma:

$$\|f\|_{p'}^{p'} = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p'} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{\beta p'}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \, dx.$$

Analogamente al caso precedente, otteniamo:

$$\|f\|_{p'}^{p'} = C \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\beta p'}} r^{n-1} \, dr = C \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\beta p' - n + 1}} \, dr.$$

Secondo il criterio di Riemann, l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{r^a} \, dr$ converge se $a > 1$ e diverge se $a \leq 1$.

Pertanto:

- $f \notin L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ se $\beta p' - n + 1 \leq 1 \implies \beta \leq \dfrac{n}{p'}$.
- $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se $\beta p - n + 1 > 1 \implies \beta > \dfrac{n}{p}$.

Cerchiamo dunque β tale che:

$$\frac{n}{p} < \beta \leq \frac{n}{p'}.$$

Un tale β esiste? Sì, poiché $p' < p \implies \dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{p'} \implies \dfrac{n}{p} < \dfrac{n}{p'}$.

Esercizio 2

Obiettivo

Mostrare che $L^\infty([0,1]) \subsetneq \bigcap_{p \geq 1} L^p([0,1])$.
L'inclusione è banale poiché la misura è finita.

Richiamo: Funzione Gamma

Per z un numero complesso con $\mathrm{Re}(z) > 0$, si definisce la funzione Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt.$$

Essa è assolutamente convergente per $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Dimostrazione della stretta inclusione

Per la stretta inclusione, consideriamo la funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. **$f \notin L^\infty([0,1])$:**
   Si ha
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$
   Ovvero, $\forall A > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in [0,1]$:
   $$x < \delta \implies |f(x)| > A \implies \ln\left(\frac{1}{x}\right) > A.$$
   Quindi $f \notin L^\infty([0,1])$.

2. **$f \in L^p([0,1])$ per ogni $p \geq 1$:**
   Calcoliamo la norma L^p:
   $$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(x)|^p \, dx = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^p \, dx.$$
   Poniamo $t = \ln(1/x)$. Si ottiene:
   $$\|f\|_p^p = \int_0^\infty t^p e^{-t} \, dt = \Gamma(p+1) < \infty.$$
   Quindi $f \in L^p([0,1])$ per ogni $p \geq 1$.

Conclusione

Abbiamo trovato una funzione che appartiene a tutti gli L^p ma non a L^∞, dimostrando che l'inclusione è stretta.

Esercizio 3

Obiettivo

Consideriamo $\iota : L^q(E) \hookrightarrow L^p(E)$ con $|E| < \infty$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Parte 1: Continuità

Sia $f \in L^q(E)$. Applichiamo la disuguaglianza di Hölder con gli esponenti coniugati $\alpha = q/p$ e $\beta = q/(q-p)$:

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \cdot 1 \, dx \leq \left(\int_E (|f|^p)^{q/p}\right)^{p/q} \left(\int_E 1^{\frac{q}{q-p}}\right)^{1-p/q}.$$

Pertanto:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

L'operatore è limitato, quindi continuo.

Parte 2: Norma dell'operatore

Si ha $1 \in L^p(E)$ e $1 \in L^q(E)$.
Calcolo delle norme:

$$\|f\|_p = |E|^{1/p} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_q = |E|^{1/q}.$$

Quindi:

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_q} \right\|_p = \frac{\|f\|_p}{\|f\|_q} = \frac{|E|^{1/p}}{|E|^{1/q}} = |E|^{1/p-1/q} < +\infty \implies \frac{f}{\|f\|_q} \in L^p(E).$$

Dalla definizione della norma duale:

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_q} \right\|_q = \frac{\|f\|_q}{\|f\|_q} = 1.$$

Quindi:

$$\left\| \iota\left(\frac{f}{\|f\|_q} \right) \right\|_p \leq \|\iota\|.$$

Conclusione

Testando con la funzione costante $f(x) = 1$, si raggiunge l'uguaglianza. La norma dell'operatore è quindi esattamente:

$$\|\iota\| = |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Esercizio 4

Ipotesi

Sia $\{f_n\}$ limitata in $L^p(E)$ ($p \in (1, +\infty)$) e convergente fortemente a f in $L^1(E)$. Esiste allora una sottosuccessione convergente quasi ovunque.

Parte 1: $f \in L^p(E)$

Si ha $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ quasi ovunque, il che implica:

$$\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x)| = |f(x)|.$$

Poiché $x \mapsto |x|^p$ è continua:

$$\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x)|^p = |f(x)|^p.$$

Dal lemma di Fatou:

$$\int_E |f|^p \leq \int_E \liminf_{k\to\infty} |f_{n_k}|^p \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k}|^p \leq 1.$$

Quindi $f \in L^p(E)$.

Parte 2: Convergenza forte in L^r $(1 < r < p)$

Sappiamo che $f_n, f \in L^1(E) \cap L^p(E)$ e:

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n\|_p + \|f\|_p \leq 2.$$

Poniamo $g_n = f_n - f$.
Poiché $L^1(E)$ e $L^p(E)$ sono spazi vettoriali, si ha $g_n \in L^1(E) \cap L^p(E)$.
Da $g_n \in L^1 \cap L^p$, esistono $\mu, \lambda > 0$ tali che $\mu + \lambda = 1$ e $r = 1 \cdot \mu + p \cdot \lambda$.
Quindi:

$$\|g_n\|_r^r = \int_E |g_n|^r = \int_E |g_n|^{\mu} \cdot |g_n|^{p\lambda}.$$

Poniamo $a = \dfrac{1}{\mu} > 1$ e $b = \dfrac{1}{\lambda} > 1$.
Verifichiamo:

- $\displaystyle\int_E |g_n|^{\mu a} = \int_E |g_n|^{\mu \cdot \frac{1}{\mu}} = \int_E |g_n| = \|g_n\|_1 < +\infty \implies |g_n|^{\mu} \in L^a(E).$
- $\displaystyle\int_E |g_n|^{p\lambda b} = \int_E |g_n|^{p\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = \int_E |g_n|^p = \|g_n\|_p^p < +\infty \implies |g_n|^{p\lambda} \in L^b(E).$

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder con $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \mu + \lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_r^r &\leq \left(\int_E |g_n|^{\mu a} \right)^{1/a} \left(\int_E |g_n|^{p\lambda b} \right)^{1/b} \\
&= \left(\int_E |g_n| \right)^{\mu} \cdot \left(\int_E |g_n|^p \right)^{\lambda} \\
&= \|g_n\|_1^{\mu} \cdot \|g_n\|_p^{p\lambda}.
\end{aligned}$$

Sappiamo che $\|g_n\|_1 < \varepsilon$ per n sufficientemente grande (poiché $f_n \to f$ in L^1) e $\|g_n\|_p \leq 2$.
Quindi:

$$\|g_n\|_r^r \leq \varepsilon^{\mu} \cdot 2^{p(1-\mu)} \implies \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_r \leq \varepsilon^{\mu/r} \cdot 2^{p(1-\mu)/r}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0$, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_r = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_r = 0.$$

Quindi $f_n \to f$ in $L^r(E)$.

Parte 3: Convergenza debole in L^p

$f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$ (convergenza debole).
Sia $g \in L^q(E)$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Vogliamo mostrare che:

$$\int_E f_n g \to \int_E fg \iff \int_E (f_n - f) g \to 0.$$

Caso particolare: $g \in L^1(E) \cap L^\infty(E)$

$$\left|\int_E (f_n - f)g\right| \le \int_E |f_n - f||g| \le \|g\|_\infty \int_E |f_n - f| = \|g\|_\infty \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - f)g = 0 \implies f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(E) \text{ per } g \in L^1 \cap L^\infty.$$

Caso generale: $g \in L^q$

Per densità di $L^1(E) \cap L^\infty(E)$ in L^q, esiste $h \in L^1(E) \cap L^\infty(E)$ tale che:

$$\|g - h\|_q \le \varepsilon \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0.$$

Decomponiamo:

$$\begin{aligned}\left|\int_E (f_n - f)g\right| &\le \left|\int_E (f_n - f)(g - h) + (f_n - f)h\right| \\ &\le \left|\int_E (f_n - f)(g - h)\right| + \left|\int_E (f_n - f)h\right|.\end{aligned}$$

Per il primo termine, applicando Hölder:

$$\le \|f_n - f\|_p \|g - h\|_q + \left|\int_E (f_n - f)h\right| \le 2 \cdot \varepsilon + \left|\int_E (f_n - f)h\right|,$$

dove $\|f_n - f\|_p \le 2$.

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)g\right| \le 2 \cdot \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)h\right|.$$

Il secondo termine tende a 0 (caso precedente). Pertanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)g\right| \le 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0$, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - f)g = 0 \implies f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(E).$$

Esercizio 5

Contesto

Consideriamo $f \in L^1(\mathbb{R})$ e la successione delle traslazioni $f_n(x) := f(x - n)$.

Sappiamo che per $p \in (1, +\infty)$, $f_n \rightharpoonup 0$ debolmente. Mostriamo qui che questo è **falso** per $p = 1$.

a)

Sia $h \in C_c(\mathbb{R})$ una funzione continua a supporto compatto, diciamo $\mathrm{supp}(h) \subset [-T, T]$.

Studiamo il limite di $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)h(x)\,dx$.

Con il cambio di variabile $y = x - n$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x-n)h(x)\,dx\right| \leq \|h\|_\infty \int_{-T}^{T} |f(x-n)|\,dx = \|h\|_\infty \int_{-T-n}^{T-n} |f(y)|\,dy.$$

Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T-n}^{T-n} |f(y)|\,dy = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n h = 0 \quad \text{per ogni } h \in C_c(\mathbb{R}).$$

b)

Sia $g \in C_c(\mathbb{R})$ a supporto in $[-T, T]$. Sia $s(x) = \mathrm{sgn}(g(x))$.

Definiamo:

$$h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(x - 2kT).$$

1. Mostrare che $\|h\|_{\infty,\mathrm{ess}} \leq 1$

I supporti dei termini $s(x - 2kT)$ sono disgiunti, intervalli di lunghezza $2T$.

Quindi, per ogni x, la somma contiene al massimo un termine non nullo. Poiché $|s| \leq \|s\|_\infty = 1$, si ha:

$$\|h\|_{\infty,\mathrm{ess}} \leq 1,$$

quindi $h \in L^\infty(\mathbb{R})$.

2. Test sulla successione

Consideriamo la successione traslata $g_n(x) = g(x - 2nT)$.

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x-2nT)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(x-2kT)\right)dx.$$

L'unico termine della somma che si sovrappone al supporto di $g(x - 2nT)$ è quello per $k = n$:

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x-2nT)s(x-2nT)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y)s(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy = \|g\|_1.$$

c) Conclusione generale per densità

Sia ora $f \in L^1(\mathbb{R})$ qualsiasi (non nulla).

Per densità delle funzioni continue a supporto compatto, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che:

$$\|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Costruiamo h associata a questo g come sopra.

Decomponiamo l'integrale:

$$\int f_n h = \int g_n h + \int (f_n - g_n)h.$$

- Il primo termine vale $\|g\|_1$ (costante).
- Il secondo termine è limitato per Hölder:

$$\left| \int (f_n - g_n)h \right| \leq \|f_n - g_n\|_1 \|h\|_\infty \leq \|f - g\|_1 \cdot 1 < \epsilon.$$

Quindi, $\int f_n h$ rimane nell'intorno di $\|g\|_1 > 0$ e non tende a 0.

Conclusione

La successione (f_n) non converge debolmente a 0 in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 6

Esercizio 7

Siano $p \in [1, \infty)$ e $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ e τ_h l'operatore lineare da $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ che trasla l'argomento della funzione di un vettore fissato $h \in \mathbb{R}^n$.
Come fatti noti prendiamo che τ_h è un'operatore continuo ed inoltre è un'isometria.
Per la densità di $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ sia una funzione $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ che approssimi abbastanza bene f, per g i calcoli saranno più semplici dato che $\tau_h g$ e g avranno supporti definitivamente disgiunti. Abbiamo infatti:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ con } \|f - g\|_p < \varepsilon$$

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo ovviamente che:

$$\left| \|f\|_p - \|g\|_p \right| < \varepsilon$$

Procediamo ponendo $K = \text{supp}(g)$ e $K_h = \text{supp}(\tau_h g)$, ovviamente $K_h = K + h$, entrambi compatti di $\mathbb{R}^n$, quindi limitati e poiché andremo a studiare il comportamento per $\|h\| \to \infty$ possiamo considerarli definitivamente disgiunti.
Calcoliamo ora $\|\tau_h g + g\|_p^p$, con h fissato in modo tale che $K \cap K_h = \emptyset$:

$$\|\tau_h g + g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h g + g|^p = \int_{K_h} |\tau_h g|^p + \int_K |g|^p = \|\tau_h g\|_p^p + \|g\|_p^p = 2\|g\|_p^p$$

Per la seconda uguaglianza usiamo come partizione di $\mathbb{R}^n$ gli insiemi K, K_h e $(K \cup K_h)^c$ unito al fatto che le due funzioni sono nulle al di fuori dei propri supporti, la terza uguaglianza invece per come sono definite le norme e per l'ultima invece il fatto che τ_h sia un'isometria.

Abbiamo quindi:

$$\lim_{\|h\| \to \infty} \|\tau_h g + g\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|g\|_p$$

Possiamo concludere notando che:

$$\begin{aligned} \|\tau_h f + f\|_p &= \|\tau_h f - \tau_h g + f - g + \tau_h g + g\|_p \\ &\leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|f - g\|_p + \|\tau_h g + g\|_p \\ &\leq \|\tau_h g + g\|_p + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Nell'ultima maggiorazione usiamo che τ_h è lineare e mantiene le norme.

Allora:

$$\begin{aligned} \limsup_{\|h\| \to \infty} \|\tau_h f + f\|_p &\leq \limsup_{\|h\| \to \infty} \|\tau_h g + g\|_p + 2\varepsilon \\ &= 2^{\frac{1}{p}} \|g\|_p + 2\varepsilon \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_p + \varepsilon\right) + 2\varepsilon \\ &= 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p + c_\varepsilon \, \varepsilon. \end{aligned}$$

Da cui la tesi.

Esercizio 8

Dati $A, B \subset \mathbb{R}^n$ di misura strettamente positiva e finita $(0 < |A|, |B| < \infty)$allora le loro rispettive funzioni caratteristiche χ_A e χ_B sono chiaramente in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ poiché le loro $\mathcal{L}^2$-norme sono proprio le misure di Lebesgue dei due insiemi, finite per ipotesi.

Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.9.4 sull'esistenza e regolarità della loro convoluzione:

- $\chi_A \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, p=2;
- $\chi_B \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, q=2, esponente coniugato di p.

Abbiamo quindi che $\chi_A * \chi_B$ è ben definita, appartiene a $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed è uniformemente continua, quindi **continua**.

Prima di continuare abbiamo bisogno di caratterizzare il comportamento di $\chi_A * \chi_B$, sfruttando il fatto che stiamo integrando funzioni caratteristiche:

$$\chi_A * \chi_B(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(y) \cdot \chi_B(x-y)\, dy = \int_A \chi_B(x-y)\, dy = \int_{x-A} \chi_B(y)\, dy = |B \cap (x - A)|$$

Dove con $x - A$ intendiamo l'insieme A riflesso rispetto all'origine e traslato di x. Quindi $\chi_A * \chi_B(x)$ assume come valore la misura dell'intersezione tra B e il traslato di x di $-A$. Data la simmetria della convoluzione abbiamo anche:

$$\chi_A * \chi_B(x) = |B \cap (x - A)| = |A \cap (x - B)|$$

Data l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue abbiamo anche che $\chi_A * \chi_B$ non è quasi-ovunque nulla e quindi **ha supporto di misura positiva** infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A * \chi_B(x)dx = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_A(y) \cdot \chi_B(x - y)dydx = |A| \cdot |B| > 0$$

L'ultimo fatto che ci serve è dimostrare che $\chi_A * \chi_B$ sia positiva in $A + B$. Questo deriva dal fatto visto ad Esercitazione sul supporto della convoluzione: Siano $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, p e q esponenti coniugati, con $\text{supp}(f) \subset A$ e $\text{supp}(g) \subset B$ allora $\text{supp}(f * g) \subset A + B$. Si dimostra infatti la contronominale, ovvero che se $x \notin A + B$ allora $\forall y \in B$, $x - y \notin A$, quindi $f(x - y) = 0$, allora la convoluzione sarà nulla in x, dunque x non appartiene al supporto (possiamo estendere la proprietà alla chiusura perché è il supporto di una funzione continua).

Esiste quindi $x_0 \in A + B$ t.c. $\chi_A * \chi_B(x_0) > 0$, per la continuità di $\chi_A * \chi_B$ allora $\exists r > 0$ t.c. $\chi_A * \chi_B(x) > 0$ $\forall x \in B(x_0, r)$. Questa bolla è contenuta a sua volta in $A + B$ infatti $\forall x \in B(x_0, r)$ $\chi_A * \chi_B(x) > 0$ implica che $|A \cap (x - B)| > 0$ ovvero che $x \in A + B$, da cui la tesi.