Indrjo Dedej

Ultima revisione: 8 luglio 2025.

## Indice

1	Pre	Preliminari			
	1.1	Kernel e cokernel	!		
	1.2	Categorie preadditive	(		
	1.3	Categorie additive	10		
2	Cat	Categorie esatte			
	2.1	Coppie kernel-cokernel	1:		
	2.2	Stutture e categorie esatte	10		

In queste note si assume almeno la Teoria delle Categorie che si può imparare da [Lei16]. Un altro validissimo testo che insegna le basi è anche [Rie17]. Nozioni sulle categorie preadditive si possono trovare in [Mac78] che è considerato un vero e proprio classico.

#### 1.1 Kernel e cokernel

Noi lavoreremo con categorie in cui sono presenti oggetti che sono sia terminali che iniziali. Oggetti di questo tipo sono detti *oggetti zero*. Non si tratta di categorie come **Set**, **Top** e **Ring**, ma è il caso di **Grp** e  $\mathbf{Mod}_R$ , con R anello.

**Definizione 1.1.1.** Sia  $\mathcal{C}$  una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0. Per  $a,b\in |\mathcal{C}|$ , il *morfismo nullo* o *zero* da a a b è la composizione dei morfismi

$$a \xrightarrow{\exists !} 0 \xrightarrow{\exists !} b$$

Scriveremo questo morfismo come  $0^b_a$  oppure, se dal contesto è chiaro, semplicemente 0.

**Esempio 1.1.2.** In casi come  $\operatorname{Grp} \operatorname{e} \operatorname{Mod}_R$ , il morfismo nullo è quello che manda tutti gli elementi del dominio nell'identità. Anche Ring possiede omomorfismi come questi; tuttavia in Ring l'oggetto iniziale è  $\mathbb Z$  che non è terminale mentre i morfismi zero sono definiti attraverso oggetti zero.

Comporre con un morfismo nullo dà un morfismo nullo. Più precisamente:

**Proposizione 1.1.3.** Sia  $\mathcal C$  una categoria con *oggetto zero* 0, e  $a,b,c\in |\mathcal C|$ . Allora per ogni  $f:b\to c$  di  $\mathcal C$  si ha

$$f \circ 0_a^b = 0_a^c$$

e per ogni  $g: c \rightarrow a$  di C si ha

$$0_a^b \circ g = 0_c^b.$$

Dimostrazione. Proviamo solo una delle due uguaglianze perché l'altra è simile. Consideriamo i morfismi

$$a \xrightarrow{\exists !} 0 \xrightarrow{\exists !} b \xrightarrow{f} c$$

Poiché 0 è iniziale, la composizione delle ultime due frecce è l'unica che può esserci. Quindi  $f \circ 0^b_a$  è la composizione della freccia  $a \to 0$  con la freccia  $0 \to c$ , ed abbiamo concluso.

6

**Definizione 1.1.4** (Kernel e cokernel). In una categoria  $\mathcal C$  con oggetto zero 0, il *kernel* di  $f:a\to b$  è uno qualsiasi degli equalizzatori di

$$a \xrightarrow{f \atop 0_a^b} b$$

Dualmente, il cokernel di  $f: a \to b$  è uno qualsiasi dei coequalizzatori della stessa coppia di morfismi.

Osservazione 1.1.5. Ricordiamo che in generale gli equalizzatori sono monomorfismi e i coequalizzatori sono epimorfismi. Questa informazione può dare delle indicazioni su come sono fatti i kernel e i cokernel in categorie in cui monomorfismo ed epimorfismo significano rispettivamente iniettivo e suriettivo.

**Esempio 1.1.6** (Kernel di omomorfismi di moduli). In Algebra, si parla di *kernel* di morfismi in vari ambiti. Per esempio, se M e N sono due moduli su un fissato anello R e  $f: M \to N$  è un omomorfismo, allora

$$\ker f := \{ x \in M \mid f(x) = 0_N \}$$

è un sottomodulo di *M*. Per entrare nel linguaggio della Teoria delle Cate-Gorie,

l'omomorfismo inclusione i : ker  $f \hookrightarrow M$  è un equalizzatore della coppia di omomorfismi

$$M \xrightarrow{f \atop 0_M^N} N$$

**Esempio 1.1.7** (Cokernel di omomorfismi di moduli). Se M e N sono due moduli su un fissato anello R e  $f: M \to N$  è un omomorfismo, allora

$$\operatorname{coker} f \coloneqq \frac{N}{\operatorname{im} f}$$

è un sottomodulo di M chiamato cokernel di f. Questa nozione è il duale di kernel, nel senso che

l'omomorfismo di proiezione canonica al quoziente  $\pi_N:N\to {\rm coker}\, f$  è un coequalizzatore della coppia di omomorfismi

$$M \xrightarrow{f \atop 0_M^N} N$$

**Osservazione 1.1.8.** In Algebra, kernel e cokernel sono degli oggetti, mentre tecnicamente come sono definiti qui sono dei morfismi.

#### 1.2 Categorie preadditive

**Definizione 1.2.1.** Una categoria preadditiva è una categoria  ${\mathcal C}$  in cui:

1. Per ogni  $a,b \in |\mathcal{C}|$  la classe  $\mathcal{C}(a,b)$  è dotata di un'operazione interna

$$+_{a,b}: \mathcal{C}(a,b) \times \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,b)$$

e ha un elemento  $0^b_a: a \to b$  che lo rendono un gruppo abeliano.

2. Per ogni  $a, b, c \in |\mathcal{C}|$  e  $f : a \to b$  di  $\mathcal{C}$ , le funzioni

$$f_* := \mathcal{C}(c, f) : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, c) : \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

sono omomorfismi di gruppi abeliani.

**Richiamo 1.2.2.** Ricordiamo che  $f_*(g) := f \circ g$  mentre  $f^*(h) := h \circ f$ .

Spesso scriveremo semplicemente + senza pedici, perché in genere è chiaro di quali frecce stiamo sommando.

Inoltre, come nei primi teoremi di Algebra, il morfismo zero è l'unico elemento neutro e per ogni  $f:a\to b$  è unico l'opposto. In coerenza con la notazione additiva indichiamo con -f l'opposto di  $f:a\to b$ .

Un'altra osservazione da fare è questa. Il simbolo  $0_a^b$  in una categoria  $\mathcal C$  con oggetto zero indica il morfismo zero  $a \to b$ . Se  $\mathcal C$  è preaddittiva, non sono notazioni in conflitto? No.

**Proposizione 1.2.3.** In una categoria preadditiva  $\mathcal C$  con oggetto zero 0, il morfismo nullo è elemento neutro.

Dimostrazione. Poiché 0 è iniziale, C(0,b) è banale e in particolare  $0_0^b$  è elemento neutro. L'omomorfismo

$$\left(0_a^0\right)^*: \mathcal{C}(0,b) \to \mathcal{C}(a,b)$$

manda l'elemento neutro del dominio in quello del codominio, che è

$$(0_a^0)^*(0_0^b) = 0_0^b \circ 0_a^0 = 0_a^b.$$

Ora parleremo di alcune peculiarità dei limiti e dei colimiti in categorie preadditive.

**Osservazione 1.2.4.** A tal proposito è utile osservare che se  $\mathcal{C}$  è una categoria preadditiva, anche il suo duale  $\mathcal{C}^{op}$  lo è. La conseguenza più pratica per noi è che dimezza le dimostrazioni: una volta dimostrato un enunciato, quello duale è automatico.

**Proposizione 1.2.5.** In un categoria preadditiva  $\mathcal C$  gli oggetti terminali sono iniziali e viceversa.

Quindi in una categoria preadditiva gli oggetti terminali e iniziali sono oggetti zero.

*Dimostrazione.* Sia t un oggetto terminale di  $\mathcal{C}$ . Se riusciamo a mostrare che  $\mathcal{C}(t,a)$  è un gruppo banale per ogni oggetto a di  $\mathcal{C}$ , allora possiamo concludere. Prendiamo un  $f:t\to a$  qualsiasi in  $\mathcal{C}$  e guardiamo l'omomorfismo di gruppi

$$f_* = \mathcal{C}(t, f) : \mathcal{C}(t, t) \to \mathcal{C}(t, a).$$

Il dominio è un gruppo banale perché t è terminale; in particolare,  $1_t = 0_t^t$ . Inoltre, trattandosi di omomorfismo,

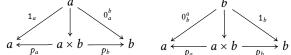
$$\underbrace{f_*\left(\mathbf{1}_t\right)}_{=f} = f \circ 0_t^t = 0_t^a. \qquad \Box$$

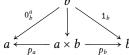
Vediamo i prodotti e i coprodotti finiti ora.

**Proposizione 1.2.6.** Sia  $\mathcal C$  una categoria preadditiva con oggetto zero 0 e

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \times b \stackrel{p_b}{\longrightarrow} b$$

un prodotto in  $\mathcal{C}$ . Grazie alla proprietà universale di prodotto, introduciamo le frecce  $i_a:a\to a\times b$  e  $i_b:b\to a\times b$  come le uniche frecce di  $\mathcal C$  che fanno commutare i diagrammi





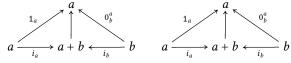
Allora

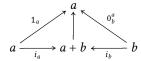
$$a \xrightarrow{i_a} a \times b \xleftarrow{i_b} b$$

è coprodotto in  $\mathcal{C}$ . Dualmente, se

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

è un coprodotto e se  $p_a: a+b \rightarrow a$  e  $p_b: a+b \rightarrow b$  sono introdotti attraverso la proprietà universale di coprodotto come le uniche frecce che fanno commutare i diagrammi





allora

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a + b \stackrel{p_b}{\longrightarrow} b$$

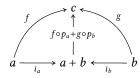
è un prodotto in C.

In breve: in categorie preadditive si ha  $a \times b \cong a + b$ .

Dimostrazione. Possiamo limitarci a dimostrare solo il primo fatto. Consideriamo un qualsiasi oggetto con morfismi

$$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$$

e cerchiamo un modo di costruire un morfismo  $a \times b \rightarrow c$ . Le frecce  $f \circ p_a$  e  $g \circ p_b$  sono di questo tipo, ma non vanno bene per i nostri scopi. Invece la somma sì, perché il diagramma



commuta.

Definizione 1.2.7. Un biprodotto in una categoria preadditiva consta di

oggetti e frecce

$$a \stackrel{p_a}{\longleftrightarrow} c \stackrel{p_b}{\longleftrightarrow} b$$

tali che

$$p_a \circ i_a = 1_a \tag{1.2.1}$$

$$p_b \circ i_b = 1_b \tag{1.2.2}$$

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_c \tag{1.2.3}$$

Osservazione 1.2.8. Dalle identità 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 discendono

$$p_a \circ i_b = 0_b^a \tag{1.2.4}$$

$$p_b \circ i_a = 0_a^b \tag{1.2.5}$$

Proviamo solo la prima visto che l'altra si fa similmente.

$$p_a = p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = p_a + p_a \circ i_b \circ p_b$$
(1.2.1)

da cui

$$p_a \circ i_b \circ p_b = 0_c^a$$

Postcomponendo con  $i_b$  e usando (1.2.2), concludiamo  $p_a \circ i_b = 0_b^a$ .

Un'altra proprietà utile per il futuro è questa.

**Proposizione 1.2.9.** I morfismi  $i_a$  e  $i_b$  della Definizione 1.2.7 sono monici. I morfismi  $p_a$  e  $p_b$  invece sono epici.

*Dimostrazione.* Ad esempio, sia  $i_a \circ f = i_a \circ g$ . Precomponendo ambo i mebri con  $p_a$ , a causa di (1.2.1), si ha f = g. Sia ora  $k \circ p_a = h \circ p_a$ . Postcomponendo ambi membri per  $i_a$ , sempre a causa di (1.2.1), si arriva a h = k.

**Proposizione 1.2.10.** In una categoria preadditiva con oggetto zero 0, un prodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \times b \stackrel{p_b}{\longrightarrow} b$$

dà un biprodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftrightarrow} a \times b \stackrel{p_b}{\longleftrightarrow} b$$

in cui  $i_a$ e  $i_b$ sono introdotti come nella proposizione precedente. Dualmente, un coprodotto

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

dà un biprodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a + b \stackrel{p_b}{\longleftarrow} b$$

in cui  $p_a$  e  $p_b$  sono introdotti come nella proposizione precedente. Viceversa, se si ha un biprodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftrightarrow} a + b \stackrel{p_b}{\longleftrightarrow} b$$

allora la coppia di frecce  $p_a$ e  $p_b$  è prodotto e la coppia  $i_a$ e  $i_b$  è coprodotto.

Quindi in categorie preadditive esiste un modo piuttosto compatto di esprimere prodotti e coprodotti (che sono la stessa cosa) senza passare per le proprietà universali.

*Dimostrazione.* Verifichiamo ad esempio che i prodotti danno biprodotti. Le identità (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4) e (1.2.5) discendono direttamente da come sono introdotte  $i_a$  e  $i_b$ . Consideriamo ora il morfismo

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b : a \times b \rightarrow a \times b.$$

Componendo una volta con  $p_a$  e l'altra con  $p_b$  si ha

$$p_{a} \circ (i_{a} \circ p_{a} + i_{b} \circ p_{b}) = \underbrace{p_{a} \circ i_{a}}_{=1_{a}} \circ p_{a} + \underbrace{p_{a} \circ i_{b}}_{=0_{b}^{a}} \circ p_{b} = p_{a}$$

$$p_{b} \circ (i_{a} \circ p_{a} + i_{b} \circ p_{b}) = \underbrace{p_{b} \circ i_{a}}_{=0_{a}^{b}} \circ p_{a} + \underbrace{p_{b} \circ i_{b}}_{=1_{b}} \circ p_{b} = p_{b}$$

Per la proprietà universale di prodotto, si può concludere che

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = \mathbf{1}_{a \times b}$$
.

Per il viceversa prendendo qualsiasi coppia di morfismi

$$a \stackrel{f}{\longleftarrow} a \times b \stackrel{g}{\longrightarrow} b$$

si ha

$$p_a \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = f$$
  
 $p_b \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = g$ 

Ora se  $h: c \to a \times b$  è tale che  $p_a \circ h = f$  e  $p_b \circ h = g$ , allora

$$h = \mathbf{1}_{a \times b} \circ h = (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ h = i_a \circ f + i_b \circ g. \qquad \Box$$

**Proposizione 1.2.11.** In una categoria preadditiva  $\mathcal C$  con oggetto zero 0, gli equalizzatori di

$$a \xrightarrow{f} b$$

sono equalizzatori di

$$a \xrightarrow{f-g} b$$

e viceversa. Analogamente vale per i coequalizzatori.

Quindi un (co)equalizzatore di una coppia di morfismi è un (co)kernel della differenza dei due.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$e \xrightarrow{i} a \xrightarrow{f} b$$

commuta se e solo se commuta

$$e \xrightarrow{i} a \xrightarrow{f-g} b$$

#### 1.3 Categorie additive

**Definizione 1.3.1.** Una categoria additiva è una categoria che ha oggetto zero e che per ogni coppia di oggetti a e b possiede biprodotto

$$a \xrightarrow[i_a]{p_a} a \oplus b \xrightarrow[i_b]{p_b} b$$

In questo capitolo raccogliamo una serie di risultati elementari sulle successioni esatte corte, seguendo da vicino la trattazione che si può trovare in [Büh09].

#### 2.1 Coppie kernel-cokernel

**Definizione 2.1.1.** Una coppia kernel-cokernel in una categoria additiva  $\mathcal C$  consiste di due morfismi consecutivi

$$a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{p} c$$

tali che i è un kernel di p e p è un cokernel di i.

**Esempio 2.1.2.** Sia in  $\mathbf{Mod}_R$  un omomorfismo  $f: M \to N$  e consideriamo la proiezione al quoziente

$$\pi: M \to M/\ker f$$
.

Come si è visto (Esempio 1.1.6) il kernel è  $\ker \pi = \ker f$  con l'inclusione. Viceversa

$$i : \ker f \hookrightarrow M$$

ha come cokernel  $\pi$  (Esempio 1.1.7). Quindi

$$\ker f \stackrel{i}{\hookrightarrow} M \stackrel{\pi}{\longrightarrow} \frac{M}{\ker f}$$

è una coppia ker-coker in  $\mathbf{Mod}_R$ . In generale, se H è un sottomodulo di M, allora

$$H \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi_H} \frac{M}{H}$$

è una coppia ker-coker.

**Osservazione 2.1.3.** Ricordiamo che i kernel sono certi equalizzatori, quindi sono monomorfismi. Dualmente, i cokernel sono dei coequalizzatori, quindi sono epimorfismi.

I seguenti lemmi sono in preparazione alla successiva definizione.

**Lemma 2.1.4.** In una categoria additiva C,

$$0 \xrightarrow{\exists !} a \xrightarrow{1_a} a$$

è una coppia ker-coker.

Dimostrazione. Il diagramma

$$0 \xrightarrow{\exists !} a \xrightarrow{1_a} a$$

commuta perché  $\mathcal{C}(0,a)$  è banale, essendo 0 iniziale. Sia  $i:e \to a$  tale che

$$e \xrightarrow{i} a \xrightarrow{1_a} a$$

commuta, cio<br/>è $i=0^a_e$ . Essendo 0 terminale, c'è esattamente un <br/>  $e\to 0$ . Il triangolo



commuta per come sono definiti i morfismi nulli. Verifichiamo ora che  $1_a$  è cokernel di  $0 \to a$ . Anzitutto

$$0 \xrightarrow{\exists !} a \xrightarrow{1_a} a$$

commuta poichè C(0, a) è banale (0 è iniziale). Sia  $j : a \rightarrow q$  tale che

$$0 \xrightarrow{\exists !} a \xrightarrow{j} q$$

commuta. Esiste uno e una sola freccia  $a \rightarrow q$ che fa commutare



ed è *j* stessa. □

**Lemma 2.1.5.** In una categoria additiva  $\mathcal C$  considerare il biprodotto

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \oplus b \stackrel{p_b}{\longleftarrow} b$$

Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \xrightarrow{p_b} b$$

$$b \xrightarrow{i_b} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

sono coppie ker-coker.

*Dimostrazione.* Facciamo la dimostrazione solo la prima coppia, la dimostrazione dell'altra è simile. Il diagramma

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \xrightarrow[0_{a \oplus b}]{p_b} b$$

commuta, vedi Definizione 1.2.7. Consideriamo ora il diagramma commutativo

$$c \xrightarrow{j} a \oplus b \xrightarrow{p_p} b$$

Essendo  $i_a$  un monomorfismo, allora è sufficiente mostrare costruire un morfismo  $c \to a$  che fa commutare

$$\begin{array}{c}
a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \\
\downarrow \\
c
\end{array}$$

Ciò che possiamo prendere in esame con quello che abbiamo è

$$p_a \circ j : c \xrightarrow{j} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

Infatti

$$j = \mathbf{1}_{a \oplus b} \circ j = (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ j =$$

$$= i_a \circ p_a \circ j + i_b \circ \underbrace{p_b \circ j}_{=0_{a \oplus b}^b \circ j = 0_c^b} \circ p_a \circ j.$$

**Lemma 2.1.6.** Siano in una categoria additiva  ${\cal C}$ 

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$
$$a' \xrightarrow{f'} b' \xrightarrow{g'} c'$$

con f e f' kernel di g e g' rispettivamente. Allora  $f \oplus f' : a \oplus a' \to b \oplus b'$  è kernel di  $g \oplus g' : b \oplus b' \to c \oplus c'$ . Dualizzando, si ha che se g e g' sono cokernel di f e f' rispettivamente, allora  $g \oplus g'$  è cokernel di  $f \oplus f'$ .

Dimostrazione. Verifichiamo che

$$a \oplus a' \xrightarrow{f \oplus f'} b \oplus b' \xrightarrow[0_{b \oplus b'}]{g \oplus g'} c \oplus c'$$

commuta. Poiché  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$  è un bifuntore [scrivere di questa cosa nell'introduzione], infatti

$$(g \oplus g') \circ (f \oplus f') = (g \circ f) \otimes (g' \circ f) = 0^{c \oplus c'}_{a \oplus a'}$$

Consideriamo ora un diagramma commutativo

$$d \xrightarrow{h} b \oplus b' \xrightarrow{g \oplus g' \atop 0_{b \oplus b'}} c \oplus c'$$

e troviamo un modo di costruire una freccia  $d \rightarrow a \oplus a'$  in modo che commuti

$$a \oplus a' \xrightarrow{f \oplus f'} b \oplus b'$$

Abbiamo le frecce

$$p_b^{bb'} \circ h : d \to b$$
$$p_{b'}^{bb'} \circ h : d \to b'$$

che rendono commutativi i diagrammi

$$d \xrightarrow{p_b^{bb'} \circ h} b \xrightarrow{g} c$$

e

$$d \xrightarrow{p_{b'}^{bb'} \circ h} b' \xrightarrow{g'} c'$$

rispettivamente. Per la proprietà universale di equalizzatore, esistono unici  $i:d\to a$  e  $j:d\to a'$  tali che

$$f \circ i = p_b^{bb'} \circ h$$
$$f' \circ j = p_{b'}^{bb'} \circ h.$$

La proprietà universale di prodotto ci permette di introdurre  $(i,j):d\to a\oplus a'.$  Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned} p_b^{bb'} &\circ (f \oplus f') \circ (i,j) = f \circ p_a^{aa'} \circ (i,j) = f \circ i = p_b^{bb'} \circ h \\ p_{b'}^{bb'} &\circ (f \oplus f') \circ (i,j) = f' \circ p_{a'}^{aa'} \circ (i,j) = f' \circ j = p_b^{bb'} \circ h \end{aligned}$$

Quindi, sempre per la proprietà universale di prodotto, possiamo concludere che

$$(f \oplus f') \circ (i, j) = h.$$

La parte dell'unicità della freccia  $d \to a \oplus a'$  è immediata:  $f \oplus f'$  è un monomorfismo essendo f oppure f' – in questo caso entrambi – monici (ricorda che i kernel sono equalizzatori e quindi sono monomorfismi).

#### 2.2 Stutture e categorie esatte

**Definizione 2.2.1.** Una *struttura esatta* per una categoria additiva  $\mathcal{C}$  è una classe  $\mathcal{E}$  di coppie ker-coker in  $\mathcal{C}$  con le seguenti proprietà:

(E1) Per ogni  $a \in |\mathcal{C}|$ , le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{*} *$$

stanno in  $\mathcal{E}$ .

(E2) Per ogni  $a \in |\mathcal{C}|$ , le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{1_a} a$$

stanno in  $\mathcal{E}$ .

(E3) Se  ${\mathcal E}$  contiene le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{*} *$$

$$b \stackrel{g}{\longrightarrow} c \stackrel{*}{\longrightarrow} *$$

allora contiene anche le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{g \circ f} c \xrightarrow{*} *$$

17

(E4) Se  $\mathcal{E}$  contiene le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{f} b$$

$$* \xrightarrow{*} b \xrightarrow{g} c$$

allora anche le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{g \circ f} c$$

stanno in  $\mathcal{E}$ .

(E5) Se

$$a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{*} *$$

sta in  $\mathcal{E}$  e  $f: a \to a'$  è in  $\mathcal{C}$ , il pushout di i lungo f esiste in  $\mathcal{C}$  e, indicandolo con  $i': a' \to b'$ , anche le coppie ker-coker

$$a' \xrightarrow{i'} b' \xrightarrow{*} *$$

stanno in  $\mathcal{E}$ .

(E6) Se

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{p} b$$

sta in  $\mathcal{E}$  e  $f:c'\to c$  è in  $\mathcal{C}$ , il pullback di p lungo f esiste in  $\mathcal{C}$  e, indicandolo con  $p':b'\to c'$ , anche le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a' \xrightarrow{p'} b'$$

stanno in  $\mathcal{E}$ .

Una categoria esatta è una coppia  $(C, \mathcal{E})$  come sopra e gli elementi di  $\mathcal{E}$  si chiamano sequenze esatte corte.

Primi esempi di sequenze esatte corte derivano coinvolgono le identità.

**Proposizione 2.2.2.** Sia  $(\mathcal{C},\mathcal{E})$  una categoria esatta. Sono successioni esatte corte

$$0 \xrightarrow{\exists !} a \xrightarrow{\mathbf{1}_a} a$$

$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{\exists!} 0$$

In  $\mathbf{Mod}_R$  questo vuol dire una cosa piuttosto semplice: il kernel dell'omomorfismo  $\mathbf{1}_M: M \to M$  è banale, mentre il cokernel è M stesso.

Dimostrazione. Grazie al Lemma 2.1.4, le due coppie sono ker-coker. Poi si invocano Definizione 2.2.1-E1 e Definizione 2.2.1-E2.  $\hfill\Box$ 

**Richiamo 2.2.3.** In generale, in una categoria  $\mathcal C$  con oggetto terminale 1 un

pullback di

$$b \xrightarrow{\exists 1} 1$$

è un prodotto di a e b. Dualmente, se C è una categoria con oggetto iniziale 0, allora un pushout di

$$\begin{array}{ccc}
0 & \xrightarrow{\exists !} & a \\
& & \\
b & & \\
\end{array}$$

è un coprodotto di  $a \in b$ .

**Proposizione 2.2.4.** Sia  $(C, \mathcal{E})$  una categoria esatta e sia

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \oplus b \stackrel{p_b}{\longleftarrow} b$$

un biprodotto. Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \xrightarrow{p_b} b$$

$$b \xrightarrow{i_b} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

sono sequenze esatte corte, cioè coppie ker-coker in  $\mathcal{E}$ .

Il Lemma 2.1.5 ci dava queste due coppie ker-coker. Questo proposizione invece dice che ogni struttura esatta contiene queste coppie ker-coker.

Dimostrazione. Per il richiamo appena fatto,

$$\begin{array}{ccc}
a \oplus b & \xrightarrow{p_a} a \\
\downarrow p_b & & \downarrow \exists! \\
b & \xrightarrow{\exists!} 0
\end{array}$$

è un quadrato di pushout. Inoltre per la Proposizione 2.2.2, la base di questo diagramma è parte della sequenza esatta corta  $b \xrightarrow{1_b} b \xrightarrow{\exists !} 0$ . Possiamo appellarci a Definizione 2.2.1-E6 ora: il pullback di  $b \to 0$  lungo  $a \to 0$ , va a dire  $p_a$ , è tale che le coppie ker-coker

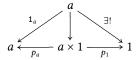
$$* \xrightarrow{*} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

stanno in  $\mathcal{E}$ . Il Lemma 2.1.5 ci dà quella che ci serve.

**Richiamo 2.2.5.** In generale, in una categoria  $\mathcal C$  con oggetto terminale 1, se

$$a \stackrel{p_a}{\longleftarrow} a \times 1 \stackrel{p_1}{\longrightarrow} 1$$

è un prodotto, allora l'unico morfismo  $a \rightarrow a \times 1$  che fa commutare



è un isomorfismo. Quindi, se  $\mathcal C$  è anche preadditiva, allora questo isomorfismo è  $i_a:a\to a\oplus 0$  che ha inversa  $p_a:a\oplus 0\to a$ .

**Proposizione 2.2.6.** "In una categoria esatta corta la somma di sequenze esatte corte è esatta corta". Vale a dire: in una categoria esatta  $(C, \mathcal{E})$ , se

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$
$$a' \xrightarrow{f'} b' \xrightarrow{g'} c'$$

sono sequenze esatte corte, allora anche

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus g} a' \oplus b' \xrightarrow{f' \oplus g'} a'' \oplus b''$$
 (2.2.1)

lo è.

*Dimostrazione.* Il piano per la dimostrazione si struttura su questa osservazione: se riusciamo a dimostrare che

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus 1_{b}} a' \oplus b \xrightarrow{f' \circ p_{a'}^{a'b}} a''$$

$$a' \oplus b \xrightarrow{1_{a} \oplus g} a' \oplus b' \xrightarrow{g' \circ p_{b'}^{a'b}} b''$$

$$(2.2.2)$$

sono esatte corte allora, a causa di Definizione 2.2.1-E4 sono sequenze esatte le coppie ker-coker

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus g} a' \oplus b' \xrightarrow{*} *$$

A questo punto Lemma 2.1.6 permette di concludere l'opera.

Mostriamo solo che la prima delle (2.2.2) è esatta corta, perché l'altra si fa similmente. A causa del Lemma 2.1.5 e della Definizione 2.2.1-E4, è sufficiente dimostrare che la prima delle 2.2.2 è una coppia ker-coker. Il Lemma 2.1.6 ci dà una coppia ker-coker che coinvolge  $f \oplus 1_b$ :

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus 1_b} a' \oplus b \xrightarrow{f' \oplus 0_b^0} a'' \oplus 0$$

Ricordando ora che  $p_{a''}^{a''0}: a\oplus 0 \to a$  è un isomorfismo e che  $p_{a''}^{a''0}\circ (f'\oplus 0_b^0)=f\circ p_{a'}^{a'b}$ , abbiamo finito.

### Bibliografia

- [Büh09] Theo Bühler. Exact Categories. 2009. URL: https://arxiv.org/abs/0811.1480.
- [Lei16] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1612.09375.
- [Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.
- [Rie17] E. Riehl. Category Theory in Context. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context/.