Analisi Reale – Homeworks 1

Indrjo Dedej, Micael Defo Noguem,
Reema Naz Rasheed, Umberto Santero Mormile

Ultimo aggiornamento: 8 gennaio 2026.

Esercizio 1

Siano $f, g \in \mathcal{S}\mathbb{R}^n$ e mostriamo che $f * g \in \mathcal{S}\mathbb{R}^n$. Consideriamo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

$$\begin{aligned}\left|x^\alpha D^\beta (f * g)(x)\right| &= \left|x^\alpha (D^\beta f * g)(x)\right| = \\ &= \left|x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} D^\beta f(x-y) g(y) \mathrm{d}y\right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left|D^\beta f(x-y)\right| |g(y)| \, \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Poiché $f, g \in \mathcal{S}\mathbb{R}^n$, allora comunque presi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^n$ esistono $C_f, C_g \in \mathbb{R}$ per cui per ogni $z \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}\left|D^\beta f(z)\right| &\leq \frac{C_f}{|z^{\alpha_1}|} \\ |g(z)| &\leq \frac{C_g}{|z^{\alpha_2}|}\end{aligned}$$

Pertanto riprendendo dall'ultimo membro si ha

$$\begin{aligned}&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \frac{C_f}{|(x-y)^{\alpha_1}|} \frac{C_g}{|y^{\alpha_2}|} \mathrm{d}y \leq \\ &\leq C_f C_g \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x^\alpha|}{|(x-y)^{\alpha_1}| |y^{\alpha_2}|} \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Scegliendo ora α_1 e α_2 con la componenti minima sufficientemente grande, abbiamo che l'ultimo integrale muore per $|x| \to +\infty$. Questo basta per dire che la funzione liscia $x \mapsto x^\alpha D^\beta f(x)$ è limitata.

Esercizio 2

Esercizio 3

Verifichiamo che $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to K$ (dove K è $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$) è un prodotto scalare.

1. Linearità nel primo argomento. Siano $f, g, h \in \mathcal{H}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 f + \lambda_2 g, h\rangle &= \int_{[0,1]} (\lambda_1 f + \lambda_2 g)'(x) h'(x) \mathrm{d}x = \\ &= \lambda_1 \int_{[0,1]} f'(x) h'(x) \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_{[0,1]} g'(x) h'(x) \mathrm{d}x = \\ &= \lambda_1 \langle f, h\rangle + \lambda_2 \langle g, h\rangle .\end{aligned}$$

2. Skew-simmetria. In realtà è proprio simmetrico, cioè $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ per ogni $f, g \in \mathcal{H}$.

3. Sia $f \in \mathcal{H}$. Allora $\langle f, f\rangle = \|f'\|_2^2 \geq 0$. Così facendo, si deduce che se $\langle f, f\rangle = 0$, allora, $f' = 0$ quasi ovunque. Poiché $f \in AC[0,1]$, si ha che

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1].$$

Rimane da provare che lo spazio vettoriale $\mathcal{H}$ con la norma indotta dal prodotto scalare

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

è uno spazio di Banach. Sia quindi $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|$. Se è così, allora $\{f_n' \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}^2[0,1]$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$. Infatti ricordare che

$$\|f\| = \|f'\|_2 .$$

Poiché $\left(\mathcal{L}^2[0,1], \|\cdot\|_2\right)$ è di Banach, allora f_n' converge a un qualche elemento di $\mathcal{L}^2[0,1]$ che indichiamo con f'. A questo punto introduciamo

$$\begin{aligned} &f : [0,1] \to K \\ &f(x) := \int_0^x f'(t) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Questa funzione è assolutamente continua, $f(0) = 0$ e la sua derivata quasi ovunque è proprio f': pertanto $f \in \mathcal{H}$. Concludiamo

$$\|f - f_n\| = \left\|(f - f_n)'\right\|_2 = \left\|f' - f_n'\right\|_2 \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Esercizio 4

Esercizio 5

Sia $f \in \mathcal{L}^2[-1,1]$ e $p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la funzione polinomiale

$$p(x) := \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$

e calcoliamo la distanza da f:

$$\begin{aligned}\|f-p\|_2^2 &= \int_{-1}^{1}(f(x)-p(x))^2 \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-1}^{1} p(x)^2 \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)^2 \mathrm{d}x - 2\sum_{k=0}^{N} a_k \int_{-1}^{1} x^k f(x) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Derivando rispetto ad a_μ e ponendo uguale a 0 si trova $(a_1, \dots, a_N)$ che rende minima la distanza $\|f-p\|_2$. Si ha così il sistema

$$\sum_{j=0}^{N} a_j \int_{-1}^{1} x^{\mu+j} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^\mu f(x) \mathrm{d}x \quad \text{per } \mu \in \{0, \dots, N\}$$

nelle N incognite $a_1, \dots, a_N$.

Esercizio 6

Esercizio 7

1. *Mostriamo che $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è autoaggiunto.* In questo caso, ricordiamo che il prodotto scalare di $\mathcal{H}$ è definito come

$$\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x.$$

   Verifichiamo quindi che $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ per calcolo diretto. Il primo membro è

$$\langle Tf, g\rangle = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} K(x,y) f(y)\overline{g(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

   mentre il secondo membro è

$$\langle f, Tg\rangle = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \overline{K(x,y)} f(y)\overline{g(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

   Per concludere questa parte basta osservare che $K = \overline{K}$.

2. *T è compatto.* $K \in \mathcal{L}^2([0,1] \times [0,1])$ e quindi T è un operatore di Hilbert-Schmidt, che è compatto. (Cfr. Proposizione 3.5.2 delle note del corso.)

3. *Trovare lo spettro di T.* Osserviamo che essendo T autoaggiunto, allora i suoi autovalori sono tutti reali (cfr. Proposizione 3.6.6). Inoltre gli elementi non nulli dello spetto sono autovalori di T (cfr. Proposizione 3.6.9). [Niente.]

Esercizio 8