Analisi Reale – Homeworks 1

Indrjo Dedej, Micael Defo Noguem,
Reema Naz Rasheed, Umberto Santero Mormile

Ultimo aggiornamento: 25 dicembre 2025.

Esercizio 1

Al variare di $p, p' > 0$, con $p \neq p'$, troviamo un elemento di $L^p(\mathbb{R}^n)$ che non sta in $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

- *Caso* $p < p'$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha} & \text{se } 0 < \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  e cerchiamo α in modo che $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $f \notin L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. La norma L^r della funzione f è

$$\|f\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^r \,\mathrm{d}x = \int_{0<\|x\|\leq 1} \frac{1}{|x|^{\alpha r}} \mathrm{d}x$$

  L'integrale converge se e solo se $\alpha r < n$. Quindi, se $\alpha \in \left[\frac{n}{p'}, \frac{n}{p}\right[$, si ha $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $f \notin L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

- *Caso* $p > p'$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha} & \text{se } \|x\| \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Come prima

$$\|f\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^r \,\mathrm{d}x = \int_{\|x\|\geq 1} \frac{1}{|x|^{\beta r}} \mathrm{d}x.$$

  L'integrale converge se e solo se $\beta r > n$. Quindi se $\frac{n}{p} < \beta \leq \frac{n}{p'}$ si ha $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $f \notin L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

- *Caso* $p = +\infty$. La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ costante a 1 è limitata ma non è un elemento di $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

- *Caso* $p' = +\infty$. Considera la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^{\frac{n}{p}}} & \text{se } 0 < \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Da considerazioni già fatte segue che $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 2

Troviamo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ che stia in tutti gli $L^p[0,1]$, con $p \geq 1$, ma non in $L^\infty[0,1]$. Consideriamo:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Qui $f \notin L^\infty([0,1])$, perché ad esempio $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Inoltre

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^p \mathrm{d}x = \int_0^\infty t^p e^{-t} \mathrm{d}t < \infty.$$

Quindi $f \in L^p([0,1])$ per ogni $p \geq 1$.

Esercizio 3

Consideriamo l'inclusione $\iota : L^q(E) \hookrightarrow L^p(E)$, dove $|E| < \infty$ e $1 \leq p \leq q \leq \infty$. È immediato mostrare che è lineare. Proviamo che è un operatore continuo mostrando che è limitato.

Sia $f \in L^q(E)$. Applichiamo la disuguaglianza di Hölder con gli esponenti coniugati $\alpha = q/p$ e $\beta = q/(q-p)$.

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \cdot 1 \mathrm{d}x \leq \left(\int_E (|f|^p)^{q/p}\right)^{p/q} \left(\int_E 1^{\frac{q}{q-p}}\right)^{1-p/q}.$$

Pertanto:

$$\|\iota f\|_p \leq \|f\|_q |E|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Quindi

$$\|\iota\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|\iota f\|_p}{\|f\|_q} \leq |E|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

In realtà, scegliendo f la funzione costante a 1, si ha $\|\iota\| = |E|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

Esercizio 4

Mostriamo che $f \in L^p(E)$. Esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ convergente a f quasi ovunque. Poiché $x \mapsto |x|^p$ è continua, abbiamo in particolare che

$$\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x)|^p = |f(x)|^p.$$

Impieghiamo il lemma di Fatou:

$$\int_E |f|^p \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k}|^p \leq 1.$$

Mostriamo la convergenza forte in L^r *(*$1 < r < p$*).* Sappiamo che $f_n, f \in L^1(E) \cap L^p(E)$ e:

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n\|_p + \|f\|_p \leq 2.$$

Poniamo $g_n = f_n - f$. Scegliamo $\mu, \lambda > 0$ tali che $\mu + \lambda = 1$ e $r = \mu + \lambda p$. Quindi:

$$\|g_n\|_r^r = \int_E |g_n|^r = \int_E |g_n|^\mu \cdot |g_n|^{p\lambda}.$$

Introduciamo ora $a := \frac{1}{\mu} > 1$ e $b := \frac{1}{\lambda} > 1$. Si verifica immediatamente che $|g_n|^\mu \in L^a(E)$:

$$\int_E |g_n|^{\mu a} = \int_E |g_n|^{\mu \cdot \frac{1}{\mu}} = \int_E |g_n| = \|g_n\|_1 < +\infty$$

e che $|g_n|^{p\lambda} \in L^b(E)$:

$$\int_E |g_n|^{p\lambda b} = \int_E |g_n|^{p\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = \int_E |g_n|^p = \|g_n\|_p^p < +\infty$$

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder ora:

$$\begin{aligned}\|g_n\|_r^r &\leq \left(\int_E |g_n|^{\mu a}\right)^{1/a} \left(\int_E |g_n|^{p\lambda b}\right)^{1/b} \\ &= \left(\int_E |g_n|\right)^\mu \cdot \left(\int_E |g_n|^p\right)^\lambda \\ &= \|g_n\|_1^\mu \cdot \|g_n\|_p^{p\lambda}.\end{aligned}$$

All'ultimo membro abbiamo $\|g_n\|_1 \to 0$ per $n \to +\infty$ e $\|g_n\|_p \leq 2$. Possiamo quindi concludere che $f_n \to f$ in $L^r(E)$.

Proviamo la convergenza debole in L^p. Scegliamo una coppia di esponenti coniugati $p, q \geq 1$ e facciamo vedere che per ogni $g \in L^q(E)$ si ha

$$\int_E (f_n - f)g \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Consideriamo due casi.

1. $g \in L^1(E) \cap L^\infty(E)$.

$$\left|\int_E (f_n - f)g\right| \leq \int_E |f_n - f||g| \leq \|g\|_\infty \int_E |f_n - f| = \|g\|_\infty \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - f)g = 0 \implies f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(E) \text{ per } g \in L^1 \cap L^\infty.$$

2. Caso generale: $g \in L^q$. Per densità di $L^1(E) \cap L^\infty(E)$ in L^q, esiste $h \in L^1(E) \cap L^\infty(E)$ tale che:

$$\|g - h\|_q \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0.$$

Decomponiamo:

$$\begin{aligned}\left|\int_E (f_n - f)g\right| &\leq \left|\int_E (f_n - f)(g - h) + (f_n - f)h\right| \\ &\leq \left|\int_E (f_n - f)(g - h)\right| + \left|\int_E (f_n - f)h\right|.\end{aligned}$$

Applicando Hölder al primo addendo dell'ultimo membro, possiamo proseguire:

$$\leq \|f_n - f\|_p \|g - h\|_q + \left|\int_E (f_n - f)h\right| \leq 2\varepsilon + \left|\int_E (f_n - f)h\right|,$$

dove ricordiamo $\|f_n - f\|_p \leq 2$. Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)g\right| \leq 2\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)h\right|.$$

Il secondo termine tende a 0 (caso precedente). Pertanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_E (f_n - f)g\right| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0$, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - f)g = 0 \implies f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(E).$$

Esercizio 5

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e la successione delle traslazioni $f_n := \tau_n f$. Sappiamo che se $p \in (1, +\infty)$, allora $f_n \rightharpoonup 0$. Mostriamo qui che questo è *falso* per $p = 1$.

(a) Sia $h \in C_c(\mathbb{R})$ una funzione continua a supporto compatto, diciamo $\operatorname{supp}(h) \subset [-T, T]$. Studiamo il limite di $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x$. Con il cambio di variabile $y = x - n$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x-n)h(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \|h\|_\infty \int_{-T}^{T} |f(x-n)|\,\mathrm{d}x = \|h\|_\infty \int_{-T-n}^{T-n} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-T-n}^{T-n} |f(y)|\,\mathrm{d}y = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n h = 0 \quad \text{per ogni } h \in C_c(\mathbb{R}).$$

(b) Sia $g \in C_c(\mathbb{R})$ a supporto in $[-T, T]$. Sia $s(x) = \operatorname{sgn}(g(x))$ e

$$h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(x - 2kT).$$

I supporti dei termini $s(x - 2kT)$ sono disgiunti, intervalli di lunghezza $2T$. Quindi, per ogni x, la somma contiene al massimo un termine non nullo. Poiché $|s| \le \|s\|_\infty = 1$, si ha:

$$\|h\|_{\infty,\mathrm{ess}} \le 1,$$

quindi $h \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Consideriamo la successione traslata $g_n(x) = g(x - 2nT)$.

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x-2nT)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(x-2kT)\right)\mathrm{d}x.$$

L'unico termine della somma che si sovrappone al supporto di $g(x - 2nT)$ è quello per $k = n$:

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} g(x-2nT)s(x-2nT)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)s(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,\mathrm{d}y = \|g\|_1.
\end{aligned}$$

(c) Sia ora $f \in L^1(\mathbb{R})$ qualsiasi (non nulla). Per densità delle funzioni continue a supporto compatto, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $g \in C_c(\mathbb{R})$ tale che:

$$\|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Costruiamo h associata a questa g come sopra. Decomponiamo l'integrale:

$$\int f_n h = \int g_n h + \int (f_n - g_n)h.$$

ed osserviamo:

- Il primo termine vale $\|g\|_1$ (costante).
- Il secondo termine è limitato per Hölder:

$$\left| \int (f_n - g_n) h \right| \le \|f_n - g_n\|_1 \|h\|_\infty \le \|f - g\|_1 \cdot 1 < \epsilon.$$

Quindi, $\int f_n h$ rimane nell'intorno di $\|g\|_1 > 0$ e non tende a 0. La successione (f_n) non converge debolmente a 0 in $L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 6

Sia $p \in (1, +\infty)$ e sia

$$f_n(x) = 1 + \sin(n\pi x), \qquad x \in [0,1].$$

Fissiamo $k \in \mathbb{N}$.

1. Convergenza debole di f_n^k

Poiché $1 < p < \infty$, nello spazio $\mathcal{L}^p([0,1])$ la convergenza debole $g_n \rightharpoonup g$ in $\mathcal{L}^p$ è caratterizzata dalla condizione

$$\int_0^1 g_n(x)\,\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 g(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{L}^q([0,1]),$$

dove q è l'esponente coniugato di p.

Per il teorema binomiale,

$$f_n(x)^k = (1 + \sin(n\pi x))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sin^j(n\pi x).$$

Ogni potenza $\sin^j(n\pi x)$ può essere scritta come combinazione lineare finita di termini oscillanti del tipo

$$\sin(mn\pi x), \qquad \cos(mn\pi x),$$

più eventualmente un termine costante (che compare solo se j è pari).

Poiché $\mathcal{L}^q([0,1]) \subset \mathcal{L}^1([0,1])$, per il lemma di Riemann–Lebesgue si ha, per ogni $\varphi \in \mathcal{L}^q([0,1])$,

$$\int_0^1 \varphi(x)\sin(mn\pi x)\,dx \longrightarrow 0, \qquad \int_0^1 \varphi(x)\cos(mn\pi x)\,dx \longrightarrow 0, \quad \text{per } n \to \infty.$$

Pertanto tutti i termini oscillanti scompaiono nel limite debole e rimane soltanto il contributo costante. Per dimostrare quindi che $f_n^k \rightharpoonup c_k$ per una qualche costante c_k dimostreremo un fatto equivalente ovvero che:

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot (f_n^k - c_k) \to 0 \qquad \text{per} \quad n \to \infty, \forall \varphi \in \mathcal{L}^q([0,1])$$

Ma per quello che abbiamo detto prima, ovvero che le parti oscillanti di f_n^k annullano la loro sezione di integrale. Dunque perché il limite tenda a 0, c_k deve essere il termine noto della sommatoria in funzioni trigonometriche di primo grado di f_n^k, che non dipende neanche da n poiché è una proprietà indipendente dall'argomento del seno. Abbiamo quindi:

$$(1 + \sin(n\pi x))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \sin^j(n\pi x).$$

Per j dispari, la funzione $\sin^j t$ è somma soltanto di altre funzioni seno, senza termini costanti. Per $j = 2m$ pari, vale la formula

$$\sin^{2m} t = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} + \sum_{=1}^{m} a \cos(2t),$$

per opportuni coefficienti reali a. In particolare, il termine costante di $\sin^{2m} t$ è

$$\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}.$$

Segue che il termine noto nello sviluppo di $(1 + \sin t)^k$ è dato da

$$c_k = \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}.$$

2. Calcolo di c_k per $k = 1, 2, 3, 4$

Usando la caratterizzazione di c_k calcolata prima si ottiene:

$$c_1 = 1 \quad \text{banalmente},$$

$$c_2 = \sum_{m=0}^{\lfloor 1 \rfloor} \binom{2}{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$c_3 = \sum_{m=0}^{\lfloor 3/2 \rfloor} \binom{3}{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

$$c_4 = \sum_{m=0}^{\lfloor 2 \rfloor} \binom{4}{2m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} = 1 + 3 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}.$$

3. Mancata compatibilità con la convergenza debole

Poiché

$$f_n \rightharpoonup 1 \quad \text{in } \mathcal{L}^p([0,1]),$$

se la convergenza debole fosse compatibile con le potenze si dovrebbe avere

$$f_n^k \rightharpoonup 1^k = 1.$$

Tuttavia, per $k \geq 2$ risulta

$$f_n^k \rightharpoonup c_k \neq 1.$$

Pertanto, in generale,

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{non implica} \quad f_n^k \rightharpoonup f^k.$$

Esercizio 7

Siano $p \in [1, \infty)$ e $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ e τ_h l'operatore lineare da $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ che trasla l'argomento della funzione di un vettore fissato $h \in \mathbb{R}^n$.
Come fatti noti prendiamo che τ_h è un'operatore continuo ed inoltre è un'isometria.
Per la densità di $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ sia una funzione $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ che approssimi abbastanza bene f, per g i calcoli saranno più semplici dato che $\tau_h g$ e g avranno supporti definitivamente disgiunti. Abbiamo infatti:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ con } \|f - g\|_p < \varepsilon$$

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo ovviamente che:

$$\left| \|f\|_p - \|g\|_p \right| < \varepsilon$$

Procediamo ponendo $K = \operatorname{supp}(g)$ e $K_h = \operatorname{supp}(\tau_h g)$, ovviamente $K_h = K + h$, entrambi compatti di $\mathbb{R}^n$, quindi limitati e poiché andremo a studiare il comportamento per $\|h\| \to \infty$ possiamo considerarli definitivamente disgiunti.
Calcoliamo ora $\|\tau_h g + g\|_p^p$, con h fissato in modo tale che $K \cap K_h = \varnothing$:

$$\|\tau_h g + g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h g + g|^p = \int_{K_h} |\tau_h g|^p + \int_K |g|^p = \|\tau_h g\|_p^p + \|g\|_p^p = 2\,\|g\|_p^p$$

Per la seconda uguaglianza usiamo come partizione di $\mathbb{R}^n$ gli insiemi K, K_h e $(K \cup K_h)^c$ unito al fatto che le due funzioni sono nulle al di fuori dei propri supporti, la terza uguaglianza invece per come sono definite le norme e per l'ultima invece il fatto che τ_h sia un'isometria.

Abbiamo quindi:

$$\lim_{\|h\| \to \infty} \|\tau_h g + g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}\,\|g\|_p$$

Possiamo concludere notando che:

$$\begin{aligned} \|\tau_h f + f\|_p &= \|\tau_h f - \tau_h g + f - g + \tau_h g + g\|_p \\ &\leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|f - g\|_p + \|\tau_h g + g\|_p \\ &\leq \|\tau_h g + g\|_p + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Nell'ultima maggiorazione usiamo che τ_h è lineare e mantiene le norme. Allora:

$$\begin{aligned}\limsup_{\|h\|\to\infty} \|\tau_h f + f\|_p &\leq \limsup_{\|h\|\to\infty} \|\tau_h g + g\|_p + 2\varepsilon \\ &= 2^{\frac{1}{p}} \|g\|_p + 2\varepsilon \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\|f\|_p + \varepsilon\right) + 2\varepsilon \\ &= 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_p + c_\varepsilon\, \varepsilon.\end{aligned}$$

Da cui la tesi.

Esercizio 8

Dati $A, B \subset \mathbb{R}^n$ di misura strettamente positiva e finita $(0 < |A|, |B| < \infty)$allora le loro rispettive funzioni caratteristiche χ_A e χ_B sono chiaramente in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ poiché le loro $\mathcal{L}^2$-norme sono proprio le misure di Lebesgue dei due insiemi, finite per ipotesi.

Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.9.4 sull'esistenza e regolarità della loro convoluzione:

- $\chi_A \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, p=2;
- $\chi_B \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, q=2, esponente coniugato di p.

Abbiamo quindi che $\chi_A * \chi_B$ è ben definita, appartiene a $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed è uniformemente continua, quindi **continua**.

Prima di continuare abbiamo bisogno di caratterizzare il comportamento di $\chi_A * \chi_B$, sfruttando il fatto che stiamo integrando funzioni caratteristiche:

$$\chi_A * \chi_B(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(y) \cdot \chi_B(x-y)\mathrm{d}y = \int_A \chi_B(x-y)\mathrm{d}y = \int_{x-A} \chi_B(y)\mathrm{d}y = |B \cap (x-A)|$$

Dove con $x - A$ intendiamo l'insieme A riflesso rispetto all'origine e traslato di x. Quindi $\chi_A * \chi_B(x)$ assume come valore la misura dell'intersezione tra B e il traslato di x di $-A$. Data la simmetria della convoluzione abbiamo anche:

$$\chi_A * \chi_B(x) = |B \cap (x-A)| = |A \cap (x-B)|$$

Data l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue abbiamo anche che $\chi_A * \chi_B$ non è quasi-ovunque nulla e quindi **ha supporto di misura positiva** infatti:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A * \chi_B(x)\mathrm{d}x = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_A(y) \cdot \chi_B(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = |A| \cdot |B| > 0$$

L'ultimo fatto che ci serve è dimostrare che $\chi_A * \chi_B$ sia positiva in $A + B$. Questo deriva dal fatto visto ad Esercitazione sul supporto della convoluzione:

Siano $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, p e q esponenti coniugati, con $\text{supp}(f) \subset A$ e $\text{supp}(g) \subset B$ allora $\text{supp}(f * g) \subset A + B$. Si dimostra infatti la contronominale, ovvero che se $x \notin A + B$ allora $\forall y \in B$, $x - y \notin A$, quindi $f(x - y) = 0$, allora la convoluzione sarà nulla in x, dunque x non appartiene al supporto (possiamo estendere la proprietà alla chiusura perché è il supporto di una funzione continua).

Esiste quindi $x_0 \in A + B$ t.c. $\chi_A * \chi_B(x_0) > 0$, per la continuità di $\chi_A * \chi_B$ allora $\exists r > 0$ t.c. $\chi_A * \chi_B(x) > 0$ $\forall x \in B(x_0, r)$. Questa bolla è contenuta a sua volta in $A + B$ infatti $\forall x \in B(x_0, r)$ $\chi_A * \chi_B(x) > 0$ implica che $|A \cap (x - B)| > 0$ ovvero che $x \in A + B$, da cui la tesi.

Esercizio 9

Siano $p \in [1, +\infty]$ e q il suo esponente coniugato, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. È noto che la convoluzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x - y) \mathrm{d}y$$

è ben definita e uniformemente continua. Studiamo il comportamento della convoluzione per $x \to \infty$ per dimostrare che:

$$(f * g)(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } \|x\| \to \infty.$$

L'idea è sfruttare la densità delle funzioni C_c^∞, sia in $\mathcal{L}^p$ che in $\mathcal{L}^q$, così che quando $x \to \infty$ almeno uno degli argomenti dell'integrale esca dal supporto di f o g.

Caso $1 < p < \infty$

Poiché $1 < q < \infty$, lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$è denso in $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste dunque $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\|g - \varphi\|_q \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_p}.$$

Usando l'associatività della convoluzione, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale la stima

$$|(f * g)(x)| \leq |(f * \varphi)(x)| + |(f * (g - \varphi))(x)|.$$

Il secondo termine si controlla con la disuguaglianza di Hölder:

$$|(f * (g - \varphi))(x)| \leq \|f\|_p \, \|g - \varphi\|_q \leq \varepsilon.$$

Per il primo termine scriviamo, denotando con $K = \text{supp}(\varphi)$:

$$(f * \varphi)(x) = \int_K \varphi(y)\, f(x - y) \mathrm{d}y.$$

Applicando di nuovo Hölder:

$$|(f * \varphi)(x)| \le \|\varphi\|_q \, \|f \cdot \chi_{x-K}\|_p ,$$

dove $x - K = \{x - y : y \in K\}$.

Poiché K è compatto, esiste $R > 0$ tale che

$$\left\| f \, \chi_{B(0,R)^c} \right\|_p < \delta$$

per un $\delta > 0$ arbitrario (essendo $f \in \mathcal{L}^p$).
Dunque definitivamente $\|x\| > R+\mathrm{diam}(K)$ (supponendo $\|x\| \to \infty$) si ha $x - K \subset B(0,R)^c$, dunque

$$\|f \, \chi_{x-K}\|_p < \delta.$$

Segue quindi

$$|(f * \varphi)(x)| \le \|\varphi\|_q \cdot \delta \xrightarrow[\|x\|\to\infty]{} 0.$$

Combinando le due stime otteniamo

$$\limsup_{\|x\|\to\infty} |(f * g)(x)| \le \varepsilon.$$

Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario, segue che

$$(f * g)(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } \|x\| \to \infty.$$

Caso $p = 1$

Il risultato non vale in generale. Un controesempio semplice è il seguente:

$$f \in \mathcal{L}^1, \|f\|_1 \neq 0, \qquad g \equiv 1 \in \mathcal{L}^\infty.$$

Allora per ogni x:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathrm{d}y = \|f\|_1 ,$$

una costante non nulla. Dunque $(f * g)(x) \not\to 0$ all'infinito.

Caso $p = +\infty$

Consideriamo l'esempio simmetrico:

$$f \equiv 1 \in \mathcal{L}^\infty, \qquad g \in \mathcal{L}^1, \|g\|_1 \neq 0,$$

Allora

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \mathrm{d}y = \|g\|_1 ,$$

ancora una costante non nulla.

Evidentemente il problema è che le funzioni in $\mathcal{L}^\infty$ non sono tutte approssimabili con funzioni a supporto compatto, che garantiscono invece la nullità in intorni dell'infinito.