

Analisi Reale – Homeworks 1

Indrjo Dedej, Micael Defo Noguem, Reema Naz Rasheed,
Umberto Santero Mormile, Lorenzo Torzolini

Ultimo aggiornamento: 19 novembre 2025.

Esercizio 1

Introduciamo la funzione

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x(\ln x)^2} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo che f è integrabile.

$$\int_{(0,1)} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \frac{1}{|\ln \frac{1}{2}|} < +\infty.$$

Forniamo una stima dal basso di f^* usando le bolle $B(x, 2x) = (0, 2x)$. Per $x \in (0, \frac{1}{2})$:

$$f^*(x) \geq \frac{1}{|B(x, 2x)|} \int_{B(x, 2x)} |f(y)| dy = \frac{1}{2x |\ln x|}.$$

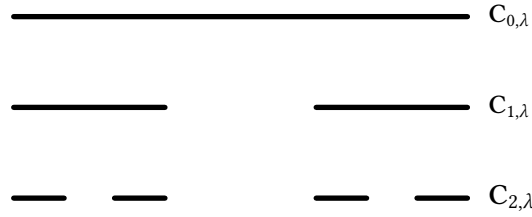
Concludiamo verificando che f^* non è localmente integrabile:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f^*(y) dy \geq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y |\ln y|} dy = +\infty.$$

Esercizio 2

1. Proviamo che l'inclusione $AC([0, 1]) \subseteq BV([0, 1])$ è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione a variazione limitata che non è assolutamente continua.

Usiamo come esempio la funzione chiamata "scala del diavolo", data la usuale costruzione dell'insieme ternario di Cantor di parametro $\lambda = \frac{1}{3}$, C_λ .



La funzione che vogliamo costruire sarà il limite della successione di funzioni monotone definite a partire dagli insiemi intermedi, indicati con $C_{n,\lambda}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{|C_{n,\lambda}|} \cdot \int_0^x \chi_{C_{n,\lambda}}(u) du$$

Si può dimostrare¹ come questa successione di funzioni chiaramente monotone sia di Cauchy in $\mathcal{C}([0, 1])$ con la norma del sup, convergendo quindi ad una funzione f , anch'essa chiaramente monotona, e quindi sicuramente a variazione limitata.

Questa funzione però non è assolutamente continua e si può vedere ad esempio dalla condizione necessaria data dall'Esercizio 4, infatti, per come è costruita f , risulta una funzione a salti sui punti di $[0, 1]$ che appartengono a C_λ , con f suriettiva sul codominio $[0, 1]$, abbiamo quindi:

$$f(C_\lambda) = [0, 1]$$

ma

$$|C_\lambda| = 0 \neq 1 = |[0, 1]|$$

2. Proviamo che l'inclusione $Lip([0, 1]) \subseteq AC([0, 1])$ è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione assolutamente continua che non è lipschitziana. Un esempio classico di funzione non lipschitziana è

$$f(x) = \sqrt{x}$$

infatti in $x = 0$ non è possibile trovare una costante di lipschitzianità valida poiché

$$\forall K \in \mathbb{R}^+; \forall y \in [0, \frac{1}{K^2}] \cap [0, 1], |f(y) - f(0)| = \sqrt{y} \geq K \cdot y = K \cdot |y - 0|$$

e quindi in tutto il sottointervallo $[0, \frac{1}{K^2}]$ la condizione per la lipschitzianità non è soddisfatta (il "problema" è evidentemente collegato al fatto che $f'(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow 0^+$). Per dimostrare l'assoluta continuità utilizziamo il

¹Vedi "Analisi Reale, Giuseppe Molteni, APPENDICE A: CANTOR E VOLTERRA"

fatto noto² per le funzioni integrali di funzioni Lebesgue-integrabili, infatti presa

$$g(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

chiaramente $g \in L([0, 1])$ e inoltre abbiamo che:

$$f(x) = \int_0^x g(u) du$$

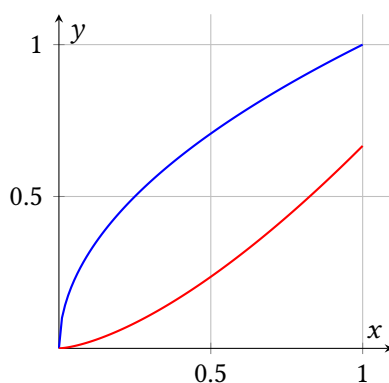


Figura 1: f in blu e g in rosso

3. Proviamo che l'inclusione $\mathcal{C}^1([0, 1]) \subseteq Lip([0, 1])$ è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione Lipschitz che non è \mathcal{C}^1 .

Una condizione semplice perché una funzione sia Lipschitz, su un intervallo limitato, è che sia polinomiale (nel nostro esempio addirittura lineare) mentre per far cadere la condizione sulla continuità della derivata basta la presenza di un punto "non-liscio", viene quindi naturale la scelta di

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

- f è Lipschitz, con costante di lipschitzianità $K = 1$ infatti:
 $\forall x, y \in [0, \frac{1}{2}] \vee \forall x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$ abbiamo che

$$|f(x) - f(y)| = \left| \mp x \pm \frac{1}{2} \pm y \mp \frac{1}{2} \right| = 1 \cdot |x - y|$$

se invece $x \in [0, \frac{1}{2}] \wedge y \in [\frac{1}{2}, 1]$ (o viceversa) abbiamo che

$$|f(x) - f(y)| = \left| -x + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} \right| = |x + y - 1| \leq |x - y|$$

poichè $x - 1 \leq -x$, se $x \leq \frac{1}{2}$.

- f è chiaramente non \mathcal{C}^1 perché la sua derivata è discontinua in $\frac{1}{2}$.

²Proposizione 1.5.5,"Analisi Reale, Giuseppe Molteni, Capitolo 1, Differenziazione e Integrazione"

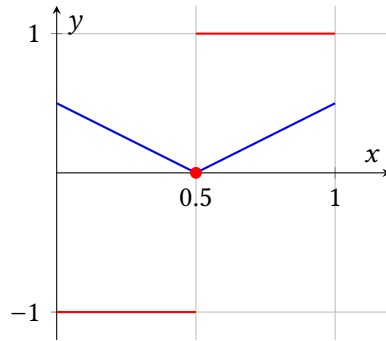


Figura 2: f in blu e f' in rosso

Esercizio 3

Scelta una qualunque partizione $\mathcal{P} := \{a =: a_0 < \dots < a_N := b\}$ di $[a, b]$, abbiamo che

$$\begin{aligned} L(\Gamma_f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N \sqrt{(a_k - a_{k-1})^2 + (f(a_k) - f(a_{k-1}))^2} \geq \\ &= \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})| = V(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

da cui segue facilmente che $L(\Gamma_f) \geq V(f)$. D'altra parte

$$\begin{aligned} L(\Gamma_f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N \sqrt{(a_k - a_{k-1})^2 + (f(a_k) - f(a_{k-1}))^2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N \{|a_k - a_{k-1}| + |f(a_k) - f(a_{k-1})|\} = b - a + V(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

da cui segue che $L(\Gamma_f) \leq b - a + V(f)$. Possiamo concludere che $L(\Gamma_f) < +\infty$ se e solo se $V(f) < +\infty$.

Esercizio 4

L'idea per la risoluzione di questo esercizio è quella di sfruttare la caratterizzazione degli insiemi di misura nulla per la misura di Lebesgue sulla retta reale, ovvero:

$$\forall E \subset \mathbb{R}, |E| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \{I_n = (x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ e } \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \leq \varepsilon$$

Quindi un insieme ha misura nulla se e solo se è possibile ricoprirlo con una quantità numerabile di intervalli piccoli a piacere.

Passiamo ora alla soluzione: sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per definizione di assoluta continuità esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $\{[x_k, y_k]\}_{k=1}^N$ con

$$\sum_{k=1}^N (y_k - x_k) < \delta$$

vale

$$\sum_{k=1}^N |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Utilizziamo il δ della definizione di assoluta continuità per ottenere un ricoprimento di E tramite intervalli di misura piccola, infatti poichè $|E| = 0$ esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ tale che

$$E \subset \bigcup_{j=1}^\infty I_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^\infty |I_j| < \delta.$$

Ora suddividiamo eventualmente ciascun intervallo I_j in sottointervalli $\widetilde{I}_{j,l}$ dove f è monotona. Questo è sempre possibile grazie alla continuità di f . Applichiamo questa ulteriore divisione perché così possiamo sfruttare la proprietà dell'assoluta continuità che controlla la variazione negli estremi di ogni intervallo.

Quindi $\{\widetilde{I}_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di E di misura totale minore di δ , dunque per ogni sua collezione finita di elementi la misura sarà ancora minore di δ , concludiamo allora per l'assoluta continuità di f che la misura dell'immagine degli intervalli sarà minore di ε .

Poiché $\{\widetilde{I}_{j,l}\}_{j,l \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di E allora $\{f(\widetilde{I}_{j,l})\}_{j,l \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $f(E)$ e la cui misura è la serie delle misure degli intervalli a cui è applicata f , serie a termini positivi di cui ogni somma parziale è limitata da ε stesso, dunque la serie è maggiorata da quest'ultimo.

Poiché $\varepsilon > 0$ era arbitrario, concludiamo che $|f(E)| = 0$.

Esercizio 5

Iniziamo con il dimostrare che se $f, g \in AC([a, b])$, con $g(a) = g(b) = 0$, allora

$$\int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx = - \int_{[a,b]} f(x) g'(x) dx.$$

Come dimostrato in un altro esercizio se $f, g \in AC([a, b])$ allora anche $fg \in AC([a, b])$; in particolare (ricordando che, nelle nostre ipotesi, $g(a) = 0$)

$$(fg)(x) = \int_{[a,x]} (fg)'(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Ma $(fg)' = f'g + fg'$ q.o., quindi valutando l'equazione in $x = b$ e ricordando che $g(b) = 0$, si ottiene

$$\int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx = - \int_{[a,b]} f(x) g'(x) dx,$$

che era quanto voluto.

Ora scegliamo $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x)$ e $g(x) = x(x-1)$. Con queste scelte risulta $f \in BV([0, 1]) \setminus AC([0, 1])$, perché monotona, ma non continua, $g \in AC([0, 1])$, perché di classe C^1 ; inoltre $f' = 0$ q.o. e $g'(x) = 2x - 1$. Allora si ha che

$$0 = \int_{[0,1]} f'(x) g(x) dx \neq - \int_{[0,1]} f(x) g'(x) dx = \frac{1}{4}.$$

Infine sia $f \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$ tale che la formula

$$\int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx = - \int_{[a,b]} f(x) g'(x) dx$$

valga per ogni $g \in AC([a, b])$ tale che $g(a) = g(b) = 0$. Allora possiamo scrivere, usando Fubini/Tonelli e il fatto che $f', g' \in L^1([a, b])$,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx &= \int_{[a,b]} \left(f'(x) \int_a^x g'(t) dt \right) dx = \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[t,b]} f'(x) dx \right) g'(t) dt = - \int_{[a,b]} f(t) g'(t) dt. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{[t,b]} f'(x) dx + f(t) \right) g'(t) dt = 0$$

per ogni $g \in AC([a, b])$ con $g(a) = g(b) = 0$. Ora usiamo il seguente risultato generale:

sia $f \in L^1_{\text{loc}}(a, b)$ tale che $\int_{[a,b]} f(x) \phi'(x) dx = 0$ per ogni $\phi \in C_c^\infty(a, b)$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = c$ per quasi ogni $x \in [a, b]$.

Nel nostro caso il lemma è applicabile dato che le funzioni di $C_c^\infty(a, b)$ sono funzioni di $AC([a, b])$ che si annullano agli estremi, e usando che $f \in C([a, b]) \cap BV([a, b])$; quindi otteniamo

$$\int_t^b f'(x) dx + f(t) = c$$

per qualche costante $c \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in [a, b]$ (dato che sia il membro destro che quello sinistro dell'uguaglianza sono funzioni continue); e poiché l'integrale di f' è una funzione assolutamente continua (così come le costanti), otteniamo che $f \in AC([a, b])$, ovvero la tesi.

Esercizio 6

- (a) Mostriamo, dapprima, che $T_f \in C([0, 1])$. Sia $x_0 \in [0, 1]$, se x_0 è uno dei due estremi dell'intervallo la continuità è intesa da destra in 0 e da sinistra in 1. Si ha che

$$|T_f(x_0 + h) - T_f(x_0)| = |V(f; [0, x_0 + h]) - V(f; [0, x_0])|.$$

Ora distinguiamo due casi e sfruttiamo la seguente identità $V(f; [a, b]) = V(f; [a, c]) + V(f; [c, b])$, valida per tutte le $f \in BV([a, b])$ e $a \leq c \leq b$. Se $h > 0$ si ha

$$|T_f(x_0 + h) - T_f(x_0)| = V(f; [x_0, x_0 + h]).$$

Sia $\mathcal{P} = \{a_0 := x_0 < a_1 < \dots < a_N := x_0 + h\}$ una partizione dell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$. Allora

$$V(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^N |f(a_i) - f(a_{i-1})| \leq Lh,$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usato il teorema di Lagrange e posto $L = \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$. Poiché il membro destro è indipendente dalla partizione \mathcal{P} scelta, si ha

$$V(f; [x_0, x_0 + h]) \leq Lh \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0^+.$$

In modo analogo si dimostra il caso $h < 0$. Quindi, quantomeno, T_f è continua. Ora dimostriamo che $T'_f(x) = |f'(x)|$ per ogni $x \in [0, 1]$ e questo concluderà il punto (a). Sia $\varepsilon > 0$, $h > 0$ e $x_0 \in [0, 1)$, allora

$$\left| \frac{T_f(x_0 + h) - T_f(x_0)}{h} - |f'(x_0)| \right| = \left| \frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} - |f'(x_0)| \right|.$$

Sia h sufficientemente piccolo tale che $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$ si ha $|f'(x) - f'(x_0)| \leq \varepsilon$, (un tale h esiste perché $f' \in C([0, 1])$). Sia $\mathcal{P} = \{a_0 := x_0 < a_1 < \dots < a_N := x_0 + h\}$ una partizione dell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$. Allora si ha che

$$\begin{aligned} V(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^N |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^N |f'(\xi_i)|(a_i - a_{i-1}) \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) + |f'(x_0)| \sum_{i=1}^N (a_i - a_{i-1}) = (\varepsilon + |f'(x_0)|)h \end{aligned}$$

dove si è usato nuovamente il teorema di Lagrange con $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$ e si è usato che $|f'(\xi_i)| \leq |f'(\xi_i) - f'(x_0)| + |f'(x_0)| \leq \varepsilon + |f'(x_0)|$ per quanto sopra. Poiché il membro destro è indipendente dalla particolare partizione scelta si ha che

$$\frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} \leq \varepsilon + |f'(x_0)|.$$

In modo analogo, usando stavolta che $|f'(\xi_i)| \geq |f'(x_0)| - |f'(\xi_i) - f'(x_0)| \geq |f'(x_0)| - \varepsilon$, si ha che

$$\frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} \geq |f'(x_0)| - \varepsilon.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze si ottiene

$$\left| \frac{V(f; [x_0, x_0 + h])}{h} - |f'(x_0)| \right| \leq \varepsilon.$$

In modo analogo si ragiona per $h < 0$. Avendo dimostrato che $T_f \in C^1([0, 1]) \subset AC([0, 1])$ e che $T'_f = |f'|$ e osservando banalmente che $T_f(0) = 0$, si ha

$$T_f(1) = V(f; [0, 1]) = \int_{[0, 1]} |f'(x)| dx.$$

(b) Ci basta far vedere che per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$T_f(x) = V(f; [0, x]) = \int_{[0, x]} |f'(u)| du.$$

Sappiamo che

$$f(x) = f(0) + \int_{[0, x]} f'(u) du \quad \text{per ogni } x \in [0, 1].$$

Quindi, fissato $x \in [0, 1]$ e data $P = \{a_0 := 0 < a_1 < \dots < a_N := x\}$ una partizione dell'intervallo $[0, x]$, si ha

$$\begin{aligned} V(f, P) &= \sum_{i=1}^N |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^N \left| \int_{[a_{i-1}, a_i]} f'(u) du \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{[a_{i-1}, a_i]} |f'(u)| du = \int_{[0, x]} |f'(u)| du. \end{aligned}$$

Quindi questo dimostra che

$$T_f(x) \leq \int_{[0, x]} |f'(u)| du.$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora possiamo trovare una step function g su $[0, x]$, tale che $f' = g + h$ con $\int_{[0, x]} |h(t)| dt < \varepsilon$. Per $y \in [0, x]$ poniamo $G(y) = \int_{[0, y]} g(u) du$ e $H(y) = \int_{[0, y]} h(u) du$. Sia $F(y) = \int_{[0, y]} f'(t) dt$, allora $F = G + H$ e, come si vede facilmente,

$$T_F(x) = T_f(x) = V(f; [0, x]) \geq T_G(x) - T_H(x) \geq T_G(x) - \varepsilon.$$

Sia $P = \{a_0 := 0 < a_1 < \dots < a_N := x\}$ una partizione dell'intervallo $[0, x]$ in modo che la step function g sia costante su ciascun intervallo (a_{i-1}, a_i) , $i = 1, 2, \dots, N$. Allora

$$\begin{aligned} T_G(x) &\geq \sum_{i=1}^N |G(a_i) - G(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^N \left| \int_{[a_{i-1}, a_i]} g(t) dt \right| = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{[a_{i-1}, a_i]} |g(t)| dt = \int_{[0, x]} |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Poiché $\int_{[0, x]} |g(t)| dt \geq \int_{[0, x]} |f'(t)| dt - \varepsilon$, si ha

$$T_F(x) = T_f(x) \geq \int_{[0, x]} |f'(t)| dt - 2\varepsilon.$$

Questo conclude.

Esercizio 7

- (a) Mostriamo che $BV[0, 1]$ è uno spazio vettoriale con l'addizione e la moltiplicazione per scalare definite puntualmente. Siano $f, g \in BV[0, 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Prendiamo anche una qualsiasi partizione $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N := 1\}$. Allora

$$V(\alpha f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^N |\alpha f(a_k) - \alpha f(a_{k-1})| = |\alpha| V(f, \mathcal{P})$$

quindi segue immediatamente che anche $\alpha f \in BV[0, 1]$ e $V(\alpha f) = \alpha V(f)$. Inoltre

$$V(f+g, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^N |f(a_k) + g(a_k) - f(a_{k-1}) - g(a_{k-1})| \leq V(f, \mathcal{P}) + V(g, \mathcal{P})$$

per cui $f+g \in BV[0, 1]$.

Adesso vediamo come $\|\cdot\|_{\infty, BV} : BV[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è una norma. Per quanto abbiamo appena visto ed essendo $\|\cdot\|_{\infty}$ una norma, sono automatiche la disuguaglianza triangolare e la proprietà di omogeneità. Inoltre è immediato verificare che $\|f\|_{\infty, BV} \geq 0$ per ogni $f \in BV[0, 1]$. Supponiamo ora che $\|f\|_{\infty, BV} = 0$: allora in particolare $\|f\|_{\infty} = 0$, da cui segue che $f = 0$.

- (b) Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N} \subseteq BV[0, 1]\}$ una successione di Cauchy. In particolare, la successione la successione è limitata, cioè possiamo scegliere $M > 0$ tale che $\|f_n\|_{\infty, BV} \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre la successione è di Cauchy anche rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Osserviamo a tal proposito che le $f_n \in BV[0, 1]$ sono limitate, e quindi $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B[0, 1]$: questo spazio vettoriale con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ è uno spazio di Banach. Quindi f_n converge ad $f \in B[0, 1]$ definita come segue:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Mostreremo che

- (i) $f \in BV[0, 1]$.
(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, BV} = 0$.
(i) Sia $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N := 1\}$ una partizione di $[a, b]$: allora

$$\begin{aligned} V(f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N |f_n(a_k) - f_n(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V(f_n) \leq M. \end{aligned}$$

- (ii) Sia $\epsilon > 0$. Poiché la successione è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{\infty, BV}$, sia \bar{n} tale che $\|f_m - f_n\|_{\infty, BV} \leq \epsilon$ per ogni $m, n \geq \bar{n}$.

$$\begin{aligned} V(f - f_n, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |(f - f_n)(a_k) - (f - f_n)(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N |(f_m - f_n)(a_k) - (f_m - f_n)(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} V(f_m - f_n) \end{aligned}$$

Allora per $n \geq \bar{n}$ abbiamo

$$V(f - f_n) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} V(f_m - f_n) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m - f_n\|_{\infty, BV} \leq \epsilon.$$

Pertanto $V(f - f_n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi possiamo concludere.

- (c) Ricordiamo che se $f \in AC[0, 1]$, allora

$$V(f) = \int_0^1 |f'| = \|f'\|_1.$$

Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq AC[0, 1]$ convergente a qualche $f \in BV[0, 1]$ in norma $\|\cdot\|_{\infty, BV}$ e mostriamo che deve essere $f \in AC[0, 1]$. In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono quasi ovunque le derivate $f'_n \in L^1[0, 1]$ si ha

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n \quad \text{per quasi ogni } x \in [0, 1].$$

Poiché una successione convergente converge secondo Cauchy, in norma $\|\cdot\|_{\infty}$ la successione $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e in norma $\|\cdot\|_1$ la successione $\{f'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono di Cauchy. Come sopra, f_n converge in norma $\|\cdot\|_{\infty}$ al limite puntuale di f_n che indichiamo con f . Anche $L^1[0, 1]$ è completo, quindi $f'_n \rightarrow g \in L^1[0, 1]$ in norma $\|\cdot\|_1$. Introduciamo la funzione assolutamente continua

$$\begin{aligned} f^* : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f^*(x) &:= f(0) + \int_0^x g \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\|f^* - f_n\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} \left| f(0) + \int_0^x g - f_n(0) - \int_0^x f'_n \right| \leq \\
&\leq |f(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x (g - f'_n) \right| \leq \\
&\leq |f(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |g - f'_n| \leq \\
&\leq \|f - f_n\|_\infty + \int_0^1 |g - f'_n| = \\
&= \|f - f_n\|_\infty + \|g - f'_n\|_1
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|f^* - f_n\|_{\infty, BV} \leq \|f - f_n\|_\infty + 2 \|g - f'_n\|_1$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ha che $f_n \rightarrow f^*$ in norma $\|\cdot\|_{\infty, BV}$. In particolare, $f^* = f$.

- (d) Abbiamo già visto che $BV[0, 1]$ è uno spazio vettoriale: manca da dimostrare che questo spazio è chiuso anche per prodotto puntuale di funzioni e possiede un elemento neutro rispetto a questa operazione.

Siano $f, g \in BV[0, 1]$ e mostriamo che $fg \in BV[0, 1]$. Fissiamo anche una qualsiasi partizione $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \dots < a_N := 1\}$. Possiamo scrivere allora

$$\begin{aligned}
V(fg, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |f(a_k)g(a_k) - f(a_{k-1})g(a_{k-1})| = \\
&= \sum_{k=1}^N |f(a_k)(g(a_k) - g(a_{k-1})) + (f(a_k) - f(a_{k-1}))g(a_{k-1})| \leq \\
&\leq \|f\|_\infty V(g, \mathcal{P}) + V(f, \mathcal{P}) \|g\|_\infty
\end{aligned}$$

Quindi anche $fg \in BV[0, 1]$. La funzione costante a 1 è ovviamente a variazione limitata ed è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

- (e) Abbiamo visto che $V(fg) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\infty, BV} \|g\|_{\infty, BV} &= \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) + V(f)V(g) \geq \\
&= \|fg\|_\infty + V(fg) = \|fg\|_{\infty, BV}.
\end{aligned}$$

- (f) $\|f\|_{\alpha, BV} \leq \|f\|_{\infty, BV}$. Viceversa, $\frac{f(\alpha)}{\|f\|_\infty} \|f\|_{\infty, BV} \leq \|f\|_{\alpha, BV}$.

Esercizio 8

- (a) Se $f_n \rightarrow f$ in norma $\|\cdot\|_{\infty, BV}$, allora $f_n \rightarrow f$ anche in norma $\|\cdot\|_\infty$. Quindi $f = g$.

(b) Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cos(2\pi nx) \quad (2)$$

Per l'esercizio 6, si ha che la variazione totale è

$$V(f_n) = \int_0^1 |f'_n(x)| dx = 4$$

Ora f_n converge in norma $\|\cdot\|_\infty$ alla funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ costante a 0, ma non è vero che $V(f_n) \rightarrow V(f) = 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

(c) Se esistesse una tale $c \in \mathbb{R}$, allora considerando la successione del punto precedente si avrebbe $\|f\|_{\infty, BV} = 4 \leq 0 = c \|f\|_\infty$.