# Categorie esatte

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 11 giugno 2025.

## Indice

1	Prel	Preliminari		
		Kernel e cokernel Categorie preadditive	5	
		Categorie additive	10	
2 Categorie esatte		egorie esatte	11	
	2.1	Coppie kernel-cokernel	11	
	2.2	Stutture e categorie esatte	11	

#### Preliminari

In queste note si assume almeno la Teoria delle Categorie che si può imparare da [Lei16]. Un altro validissimo testo che insegna le basi è anche [Rie17]. Nozioni sulle categorie preadditive si possono trovare in [Mac78] che è considerato un vero e proprio classico.

#### 1.1 Kernel e cokernel

Noi lavoreremo con categorie in cui sono presenti oggetti che sono sia terminali che iniziali. Oggetti di questo tipo sono detti *oggetti zero*. Non si tratta di categorie come **Set**, **Top** e **Ring**, ma è il caso di **Grp** e  $\mathbf{Mod}_R$ , con R anello.

**Definizione 1.1.1.** Sia C una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0. Per  $a, b \in |C|$ , il *morfismo nullo* o *zero* da a a b è la composizione dei morfismi

$$a \xrightarrow{\exists !} 0 \xrightarrow{\exists !} b$$

Scriveremo questo morfismo come  $\mathbf{0}^b_a$  oppure, se dal contesto è chiaro, semplicemente 0.

**Esempio 1.1.2.** In casi come **Grp** e **Mod**<sub>R</sub>, il morfismo nullo è quello che manda tutti gli elementi del dominio nell'identità. Anche **Ring** possiede omomorfismi come questi; tuttavia in **Ring** l'oggetto iniziale è  $\mathbb{Z}$  che non è terminale mentre i morfismi zero sono definiti attraverso oggetti zero.

Comporre con un morfismo nullo dà un morfismo nullo. Più precisamente:

**Proposizione 1.1.3.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria con *oggetto zero* 0, e  $a, b, c \in |\mathcal{C}|$ . Allora per ogni  $f: b \to c$  di  $\mathcal{C}$  si ha

$$f \circ 0_a^b = 0_a^c$$

e per ogni  $g: c \rightarrow a$  di C si ha

$$0_a^b \circ g = 0_c^b$$
.

Dimostrazione. Proviamo solo una delle due uguaglianze perché l'altra è simile. Consideriamo i morfismi

$$a \xrightarrow{\exists !} 0 \xrightarrow{\exists !} b \xrightarrow{f} c$$

Poiché 0 è iniziale, la composizione delle ultime due frecce è l'unica che può esserci. Quindi  $f \circ 0^b_a$  è la composizione della freccia  $a \to 0$  con la freccia  $0 \to c$ , ed abbiamo concluso.

**Definizione 1.1.4** (Kernel e cokernel). In una categoria  $\mathcal C$  con oggetto zero 0, il kernel di  $f:a\to b$  è uno qualsiasi degli equalizzatori di

$$a \xrightarrow{f \atop 0^b_a} b$$

Dualmente, il cokernel di  $f:a\to b$  è uno qualsiasi dei coequalizzatori della stessa coppia di morfismi.

Osservazione 1.1.5. Ricordiamo che in generale gli equalizzatori sono monomorfismi e i coequalizzatori sono epimorfismi. Questa informazione può dare delle indicazioni su come sono fatti i kernel e i cokernel in categorie in cui monomorfismo ed epimorfismo significano rispettivamente iniettivo e suriettivo.

**Esempio 1.1.6** (Kernel di omomorfismi di moduli). In Algebra, si parla di *kernel* di morfismi in vari ambiti. Per esempio, se M e N sono due moduli su un fissato anello R e  $f: M \to N$  è un omomorfismo, allora

$$\ker f := \{ x \in M \mid f(x) = 0_N \}$$

è un sottomodulo di M. Per entrare nel linguaggio della Teoria delle Categorie,

l'omomorfismo inclusione i : ker  $f \hookrightarrow M$  è un equalizzatore della coppia di omomorfismi

$$M \xrightarrow{f \atop 0_M^N} N$$

**Esempio 1.1.7** (Cokernel di omomorfismi di moduli). Se M e N sono due moduli su un fissato anello R e  $f: M \to N$  è un omomorfismo, allora

$$\operatorname{coker} f \coloneqq \frac{N}{\operatorname{im} f}$$

è un sottomodulo di M chiamato cokernel di f. Questa nozione è il duale di kernel, nel senso che

l'omomorfismo di proiezione canonica al quoziente  $\pi_N:N \to \operatorname{coker} f$  è un coequalizzatore della coppia di omomorfismi

$$M \xrightarrow{f \atop 0_M^N} N$$

**Osservazione 1.1.8.** In Algebra, kernel e cokernel sono degli oggetti, mentre tecnicamente come sono definiti qui sono dei morfismi.

#### 1.2 Categorie preadditive

**Definizione 1.2.1.** Una categoria preadditiva è una categoria  $\mathcal C$  in cui:

1. Per ogni  $a, b \in |\mathcal{C}|$  la classe  $\mathcal{C}(a, b)$  è dotata di un'operazione interna

$$+_{a,b}: \mathcal{C}(a,b) \times \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,b)$$

e ha un elemento  $0^b_a:a\to b$  che lo rendono un gruppo abeliano.

2. Per ogni  $a, b, c \in |\mathcal{C}|$  e  $f : a \to b$  di  $\mathcal{C}$ , le funzioni

$$f_* := \mathcal{C}(c, f) : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, c) : \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

sono omomorfismi di gruppi abeliani.

**Richiamo 1.2.2.** Ricordiamo che  $f_*(g) := f \circ g$  mentre  $f^*(h) := h \circ f$ .

Spesso scriveremo semplicemente + senza pedici, perché in genere è chiaro di quali frecce stiamo sommando.

Inoltre, come nei primi teoremi di Algebra, il morfismo zero è l'unico elemento neutro e per ogni  $f:a\to b$  è unico l'opposto. In coerenza con la notazione additiva indichiamo con -f l'opposto di  $f:a\to b$ .

Un'altra osservazione da fare è questa. Il simbolo  $0_a^b$  in una categoria  $\mathcal C$  con oggetto zero indica il morfismo zero  $a \to b$ . Se  $\mathcal C$  è preaddittiva, non sono notazioni in conflitto? No.

**Proposizione 1.2.3.** In una categoria preadditiva  $\mathcal C$  con oggetto zero 0, il morfismo nullo è elemento neutro.

Dimostrazione. Poiché 0 è iniziale, C(0, b) è banale e in particolare  $0_0^b$  è elemento neutro. L'omomorfismo

$$\left(0_a^0\right)^*: \mathcal{C}(0,b) \to \mathcal{C}(a,b)$$

manda l'elemento neutro del dominio in quello del codominio, che è

$$(0_a^0)^*(0_0^b) = 0_0^b \circ 0_a^0 = 0_a^b.$$

Ora parleremo di alcune peculiarità dei limiti e dei colimiti in categorie preadditive.

**Osservazione 1.2.4.** A tal proposito è utile osservare che se  $\mathcal{C}$  è una categoria preadditiva, anche il suo duale  $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$  lo è. La conseguenza più pratica per noi è che dimezza le dimostrazioni: una volta dimostrato un enunciato, quello duale è automatico.

**Proposizione 1.2.5.** In un categoria preadditiva  $\mathcal C$  gli oggetti terminali sono iniziali e viceversa.

Quindi in una categoria preadditiva gli oggetti terminali e iniziali sono oggetti zero.

Dimostrazione. Sia t un oggetto terminale di  $\mathcal{C}$ . Se riusciamo a mostrare che  $\mathcal{C}(t,a)$  è un gruppo banale per ogni oggetto a di  $\mathcal{C}$ , allora possiamo concludere. Prendiamo un  $f:t\to a$  qualsiasi in  $\mathcal{C}$  e guardiamo l'omomorfismo di gruppi

$$f_* = \mathcal{C}(t, f) : \mathcal{C}(t, t) \to \mathcal{C}(t, a).$$

Il dominio è un gruppo banale perché t è terminale; in particolare,  $1_t = 0_t^t$ . Inoltre, trattandosi di omomorfismo,

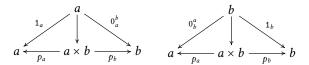
$$\underbrace{f_*\left(\mathbf{1}_t\right)}_{=f} = f\left(\mathbf{0}_t^t\right) = \mathbf{0}_t^a.$$

Vediamo i prodotti e i coprodotti finiti ora.

**Proposizione 1.2.6.** Sia  $\mathcal C$  una categoria preadditiva con oggetto zero 0 e

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \times b \stackrel{p_b}{\longrightarrow} b$$

un prodotto in  $\mathcal{C}$ . Grazie alla proprietà universale di prodotto, introduciamo le frecce  $i_a:a\to a\times b$  e  $i_b:b\to a\times b$  come le uniche frecce di  $\mathcal{C}$  che fanno commutare i diagrammi



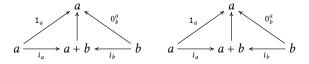
Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \times b \xleftarrow{i_b} b$$

è coprodotto in  $\mathcal{C}$ . Dualmente, se

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

é un coprodotto e se  $p_a: a+b \to a$  e  $p_b: a+b \to b$  sono introdotti attraverso la proprietà universale di coprodotto come le uniche frecce che fanno commutare i diagrammi



allora

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a + b \stackrel{p_b}{\longrightarrow} b$$

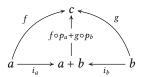
è un prodotto in  $\mathcal{C}$ .

In breve: in categorie preadditive si ha  $a \times b \cong a + b$ .

Dimostrazione. Possiamo limitarci a dimostrare solo il primo fatto. Consideriamo un qualsiasi oggetto con morfismi

$$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$$

e cerchiamo un modo di costruire un morfismo  $a \times b \to c$ . Le frecce  $f \circ p_a$  e  $g \circ p_b$  sono di questo tipo, ma non vanno bene per i nostri scopi. Invece la somma sì, perché il diagramma



commuta.

**Definizione 1.2.7.** Un *biprodotto* in una categoria preadditiva consta di oggetti e frecce

$$a \stackrel{p_a}{\longleftrightarrow} c \stackrel{p_b}{\longleftrightarrow} b$$

tali che

$$p_a \circ i_a = 1_a \tag{1.2.1}$$

$$p_b \circ i_b = 1_b \tag{1.2.2}$$

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_c \tag{1.2.3}$$

Osservazione 1.2.8. Dalle identità 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 discendono

$$p_a \circ i_b = 0_b^a \tag{1.2.4}$$

$$p_b \circ i_a = 0_a^b \tag{1.2.5}$$

Proviamo solo la prima visto che l'altra si fa similmente.

$$p_a = p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = p_a + p_a \circ i_b \circ p_b$$
(1.2.1)

da cui

$$p_a \circ i_b \circ p_b = 0_c^a$$

Postcomponendo con  $i_b$  e usando (1.2.2), concludiamo  $p_a \circ i_b = 0_b^a$ .

**Proposizione 1.2.9.** In una categoria preadditiva con oggetto zero 0, un prodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \times b \stackrel{p_b}{\longrightarrow} b$$

dà un biprodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \times b \stackrel{p_b}{\longleftarrow} b$$

in cui  $i_a$  e  $i_b$  sono introdotti come nella proposizione precedente. Dualmente, un coprodotto

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

dà un biprodotto

$$a \stackrel{p_a}{\underset{i_a}{\longleftarrow}} a + b \stackrel{p_b}{\underset{i_b}{\longleftarrow}} b$$

in cui  $p_a$  e  $p_b$  sono introdotti come nella proposizione precedente. Viceversa, se si ha un biprodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftrightarrow} a + b \stackrel{p_b}{\longleftrightarrow} b$$

allora la coppia di frecce  $p_a$  e  $p_b$  è prodotto e la coppia  $i_a$  e  $i_b$  è coprodotto.

Quindi in categorie preadditive esiste un modo piuttosto compatto di esprimere prodotti e coprodotti (che sono la stessa cosa) senza passare per le proprietà universali. *Dimostrazione.* Verifichiamo ad esempio che i prodotti danno biprodotti. Le identità (1.2.1) e (1.2.2) discendono direttamente da come sono introdotte  $i_a$  e  $i_b$ . Consideriamo ora il morfismo

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b : a \times b \to a \times b$$
.

Componendo una volta con  $p_a$  e l'altra con  $p_b$  si ha (vedi anche (1.2.4) e (1.2.5))

$$p_{a} \circ (i_{a} \circ p_{a} + i_{b} \circ p_{b}) = \underbrace{p_{a} \circ i_{a}}_{=1_{a}} \circ p_{a} + \underbrace{p_{a} \circ i_{b}}_{=0_{b}^{a}} \circ p_{b} = p_{a}$$

$$p_{b} \circ (i_{a} \circ p_{a} + i_{b} \circ p_{b}) = \underbrace{p_{b} \circ i_{a}}_{=0_{a}^{b}} \circ p_{a} + \underbrace{p_{b} \circ i_{b}}_{=1_{b}} \circ p_{b} = p_{b}$$

Per la proprietà universale di prodotto, si può concludere che

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = \mathbf{1}_{a \times b}$$
.

Per il viceversa prendendo qualsiasi coppia di morfismi

$$a \stackrel{f}{\longleftarrow} a \times b \stackrel{g}{\longrightarrow} b$$

si ha

$$p_a \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = f$$
$$p_b \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = g$$

Ora se  $h: c \to a \times b$  è tale che  $p_a \circ h = f$  e  $p_b \circ h = g$ , allora

$$h = \mathbf{1}_{a \times b} \circ h = (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ h = i_a \circ f + i_b \circ g.$$

**Proposizione 1.2.10.** In una categoria preadditiva  $\mathcal C$  con oggetto zero 0, gli equalizzatori di

$$a \xrightarrow{f} b$$

sono equalizzatori di

$$a \xrightarrow{f-g} b$$

e viceversa. Analogamente vale per i coequalizzatori.

Quindi un (co)equalizzatore di una coppia di morfismi è un (co)kernel della differenza dei due.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$e \xrightarrow{i} a \xrightarrow{g} b$$

commuta se e solo se commuta

$$e \xrightarrow{i} a \xrightarrow{f-g} b$$

#### 1.3 Categorie additive

## Categorie esatte

- 2.1 Coppie kernel-cokernel
- 2.2 Stutture e categorie esatte

### Bibliografia

- [Lei16] T. Leinster. *Basic Category Theory*. arXiv, 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1612.09375.
- [Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.
- [Rie17] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context/.