Analisi Reale – Homeworks 1

Nome Cognome

Ultimo aggiornamento: 11 novembre 2025.

1 Esercizio 1

2 Esercizio 2

3 Esercizio 3

Scelta una qualunque partizione $\mathcal{P} := \{a =: a_0 < \cdots < a_N := b\}$ di $[a, b]$, abbiamo che

$$L(\Gamma_f, \mathcal{P}) \geq \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) - f(a_{k-1})| = V(f, \mathcal{P})$$

da cui segue facilmente che $L(\Gamma_f) \geq V(f)$. D'altra parte

$$L(\Gamma_f, \mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^{N} \{|a_k - a_{k-1}| + |f(a_k) - f(a_{k-1})|\} = b - a + V(f, \mathcal{P})$$

da cui segue che $L(\Gamma_f) \leq b - a + V(f)$. Possiamo concludere che $L(\Gamma_f) < +\infty$ se e solo se $V(f) < +\infty$.

4 Esercizio 4

5 Esercizio 5

6 Esercizio 6

7 Esercizio 7

(a)

(b) Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N} \subseteq BV[0,1]\}$ una successione di Cauchy. In particolare, la successione la successione è limitata, cioè possiamo scegliere $M > 0$ tale che $\|f_n\|_{\infty,BV} \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre la successione è di Cauchy anche rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$. Osserviamo a tal proposito che le $f \in BV[0,1]$ sono limitate, e quindi $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B[0,1]$: questo spazio vettoriale con la norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach. Quindi f_n converge $f \in B[0,1]$ definita come segue:

$$f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Mostreremo che

(i) $f \in BV[0,1]$.

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{\infty,BV} = 0$.

(i) Sia $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \cdots < a_N := 1\}$ una partizione di $[a,b]$: allora

$$\begin{aligned} V(f,\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) - f(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} |f_n(a_k) - f_n(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \lim_{n \to +\infty} V(f_n) \leq M. \end{aligned}$$

(ii) Sia $\epsilon > 0$. Poiché la successione è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{\infty,BV}$, sia $\overline{n}$ tale che $\|f_m - f_n\|_{\infty,BV} \leq \epsilon$ per ogni $m, n \geq \overline{n}$.

$$\begin{aligned} V(f - f_n, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{N} |(f - f_n)(a_k) - (f - f_n)(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} |(f_m - f_n)(a_k) - (f_m - f_n)(a_{k-1})|. \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{m \to +\infty} V(f_m - f_n) \leq \lim_{m \to +\infty} \|f_m - f_n\|_{\infty,BV} \leq \epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ϵ concludiamo.

(c) Ricordiamo che se $f \in AC[0,1]$, allora

$$V(f) = \int_0^1 |f'| = \|f'\|_1.$$

Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq AC[0,1]$ convergente a qualche $f \in BV[0,1]$ in norma $\|\cdot\|_{\infty,BV}$ e mostriamo che deve essere $f \in AC[0,1]$. In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono quasi ovunque le derivate $f_n' \in L^1[0,1]$ si ha

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n' \quad \text{per quasi ogni } x \in [0,1].$$

Poiché una successione convergente converge secondo Cauchy, in norma $\|\cdot\|_\infty$ la successione $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e in norma $\|\cdot\|_1$ la successione $\{f_n' \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono di Cauchy. Come sopra, f_n converge in norma $\|\cdot\|_\infty$ al limite puntuale di

f_n che indichiamo con f. Anche $L^1[0,1]$ è completo, quindi $f_n' \to g \in L^1[0,1]$ in norma $\|\cdot\|_1$. Introduciamo la funzione assolutamente continua

$$\begin{aligned} &f^* : [0,1] \to \mathbb{R} \\ &f^*(x) := f(0) + \int_0^x g \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \|f^* - f_n\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| f(0) + \int_0^x g - f_n(0) - \int_0^x f_n' \right| \leq \\ &\leq |f^*(0) - f_n(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x (g - f_n') \right| \leq \\ &\leq |f^*(0) - f_n(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |g - f_n'| \leq \\ &\leq \|f^* - f_n\|_\infty + \int_0^1 |g - f_n'| = \\ &= \|f^* - f_n\|_\infty + \|g - f_n'\|_1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\|f^* - f_n\|_{\infty,BV} \leq \|f - f_n\|_\infty + 2\,\|g - f_n'\|_1$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha che $f_n \to f^*$ in norma $\|\cdot\|_{\infty,BV}$. In particolare, $f^* = f$.

(d)

(e) Mostriamo che $V(fg) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f)$. Fissata una qualunque partizione $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \cdots < a_N := 1\}$ di $[0,1]$, si ha

$$\begin{aligned} V(fg,\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^N |[f(a_k) - f(a_{k-1})]g(a_k) + f(a_{k-1})[g(a_k) - g(a_{k-1})]| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N |f(a_k) - f(a_{k-1})|\,|g(a_k)| + \sum_{k=1}^N |f(a_{k-1})|\,|g(a_k) - g(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \|g\|_\infty V(f) + \|f\|_\infty V(g) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la disuguaglianza che ci serviva. Pertanto

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty,BV} \|g\|_{\infty,BV} &= \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) + V(f)V(g) \geq \\ &= \|fg\|_\infty + V(fg) = \|fg\|_{\infty,BV}. \end{aligned}$$

(f) $\|f\|_{\alpha,BV} \leq \|f\|_{\infty,BV}$. Viceversa, $\frac{f(\alpha)}{\|f\|_\infty} \|f\|_{\infty,BV} \leq \|f\|_{\alpha,BV}$.

8 Esercizio 8

(a) Se $f_n \to f$ in norma $\|\cdot\|_{BV}$, allora $f_n \to f$ anche in norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Quindi $f = g$.

(b)

(c)