Categorie esatte

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 8 giugno 2025.

Indice

1

Preliminari

In queste note si assume almeno la Teoria delle Categorie che si può imparare da [Lei16]. Un altro validissimo testo che insegna le basi è anche [Rie17]. Nozioni sulle categorie preadditive si possono trovare in [Mac78] che è considerato un vero e proprio classico.

1.1 Kernel e cokernel

Noi lavoreremo con categorie in cui sono presenti oggetti che sono sia terminali che iniziali. Oggetti di questo tipo sono detti *oggetti zero*. Non si tratta di categorie come **Set**, **Top** e **Ring**, ma è il caso di **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, con R anello.

Definizione 1.1.1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0. Per $a, b \in |\mathcal{C}|$, il *morfismo nullo* o *zero* da a a b è la composizione dei morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b$$

Scriveremo questo morfismo come 0_a^b oppure, se dal contesto è chiaro, semplicemente 0.

Esempio 1.1.2. In casi come **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, il morfismo nullo è quello che manda tutti gli elementi del dominio nell'identità. Anche **Ring** possiede omomorfismi come questi; tuttavia in **Ring** l'oggetto iniziale è $\mathbb{Z}$ che non è terminale mentre i morfismi zero sono definiti attraverso oggetti zero.

Comporre con un morfismo nullo dà un morfismo nullo. Più precisamente:

Proposizione 1.1.3. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* 0, e $a, b, c \in |\mathcal{C}|$. Allora per ogni $f : b \to c$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$f \circ 0_a^b = 0_a^c$$

e per ogni $g : c \to a$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$0_a^b \circ g = 0_c^b.$$

Dimostrazione. Proviamo solo una delle due uguaglianze perché l'altra è simile. Consideriamo i morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b \xrightarrow{f} c$$

Poiché 0 è iniziale, la composizione delle ultime due frecce è l'unica che può esserci. Quindi $f \circ 0_a^b$ è la composizione della freccia $a \to 0$ con la freccia $0 \to c$, ed abbiamo concluso. □

Definizione 1.1.4 (Kernel e cokernel)**.** In una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il *kernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi degli equalizzatori di

$$a \underset{0_a^b}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

Dualmente, il *cokernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi dei coequalizzatori della stessa coppia di morfismi.

Osservazione 1.1.5. Ricordiamo che in generale gli equalizzatori sono monomorfismi e i coequalizzatori sono epimorfismi. Questa informazione può dare delle indicazioni su come sono fatti i kernel e i cokernel in categorie in cui monomorfismo ed epimorfismo significano rispettivamente iniettivo e suriettivo.

Esempio 1.1.6 (Kernel di omomorfismi di moduli)**.** In Algebra, si parla di *kernel* di morfismi in vari ambiti. Per esempio, se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$$

è un sottomodulo di M. Per entrare nel linguaggio della Teoria delle Categorie,

> l'omomorfismo inclusione $i : \ker f \hookrightarrow M$ è un equalizzatore della coppia di omomorfismi
> $$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

Esempio 1.1.7 (Cokernel di omomorfismi di moduli)**.** Se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\operatorname{coker} f := \frac{N}{\operatorname{im} f}$$

è un sottomodulo di M chiamato *cokernel* di f. Questa nozione è il duale di kernel, nel senso che

> l'omomorfismo di proiezione canonica al quoziente $\pi_N : N \to \operatorname{coker} f$ è un coequalizzatore della coppia di omomorfismi
> $$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

Osservazione 1.1.8. In Algebra, kernel e cokernel sono degli oggetti, mentre tecnicamente come sono definiti qui sono dei morfismi.

1.2 Categorie preadditive

Definizione 1.2.1. Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathcal{C}$ in cui:

1. Per ogni $a, b \in |\mathcal{C}|$ la classe $\mathcal{C}(a, b)$ è dotata di un'operazione interna

   $$+_{a,b} : \mathcal{C}(a, b) \times \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

   e ha un elemento $0_a^b : a \to b$ che lo rendono un gruppo abeliano.

2. Per ogni $a, b, c \in |\mathcal{C}|$ e $f : a \to b$ di $\mathcal{C}$, le funzioni

$$f_* := \mathcal{C}(c, f) : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, c) : \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

sono omomorfismi di gruppi abeliani.

Richiamo 1.2.2. Ricordiamo che $f_*(g) := f \circ g$ mentre $f^*(h) := h \circ f$.

Spesso scriveremo semplicemente + senza pedici, perché in genere è chiaro di quali frecce stiamo sommando.

Inoltre, come nei primi teoremi di Algebra, il morfismo zero è l'unico elemento neutro e per ogni $f : a \to b$ è unico l'opposto. In coerenza con la notazione additiva indichiamo con $-f$ l'opposto di $f : a \to b$.

Un'altra osservazione da fare è questa. Il simbolo 0_a^b in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero indica il morfismo zero $a \to b$. Se $\mathcal{C}$ è preaddittiva, non sono notazioni in conflitto? No.

Proposizione 1.2.3. In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il morfismo nullo è elemento neutro.

Dimostrazione. Poiché 0 è iniziale, $\mathcal{C}(0, b)$ è banale e in particolare 0_0^b è elemento neutro. L'omomorfismo

$$\left(0_a^0\right)^* : \mathcal{C}(0, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

manda l'elemento neutro del dominio in quello del codominio, che è

$$\left(0_a^0\right)^* \left(0_0^b\right) = 0_0^b \circ 0_a^0 = 0_a^b. \qquad \square$$

1.3 Categorie additive

2

Categorie esatte

2.1 Coppie kernel-cokernel

2.2 Stutture e categorie esatte

Bibliografia

[Lei16] T. Leinster. *Basic Category Theory*. arXiv, 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1612.09375.

[Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.

[Rie17] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context/.