Categorie esatte

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 7 agosto 2025.

Indice

1 Preliminari

In queste note si assume almeno la Teoria delle Categorie che si può imparare da [Lei16]. Un altro validissimo testo è anche [Rie17]. Un vero e proprio classico che contiene anche nozioni sulle categorie preadditive è [Mac78]

1.1 *Kernel e cokernel*

Noi lavoreremo con categorie in cui sono presenti oggetti che sono sia terminali che iniziali. Oggetti di questo tipo sono detti *oggetti zero*. Non si tratta di categorie come **Set**, **Top** e **Ring**, ma è il caso di **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, con R anello.

Definizione 1.1.1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0. Per $a, b \in |\mathcal{C}|$, il *morfismo nullo* o *zero* da a a b è la composizione dei morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b$$

Scriveremo questo morfismo come 0_a^b oppure, se dal contesto è chiaro, semplicemente 0.

Esempio 1.1.2. In casi come **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, il morfismo nullo è quello che manda tutti gli elementi del dominio nell'identità. Anche **Ring** possiede omomorfismi come questi; tuttavia in **Ring** l'oggetto iniziale è $\mathbb{Z}$ che non è terminale mentre i morfismi zero sono definiti attraverso oggetti zero.

Comporre con un morfismo nullo dà un morfismo nullo. Più precisamente:

Proposizione 1.1.3. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* 0, e $a, b, c \in |\mathcal{C}|$. Allora per ogni $f : b \to c$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$f \circ 0_a^b = 0_a^c$$

e per ogni $g : c \to a$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$0_a^b \circ g = 0_c^b.$$

Dimostrazione. Proviamo solo una delle due uguaglianze perché l'altra è simile. Consideriamo i morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b \xrightarrow{f} c$$

Poiché 0 è iniziale, la composizione delle ultime due frecce è l'unica che può esserci. Quindi $f \circ 0_a^b$ è la composizione della freccia $a \to 0$ con la freccia $0 \to c$, ed abbiamo concluso. □

Definizione 1.1.4 (Kernel e cokernel)**.** In una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il *kernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi degli equalizzatori di

$$a \underset{0_a^b}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

Dualmente, il *cokernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi dei coequalizzatori della stessa coppia di morfismi.

Osservazione 1.1.5. Ricordiamo che in generale gli equalizzatori sono monomorfismi e i coequalizzatori sono epimorfismi. Questa informazione può dare delle indicazioni su come sono fatti i kernel e i cokernel in categorie in cui monomorfismo ed epimorfismo significano rispettivamente iniettivo e suriettivo.

Esempio 1.1.6 (Kernel di omomorfismi di moduli)**.** In Algebra, si parla di *kernel* di morfismi in vari ambiti. Per esempio, se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$$

è un sottomodulo di M. Per entrare nel linguaggio della Teoria delle Categorie,

> l'omomorfismo inclusione $i : \ker f \hookrightarrow M$ è un equalizzatore della coppia di omomorfismi
> $$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

Esempio 1.1.7 (Cokernel di omomorfismi di moduli)**.** Se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\operatorname{coker} f := \frac{N}{\operatorname{im} f}$$

è un sottomodulo di M chiamato *cokernel* di f. Questa nozione è il duale di kernel, nel senso che

> l'omomorfismo di proiezione canonica al quoziente $\pi_N : N \to \operatorname{coker} f$ è un coequalizzatore della coppia di omomorfismi
> $$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

Osservazione 1.1.8. In Algebra, kernel e cokernel sono degli oggetti, mentre tecnicamente come sono definiti qui sono dei morfismi.

1.2 *Categorie preadditive*

Definizione 1.2.1. Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathcal{C}$ in cui:

1. Per ogni $a, b \in |\mathcal{C}|$ la classe $\mathcal{C}(a, b)$ è dotata di un'operazione interna

$$+_{a,b} : \mathcal{C}(a, b) \times \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

e ha un elemento $0_a^b : a \to b$ che lo rendono un gruppo abeliano.

2. Per ogni $a, b, c \in |\mathcal{C}|$ e $f : a \to b$ di $\mathcal{C}$, le funzioni

$$f_* := \mathcal{C}(c, f) : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, c) : \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

sono omomorfismi di gruppi abeliani.

Richiamo 1.2.2. Ricordiamo che $f_*(g) := f \circ g$ mentre $f^*(h) := h \circ f$.

Spesso scriveremo semplicemente + senza pedici, perché in genere è chiaro di quali frecce stiamo sommando.

Inoltre, come nei primi teoremi di Algebra, il morfismo zero è l'unico elemento neutro e per ogni $f : a \to b$ è unico l'opposto. In coerenza con la notazione additiva indichiamo con $-f$ l'opposto di $f : a \to b$.

Esempio 1.2.3 ($\mathbf{Mod}_R$). [Scrivere esempio.]

Un'altra osservazione da fare è questa. Il simbolo 0_a^b in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero indica il morfismo zero $a \to b$. Se $\mathcal{C}$ è preaddittiva, non sono notazioni in conflitto? No.

Proposizione 1.2.4. In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il morfismo nullo è elemento neutro.

Dimostrazione. Poiché 0 è iniziale, $\mathcal{C}(0, b)$ è banale e in particolare 0_0^b è elemento neutro. L'omomorfismo

$$\left(0_a^0\right)^* : \mathcal{C}(0, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

manda l'elemento neutro del dominio in quello del codominio, che è

$$\left(0_a^0\right)^* \left(0_0^b\right) = 0_0^b \circ 0_a^0 = 0_a^b. \qquad \square$$

Osservazione 1.2.5. A tal proposito è utile osservare che se $\mathcal{C}$ è una categoria preadditiva, anche il suo duale $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ lo è. La conseguenza più pratica per noi è che dimezza le dimostrazioni: una volta dimostrato un enunciato, quello duale è automatico.

1.3 *Limiti e limiti*

Ora parleremo di alcune peculiarità dei limiti e dei colimiti in categorie preadditive.

1.3.1 Oggetti iniziali e terminali

Proposizione 1.3.1. In un categoria preadditiva $\mathcal{C}$ gli oggetti terminali sono iniziali e viceversa.

Quindi in una categoria preadditiva gli oggetti terminali e iniziali sono oggetti zero.

Dimostrazione. Sia t un oggetto terminale di $\mathcal{C}$. Se riusciamo a mostrare che $\mathcal{C}(t, a)$ è un gruppo banale per ogni oggetto a di $\mathcal{C}$, allora possiamo concludere. Prendiamo un $f : t \to a$ qualsiasi in $\mathcal{C}$ e guardiamo l'omomorfismo di gruppi

$$f_* = \mathcal{C}(t, f) : \mathcal{C}(t, t) \to \mathcal{C}(t, a).$$

Il dominio è un gruppo banale perché t è terminale; in particolare, $1_t = 0^t_t$. Inoltre, trattandosi di omomorfismo,

$$\underbrace{f_*(1_t)}_{=f} = f \circ 0^t_t = 0^a_t. \qquad \square$$

1.3.2 Prodotti e coprodotti

Vediamo i prodotti e i coprodotti finiti ora.

A proposito di notazioni, seguiamo [Lei16] e [Rie17]. Più precisamente, preso un prodotto

$$a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$$

il morfismo $c \to a \times b$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b \end{tikzcd}$$

è indicato con (f, g); invece, dato un coprodotto

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

il morfismo $a + b \to c$ rendo commutativo

$$\begin{tikzcd} & a & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_a"'] & a + b \arrow[u] & b \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_b"] \end{tikzcd}$$

è indicato con $[f, g]$.

Più in là avremo modo di introdurre una notazione "matriciale", che è quella che usa [Büh09] e consente di fare alcuni conti molto più facilmente.

Proposizione 1.3.2. Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero 0 e

$$a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$$

un prodotto in $\mathcal{C}$. Introduciamo anche le frecce

$$\begin{aligned} i_a &:= \left(1_a, 0^b_a\right) : a \to a \times b \\ i_b &:= \left(0^a_b, 1_b\right) : b \to a \times b \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \times b \xleftarrow{i_b} b$$

è coprodotto in $\mathcal{C}$. Dualmente, se

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

è un coprodotto e se introduciamo anche i morfismi

$$\begin{aligned} p_a &:= \left[1_a, 0^a_b\right] : a + b \to a \\ p_b &:= \left[0^b_a, 1_b\right] : a + b \to b \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

allora
$$a \xleftarrow{p_a} a+b \xrightarrow{p_b} b$$
è un prodotto in $\mathcal{C}$.

In breve: in categorie preadditive si ha $a \times b \cong a + b$.

Dimostrazione. Possiamo limitarci a dimostrare solo il primo fatto. Consideriamo un qualsiasi oggetto con morfismi
$$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$$
e cerchiamo un modo di costruire un morfismo $a \times b \to c$. Le frecce $f \circ p_a$ e $g \circ p_b$ sono di questo tipo, ma non vanno bene per i nostri scopi. Invece la somma sì, perché il diagramma
$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "i_a"'] & a+b \arrow[u, "f \circ p_a + g \circ p_b"] & b \arrow[ul, bend right, "g"'] \arrow[l, "i_b"] \end{tikzcd}$$
commuta. □

Definizione 1.3.3. Un *biprodotto* in una categoria preadditiva consta di oggetti e frecce
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & c \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$
tali che
$$p_a \circ i_a = 1_a \tag{1.3.3}$$
$$p_b \circ i_b = 1_b \tag{1.3.4}$$
$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_c \tag{1.3.5}$$

Osservazione 1.3.4. Dalle identità 1.3.3, 1.3.4 e 1.3.5 discendono
$$p_a \circ i_b = 0^a_b \tag{1.3.6}$$
$$p_b \circ i_a = 0^b_a \tag{1.3.7}$$
Proviamo solo la prima visto che l'altra si fa similmente.
$$p_a \underbrace{=}_{(1.3.5)} p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \underbrace{=}_{(1.3.3)} p_a + p_a \circ i_b \circ p_b$$
da cui
$$p_a \circ i_b \circ p_b = 0^a_c.$$
Postcomponendo con i_b e usando (1.3.4), concludiamo $p_a \circ i_b = 0^a_b$.

Un'altra proprietà utile per il futuro è questa.

Proposizione 1.3.5. I morfismi i_a e i_b della Definizione 1.3.3 sono monici. I morfismi p_a e p_b invece sono epici.

Dimostrazione. Ad esempio, sia $i_a \circ f = i_a \circ g$. Precomponendo ambo i mebri con p_a, a causa di (1.3.3), si ha $f = g$. Sia ora $k \circ p_a = h \circ p_a$. Postcomponendo ambi membri per i_a, sempre a causa di (1.3.3), si arriva a $h = k$. □

I biprodotti sono prodotti e coprodotti binari.

Proposizione 1.3.6. In una categoria preadditiva con oggetto zero 0 consideriamo il biprodotto

$$a \underset{i_a}{\overset{p_a}{\leftrightarrows}} c \underset{i_b}{\overset{p_b}{\rightleftarrows}} b$$

allora la coppia di frecce p_a e p_b è prodotto e la coppia i_a e i_b è coprodotto. In particolare, presi $d \in |\mathcal{C}|$ e una coppia di frecce uscenti $a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$,

$$(f, g) = i_a \circ f + i_b \circ g.$$

Invece presi $e \in |\mathcal{C}|$ e una coppia di morfismi $a \xrightarrow{h} c \xleftarrow{k} b$,

$$[h, k] = h \circ p_a + k \circ p_b.$$

Infine, notare anche che $c \cong a \times b \cong a + b$.

Dimostrazione. Facciamo solo la parte che riguarda il prodotto, perché l'altra si fa con un ragionamento non tanto diverso. Grazie a (1.3.3) e (1.3.6) abbiamo

$$p_a \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = f$$
$$p_b \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = g$$

Ora se $h : d \to c$ è tale che $p_a \circ h = f$ e $p_b \circ h = g$, allora

$$h = 1_c \circ h \underbrace{=}_{(1.3.5)} (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ h = i_a \circ f + i_b \circ g.$$

Possiamo quindi concludere che le frecce p_a e p_b formano un prodotto. □

Vale anche il viceversa.

Proposizione 1.3.7. In una categoria preadditiva con oggetto zero 0, un prodotto

$$a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$$

dà un biprodotto

$$a \underset{i_a}{\overset{p_a}{\leftrightarrows}} a \times b \underset{i_b}{\overset{p_b}{\rightleftarrows}} b$$

in cui i_a e i_b sono introdotti come in (1.3.1). Dualmente, un coprodotto

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

dà un biprodotto

$$a \underset{i_a}{\overset{p_a}{\leftrightarrows}} a + b \underset{i_b}{\overset{p_b}{\rightleftarrows}} b$$

in cui p_a e p_b sono introdotti come in (1.3.2).

Dimostrazione. Questa è una prosecuzione della dimostrazione della Proposizione 1.3.2. Verifichiamo ad esempio che i prodotti danno biprodotti. Le identità (1.3.3), (1.3.4), (1.3.6) e (1.3.7) discendono direttamente da come sono introdotte i_a e i_b. Consideriamo ora il morfismo

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b : a \times b \to a \times b.$$

Componendo una volta con p_a e l'altra con p_b si ha

$$p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = \underbrace{p_a \circ i_a}_{=1_a} \circ p_a + \underbrace{p_a \circ i_b}_{=0^a_b} \circ p_b = p_a$$

$$p_b \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = \underbrace{p_b \circ i_a}_{=0^b_a} \circ p_a + \underbrace{p_b \circ i_b}_{=1_b} \circ p_b = p_b$$

Per la proprietà universale di prodotto, si può concludere che

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_{a \times b}. \qquad \square$$

La morale della storia è che in categorie preadditive esiste un modo piuttosto compatto di esprimere prodotti e coprodotti (che sono la stessa cosa) senza passare per le proprietà universali. E poiché $a \times b \cong a + b$, si decide di indicare uno qualsiasi di questi oggetti con $a \oplus b$.

Definizione 1.3.8. Una *categoria additiva* è una categoria che ha oggetto zero e che per ogni coppia di oggetti a e b possiede biprodotto

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i^{ab}_a"'] & a \oplus b \arrow[l, shift right, "p^{ab}_a"'] \arrow[r, shift left, "p^{ab}_b"] & b \arrow[l, shift left, "i^{ab}_b"] \end{tikzcd}$$

Spesso è ovvio dal contesto e quindi scriveremo semplicemente p_a al posto di p^{ab}_a e così via.

Vedendo $a \oplus b$ come $a \times b$, presi due morfismi $f : a \to b$ e $g : c \to d$, definiamo $f \oplus g : a \oplus c \to b \oplus d$ come $f \times g$, cioè come l'unica freccia $a \oplus c \to b \oplus d$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & a \oplus c \arrow[l, "p^{ac}_a"'] \arrow[r, "p^{ac}_c"] \arrow[d] & c \arrow[d, "g"] \\ b & b \oplus d \arrow[l, "p^{bd}_b"] \arrow[r, "p^{bd}_d"'] & d \end{tikzcd}$$

Sfruttando questa volta la proprietà universale di coprodotto, vedendo $a \oplus b$ come $a + b$, si può definire $f \oplus g$ come $f + g$.

1.3.3 Notazione matriciale

Esempio 1.3.9. In generale, se R è un anello, possiamo considerare il modulo

$$R^n := \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{n \text{ volte}}.$$

Allora per ogni funzione lineare $f : R^m \to R^n$, esiste un'unica matrice A ad entrate in R di tipo $n \times m$ tale che

$$f(x) = Ax \text{ per ogni } x \in R^m.$$

(Vedi [Alu21].) Le entrate di A_{ij} sono elementi di R, ma non è un problema reimmaginare A_{ij} come la funzione lineare

$$R \to R,\ x \to A_{ij}x.$$

Di conseguenza, A diventa una tabella di funzioni lineari $A_{ij} : R \to R$. In tale caso, se si hanno due matrici A e B di tipo $m \times n$ e $n \times r$ e si vuole moltiplicarle, allora il prodotto $A_{ij}B_{jk}$ di elementi di R può essere reinterpretato come composizione di due funzioni lineari.

Nell'esempio precedente abbiamo usato come R-moduli oggetti del tipo R^n. Tuttavia la notazione matriciale potrebbe essere esportata in un caso più generale, in cui le entrate delle matrici non sono endomorfismi di R, ma in generale morfismi.

È questo quello che facciamo adesso, almeno per matrici piccole, del tipo 1×2, 2×1 e 2×2, e lo facciamo da subito in una categoria additiva $\mathcal{C}$ qualsiasi.

Prima di tutto, se dati due morfismi $a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$, rinominiamo $(f, g) : c \to a \oplus b$ come una *matrice colonna*

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Similmente, presi due morfismi $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ riscriviamo $[f, g] : a \oplus b \to c$ come una *matrice riga*

$$\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}.$$

In particolare, notiamo che (vedi Proposizione 1.3.2)

$$\begin{aligned} p_a &= \begin{pmatrix} 1_a & 0_b^a \end{pmatrix} \\ p_b &= \begin{pmatrix} 0_a^b & 1_b \end{pmatrix} \\ i_a &= \begin{pmatrix} 1_a \\ 0_a^b \end{pmatrix} \\ i_b &= \begin{pmatrix} 0_b^a \\ 1_b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ora consideriamo i morfismi

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f_{ac}"'] \arrow[dr, "f_{ad}"] & b \arrow[d, "f_{bd}"] \arrow[dl, "f_{bc}"] \\ c & d \end{tikzcd}$$

Qui possiamo costruire le frecce

$$\begin{aligned} [f_{ac}, f_{bc}] &: a \oplus b \to c \\ [f_{ad}, f_{bd}] &: a \oplus b \to d \end{aligned}$$

da cui se ne origina un'altra

$$([f_{ac}, f_{bc}], [f_{ad}, f_{bd}]) : a \oplus b \to c \oplus d.$$

Una notazione migliore è una matrice:

$$\begin{pmatrix} f_{ac} & f_{bc} \\ f_{ad} & f_{bd} \end{pmatrix} : a \oplus b \to c \oplus d.$$

Usando la definizione di biprodotto, si osserva facilmente che valgono le usuali regole di addizione e moltiplicazione. Nello specifico [continuare?]

1.3.4 Pullback e pushout

Parliamo dei pullback e dei pushout ora. Sia $\mathcal{C}$ una categoria additiva e consideriamo in essa il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "g'"'] & d \end{tikzcd}$$

e "schiacciamo" il tutto in questo modo

$$a \xrightarrow{(f,f')} b \oplus c \xrightarrow{[g,-g']} d$$

Il motivo per cui è $[g,-g']$ e non $[g,g']$ viene spiegato subito. Grazie alla Proposizione 1.3.6, abbiamo un'espressione esplicita per (f,f') e $[g,-g']$ e quindi:

$$\begin{aligned} [g,-g'] \circ (f,f') &= (g \circ p_b + (-g') \circ p_c) \circ (i_b \circ f + i_c \circ f') = \\ &= g \circ f - g' \circ f' = 0^d_a. \end{aligned}$$

Quindi c'è la possibilità di inserirsi in un discorso in cui partecipano pullback/pushout e kernel/cokernel.

Proposizione 1.3.10. In una categoria additiva $\mathcal{C}$ il quadrato

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "g'"'] & d \end{tikzcd}$$

è di pullback se e solo se $(f,f') : a \to b \oplus c$ è kernel di $[g,-g'] : b \oplus c \to d$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) In questo parte del lavoro è già fatto. Sia quindi

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "h"] & b \oplus c \arrow[r, shift left, "{[g,-g']}"] \arrow[r, shift right, "0^d_{b\oplus c}"'] & d \end{tikzcd}$$

commutativo. Abbiamo cioè $[g,-g'] \circ h = g \circ p_b \circ h - g' \circ p_c \circ h = 0^d_e$, vale a dire commuta il quadrato esterno in

$$\begin{tikzcd} e \arrow[rrd, bend left, "p_b \circ h"] \arrow[rdd, bend right, "p_c \circ h"'] & & \\ & a \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "f'"] & b \arrow[d, "g"] \\ & c \arrow[r, "g'"'] & d \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale di pullback, esiste un unico $k : e \to a$ per cui $f \circ k = p_b \circ h$ e $f' \circ k = p_c \circ h$. Rimane quindi da verificare che $(f, f') \circ k = h$:

$$(f, f') \circ k = i_b \circ \underbrace{f \circ k}_{=p_b \circ h} + i_c \circ \underbrace{f' \circ k}_{=p_c \circ h} =$$
$$= \underbrace{(i_b \circ p_b + i_c \circ p_c)}_{1_{b \oplus c}} \circ h = h$$

k è l'unico a fare ciò. Se $k' : e \to a$ è tale che $(f, f') \circ k' = h$, allora precomponendo una volta per p_b e un'altra per p_c, abbiamo $f \circ k' = p_b \circ h$ e $f' \circ k = p_c \circ h'$. Ma questo, per la proprietà universale di pullback significa che $k = k'$.
($\Leftarrow$) Verifichiamo anzitutto che il quadrato è commutativo. Poiché (f, f') è kernel di $[g, -g']$, allora $[g, -g'] \circ (f, f') = 0_a^d$, e questo è un conto che abbiamo già fatto. Prendiamo ora un qualsiasi quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "g'"'] & d \end{tikzcd}$$

Come abbiamo visto sopra, possiamo ottenere $[g, -g'] \circ (r, r') = 0_e^d = 0_{b \oplus c}^d \circ (h, h')$. Per la proprietà universale di equalizzatore, abbiamo che esiste uno e un solo $s : e \to a$ tale che $(f, f') \circ s = (r, r')$. Da qui, per concludere è sufficiente precomporre una volta con p_b e un'altra con p_c. □

1.3.5 Equalizzatori e coequalizzatori

Parliamo ora di equalizzatori e coequalizzatori. Il discorso è piuttosto semplice.

Proposizione 1.3.11. In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, gli equalizzatori di

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

sono equalizzatori di

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f-g"] \arrow[r, shift right, "0_a^b"'] & b \end{tikzcd}$$

e viceversa. Analogamente vale per i coequalizzatori.

Quindi un (co)equalizzatore di una coppia di morfismi è un (co)kernel della differenza dei due.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

commuta se e solo se commuta

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f-g"] \arrow[r, shift right, "0_a^b"'] & b \end{tikzcd}$$ □

2 Categorie esatte

In questo capitolo raccogliamo una serie di risultati elementari sulle successioni esatte corte, seguendo da vicino la trattazione che si può trovare in [Büh09].

2.1 *Coppie kernel-cokernel*

Definizione 2.1.1. Una *coppia kernel-cokernel* in una categoria additiva $\mathcal{C}$ consiste di due morfismi consecutivi

$$a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{p} c$$

tali che i è un kernel di p e p è un cokernel di i.

Esempio 2.1.2. Sia in $\mathbf{Mod}_R$ un omomorfismo $f : M \to N$ e consideriamo la proiezione al quoziente

$$\pi : M \to M/\ker f.$$

Come si è visto (Esempio 1.1.6) il kernel è $\ker \pi = \ker f$ con l'inclusione. Viceversa

$$i : \ker f \hookrightarrow M$$

ha come cokernel π (Esempio 1.1.7). Quindi

$$\ker f \overset{i}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{\ker f}$$

è una coppia ker-coker in $\mathbf{Mod}_R$. In generale, se H è un sottomodulo di M, allora

$$H \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi_H} \frac{M}{H}$$

è una coppia ker-coker.

Osservazione 2.1.3. Ricordiamo che i kernel sono certi equalizzatori, quindi sono monomorfismi. Dualmente, i cokernel sono dei coequalizzatori, quindi sono epimorfismi.

I seguenti lemmi sono in preparazione alla successiva definizione.

Lemma 2.1.4. In una categoria additiva $\mathcal{C}$,

$$0 \xrightarrow{\exists!} a \xrightarrow{1_a} a$$

è una coppia ker-coker.

Dimostrazione. Il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] & a \arrow[r, shift left, "\mathtt{1}_a"] \arrow[r, shift right, "0_a^a"'] & a \end{tikzcd}$$

commuta perché $\mathcal{C}(0, a)$ è banale, essendo 0 iniziale. Sia $i : e \to a$ tale che

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "\mathtt{1}_a"] \arrow[r, shift right, "0_a^a"'] & a \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $i = 0_e^a$. Essendo 0 terminale, c'è esattamente un $e \to 0$. Il triangolo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] & a \\ e \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

commuta per come sono definiti i morfismi nulli. Verifichiamo ora che $\mathtt{1}_a$ è cokernel di $0 \to a$. Anzitutto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\exists!"] \arrow[r, shift right, "0_0^a"'] & a \arrow[r, "\mathtt{1}_a"] & a \end{tikzcd}$$

commuta poichè $\mathcal{C}(0, a)$ è banale (0 è iniziale). Sia $j : a \to q$ tale che

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\exists!"] \arrow[r, shift right, "0_0^a"'] & a \arrow[r, "j"] & q \end{tikzcd}$$

commuta. Esiste uno e una sola freccia $a \to q$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\mathtt{1}_a"] \arrow[dr, "j"'] & a \arrow[d] \\ & q \end{tikzcd}$$

ed è j stessa. □

Lemma 2.1.5. In una categoria additiva $\mathcal{C}$ considerare il biprodotto

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a \oplus b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \xrightarrow{p_b} b$$

$$b \xrightarrow{i_b} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

sono coppie ker-coker.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione solo la prima coppia, la dimostrazione dell'altra è simile. Il diagramma

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i_a"] & a \oplus b \arrow[r, shift left, "p_b"] \arrow[r, shift right, "0_{a\oplus b}^b"'] & b \end{tikzcd}$$

commuta, vedi Definizione 1.3.3. Consideriamo ora il diagramma commutativo

$$c \xrightarrow{j} a \oplus b \underset{0^b_{a\oplus b}}{\overset{p_p}{\rightrightarrows}} b$$

Essendo i_a un monomorfismo, allora è sufficiente mostrare costruire un morfismo $c \to a$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i_a"] & a \oplus b \\ c \arrow[u] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Ciò che possiamo prendere in esame con quello che abbiamo è

$$p_a \circ j : c \xrightarrow{j} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

Infatti

$$\begin{aligned} j = 1_{a\oplus b} \circ j \underbrace{=}_{(1.3.5)} (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ j = \\ = i_a \circ p_a \circ j + i_b \circ \underbrace{p_b \circ j}_{=0^b_{a\oplus b} \circ j = 0^b_c} = i_a \circ p_a \circ j. \end{aligned}$$ □

Lemma 2.1.6. Siano in una categoria additiva $\mathcal{C}$

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$
$$a' \xrightarrow{f'} b' \xrightarrow{g'} c'$$

con f e f' kernel di g e g' rispettivamente. Allora $f \oplus f' : a \oplus a' \to b \oplus b'$ è kernel di $g \oplus g' : b \oplus b' \to c \oplus c'$. Dualizzando, si ha che se g e g' sono cokernel di f e f' rispettivamente, allora $g \oplus g'$ è cokernel di $f \oplus f'$. In particolare, se i diagrammi qui sopra sono coppie ker-coker, allora anche

$$a \oplus a' \xrightarrow{f \oplus f'} b \oplus b' \xrightarrow{g \oplus g'} c \oplus c'$$

lo è.

Dimostrazione. Verifichiamo che

$$a \oplus a' \xrightarrow{f \oplus f'} b \oplus b' \underset{0^{c\oplus c'}_{b\oplus b'}}{\overset{g\oplus g'}{\rightrightarrows}} c \oplus c'$$

commuta. Poiché $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è un bifuntore [scrivere di questa cosa nell'introduzione], infatti

$$(g \oplus g') \circ (f \oplus f') = (g \circ f) \oplus (g' \circ f) = 0^{c\oplus c'}_{a\oplus a'}$$

Consideriamo ora un diagramma commutativo

$$d \xrightarrow{h} b \oplus b' \underset{0^{c\oplus c'}_{b\oplus b'}}{\overset{g\oplus g'}{\rightrightarrows}} c \oplus c'$$

e troviamo un modo di costruire una freccia $d \to a \oplus a'$ in modo che commuti

$$\begin{tikzcd} a \oplus a' \arrow[r, "f \oplus f'"] & b \oplus b' \\ d \arrow[u] \arrow[ur, "h"'] \end{tikzcd}$$

Abbiamo le frecce

$$p_b^{bb'} \circ h : d \to b$$
$$p_{b'}^{bb'} \circ h : d \to b'$$

che rendono commutativi i diagrammi

$$d \xrightarrow{p_b^{bb'} \circ h} b \underset{0_b^c}{\overset{g}{\rightrightarrows}} c$$

e

$$d \xrightarrow{p_{b'}^{bb'} \circ h} b' \underset{0_{b'}^{c'}}{\overset{g'}{\rightrightarrows}} c'$$

rispettivamente. Per la proprietà universale di equalizzatore, esistono unici $i : d \to a$ e $j : d \to a'$ tali che

$$f \circ i = p_b^{bb'} \circ h$$
$$f' \circ j = p_{b'}^{bb'} \circ h.$$

La proprietà universale di prodotto ci permette di introdurre $(i, j) : d \to a \oplus a'$. Calcoliamo ora:

$$p_b^{bb'} \circ (f \oplus f') \circ (i, j) = f \circ p_a^{aa'} \circ (i, j) = f \circ i = p_b^{bb'} \circ h$$
$$p_{b'}^{bb'} \circ (f \oplus f') \circ (i, j) = f' \circ p_{a'}^{aa'} \circ (i, j) = f' \circ j = p_{b'}^{bb'} \circ h$$

Quindi, sempre per la proprietà universale di prodotto, possiamo concludere che

$$(f \oplus f') \circ (i, j) = h.$$

La parte dell'unicità della freccia $d \to a \oplus a'$ è immediata: $f \oplus f'$ è un monomorfismo essendo f oppure f' – in questo caso entrambi – monici (ricorda che i kernel sono equalizzatori e quindi sono monomorfismi). □

2.2 *Stutture e categorie esatte*

Definizione 2.2.1. Una *struttura esatta* per una categoria additiva $\mathcal{C}$ è una classe $\mathcal{E}$ di coppie ker-coker in $\mathcal{C}$ con le seguenti proprietà:

(E1) Per ogni $a \in |\mathcal{C}|$, le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{*} *$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E2) Per ogni $a \in |\mathcal{C}|$, le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{1_a} a$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E3) Se $\mathcal{E}$ contiene le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{*} *$$
$$b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{*} *$$

allora contiene anche le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{g \circ f} c \xrightarrow{*} *$$

(E4) Se $\mathcal{E}$ contiene le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{f} b$$
$$* \xrightarrow{*} b \xrightarrow{g} c$$

allora anche le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{g \circ f} c$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E5) Se

$$a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{*} *$$

sta in $\mathcal{E}$ e $f : a \to a'$ è in $\mathcal{C}$, il pushout di i lungo f esiste in $\mathcal{C}$ e, indicandolo con $i' : a' \to b'$, anche le coppie ker-coker

$$a' \xrightarrow{i'} b' \xrightarrow{*} *$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E6) Se

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{p} b$$

sta in $\mathcal{E}$ e $f : c' \to c$ è in $\mathcal{C}$, il pullback di p lungo f esiste in $\mathcal{C}$ e, indicandolo con $p' : b' \to c'$, anche le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a' \xrightarrow{p'} b'$$

stanno in $\mathcal{E}$.

Una *categoria esatta* è una coppia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ come sopra e gli elementi di $\mathcal{E}$ si chiamano *sequenze esatte corte.*

Primi esempi di sequenze esatte corte derivano coinvolgono le identità.

Proposizione 2.2.2. Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta. Sono successioni esatte corte

$$0 \xrightarrow{\exists!} a \xrightarrow{1_a} a$$
$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{\exists!} 0$$

In $\mathbf{Mod}_R$ questo vuol dire una cosa piuttosto semplice: il kernel dell'omomorfismo $1_M : M \to M$ è banale, mentre il cokernel è M stesso.

Dimostrazione. Grazie al Lemma 2.1.4, le due coppie sono ker-coker. Poi si invocano Definizione 2.2.1-E1 e Definizione 2.2.1-E2. □

Richiamo 2.2.3. In generale, in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto terminale 1 un pullback di

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\exists!"] \\ b \arrow[r, "\exists!"'] & 1 \end{tikzcd}$$

è un prodotto di a e b. Dualmente, se C è una categoria con oggetto iniziale 0, allora un pushout di

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] \arrow[d, "\exists!"'] & a \\ b & \end{tikzcd}$$

è un coprodotto di a e b.

Proposizione 2.2.4. Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e sia

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a \oplus b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

un biprodotto. Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \xrightarrow{p_b} b$$
$$b \xrightarrow{i_b} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

sono sequenze esatte corte, cioè coppie ker-coker in $\mathcal{E}$.

Il Lemma 2.1.5 ci dava queste due coppie ker-coker. Questo proposizione invece dice che ogni struttura esatta contiene queste coppie ker-coker.

Dimostrazione. Per il richiamo appena fatto,

$$\begin{tikzcd} a \oplus b \arrow[r, "p_a"] \arrow[d, "p_b"'] & a \arrow[d, "\exists!"] \\ b \arrow[r, "\exists!"'] & 0 \end{tikzcd}$$

è un quadrato di pushout. Inoltre per la Proposizione 2.2.2, la base di questo diagramma è parte della sequenza esatta corta $b \xrightarrow{1_b} b \xrightarrow{\exists!} 0$. Possiamo appellarci a Definizione 2.2.1-E6 ora: il pullback di $b \to 0$ lungo $a \to 0$, va a dire p_a, è tale che le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

stanno in $\mathcal{E}$. Il Lemma 2.1.5 ci dà quella che ci serve. □

Richiamo 2.2.5. In generale, in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto terminale 1, se

$$a \xleftarrow{p_a} a \times 1 \xrightarrow{p_1} 1$$

è un prodotto, allora l'unico morfismo $a \to a \times 1$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "1_a"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\exists!"] & \\ a & a \times 1 \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_1"'] & 1 \end{tikzcd}$$

è un isomorfismo. Quindi, se $\mathcal{C}$ è anche preadditiva, allora questo isomorfismo è $i_a : a \to a \oplus 0$ che ha inversa $p_a : a \oplus 0 \to a$.

Proposizione 2.2.6. "In una categoria esatta corta la somma di sequenze esatte corte è esatta corta". Vale a dire: in una categoria esatta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, se

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$
$$a' \xrightarrow[f']{} b' \xrightarrow[g']{} c'$$

sono sequenze esatte corte, allora anche

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus g} a' \oplus b' \xrightarrow{f' \oplus g'} a'' \oplus b'' \tag{2.2.1}$$

lo è.

Quindi $\mathcal{E}$ è chiusa rispetto alla somma di sequenze esatte corte.

Dimostrazione. Il piano per la dimostrazione si struttura su questa osservazione: se riusciamo a dimostrare che

$$\begin{gathered} a \oplus b \xrightarrow{f \oplus 1_b} a' \oplus b \xrightarrow{f' \circ p_{a'}^{a'b}} a'' \\ a' \oplus b \xrightarrow[1_a \oplus g]{} a' \oplus b' \xrightarrow[g' \circ p_{b'}^{a'b'}]{} b'' \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

sono esatte corte allora, a causa di Definizione 2.2.1-E4 sono sequenze esatte le coppie ker-coker

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus g} a' \oplus b' \xrightarrow{*} *$$

A questo punto Lemma 2.1.6 permette di concludere l'opera.
Mostriamo solo che la prima delle (2.2.2) è esatta corta, perché l'altra si fa similmente. A causa del Lemma 2.1.5 e della Definizione 2.2.1-E4, è sufficiente dimostrare che la prima delle 2.2.2 è una coppia ker-coker. Il Lemma 2.1.6 ci dà una coppia ker-coker che coinvolge $f \oplus 1_b$:

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus 1_b} a' \oplus b \xrightarrow{f' \oplus 0_b^0} a'' \oplus 0$$

Ricordando ora che $p_{a''}^{a''0} : a \oplus 0 \to a$ è un isomorfismo e che $p_{a''}^{a''0} \circ (f' \oplus 0_b^0) = f \circ p_{a'}^{a'b}$, abbiamo finito. $\square$

Adesso riprendiamo un discorso che avevamo iniziato nella Proposizione 1.3.10.

Bibliografia

[Alu21] P. Aluffi. *Algebra: Notes from the Underground.* Cambridge University Press, 2021.

[Büh09] Theo Bühler. *Exact Categories.* 2009. URL: `https://arxiv.org/abs/0811.1480`.

[Lei16] Tom Leinster. *Basic Category Theory.* 2016. URL: `https://arxiv.org/abs/1612.09375`.

[Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: `10.1007/978-1-4757-4721-8`.

[Rie17] E. Riehl. *Category Theory in Context.* Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. URL: `https://math.jhu.edu/~eriehl/context/`.