Categorie esatte

Indrjo Dedej

Università degli Studi di Pavia

Pavia, 28/10/2025

UNIVERSITÀ
DI PAVIA

Due categorie...

	$\mathbf{Mod}_R$	**Ban**
oggetti	moduli su R	spazi di Banach
morfismi	applicazioni lineari	applicazioni lineari limitate

Richiamo: un'applicazione lineare tra spazi normati $f : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ è detta *limitata* se esiste $M > 0$ per cui $\|fx\| \leq M \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Kernel e cokernel

Definizione

Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0.

- *Morfismo nullo* 0_A^B : $A \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} B$
- *Kernel* di $f : A \to B$: equalizzatore di $A \underset{0_A^B}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$
- *Cokernel* di $f : A \to B$: coequalizzatore di $A \underset{0_A^B}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$

Esempi

In $\mathbf{Mod}_R$:

- kernel di $f : M \to N$: inclusione $\ker f \hookrightarrow M$
- cokernel di $f : M \to N$: proiezione canonica $N \to N/\operatorname{im} f$

In **Ban**:

- kernel di $f : M \to N$: inclusione $\ker f \hookrightarrow M$
- cokernel di $f : M \to N$: proiezione canonica $N \to N/\overline{\operatorname{im} f}$

Richiamo: $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e $M \subseteq X$ chiuso $\implies$ $(X/M, [\![\cdot]\!])$ spazio di Banach con $[\![x + M]\!] := \inf_{m \in M} \|x + m\|$

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Categorie preadditive

Definizione

Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathcal{C}$ in cui:

1. Per ogni $A, B \in |\mathcal{C}|$ la classe $\mathcal{C}(A, B)$ è dotata di un'operazione interna
$$+_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, B)$$
e ha un elemento $0_A^B : A \to B$ che lo rendono un gruppo abeliano.
2. Per ogni $A, B, C, D \in |\mathcal{C}|$ e $f : A \to B$ di $\mathcal{C}$, le funzioni
$$f_* := \mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) \to \mathcal{C}(C, B)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, D) : \mathcal{C}(B, D) \to \mathcal{C}(A, D)$$
sono omomorfismi di gruppi abeliani.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Proprietà ed esempi

- Un adagio: in una categoria preadditiva con oggetto zero 0, $f : A \to B$ è monomorfismo se e solo se $0 \xrightarrow{\exists!} A$ è kernel di f.
- Enunciato duale.
- Esempio: caratterizzazione morfismi di **Ban**
- $\mathbf{Mod}_R$ e **Ban** sono categorie preadditive.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Biprodotti

Definizione

Un *biprodotto* in una categoria preadditiva consta di oggetti e frecce

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & C \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

tali che

$$p_A i_A = 1_A \tag{1}$$
$$p_B i_B = 1_B \tag{2}$$
$$i_A p_A + i_B p_B = 1_C \tag{3}$$

Proposizione

(p_A, p_B) è un prodotto, (i_A, i_B) è un coprodotto.

Categorie additive

Definizione

Una *categoria additiva* è una categoria che ha oggetto zero e che per ogni coppia di oggetti A e B possiede biprodotto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A^{AB}"'] & A \oplus B \arrow[l, shift right, "p_A^{AB}"'] \arrow[r, shift left, "p_B^{AB}"] & B \arrow[l, shift left, "i_B^{AB}"] \end{tikzcd}$$

Esempio

$\mathbf{Mod}_R$ e **Ban** sono additive.

Richiamo: norma su $X \oplus Y$ in **Ban**: $\|(x, y)\|_{X \oplus Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Categorie Abeliane

Definizione

Una *categoria abeliana* è una categoria additiva in cui:

1. Ogni morfismo ha un kernel e un cokernel.
2. Ogni monomorfismo è un kernel e ogni epimorfismo è un cokernel.

Esempi

- $\mathbf{Mod}_R$ è una categoria abeliana.
- **Ban** è una categoria abeliana?

Categorie Abeliane

Proprietà

- La categorie abeliane sono finitamente complete e cocomplete.
- Nelle categorie abeliane, mono e epi $\implies$ iso.

Esempio

Quindi, no, **Ban** non è abeliana.

$$C_c^0[a,b] \hookrightarrow L^p[a,b]$$

è mono ed epi, ma non iso.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Verso le categorie esatte

Proposizione

In una categoria abeliana, i pushout preservano i kernel e pullback preservano i cokernel.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PB"] & C' \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, two heads, "p"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Verso le categorie esatte

Proposizione

In una categoria abeliana, i pushout preservano i kernel e pullback preservano i cokernel.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PB"] & C' \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, two heads, "p"'] & C \end{tikzcd}$$

Ma...

Anche in **Ban** vale!

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Categorie quasi-abeliane

Definizione

Una *categoria quasi-abeliana* è una categoria additiva in cui:

1. Ogni morfismo ha kernel e cokernel.
2. I pushout preservano i kernel e i pullback preservano i cokernel.

Esempio

Ban è quasi-abeliana.

Proposizione

Abeliana $\implies$ quasi-abeliana.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Definizione categoria esatte, I

Definizione

Una *struttura esatta* per una categoria additiva $\mathcal{C}$ è una classe $\mathcal{E}$ di coppie ker-coker di $\mathcal{C}$ in cui:

- Chiamiamo *monomorfismi ammissibili* le frecce $i : A \to B$ per le quali esiste $p : B \to C$ tale che $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ appartiene ad $\mathcal{E}$.
- Chiamiamo *epimorfismi ammissibili* le frecce $p : B \to C$ per le quali esiste $i : A \to B$ tale che $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ appartiene ad $\mathcal{E}$.

tale che...

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Definizione categorie esatte, II

Definizione

... tale che:

- $\mathcal{E}$ è chiusa per isomorfismo, cioè se $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ è in $\mathcal{E}$ ed è isomorfo a $A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} C'$ come oggetto di $\mathcal{C}^{\to\to}$, allora anche quest'ultima coppia di frecce è in $\mathcal{E}$.
- $1_A : A \to A$ è un monomorfismo ammissibile per ogni $A \in |\mathcal{C}|$.
- $1_A : A \to A$ è un epimorfismo ammissibile per ogni $A \in |\mathcal{C}|$.
- La composizione di due monomorfismi ammissibili è un monomorfismo ammissibile.
- La composizione di due epimorfismi ammissibili è un epimorfismo ammissibile.

...

Definizione categorie esatte, III

Definizione

...

- Il pushout di un monomorfismo ammissibile lungo un qualsiasi morfismo di $\mathcal{C}$ esiste ed è un monomorfismo ammissibile.
- Il pullback di un epimorfismo ammissibile lungo un qualsiasi morfismo di $\mathcal{C}$ esiste ed è un epimorfismo ammissibile.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PB"] & C' \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, two heads, "p"'] & C \end{tikzcd}$$

Una *categoria esatta* è una coppia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ come sopra e gli elementi di $\mathcal{E}$ si chiamano *successioni esatte corte*.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Successioni esatte corte, I

Proposizione

Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e sia

$$A \underset{i_A}{\overset{p_A}{\leftrightarrows}} A \oplus B \underset{i_B}{\overset{p_B}{\rightleftarrows}} B$$

un biprodotto. Allora

$$A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \xrightarrow{p_B} B$$

$$B \xrightarrow{i_B} A \oplus B \xrightarrow{p_A} A$$

sono successioni esatte corte, cioè coppie ker-coker in $\mathcal{E}$.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Successioni esatte corte, II

Proposizione

"In una categoria esatta la somma di successioni esatte corte è esatta corta". Vale a dire: in una categoria esatta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, se

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$A' \xrightarrow[f']{} B' \xrightarrow[g']{} C'$$

sono successioni esatte corte, allora lo è anche

$$A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus f'} B \oplus B' \xrightarrow{g \oplus g'} C \oplus C'$$

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Successioni esatte corte, III

Proposizione

In una categoria esatta consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Sono equivalenti:

- Il quadrato è di pushout.
- $A \xrightarrow{\binom{i}{f}} B \oplus A' \xrightarrow{(f' \; -i')} B'$ è esatta corta.
- ...

Successioni esatte corte, III

Proposizione

- ...
- Il quadrato è bicartesiano (cioè di pullback e di pushout).
- Il quadrato è parte del diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, two heads, "p"] & \\ & & C \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \arrow[ur, two heads, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

dove (i, p) e (i', p') sono successioni esatte corte.

Ancora un risultato

Teorema di Noether, "$C/B \cong (C/A)/(B/A)$"

In una categoria esatta, sia il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, tail, dashed] \\
A \arrow[r, tail] & C \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Y \arrow[d, two heads, dashed] \\
 & Z \arrow[r, "1_Z"'] & Z
\end{tikzcd}$$

in cui le prime due righe orizzontali e la colonna centrale sono esatte corte. Allora la terza colonna esiste, è esatta corta e è unicamente determinata dalla condizione che rende il diagramma commutativo. Inoltre, il quadrato in alto a destra è bicartesiano.

Un teorema di embedding, I

Lemma di Yoneda

Se $\mathcal{C}$ è una categoria localmente piccola, l'embedding di Yoneda $よ : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ è un funtore pieno e fedele.

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Un teorema di embedding, I

Lemma di Yoneda

Se $\mathcal{C}$ è una categoria localmente piccola, l'embedding di Yoneda $よ : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ è un funtore pieno e fedele.

Domanda

E se $\mathcal{C}$ è una categoria additiva?

Possiamo considerare questo embedding di Yoneda:

$$よ : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Ab}]$$

Teorema di embedding

Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta piccola. L'embedding di Yoneda $よ : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Ab}]$ preserva e riflette l'esattezza.

Un teorema di embedding, II

Come よ $: \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ incorpora $\mathcal{C}$ nella categoria dei prefasci $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$...

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Un teorema di embedding, II

Come $よ : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ incorpora $\mathcal{C}$ nella categoria dei prefasci $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$...

... $よ : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]$ incorpora una categoria esatta in una categoria abeliana!

UNIVERSITÀ DI PAVIA