Analisi Reale – Homeworks 1

Nome Cognome

Ultimo aggiornamento: 18 novembre 2025.

Esercizio 1

Introduciamo la funzione

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x(\ln x)^2} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Verifichiamo che f è integrabile.

$$\int_{(0,1)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\left|\ln \frac{1}{2}\right|} < +\infty.$$

Forniamo una stima dal basso di f^* usando le bolle $B(x, 2x) = (0, 2x)$. Per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$:

$$f^*(x) \geq \frac{1}{|B(x,2x)|} \int_{B(x,2x)} |f(y)|\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2x\,|\ln x|}.$$

Concludiamo verificando che f^* non è localmente integrabile:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f^*(y)\mathrm{d}y \geq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y \ln y}\mathrm{d}y = +\infty.$$

Esercizio 2

1. Proviamo che l'inclusione $AC([0,1]) \subseteq BV([0,1])$ è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione a variazione limitata che non è assolutamente continua.

   Usiamo come esempio la funzione chiamata *scala del diavolo*, data la usuale costruzione dell'insieme ternario di Cantor di parametro $\lambda = \frac{1}{3}$, che indichiamo con C_λ. La funzione che vogliamo costruire sarà il limite della successione di funzioni monotone definite a partire dagli insiemi intermedi, indicati con $\mathrm{C}_{n,\lambda}$:

   $$f_n(x) = \frac{1}{|C_{n,\lambda}|}\int_0^x \chi_{C_{n,\lambda}}(u)\mathrm{d}u$$

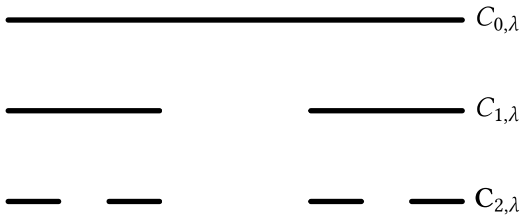


Figura 1: Costruzione dell'insieme di Cantor C_λ

Si può dimostrare[1]come questa successione di funzioni chiaramente monotone sia di Cauchy in $\mathcal{C}([0,1])$ con la norma dell'estremo superiore, convergendo quindi ad una funzione f, anch'essa chiaramente monotona, e quindi sicuramente a variazione limitata.

Questa funzione però non è assolutamente continua e si può vedere ad esempio con la caratterizzazione di queste funzioni data dall'Esercizio 4, infatti, per come è costruita f risulta una funzione a salti sui punti di $[0,1]$ che appartengono a C_λ, con f suriettiva sul codominio $[0,1]$, abbiamo quindi: $f(C_\lambda) = [0,1]$ ma $|C_\lambda| = 0 \neq 1 = |[0,1]|$

2. Proviamo che l'inclusione $\text{Lip}([0,1]) \subseteq AC([0,1])$ è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione assolutamente continua che non è lipschitziana.

   Un esempio classico di funzione non lipschitziana è $f(x) = \sqrt{x}$ infatti in $x = 0$ non è possibile trovare una costante di lipschitzianità valida poiché

$$\forall K \in \mathbb{R}^+; \forall y \in [0, \frac{1}{K}] \cap [0,1], |f(y) - f(0)| = \sqrt{y} \geq K \cdot y = K \cdot |y - 0|$$

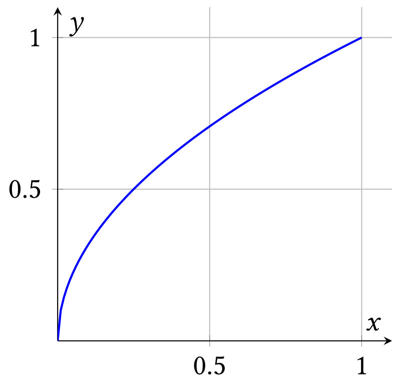
   e quindi in tutto il sottointervallo $[0, \frac{1}{K}]$ la condizione per la lipschitzianità non è soddisfatta (il "problema" è evidentemente collegato al fatto che $f'(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$). Per dimostrare l'assoluta continuità utilizziamo il fatto noto[2] per le funzioni integrali di funzioni Lebesgue-integrabili, infatti presa

$$g(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

   chiaramente $g \in L([0,1])$ e inoltre abbiamo che:

$$f(x) = \int_0^x g(u)du$$

[2]Proposizione 1.5.5,"Analisi Reale, Giuseppe Molteni, APPENDICE A: CANTOR E VOLTERRA"



3. Proviamo che l'inclusione $\mathcal{C}^1([0,1]) \subseteq \mathrm{Lip}([0,1])$ è stretta, ovvero che esiste almeno una funzione Lipschitz che non è $\mathcal{C}$.

   Una condizione semplice perché una funzione sia Lipschitz è che sia polinomiale, nel nostro esempio addirittura lineare, mentre per far cadere la condizione sulla continuità della derivata sia la presenza di un punto "non-liscio", viene quindi naturale la scelta di

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

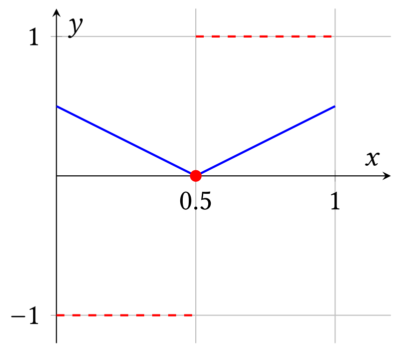
   - f è Lipschitz, con costante di lipschitzianità $K = 1$ infatti: $\forall x, y \in [0, \frac{1}{2}] \vee \forall x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$ abbiamo che

$$|f(x) - f(y)| = \left| \mp x \pm \frac{1}{2} \pm y \mp \frac{1}{2} \right| = 1 \cdot |x - y|$$

     se invece $x \in [0, \frac{1}{2}] \wedge y \in [\frac{1}{2}, 1]$ (o viceversa) abbiamo che

$$|f(x) - f(y)| = \left| -x + \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} \right| = |x + y - 1| \leq |x - y|$$

     poiché $x - 1 \leq -x$.
   - f è chiaramente non $\mathcal{C}^1$ perché la sua derivata è discontinua in 0.



[2] Vedi "Analisi Reale, Giuseppe Molteni, APPENDICE A: CANTOR E VOLTERRA"

Esercizio 3

Scelta una qualunque partizione $\mathcal{P} := \{a =: a_0 < \cdots < a_N := b\}$ di $[a, b]$, abbiamo che

$$L(\Gamma_f, \mathcal{P}) \geq \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) - f(a_{k-1})| = V(f, \mathcal{P})$$

da cui segue facilmente che $L(\Gamma_f) \geq V(f)$. D'altra parte

$$L(\Gamma_f, \mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^{N} \{|a_k - a_{k-1}| + |f(a_k) - f(a_{k-1})|\} = b - a + V(f, \mathcal{P})$$

da cui segue che $L(\Gamma_f) \leq b - a + V(f)$. Possiamo concludere che $L(\Gamma_f) < +\infty$ se e solo se $V(f) < +\infty$.

Esercizio 4

L'idea per la risoluzione di questo esercizio è quella di sfruttare la caratterizzazione degli insiemi di misura nulla per la misura di Lebesgue sulla retta reale, ovvero:

$$\forall E \subset \mathbb{R}, |E| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } E \subset \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ e } \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \leq \varepsilon$$

Quindi un insieme ha misura nulla se e solo se è possibile ricoprirlo con una quantità numerabile di intervalli piccoli a piacere.

Passiamo ora alla soluzione: sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per definizione di assoluta continuità esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $\{[x_k, y_k]\}_{k=1}^N$ con

$$\sum_{k=1}^{N} (y_k - x_k) < \delta$$

vale

$$\sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Utilizziamo il δ della definizione di assoluta continuità per ottenere un ricoprimento di E tramite intervalli di misura piccola, infatti poichè $|E| = 0$ esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti $\{I_l\}_{l=1}^{\infty}$ tale che

$$E \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{l=1}^{\infty} |I_l| < \delta.$$

Ora suddividiamo eventualmente ciascun intervallo I_l in sottointervalli $\widetilde{I_{j,l}}$ dove f è monotona. Questo è sempre possibile grazie alla continuità di f.

Quindi $\{\widetilde{I_{j,l}}\}_{j,l \in \mathrm{N}}$ è un ricoprimento aperto di E di misura totale minore di δ, quindi per ogni sua collezione finita di elementi la misura sarà ancora minore di δ, quindi per l'assolutà continuità di f la misura dell'immagine degli intervalli sarà minore di ε.

Poiché $\{\widetilde{I_{j,l}}\}_{j,l\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di E allora $\{f(\widetilde{I_{j,l}})\}_{j,l\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $f(E)$ e la sua misura è la serie delle misure degli intervalli a cui è applicata f, serie a termini positivi di cui ogni somma parziale è limitata da ε stesso.

Poiché $\varepsilon > 0$ era arbitrario, concludiamo che $m(f(E)) = 0$.

Esercizio 5

Iniziamo con il dimostrare che se $f, g \in AC([a,b])$, con $g(a) = g(b) = 0$, allora
$$\int_{[a,b]} f'(x)\, g(x) \mathrm{d}x = -\int_{[a,b]} f(x)\, g'(x) \mathrm{d}x.$$
Come dimostrato in un altro esercizio se $f, g \in AC([a,b])$ allora anche $fg \in AC([a,b])$; in particolare (ricordando che, nelle nostre ipotesi, $g(a) = 0$)
$$(fg)(x) = \int_{[a,x]} (fg)'(t) \mathrm{d}t \quad \forall x \in [a,b].$$
Ma $(fg)' = f'g + fg'$ q.o., quindi valutando l'equazione in $x = b$ e ricordando che $g(b) = 0$, si ottiene
$$\int_{[a,b]} f'(x)\, g(x) \mathrm{d}x = -\int_{[a,b]} f(x)\, g'(x) \mathrm{d}x,$$
che era quanto voluto.

Ora scegliamo $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x)$ e $g(x) = x(x-1)$. Con queste scelte risulta $f \in BV([0,1]) \setminus AC([0,1])$, perché monotona, ma non continua, $g \in AC([0,1])$, perché di classe C^1; inoltre $f' = 0 \quad$ q.o. e $g'(x) = 2x - 1$. Allora si ha che
$$0 = \int_{[0,1]} f'(x)\, g(x) \mathrm{d}x \neq -\int_{[0,1]} f(x)\, g'(x) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}.$$
Infine sia $f \in C([a,b]) \cap BV([a,b])$ tale che la formula
$$\int_{[a,b]} f'(x) g(x) \mathrm{d}x = -\int_{[a,b]} f(x) g'(x) \mathrm{d}x$$
valga per ogni $g \in AC([a,b])$ tale che $g(a) = g(b) = 0$. Allora possiamo scrivere, usando Fubini/Tonelli e il fatto che $f', g' \in L^1([a,b])$,
$$\int_{[a,b]} f'(x)\, g(x) \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \Big(f'(x) \int_a^x g'(t) \mathrm{d}t \Big) dx =$$
$$= \int_{[a,b]} \Big(\int_{[t,b]} f'(x) \mathrm{d}x \Big) g'(t) \mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f(t) g'(t) \mathrm{d}t.$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{[t,b]} f'(x)\mathrm{d}x + f(t) \right) g'(t)\mathrm{d}t = 0$$

per ogni $g \in AC([a,b])$ con $g(a) = g(b) = 0$. Ora usiamo il seguente risultato generale:

> sia $f \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ tale che $\int_{[a,b]} f(x)\, \phi'(x)\mathrm{d}x = 0$ per ogni $\phi \in C_c^\infty(a,b)$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) = c$ per quasi ogni $x \in [a,b]$.

Nel nostro caso il lemma è applicabile dato che le funzioni di $C_c^\infty(a,b)$ sono funzioni di $AC([a,b])$ che si annullano agli estremi, e usando che $f \in C([a,b]) \cap BV([a,b])$; quindi otteniamo

$$\int_t^b f'(x)\mathrm{d}x + f(t) = c$$

per qualche costante $c \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in [a,b]$ (dato che sia il membro destro che quello sinistro dell'uguaglianza sono funzioni continue); e poiché l'integrale di f' è una funzione assolutamente continua (così come le costanti), otteniamo che $f \in AC([a,b])$, ovvero la tesi.

Esercizio 6

(a) Mostriamo, dapprima, che $T_f \in C([0,1])$. Sia $x_0 \in [0,1]$, se x_0 è uno dei due estremi dell'intervallo la continuità è intesa da destra in 0 e da sinistra in 1. Si ha che

$$|T_f(x_0+h) - T_f(x_0)| = |V(f;[0,x_0+h]) - V(f;[0,x_0])|.$$

Ora distinguiamo due casi e sfruttiamo la seguente identità $V(f;[a,b]) = V(f;[a,c]) + V(f;[c,b])$, valida per tutte le $f \in BV([a,b])$ e $a \leq c \leq b$. Se $h > 0$ si ha

$$|T_f(x_0+h) - T_f(x_0)| = V(f;[x_0,x_0+h]).$$

Sia $\mathcal{P} = \{ a_0 := x_0 < a_1 < \cdots < a_N := x_0 + h \}$ una partizione dell'intervallo $[x_0, x_0+h]$. Allora

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{N} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \leq Lh,$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usato il teorema di Lagrange e posto $L = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. Poiché il membro destro è indipendente dalla partizione $\mathcal{P}$ scelta, si ha

$$V(f;[x_0,x_0+h]) \leq Lh \to 0 \quad \text{per } h \to 0^+.$$

In modo analogo si dimostra il caso $h < 0$. Quindi, quantomeno, T_f è continua. Ora dimostriamo che $T_f'(x) = |f'(x)|$ per ogni $x \in [0,1]$ e questo concluderà il punto (a). Sia $\varepsilon > 0$, $h > 0$ e $x_0 \in [0,1)$, allora

$$\left|\frac{T_f(x_0+h) - T_f(x_0)}{h} - \left|f'(x_0)\right|\right| = \left|\frac{V(f;[x_0,x_0+h])}{h} - \left|f'(x_0)\right|\right|.$$

Sia h sufficientemente piccolo tale che $\forall x \in [x_0, x_0+h]$ si ha $|f'(x) - f'(x_0)| \leq \varepsilon$, (un tale h esiste perché $f' \in C([0,1])$). Sia $\mathcal{P} = \{ a_0 := x_0 < a_1 < \cdots < a_N := x_0 + h \}$ una partizione dell'intervallo $[x_0, x_0+h]$. Allora si ha che

$$\begin{aligned} V(f,P) &= \sum_{i=1}^{N} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} |f'(\xi_i)|(a_i - a_{i-1}) \leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{N}(a_i - a_{i-1}) + |f'(x_0)| \sum_{i=1}^{N}(a_i - a_{i-1}) = (\varepsilon + |f'(x_0)|)h \end{aligned}$$

dove si è usato nuovamente il teorema di Lagrange con $\xi_i \in (a_{i-1}, a_i)$ e si è usato che $|f'(\xi_i)| \leq |f'(\xi_i) - f'(x_0)| + |f'(x_0)| \leq \varepsilon + |f'(x_0)|$ per quanto sopra. Poiché il membro destro è indipendente dalla particolare partizione scelta si ha che

$$\frac{V(f;[x_0,x_0+h])}{h} \leq \varepsilon + |f'(x_0)|.$$

In modo analogo, usando stavolta che $|f'(\xi_i)| \geq |f'(x_0)| - |f'(\xi_i) - f'(x_0)| \geq |f'(x_0)| - \varepsilon$, si ha che

$$\frac{V(f;[x_0,x_0+h])}{h} \geq |f'(x_0)| - \varepsilon.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze si ottiene

$$\left|\frac{V(f;[x_0,x_0+h])}{h} - \left|f'(x_0)\right|\right| \leq \varepsilon.$$

In modo analogo si ragiona per $h < 0$. Avendo dimostrato che $T_f \in C^1([0,1]) \subset AC([0,1])$ e che $T_f' = |f'|$ e osservando banalmente che $T_f(0) = 0$, si ha

$$T_f(1) = V(f;[0,1]) = \int_{[0,1]} |f'(x)| \mathrm{d}x.$$

(b) Ci basta far vedere che per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$T_f(x) = V(f;[0,x]) = \int_{[0,x]} |f'(u)| \mathrm{d}u.$$

Sappiamo che

$$f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} f'(u) \mathrm{d}u \quad \text{per ogni } x \in [0,1].$$

Quindi, fissato $x \in [0,1]$ e data $P = \{ a_0 := 0 < a_1 < \cdots < a_N := x \}$ una partizione dell'intervallo $[0,x]$, si ha

$$
\begin{aligned}
V(f,P) &= \sum_{i=1}^{N} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{[a_{i-1},a_i]} f'(u) \mathrm{d}u \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{[a_{i-1},a_i]} \left| f'(u) \right| \mathrm{d}u = \int_{[0,x]} \left| f'(u) \right| \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Quindi questo dimostra che

$$
T_f(x) \leq \int_{[0,x]} |f'(u)| \mathrm{d}u.
$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora possiamo trovare una step function g su $[0,x]$, tale che $f' = g + h$ con $\int_{[0,x]} |h(t)| \mathrm{d}t < \varepsilon$. Per $y \in [0,x]$ poniamo $G(y) = \int_{[0,y]} g(u) \mathrm{d}u$ e $H(y) = \int_{[0,y]} h(u) \mathrm{d}u$. Sia $F(y) = \int_{[0,y]} f'(t) \mathrm{d}t$, allora $F = G + H$ e, come si vede facilmente,

$$
T_F(x) = T_f(x) = V(f;[0,x]) \geq T_G(x) - T_H(x) \geq T_G(x) - \varepsilon.
$$

Sia $P = \{ a_0 := 0 < a_1 < \cdots < a_N := x \}$ una partizione dell'intervallo $[0,x]$ in modo che la step function g sia costante su ciascun intervallo (a_{i-1}, a_i), $i = 1, 2, \ldots, N$. Allora

$$
\begin{aligned}
T_G(x) &\geq \sum_{i=1}^{N} |G(a_i) - G(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{[a_{i-1},a_i]} g(t) \mathrm{d}t \right| = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{[a_{i-1},a_i]} |g(t)| \mathrm{d}t = \int_{[0,x]} |g(t)| \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Poiché $\int_{[0,x]} |g(t)| \mathrm{d}t \geq \int_{[0,x]} |f'(t)| \mathrm{d}t - \varepsilon$, si ha

$$
T_F(x) = T_f(x) \geq \int_{[0,x]} |f'(t)| \mathrm{d}t - 2\varepsilon.
$$

Questo conclude.

Esercizio 7

(a) Mostriamo che $BV[0,1]$ è uno spazio vettoriale con l'addizione e la moltiplicazione per scalare definite puntualmente. Siano $f, g \in BV[0,1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Prendiamo anche una qualsiasi partizione $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \cdots < a_N := 1\}$. Allora

$$
V(\alpha f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{N} |\alpha f(a_k) - \alpha f(a_{k-1})| = |\alpha| \, V(f, \mathcal{P})
$$

quindi segue immediatamente che anche $\alpha f \in BV[0,1]$ e $V(\alpha f) = \alpha V(f)$. Inoltre

$$V(f+g,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) + g(a_k) - f(a_{k-1}) - g(a_{k-1})| \le V(f,\mathcal{P}) + V(g,\mathcal{P})$$

per cui $f + g \in BV[0,1]$.

Adesso vediamo come $\|\cdot\|_{\infty,BV} : BV[0,1] \to \mathbb{R}$ è una norma. Per quanto abbiamo appena visto ed essendo $\|\cdot\|_{\infty}$ una norma, sono automatiche la disuguaglianza triangolare e la proprietà di omogeneità. Inoltre è immediato verificare che $\|f\|_{\infty,BV} \ge 0$ per ogni $f \in BV[0,1]$. Supponiamo ora che $\|f\|_{\infty,BV} = 0$: allora in particolare $\|f\|_{\infty} = 0$, da cui segue che $f = 0$.

(b) Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N} \subseteq BV[0,1]\}$ una successione di Cauchy. In particolare, la successione la successione è limitata, cioè possiamo scegliere $M > 0$ tale che $\|f_n\|_{\infty,BV} \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre la successione è di Cauchy anche rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Osserviamo a tal proposito che le $f_n \in BV[0,1]$ sono limitate, e quindi $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B[0,1]$: questo spazio vettoriale con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ è uno spazio di Banach. Quindi f_n converge ad $f \in B[0,1]$ definita come segue:

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Mostreremo che

(i) $f \in BV[0,1]$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,BV} = 0$.

(i) Sia $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \cdots < a_N := 1\}$ una partizione di $[a,b]$: allora

$$\begin{aligned} V(f,\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{N} |f(a_k) - f(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} |f_n(a_k) - f_n(a_{k-1})| \le \\ &\le \lim_{n\to+\infty} V(f_n) \le M. \end{aligned}$$

(ii) Sia $\epsilon > 0$. Poiché la successione è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{\infty,BV}$, sia $\overline{n}$ tale che $\|f_m - f_n\|_{\infty,BV} \le \epsilon$ per ogni $m,n \ge \overline{n}$.

$$\begin{aligned} V(f-f_n,\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{N} |(f-f_n)(a_k) - (f-f_n)(a_{k-1})| = \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} |(f_m-f_n)(a_k) - (f_m-f_n)(a_{k-1})| \le \\ &\le \lim_{m\to+\infty} V(f_m - f_n) \end{aligned}$$

Allora per $n \geq \overline{n}$ abbiamo

$$V(f - f_n) \leq \lim_{m \to +\infty} V(f_m - f_n) \leq \lim_{m \to +\infty} \|f_m - f_n\|_{\infty,BV} \leq \epsilon.$$

Pertanto $V(f - f_n) \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi possiamo concludere.

(c) Ricordiamo che se $f \in AC[0,1]$, allora

$$V(f) = \int_0^1 |f'| = \|f'\|_1 .$$

Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq AC[0,1]$ convergente a qualche $f \in BV[0,1]$ in norma $\|\cdot\|_{\infty,BV}$ e mostriamo che deve essere $f \in AC[0,1]$. In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono quasi ovunque le derivate $f_n' \in L^1[0,1]$ si ha

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n' \quad \text{per quasi ogni } x \in [0,1].$$

Poiché una successione convergente converge secondo Cauchy, in norma $\|\cdot\|_\infty$ la successione $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e in norma $\|\cdot\|_1$ la successione $\{f_n' \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono di Cauchy. Come sopra, f_n converge in norma $\|\cdot\|_\infty$ al limite puntuale di f_n che indichiamo con f. Anche $L^1[0,1]$ è completo, quindi $f_n' \to g \in L^1[0,1]$ in norma $\|\cdot\|_1$. Introduciamo la funzione assolutamente continua

$$\begin{aligned} &f^* : [0,1] \to \mathbb{R} \\ &f^*(x) := f(0) + \int_0^x g \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \|f^* - f_n\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} \left| f(0) + \int_0^x g - f_n(0) - \int_0^x f_n' \right| \leq \\ &\leq |f^*(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x (g - f_n') \right| \leq \\ &\leq |f^*(0) - f_n(0)| + \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |g - f_n'| \leq \\ &\leq \|f^* - f_n\|_\infty + \int_0^1 |g - f_n'| = \\ &= \|f^* - f_n\|_\infty + \|g - f_n'\|_1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\|f^* - f_n\|_{\infty,BV} \leq \|f - f_n\|_\infty + 2\,\|g - f_n'\|_1$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha che $f_n \to f^*$ in norma $\|\cdot\|_{\infty,BV}$. In particolare, $f^* = f$.

(d) Abbiamo già visto che $BV[0,1]$ è uno spazio vettoriale: manca da dimostrare che questo spazio è chiuso anche per prodotto puntuale di funzioni e possiede un elemento neutro rispetto a questa operazione.

Siano $f, g \in BV[0,1]$ e mostriamo che $fg \in BV[0,1]$. Fissiamo anche una qualsiasi partizione $\mathcal{P} := \{0 =: a_0 < \cdots < a_N := 1\}$. Possiamo scrivere allora

$$\begin{aligned} V(fg,\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^{N} |f(a_k)g(a_k) - f(a_{k-1})g(a_{k-1})| = \\ &= \sum_{k=1}^{N} |f(a_k)(g(a_k) - g(a_{k-1})) + (f(a_k) - f(a_{k-1}))g(a_{k-1})| \leq \\ &\leq \|f\|_\infty V(g,\mathcal{P}) + V(f,\mathcal{P}) \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Quindi anche $fg \in BV[0,1]$. La funzione costante a 1 è ovviamente a variazione limitata ed è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

(e) Abbiamo visto che $V(fg) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f)$. Pertanto

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty,BV} \|g\|_{\infty,BV} &= \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f) + V(f)V(g) \geq \\ &= \|fg\|_\infty + V(fg) = \|fg\|_{\infty,BV} \,. \end{aligned}$$

(f) $\|f\|_{\alpha,BV} \leq \|f\|_{\infty,BV}$. Viceversa, $\frac{f(\alpha)}{\|f\|_\infty} \|f\|_{\infty,BV} \leq \|f\|_{\alpha,BV}$.

Esercizio 8

(a) Se $f_n \to f$ in norma $\|\cdot\|_{BV}$, allora $f_n \to f$ anche in norma $\|\cdot\|_\infty$. Quindi $f = g$.

(b) Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \tag{1}$$
$$f_n(x) := \frac{1}{n}\cos(2\pi n x) \tag{2}$$

Per l'esercizio 6, si ha che la variazione totale è

$$V(f_n) = \int_0^1 \left|f_n'(x)\right| \mathrm{d}x = 4$$

Ora f_n converge in norma $\|\cdot\|_\infty$ alla funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ costante a 0, ma non è vero che $V(f_n) \to V(f) = 0$ per $n \to +\infty$.

(c) Se esistesse una tale $c \in \mathbb{R}$, allora considerando la successione del punto precedente si avrebbe $\|f\|_{\infty,BV} = 4 \leq 0 = c\,\|f\|_\infty$.