# Categorie esatte

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 24 ottobre 2025.

Infine non sono «le onde» che lui intende guardare, ma un'onda singola e basta: volendo evitare le sensazioni vaghe, egli si prefigge per ogni suo atto un oggetto limitato e preciso.

Palomar, Italo Calvino

# Indice

Sommario

Queste note iniziano col parlare di categorie preadditive e additive per poi passare brevemente alle categorie abeliane. Questo tipo di categorie assieme a certe loro proprietà aiutano a capire il perché di certe scelte nel definire le categorie esatte. Segue un'introduzione elementare sulle categorie esatte.

In queste note si assume la Teoria delle Categorie che si può imparare da [Mac78], [Lei16] oppure [Rie17]. In lingua italiana, esistono le lezioni [Ita22] realizzate dal *Progetto ItaCa*.

Le notazioni sono in larga parte prese da queste fonti. In particolare, se $\mathcal{C}$ è una categoria, allora $|\mathcal{C}|$ indica la sua classe degli oggetti e, per $A, B \in |\mathcal{C}|$, con $\mathcal{C}(A, B)$ oppure $\hom(A, B)$ indichiamo la classe dei morfismi $A \to B$. L'operazione di composizione è indicata con $\circ$ oppure il simbolo è del tutto omesso scrivendo $gf$ al posto di $g \circ f$.

# 1 Preliminari

## 1.1 Kernel e cokernel

Noi lavoreremo con categorie in cui sono presenti oggetti che sono sia terminali che iniziali. Oggetti di questo tipo sono detti *oggetti zero*. Non si tratta di categorie come **Set**, **Top** e **Ring**, ma è il caso di **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, con $R$ anello.

**Definizione 1.1.1.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0. Per $A, B \in |\mathcal{C}|$, il *morfismo nullo* o *zero* da $A$ a $B$ è la composizione dei morfismi

$$A \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} B$$

Scriveremo questo morfismo come $0_A^B$ oppure, se dal contesto è chiaro, semplicemente 0.

**Esempio 1.1.2.** In casi come **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, il morfismo nullo è quello che manda tutti gli elementi del dominio nell'identità.

Comporre con un morfismo nullo dà un morfismo nullo. Più precisamente:

**Proposizione 1.1.3.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* 0, e $A, B, C \in |\mathcal{C}|$. Allora per ogni $f : B \to C$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$f 0_A^B = 0_A^C$$

e per ogni $g : C \to A$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$0_A^B g = 0_C^B.$$

*Dimostrazione.* Proviamo solo una delle due uguaglianze perché l'altra è simile. Consideriamo i morfismi

$$A \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} B \xrightarrow{f} C$$

Poiché 0 è iniziale, la composizione delle ultime due frecce è l'unica che può esserci. Quindi $f 0_A^B$ è la composizione della freccia $A \to 0$ con la freccia $0 \to C$, ed abbiamo concluso. □

**Definizione 1.1.4.** In una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il *kernel* di $f : A \to B$ è uno qualsiasi degli equalizzatori di

$$A \underset{0_A^B}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

Dualmente, il *cokernel* di $f : A \to B$ è uno qualsiasi dei coequalizzatori della stessa coppia di morfismi.

**Osservazione 1.1.5.** In generale gli equalizzatori sono monomorfismi e i coequalizzatori sono epimorfismi.

**Esempio 1.1.6** (Kernel di omomorfismi di moduli)**.** In Algebra, si parla di *kernel* di morfismi in vari ambiti. Per esempio, se $M$ e $N$ sono due moduli su un fissato anello $R$ e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$$

è un sottomodulo di $M$. Per entrare nel linguaggio della Teoria delle Categorie, l'omomorfismo inclusione $i : \ker f \hookrightarrow M$ è un equalizzatore della coppia di omomorfismi

$$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

**Esempio 1.1.7** (Cokernel di omomorfismi di moduli)**.** Se $M$ e $N$ sono due moduli su un fissato anello $R$ e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\operatorname{coker} f := \frac{N}{\operatorname{im} f}$$

è un sottomodulo di $M$ chiamato *cokernel* di $f$. Questa nozione è il duale di kernel, nel senso che l'omomorfismo di proiezione canonica al quoziente $\pi_N : N \to \operatorname{coker} f$ è un coequalizzatore della coppia di omomorfismi

$$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

**Richiamo 1.1.8** (La categoria **Ban**)**.** Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ su un campo $k$ (che spesso è $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$) che è uno spazio metrico completo rispetto alla distanza

$$d : X \times X \to \mathbb{R}\,,\ d(x, y) := \|x - y\|\,.$$

Un'applicazione lineare tra spazi normati $f : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ è detta *limitata* qualora esiste $M > 0$ per cui

$$\|fx\| \leq M\, \|x\|_X \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Indichiamo con **Ban** la categoria degli spazi di Banach e delle applicazioni lineari limitate. Poiché esiste un funtore dimenticante fedele $U : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Vect}_k$, anche **Ban** ha oggetto zero, lo spazio vettoriale banale.

**Esempio 1.1.9.** Anche in **Ban**, come in $\mathbf{Mod}_R$, il kernel di un'applicazione lineare limitata con l'inclusione forma un kernel nel senso della nostra definizione.

**Richiamo 1.1.10.** Dato uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|)$ e un suo sottospazio chiuso $M$, allora lo spazio vettoriale quoziente $X/M$ diventa uno spazio di Banach se considerato insieme alla norma indotta sul quoziente così definita:

$$[\![x + M]\!] := \inf_{m \in M} \|x + m\|\,.$$

In generale, non è detto che il passaggio al quoziente per un sottospazio non chiuso induca una norma e dia origine ad uno spazio di Banach. Se si vuole uno spazio di Banach, quindi o ci si assicura che il sottospazio in questione è chiuso oppure si prende la sua chiusura (topologica).

**Esempio 1.1.11.** Altra storia invece per i cokernel in **Ban**. Sia $f : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ un'applicazione lineare limitata. Allora il cokernel di $f$ è la proiezione canonica al quoziente $Y \to Y/\overline{\operatorname{im} f}$.

**Osservazione 1.1.12.** In Algebra, kernel e cokernel sono degli oggetti, mentre tecnicamente come sono definiti qui sono dei morfismi.

## 1.2 Categorie preadditive

**Definizione 1.2.1.** Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathcal{C}$ in cui:

1. Per ogni $A, B \in |\mathcal{C}|$ la classe $\mathcal{C}(A, B)$ è dotata di un'operazione interna
$$+_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, B)$$
e ha un elemento $0_A^B : A \to B$ che lo rendono un gruppo abeliano.
2. Per ogni $A, B, C, D \in |\mathcal{C}|$ e $f : A \to B$ di $\mathcal{C}$, le funzioni
$$f_* := \mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) \to \mathcal{C}(C, B)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, D) : \mathcal{C}(B, D) \to \mathcal{C}(A, D)$$
sono omomorfismi di gruppi abeliani.

**Richiamo 1.2.2.** Ricordiamo che
$$f_*(g) := fg$$
$$f^*(h) := hf$$

Noi scriveremo semplicemente + senza pedici, perché in genere è chiaro in base a quali frecce stiamo sommando.

Inoltre, come nei primi teoremi di Algebra, il morfismo zero è l'unico elemento neutro e per ogni $f : A \to B$ è unico l'opposto. In coerenza con la notazione additiva, indichiamo con $-f : A \to B$ l'opposto di $f : A \to B$.

**Esempio 1.2.3.** La categoria dei moduli su un fissato anello $R$ è un semplice esempio di categoria preadditiva. Infatti, gli insiemi $\mathbf{Mod}_R(M, N)$, con $M$ e $N$ moduli, sono gruppi abeliani con l'operazione + in cui $f + g$ è l'applicazione lineare $x \mapsto f(x) + g(x)$. Per questioni di linearità, segue anche che le pre- e post-composizioni sono omomorfismi di gruppi abeliani.

**Esempio 1.2.4.** Anche **Ban** è una categoria preadditiva con le operazioni di somma di morfismi definite come in $\mathbf{Mod}_R$: infatti se $f, g : E \to F$ sono applicazioni lineari limitate, allora anche $f + g$ lo è.

Un'altra osservazione da fare è questa. Il simbolo $0_A^B$ in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero indica il morfismo zero $A \to B$. Se $\mathcal{C}$ è preaddittiva, non sono notazioni in conflitto? No.

**Proposizione 1.2.5.** In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il morfismo nullo è elemento neutro.

*Dimostrazione.* Poiché 0 è iniziale, $\mathcal{C}(0, B)$ è banale e in particolare $0_0^B$ è elemento neutro. L'omomorfismo
$$\left(0_A^0\right)^* : \mathcal{C}(0, B) \to \mathcal{C}(A, B)$$

manda l'elemento neutro del dominio in quello del codominio, che è

$$\left(0^0_A\right)^* \left(0^B_0\right) = 0^B_0 0^0_A = 0^B_A. \qquad \square$$

**Osservazione 1.2.6.** A tal proposito è utile osservare che se $\mathcal{C}$ è una categoria preadditiva, anche il suo duale $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ lo è. La conseguenza più pratica per noi è che dimezza le dimostrazioni: una volta dimostrato un enunciato, quello duale è automatico.

Un mantra dell'Algebra è che un omomorfismo è iniettivo se e solo se è il suo kernel è banale. Questo continua a valere, con qualche precauzione, anche nelle categorie preadditive.

**Proposizione 1.2.7.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero $0$. Allora $f : A \to B$ è monomorfismo se e solo se $0 \xrightarrow{\exists!} A$ è kernel di $f$.

*Dimostrazione.* ($\Rightarrow$) Questa implicazione è valida in qualsiasi categoria con oggetto zero. Sia

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0^B_A"'] & B \end{tikzcd}$$

commutativo. Allora

$$fi = 0^B_A i = 0^B_E = f0^A_E$$

Essendo $f$ un monomorfismo, allora $i = 0^A_E$. Pertanto $i$ fattorizza attraverso $0 \to A$ in un unico modo ($0$ è terminale):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] & A \\ E \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "i=0^A_E"'] & \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Siano $h, k : A' \to A$ tali che $fh = fk$. Questo vuol dire che $f(h-k) = 0^B_E = 0^B_A(h-k)$. Per la definizione di kernel, esiste un e un solo morfismo $j : A' \to 0$ tale che $h - k = 0^A_0 j = 0^A_{A'}$. In conclusione, $h = k$. $\square$

## 1.3 Limiti e colimiti

Ora parleremo di alcune peculiarità dei limiti e dei colimiti in categorie preadditive.

### 1.3.1 Oggetti iniziali e terminali

**Proposizione 1.3.1.** In un categoria preadditiva $\mathcal{C}$ gli oggetti terminali sono iniziali e viceversa.

Quindi in una categoria preadditiva gli oggetti terminali e iniziali sono oggetti zero.

*Dimostrazione.* Sia $T$ un oggetto terminale di $\mathcal{C}$. Se riusciamo a mostrare che $\mathcal{C}(T, A)$ è un gruppo banale per ogni oggetto $A$ di $\mathcal{C}$, allora possiamo concludere.
Prendiamo un $f : T \to A$ qualsiasi in $\mathcal{C}$ e guardiamo l'omomorfismo di gruppi

$$f_* = \mathcal{C}(T, f) : \mathcal{C}(T, T) \to \mathcal{C}(T, A).$$

Il dominio è un gruppo banale perché $T$ è terminale; in particolare, $1_T = 0_T^T$. Inoltre, trattandosi di omomorfismo,

$$\underbrace{f_*(1_T)}_{=f} = f0_T^T = 0_T^A. \qquad \square$$

### 1.3.2 Prodotti, coprodotti e biprodotti

**Notazioni 1.3.2.** A proposito di notazioni, seguiamo [Lei16] e [Rie17]. Più precisamente, preso un prodotto

$$A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B$$

il morfismo $C \to A \times B$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

è indicato con $(f, g)$; invece, dato un coprodotto

$$A \xrightarrow{i_A} A + B \xleftarrow{i_B} B$$

il morfismo $A + B \to C$ che rende commutativo

$$\begin{tikzcd} & A & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_A"'] & A + B \arrow[u] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

è indicato con $[f, g]$. Più in là avremo modo di introdurre una notazione "matriciale", che è quella che usa [Büh09] e consente di fare alcuni conti molto più facilmente.

**Proposizione 1.3.3.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero 0 e

$$A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B$$

un prodotto in $\mathcal{C}$. Introduciamo anche le frecce

$$\begin{aligned} i_A &:= \left(1_A, 0_A^B\right) : A \to A \times B \\ i_B &:= \left(0_B^A, 1_B\right) : B \to A \times B \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Allora

$$A \xrightarrow{i_A} A \times B \xleftarrow{i_B} B$$

è coprodotto in $\mathcal{C}$. Dualmente, se

$$A \xrightarrow{i_A} A + B \xleftarrow{i_B} B$$

è un coprodotto e se introduciamo anche i morfismi

$$\begin{aligned} p_A &:= \left[1_A, 0_B^A\right] : A + B \to A \\ p_B &:= \left[0_A^B, 1_B\right] : A + B \to B \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

allora

$$A \xleftarrow{p_A} A+B \xrightarrow{p_B} B$$

è un prodotto in $\mathcal{C}$.

In breve: in categorie preadditive si ha $A \times B \cong A + B$.

*Dimostrazione.* Possiamo limitarci a dimostrare solo il primo fatto. Consideriamo un qualsiasi oggetto con morfismi

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$$

e cerchiamo un modo di costruire un morfismo $A \times B \to C$. Le frecce $fp_A$ e $gp_B$ sono di questo tipo, ma non vanno bene per i nostri scopi. Invece la somma sì: il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "i_A"'] & A \times B \arrow[u, "fp_A+gp_B"] & B \arrow[ul, bend right, "g"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

commuta a causa di come sono introdotti $i_A$ e $i_B$ in 1.3.2. Vediamo l'unicità ora. Supponiamo $h : A \times B \to C$ tale che $hi_A = f$ e $hi_B = g$. Allora

$$fp_A + gp_B = hi_Ap_A + hi_Bp_B = h(i_Ap_A + i_Bp_B).$$

Mostriamo che $i_Ap_A + i_Bp_B : A \times B \to A \times B$ è l'identità. Precomponendo una volta per $p_A$ e l'altra per $p_B$ e usando di nuovo 1.3.2, si ha

$$p_A(i_Ap_A + i_Bp_B) = \underbrace{p_Ai_A}_{1_A} p_A + \underbrace{p_Ai_B}_{0_B^A} p_B = p_A$$

$$p_B(i_Ap_A + i_Bp_B) = \underbrace{p_Bi_A}_{0_A^B} p_A + \underbrace{p_Bi_B}_{1_B} p_B = p_B.$$

La proprietà universale di prodotto ci consente di concludere. □

**Definizione 1.3.4.** Un *biprodotto* in una categoria preadditiva consta di oggetti e frecce

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & C \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

tali che

$$p_Ai_A = 1_A \tag{1.3.3}$$
$$p_Bi_B = 1_B \tag{1.3.4}$$
$$i_Ap_A + i_Bp_B = 1_C \tag{1.3.5}$$

**Osservazione 1.3.5.** Dalle identità 1.3.3, 1.3.4 e 1.3.5 discendono

$$p_Ai_B = 0_B^A \tag{1.3.6}$$
$$p_Bi_A = 0_A^B \tag{1.3.7}$$

Proviamo solo la prima visto che l'altra si fa similmente.

$$p_A \underbrace{=}_{(1.3.5)} p_A\,(i_Ap_A + i_Bp_B) \underbrace{=}_{(1.3.3)} p_A + p_Ai_Bp_B$$

da cui

$$p_A i_B p_B = 0_C^A.$$

Postcomponendo con $i_B$ e usando (1.3.4), concludiamo $p_A i_B = 0_B^A$.

**Proposizione 1.3.6.** I morfismi $i_A$ e $i_B$ della Definizione 1.3.4 sono monici. I morfismi $p_A$ e $p_B$ invece sono epici.

*Dimostrazione.* Ad esempio, sia $i_A f = i_A g$. Precomponendo ambo i mebri con $p_A$, a causa di (1.3.3), si ha $f = g$. Sia ora $kp_A = hp_A$. Postcomponendo ambi membri per $i_A$, sempre a causa di (1.3.3), si arriva a $h = k$. □

Osserviamo come le equazioni 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5, 1.3.6 e 1.3.7 sono già state incontrate nella Proposizione 1.3.3 e nella relativa dimostrazione. Non è un caso infatti.

**Proposizione 1.3.7.** In una categoria preadditiva con oggetto zero 0, un prodotto

$$A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B$$

dà un biprodotto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & A \times B \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

in cui $i_A$ e $i_B$ sono introdotti come in (1.3.1). Dualmente, un coprodotto

$$A \xrightarrow{i_A} A + B \xleftarrow{i_B} B$$

dà un biprodotto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & A + B \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

in cui $p_A$ e $p_B$ sono introdotti come in (1.3.2).

*Dimostrazione.* Verifichiamo ad esempio che i prodotti danno biprodotti. Le identità (1.3.3), (1.3.4), (1.3.6) e (1.3.7) discendono direttamente da come sono introdotte $i_A$ e $i_B$. Sempre nella dimostrazione della Proposizione 1.3.3 abbiamo visto che $i_A p_A + i_B p_B = 1_{A \times B}$. □

Vale anche il viceversa.

**Proposizione 1.3.8.** In una categoria preadditiva con oggetto zero 0 consideriamo il biprodotto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & C \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

allora la coppia di frecce $p_A$ e $p_B$ è prodotto e la coppia $i_A$ e $i_B$ è coprodotto. In particolare, presi $D \in |\mathcal{C}|$ e una coppia di frecce uscenti $A \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} B$,

$$(f, g) = i_A f + i_B g.$$

Invece presi $E \in |\mathcal{C}|$ e una coppia di morfismi $A \xrightarrow{h} E \xleftarrow{k} B$,

$$[h, k] = hp_A + kp_B.$$

Infine, notare anche che $C \cong A \times B \cong A + B$.

*Dimostrazione.* Facciamo solo la parte che riguarda il prodotto, perché l'altra si fa con un ragionamento duale. Grazie a (1.3.3) e (1.3.6) abbiamo

$$p_A(i_A f + i_B g) = f$$
$$p_B(i_A f + i_B g) = g$$

Ora se $h : D \to C$ è tale che $p_A h = f$ e $p_B h = g$, allora

$$h = 1_C h \underbrace{=}_{(1.3.5)} (i_A p_A + i_B p_B)\, h = i_A f + i_B g.$$

Possiamo quindi concludere che le frecce $p_A$ e $p_B$ formano un prodotto. □

La morale della storia è che in categorie preadditive esiste un modo piuttosto compatto di esprimere prodotti e coprodotti (che sono la stessa cosa) senza passare per le proprietà universali. E poiché $A \times B \cong A + B$, si decide di indicare uno qualsiasi di questi oggetti con $A \oplus B$.

**Definizione 1.3.9.** Una *categoria additiva* è una categoria che ha oggetto zero e che per ogni coppia di oggetti $A$ e $B$ possiede biprodotto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A^{AB}"'] & A \oplus B \arrow[l, shift right, "p_A^{AB}"'] \arrow[r, shift left, "p_B^{AB}"] & B \arrow[l, shift left, "i_B^{AB}"] \end{tikzcd}$$

Spesso è ovvio dal contesto e quindi scriveremo semplicemente $p_A$ al posto di $p_A^{AB}$ e così via.

**Esempio 1.3.10.** $\mathbf{Mod}_R$ è una categoria additiva. Siano $M$ e $N$ due $R$-moduli. Anche $M \oplus N := M \times N$ con somma e moltiplicazione per scalare definita per componenti è un $R$-modulo. Consideriamo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift right, "i_M"'] & M \oplus N \arrow[l, shift right, "p_M"'] \arrow[r, shift left, "p_N"] & N \arrow[l, shift left, "i_N"] \end{tikzcd}$$

dove $p_M(m,n) = m$, $p_N(m,n) = n$, $i_M(m) = (m,0)$ e $i_N(n) = (0,n)$: questo è un biprodotto in $\mathbf{Mod}_R$.

**Esempio 1.3.11.** Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach. Allora lo spazio vettoriale $X \oplus Y$ con la norma

$$\|\cdot\|_{X\oplus Y} : (X \oplus Y)^2 \to \mathbb{R}$$
$$\|(x,y)\|_{X\oplus Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$$

è uno spazio di Banach. Un biprodotto in $\mathbf{Ban}$ è della forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift right, "i_X"'] & X \oplus Y \arrow[l, shift right, "p_X"'] \arrow[r, shift left, "p_Y"] & Y \arrow[l, shift left, "i_Y"] \end{tikzcd}$$

con le proiezioni e le inclusioni definite come in $\mathbf{Mod}_R$.

Vedendo $A \oplus B$ come $A \times B$, presi due morfismi $f : A \to B$ e $g : C \to D$, definiamo $f \oplus g : A \oplus C \to B \oplus D$ come $f \times g$, cioè come l'unica freccia $A \oplus C \to B \oplus D$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \oplus C \arrow[l, "p_A^{AC}"'] \arrow[r, "p_C^{AC}"] \arrow[d] & C \arrow[d, "g"] \\ B & B \oplus D \arrow[l, "p_B^{BD}"] \arrow[r, "p_D^{BD}"'] & D \end{tikzcd}$$

Sfruttando questa volta la proprietà universale di coprodotto, vedendo $A \oplus B$ come $A + B$, si può definire $f \oplus g$ come $f + g$.

### 1.3.3 Notazione matriciale

**Esempio 1.3.12.** In generale, se $R$ è un anello, possiamo considerare il modulo

$$R^n := \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{n \text{ volte}}.$$

Allora per ogni funzione lineare $f : R^m \to R^n$, esiste un'unica matrice $A$ ad entrate in $R$ di tipo $n \times m$ tale che

$$f(x) = Ax \text{ per ogni } x \in R^m.$$

(Vedi [Alu21].) Le entrate di $A_{ij}$ sono elementi di $R$, ma non è un problema reimmaginare $A_{ij}$ come la funzione lineare

$$R \to R,\ x \to A_{ij}x.$$

Di conseguenza, $A$ diventa una tabella di funzioni lineari $A_{ij} : R \to R$. In tale caso, se si hanno due matrici $A$ e $B$ di tipo $m \times n$ e $n \times r$ e si vuole moltiplicarle, allora il prodotto $A_{ij}B_{jk}$ di elementi di $R$ può essere reinterpretato come composizione di due funzioni lineari.

Nell'esempio precedente abbiamo usato come $R$-moduli oggetti del tipo $R^n$. Tuttavia la notazione matriciale potrebbe essere esportata in un caso più generale, in cui le entrate delle matrici non sono endomorfismi di $R$, ma in generale morfismi.

È questo quello che facciamo adesso, almeno per matrici piccole, del tipo $1 \times 2$, $2 \times 1$ e $2 \times 2$, e lo facciamo da subito in una categoria additiva $\mathcal{C}$ qualsiasi.

Dati due morfismi $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$, rinominiamo $(f, g) : C \to A \oplus B$ come una *matrice colonna*

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Similmente, presi due morfismi $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ riscriviamo $[f, g] : A \oplus B \to C$ come una *matrice riga*

$$\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}.$$

La composizione dei morfismi

$$C \xrightarrow{\binom{f}{g}} A \oplus B \xrightarrow{(f' \ g')} D$$

ricorda veramente l'usuale prodotto di una matrice $1 \times 2$ per una matrice $2 \times 1$:

$$\begin{pmatrix} f' & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f'f + gg'$$

Una dimostrazione di questo fatto discende direttamente dalla Proposizione 1.3.8

In particolare, notiamo che (vedi Proposizione 1.3.3)

$$p_A = \begin{pmatrix} 1_A & 0_B^A \end{pmatrix}$$
$$p_B = \begin{pmatrix} 0_A^B & 1_B \end{pmatrix}$$
$$i_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0_A^B \end{pmatrix}$$
$$i_B = \begin{pmatrix} 0_B^A \\ 1_B \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo i morfismi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f_{AC}"'] \arrow[dr, "f_{AD}"] & B \arrow[d, "f_{BD}"] \arrow[dl, "f_{BC}"] \\ C & D \end{tikzcd}$$

Qui possiamo costruire le frecce

$$\begin{pmatrix} f_{AC} & f_{BC} \end{pmatrix} : A \oplus B \to C$$
$$\begin{pmatrix} f_{AD} & f_{BD} \end{pmatrix} : A \oplus B \to D$$

da cui se ne origina un'altra

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{AC} & f_{BC} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_{AD} & f_{BD} \end{pmatrix} \end{pmatrix} : A \oplus B \to C \oplus D.$$

Una notazione migliore è una matrice:

$$\begin{pmatrix} f_{AC} & f_{BC} \\ f_{AD} & f_{BD} \end{pmatrix} : A \oplus B \to C \oplus D.$$

In generale, scelti degli oggetti $A_1, \dots, A_m$ e $B_1, \dots, B_n$ e morfismi $f_{ij} : A_i \to B_j$ in $\mathcal{C}$, si può scrivere il morfismo indotto come sopra

$$\bigoplus_{i=1}^{m} A_i \to \bigoplus_{j=1}^{n} B_j$$

come una matrice la cui entrata in posizione $(h, k)$ è $f_{kh} : A_k \to B_h$. (Attenzione ai pedici!)

Usando la definizione di biprodotto, si osserva facilmente che valgono le usuali regole di addizione e moltiplicazione.

### 1.3.4 Pullback e pushout

Parliamo dei pullback e dei pushout ora. Sia $\mathcal{C}$ una categoria additiva e consideriamo in essa il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

e "schiacciamo" il tutto in questo modo

$$A \xrightarrow{(f, f')} B \oplus C \xrightarrow{[g, -g']} D$$

Il motivo per cui è $[g,-g']$ e non $[g,g']$ viene spiegato subito. Grazie alla Proposizione 1.3.8, abbiamo un'espressione esplicita per $(f,f')$ e $[g,-g']$ e quindi:

$$\begin{aligned}[g,-g'](f,f') &= (gp_B + (-g')p_C)(i_Bf + i_Cf') = \\ &= gf - g'f' = 0_A^D.\end{aligned}$$

Quindi c'è la possibilità di inserirsi in un discorso in cui partecipano pullback/pushout e kernel/cokernel.

**Proposizione 1.3.13.** In una categoria additiva,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

è un quadrato di pullback se e solo se $(f,f') : A \to B \oplus C$ è kernel di $[g,-g'] : B \oplus C \to D$. Dualmente, lo stesso quadrato è di pushout se e solo se $[g,-g'] : B \oplus C \to D$ è cokernel di $(f,f') : A \to B \oplus C$.

*Dimostrazione.* ($\Rightarrow$) In questo parte del lavoro è già fatto. Sia quindi

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] & B \oplus C \arrow[r, shift left, "{[g,-g']}"] \arrow[r, shift right, "0_{B\oplus C}^D"'] & D \end{tikzcd}$$

commutativo. Abbiamo cioè $[g,-g']h = gp_Bh - g'p_Ch = 0_E^D$, vale a dire commuta il quadrato esterno in

$$\begin{tikzcd} E \arrow[drr, bend left, "p_Bh"] \arrow[ddr, bend right, "p_Ch"'] & & \\ & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale di pullback, esiste un unico $k : E \to A$ per cui $fk = p_Bh$ e $f'k = p_Ch$. Rimane quindi da verificare che $(f,f')k = h$:

$$\begin{aligned}(f,f')k &= i_B \underbrace{fk}_{=p_Bh} + i_C \underbrace{f'k}_{=p_Ch} = \\ &= \underbrace{(i_Bp_B + i_Cp_C)}_{1_{B\oplus C}} h = h\end{aligned}$$

$k$ è l'unico a fare ciò. Se $k' : E \to A$ è tale che $(f,f')k' = h$, allora precomponendo una volta per $p_B$ e un'altra per $p_C$, abbiamo $fk' = p_Bh$ e $f'k' = p_Ch$. Ma questo, per la proprietà universale di pullback significa che $k = k'$.
($\Leftarrow$) Verifichiamo anzitutto che il quadrato è commutativo. Poiché $(f,f')$ è kernel di $[g,-g']$, allora $[g,-g'](f,f') = 0_A^D$, e questo è un conto che abbiamo

già fatto. Prendiamo ora un qualsiasi quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "g'"'] & D \end{tikzcd}$$

Come abbiamo visto, possiamo ottenere $[g, -g'](r, r') = 0^D_E = 0^D_{B\oplus C}(r, r')$. Per la proprietà universale di kernel, abbiamo che esiste uno e un solo $s : E \to A$ tale che $(f, f')s = (r, r')$. Da qui, per concludere è sufficiente comporre una volta con $p_B$ e un'altra con $p_C$ entrambi i membri di quest'ultima uguaglianza. □

### 1.3.5 Equalizzatori e coequalizzatori

**Proposizione 1.3.14.** In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, gli equalizzatori di

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

sono equalizzatori di

$$A \underset{0^B_A}{\overset{f-g}{\rightrightarrows}} B$$

e viceversa. Analogamente vale per i coequalizzatori.

Quindi un (co)equalizzatore di una coppia di morfismi è un (co)kernel della differenza dei due.

*Dimostrazione.* Basta osservare che, preso $i : E \to A$, si ha $fi = gi$ se e solo se $(f - g)i = 0_E B$. □

## 1.4 Categorie abeliane

**Definizione 1.4.1.** Una *categoria abeliana* è una categoria additiva in cui:

1. Ogni morfismo ha un kernel e un cokernel.
2. Ogni monomorfismo è un kernel e ogni epimorfismo è un cokernel.

**Esempio 1.4.2.** Vediamo che il solito $\mathbf{Mod}_R$ è una categoria abeliana. Abbiamo già visto che ogni omomorfismo ha kernel e cokernel. Sia $f : M \to N$ un monomorfismo e cerchiamo $g : N \to N'$ che abbia $f$ come kernel. Se prendiamo $N' = \frac{N}{\operatorname{im} f}$ e $g = \pi_N$, abbiamo che $\ker g = \operatorname{im} f$. I monomorfismi di $\mathbf{Mod}_R$ sono iniettivi, quindi $\ker g \cong N$. Ora invece sia $f : M \to N$ epimorfismo di $\mathbf{Mod}_R$, quindi suriettivo, e consideriamo

$$\ker f \hookrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

Abbiamo visto anche in questo caso che il cokernel dell'inclusione è $\frac{M}{\ker f} \cong \operatorname{im} f = N$.

**Richiamo 1.4.3.** In generale, una categoria $\mathcal{C}$ che possiede oggetto terminale, prodotti binari e equalizzatori è *finitamente completa* (cioè: ogni diagramma

$X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, con $\mathcal{I}$ categoria con un numero finito di morfismi, ha un limite). Dualmente, una categoria che possiede oggetto iniziale, coprodotti binari e coequalizzatori è *finitamente cocompleta.*

**Proposizione 1.4.4.** Le categorie abeliane sono finitamente complete e finitamente cocomplete.

*Dimostrazione.* Le categorie abeliane hanno oggetto zero, biprodotti (cioè prodotti e coprodotti) e kernel e cokernel (cioè equalizzatori e coequalizzatori, vedi Proposizione 1.3.14). □

In generale, gli isomorfismi sono morfismi monici ed epici e il viceversa non vale sempre. Le categorie abeliane sono categoria in cui vale il viceversa.

**Richiamo 1.4.5.** In generale, un equalizzatore epico è un isomorfismo; dualmente, un coequalizzatore monico è un isomorfismo.

**Proposizione 1.4.6.** In una categoria abeliana, un morfismo monico ed epico è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Sia $f : A \to B$ monico ed epico: a causa della definizione di categoria abeliana, $f$ è un certo equalizzatore e un certo coequalizzatore. □

**Richiamo 1.4.7.** Se $X$ e $Y$ sono spazi topologici, $Y$ è di Hausdorff, $A$ è un sottospazio denso di $X$, e $f, g : X \to Y$ funzioni continue sono tali che

$$f(x) = g(x) \text{ per ogni } x \in A$$

allora $f = g$. Ricordiamo anche che gli spazi di Banach sono spazi di Hausdorff.

**Esempio 1.4.8.** Al contrario di $\mathbf{Mod}_R$, la categoria additiva **Ban** non è abeliana. Sia $M$ un sottospazio denso proprio di uno spazio di Banach $X$: l'inclusione $i : M \hookrightarrow X$ è monica ed epica, ma non è un isomorfismo. Ad esempio, $C_c([a, b])$ è un sottospazio denso proprio di $L^p([a, b])$.

**Proposizione 1.4.9.** In una categoria abeliana, i monomorfismi sono kernel del rispettivo cokernel; dualmente, ogni epimorfismo è cokernel del rispettivo kernel.

*Dimostrazione.* Sia $f : A \to B$ un monomorfismo e $p : B \to C$ tale che $f$ è kernel di $p$. Sia ora $q : B \to D$ cokernel di $f$. Poiché $pf = 0^C_A$, allora a causa della proprietà universale di cokernel esiste $r : D \to C$ per cui commuta il triangolo in

$$\begin{tikzcd} & & C \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \\ & & D \arrow[uu, "r"'] \end{tikzcd}$$

Per provare che $f : A \to B$ è kernel di $q$ sia

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] & B \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "0^D_B"'] & D \end{tikzcd}$$

commutativo. In tal caso $pf' = rqf' = r0^D_{A'} = 0^C_{A'}$, da cui, essendo $f$ kernel di $p$, si ha $f' = fe$ per un $e : A' \to A$. Per l'unicità, basta ricordare che $f$ è monico: se $f' = fe'$ con $e' : A' \to A$, allora $e = e'$. □

**Proposizione 1.4.10.** In una categoria abeliana, il pushout di un monomorfismo è un monomorfismo; dualmente, il pullback di un epimorfismo è un epimorfismo.

*Dimostrazione.* Sia $f : A \to B$ monico e

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

un quadrato di pushout. Grazie alla Proposizione 1.3.13, segue che $[f', -g'] : A' \oplus B \to B'$ è cokernel di $(g, f) : A \to A' \oplus B$. Tuttavia di quest'ultima freccia, possiamo dire che è un monomorfismo perché $f$ lo è. Invocando la Proposizione 1.4.9, $(g, f)$ deve essere anche kernel di $[f', -g']$.
Passiamo a mostrare che $f'$ è un monomorfismo. Sia $h : E \to A'$ tale che $f'h = 0_E^{B'}$ e mostriamo che $h = 0_E^{A'}$. Abbiamo quindi $0_E^{B'} = f'h = [f', -g']i_{A'}h$ da cui segue che $i_{A'}h = (g, f)u$ per un $u : E \to A$, essendo $(g, f)$ kernel di $[f', -g']$. Applicando $p_B$ ad entrambi i membri, otteniamo $fu = 0_E^B$ che a sua volta implica che $u = 0_E^A$. Quindi anche $i_{A'}h = 0_E^A$, da cui segue, applicando $p_{A'}$, che $h = 0_E^{A'}$. □

# 2 Categorie esatte

In questo capitolo raccogliamo una serie di risultati elementari sulle successioni esatte corte, seguendo da vicino la trattazione che si può trovare in testi *elementari* come [Büh09].

## 2.1 Coppie kernel-cokernel

**Definizione 2.1.1.** Una *coppia kernel-cokernel* in una categoria additiva $\mathcal{C}$ consiste di due morfismi consecutivi

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

tali che $i$ è un kernel di $p$ e $p$ è un cokernel di $i$.

Abbiamo visto che (Proposizione 1.4.9) nelle categorie abeliane ogni monomorfismo (epimorfismo) è kernel (cokernel) del proprio cokernel (kernel). Quindi per questo tipo di categorie è molto facile trovare coppie ker-coker.

**Esempio 2.1.2.** Sia in $\mathbf{Mod}_R$ un omomorfismo $f : M \to N$ e consideriamo un certo epimorfismo, la proiezione al quoziente

$$\pi : M \to M/\ker f.$$

Come si è visto (Esempio 1.1.6) il kernel è $\ker \pi = \ker f$ con l'inclusione. Trattandosi di una categoria abeliana, si ha che

$$\ker f \overset{i}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{\ker f}$$

è una coppia ker-coker in $\mathbf{Mod}_R$. In generale, se $H$ è un sottomodulo di $M$, allora

$$H \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi_H} \frac{M}{H}$$

è una coppia ker-coker.

I seguenti lemmi sono in preparazione alla successiva definizione. Sono fatti la cui evidenza è sbalorditiva quando si tiene a mente una categoria additiva come $\mathbf{Mod}_R$.

Qual è il kernel dell'omomorfismo $1_M : M \to M$? Il modulo banale. E il cokernel di $0 \to M$? È $\frac{M}{\{0\}} \cong M$. Il kernel di $M \to 0$? $M$ stesso. Il cokernel di $1_M : M \to M$? $\frac{M}{M} \cong 0$. Ecco come si scrive in un contesto astratto come questo.

**Lemma 2.1.3.** In una categoria additiva $\mathcal{C}$,

$$0 \xrightarrow{\exists!} A \xrightarrow{1_A} A$$

è una coppia ker-coker. Dualmente,

$$A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{\exists!} 0$$

è una coppia ker-coker

*Dimostrazione.* Il diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] & A \arrow[r, shift left, "1_A"] \arrow[r, shift right, "0^A_A"'] & A \end{tikzcd}$$

commuta perché $\mathcal{C}(0, A)$ è banale, essendo 0 iniziale. Sia $i : E \to A$ tale che

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "1_A"] \arrow[r, shift right, "0^A_A"'] & A \end{tikzcd}$$

commuta, cioè $i = 0^A_E$. Essendo 0 terminale, c'è esattamente un $E \to 0$. Il triangolo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] & A \\ E \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

commuta per come sono definiti i morfismi nulli. Verifichiamo ora che $1_A$ è cokernel di $0 \to A$. Anzitutto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\exists!"] \arrow[r, shift right, "0^A_0"'] & A \arrow[r, "1_A"] & A \end{tikzcd}$$

commuta poichè $\mathcal{C}(0, A)$ è banale (0 è iniziale). Sia $j : A \to Q$ tale che

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\exists!"] \arrow[r, shift right, "0^A_0"'] & A \arrow[r, "j"] & Q \end{tikzcd}$$

commuta. Esiste un'unica freccia $A \to Q$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "j"'] & A \arrow[d] \\ & Q \end{tikzcd}$$

ed è $j$ stessa. □

Abbiamo visto che in un biprodotto le iniezioni $i_A : A \to A \oplus B$ e $i_B : B \to A \oplus B$ sono monomorfismi, mentre le proiezioni $p_A : A \oplus B \to A$ e $p_B : A \oplus B \to B$ sono epimorfismi. Per di più, a causa della Definizione 1.3.4 si ha che $p_B i_A = 0^B_A$ e $p_A i_B = 0^A_B$. E quindi è lecito chiedersi se anche in questo caso si può avere qualche coppia ker-coker.

**Lemma 2.1.4.** Consideriamo in una categoria additiva $\mathcal{C}$ il biprodotto

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & A \oplus B \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

Allora

$$A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \xrightarrow{p_B} B$$
$$B \xrightarrow{i_B} A \oplus B \xrightarrow{p_A} A$$

sono coppie ker-coker.

In effetti, sempre guardando a $\mathbf{Mod}_R$, abbiamo che $\ker p_B = A \oplus 0 \cong A$ mentre $\operatorname{coker} i_A = \frac{A \oplus B}{\operatorname{im} i_A} = \frac{A \oplus B}{A \oplus 0} \cong B$.

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo che $i_A$ è kernel di $p_B$, perché le altre dimostrazioni sono simili. Il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] & A \oplus B \arrow[r, shift left, "p_B"] \arrow[r, shift right, "0^B_{A\oplus B}"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta, vedi Definizione 1.3.4. Consideriamo ora il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "j"] & A \oplus B \arrow[r, shift left, "p_B"] \arrow[r, shift right, "0^B_{A\oplus B}"'] & B \end{tikzcd}$$

Essendo $i_A$ un monomorfismo, allora è sufficiente mostrare costruire un morfismo $C \to A$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_A"] & A \oplus B \\ C \arrow[u] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Ciò che possiamo prendere in esame con quello che abbiamo è

$$p_A j : C \xrightarrow{j} A \oplus B \xrightarrow{p_A} A$$

Infatti

$$\begin{aligned} j = 1_{A\oplus B} j \underbrace{=}_{(1.3.5)} (i_A p_A + i_B p_B) j = \\ = i_A p_A j + i_B \underbrace{p_B j}_{=0^B_{A\oplus B} j = 0^B_C} = i_A p_A j. \end{aligned}$$

□

In $\mathbf{Mod}_R$, sapresti calcolare il kernel di $g \oplus g' : N \oplus N' \to T \oplus T'$? La risposta è abbastanza semplice:

$$\ker(g \oplus g') = \ker g \oplus \ker g'.$$

Nemmeno il calcolo di $\operatorname{coker}(f \oplus f')$ con $f \oplus f' : M \oplus M' \to N \oplus N'$ nasconde particolari difficoltà

$$\begin{aligned} \operatorname{coker}(f \oplus f') = \frac{N \oplus N'}{\operatorname{im}(f \oplus f')} = \frac{N \oplus N'}{\operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} f'} \cong \\ \cong \frac{N}{\operatorname{im} f} \oplus \frac{N'}{\operatorname{im} f'} = \operatorname{coker} f \oplus \operatorname{coker} f'. \end{aligned}$$

È l'intuizione che ci serve, ecco come suona:

**Lemma 2.1.5.** Siano in una categoria additiva $\mathcal{C}$ due coppie ker-coker

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$$

Allora $f \oplus f' : A \oplus A' \to B \oplus B'$ è kernel di $g \oplus g' : B \oplus B' \to C \oplus C'$. Dualizzando, si ha che se $g$ e $g'$ sono cokernel di $f$ e $f'$ rispettivamente, allora $g \oplus g'$ è cokernel di $f \oplus f'$. In particolare, se i diagrammi qui sopra sono coppie ker-coker, allora lo è anche

$$A \oplus A' \xrightarrow{f\oplus f'} B \oplus B' \xrightarrow{g\oplus g'} C \oplus C'$$

Quindi "la somma di due coppie ker-coker è una coppia ker-coker."

*Dimostrazione.* Verifichiamo che

$$\begin{tikzcd} A \oplus A' \arrow[r, "f\oplus f'"] & B \oplus B' \arrow[r, shift left, "g\oplus g'"] \arrow[r, shift right, "0^{C\oplus C'}_{B\oplus B'}"'] & C \oplus C' \end{tikzcd}$$

commuta. Poiché $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è un bifuntore, infatti

$$(g \oplus g')(f \oplus f') = (gf) \oplus (g'f) = 0^{C\oplus C'}_{A\oplus A'}$$

Consideriamo ora un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h"] & B \oplus B' \arrow[r, shift left, "g\oplus g'"] \arrow[r, shift right, "0^{C\oplus C'}_{B\oplus B'}"'] & C \oplus C' \end{tikzcd}$$

e troviamo un modo di costruire una freccia $D \to A \oplus A'$ in modo che commuti

$$\begin{tikzcd} A \oplus A' \arrow[r, "f\oplus f'"] & B \oplus B' \\ D \arrow[u] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Abbiamo le frecce

$$p^{BB'}_{B} h : D \to B$$
$$p^{BB'}_{B'} h : D \to B'$$

che rendono commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p^{BB'}_{B} h"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "0^{C}_{B}"'] & C \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p^{BB'}_{B'} h"] & B' \arrow[r, shift left, "g'"] \arrow[r, shift right, "0^{C'}_{B'}"'] & C' \end{tikzcd}$$

rispettivamente. Per la proprietà universale di equalizzatore, esistono unici $i : D \to A$ e $j : D \to A'$ tali che

$$fi = p^{BB'}_{B} h$$
$$f'j = p^{BB'}_{B'} h.$$

La proprietà universale di prodotto ci permette di introdurre $(i, j) : D \to A \oplus A'$. Calcoliamo ora:

$$p_B^{BB'}(f \oplus f')(i, j) = f p_A^{AA'}(i, j) = fi = p_B^{BB'} h$$
$$p_{B'}^{BB'}(f \oplus f')(i, j) = f' p_{A'}^{AA'}(i, j) = f' j = p_{B'}^{BB'} h$$

Quindi, sempre per la proprietà universale di prodotto, possiamo concludere che

$$(f \oplus f')(i, j) = h.$$

La parte dell'unicità della freccia $D \to A \oplus A'$ è immediata: $f \oplus f'$ è un monomorfismo essendo $f$ e $f'$ monici (ricorda che i kernel sono equalizzatori e quindi sono monomorfismi). $\square$

## 2.2 Stutture e categorie esatte

**Richiamo 2.2.1.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Definiamo $\mathcal{C}^{\to\to}$ la categoria in cui

- Gli oggetti sono coppie di frecce $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ di $\mathcal{C}$.
- I morfismi da $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ a $A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$ sono triple di frecce di $\mathcal{C}$

$$\left( \begin{array}{c} A \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow \\ A' \end{array}, \begin{array}{c} B \\ {\scriptstyle\beta}\big\downarrow \\ B' \end{array}, \begin{array}{c} C \\ {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow \\ C' \end{array} \right)$$

  per cui commuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

- La composizione avviene per componenti.

**Definizione 2.2.2.** Una *struttura esatta* per una categoria additiva $\mathcal{C}$ è una classe $\mathcal{E}$ di coppie ker-coker di $\mathcal{C}$ in cui:

- Chiamiamo *monomorfismi ammissibili* le frecce $i : A \to B$ per le quali esiste $p : B \to C$ tale che $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ appartiene ad $\mathcal{E}$. Useremo $\rightarrowtail$ al posto di $\to$ per indicare monomomorfismi ammissibili nei diagrammi commutativi.
- Chiamiamo *epimorfismi ammissibili* le frecce $p : B \to C$ per le quali esiste $i : A \to B$ tale che $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ appartiene ad $\mathcal{E}$. Useremo $\twoheadrightarrow$ al posto di $\to$ per indicare epimomorfismi ammissibili nei diagrammi commutativi.

che rispetta le seguenti proprietà:

(E1) $\mathcal{E}$ è chiusa per isomorfismo, cioè se $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ è in $\mathcal{E}$ ed è isomorfo a $A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} C'$ come oggetto di $\mathcal{C}^{\to\to}$, allora anche quest'ultima coppia di frecce è in $\mathcal{E}$.

(E2) $1_A : A \to A$ è un monomorfismo ammissibile per ogni $A \in |\mathcal{C}|$.

(E3) $1_A : A \to A$ è un epimorfismo ammissibile per ogni $A \in |\mathcal{C}|$.

(E4) La composizione di due monomorfismi ammissibili è un monomorfismo ammissibile.

(E5) La composizione di due epimorfismi ammissibili è un epimorfismo ammissibile.

(E6) Il pushout di un monomorfismo ammissibile lungo un qualsiasi morfismo di $\mathcal{C}$ esiste ed è un monomorfismo ammissibile.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \end{tikzcd}$$

(E7) Il pullback di un epimorfismo ammissibile lungo un qualsiasi morfismo di $\mathcal{C}$ esiste ed è un epimorfismo ammissibile.

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PB"] & C' \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, two heads, "p"'] & C \end{tikzcd}$$

Una *categoria esatta* è una coppia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ come sopra e gli elementi di $\mathcal{E}$ si chiamano *successioni esatte corte.*

**Proposizione 2.2.3.** In categorie esatte gli isomorfismi sono monomomorfismi ed epimorfismi ammissibili.

*Dimostrazione.* Se $f : A \to B$ è un isomorfismo, allora abbiamo un quadrato di pushout e uno di pullback

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "1_B"] \arrow[d, "f^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B \arrow[d, "f^{-1}"] \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Grazie a (E2), (E3), (E6) e (E7), possiamo concludere. □

Primi esempi di successioni esatte corte coinvolgono le identità.

**Proposizione 2.2.4.** Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta. Sono successioni esatte corte

$$0 \xrightarrow{\exists!} A \xrightarrow{1_A} A$$

$$A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{\exists!} 0$$

Cioè coppie ker-coker in $\mathcal{E}$.

*Dimostrazione.* Grazie al Lemma 2.1.3, le due coppie sono ker-coker. Poi si invocano (E2) e (E3). □

**Richiamo 2.2.5.** In generale, in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto terminale 1 un pullback di

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\exists!"] \\ B \arrow[r, "\exists!"'] & 1 \end{tikzcd}$$

è un prodotto di $A$ e $B$. Dualmente, se $\mathcal{C}$ è una categoria con oggetto iniziale 0, allora un pushout di

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] \arrow[d, "\exists!"'] & A \\ B \end{tikzcd}$$

è un coprodotto di $A$ e $B$.

**Proposizione 2.2.6.** Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e sia

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "i_A"'] & A \oplus B \arrow[l, shift right, "p_A"'] \arrow[r, shift left, "p_B"] & B \arrow[l, shift left, "i_B"] \end{tikzcd}$$

un biprodotto. Allora

$$A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \xrightarrow{p_B} B$$
$$B \xrightarrow{i_B} A \oplus B \xrightarrow{p_A} A$$

sono successioni esatte corte, cioè coppie ker-coker in $\mathcal{E}$.

*Dimostrazione.* Per il richiamo appena fatto,

$$\begin{tikzcd} A \oplus B \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] & A \arrow[d, "\exists!"] \\ B \arrow[r, "\exists!"'] & 0 \end{tikzcd}$$

è un quadrato di pullback. Inoltre per la Proposizione 2.2.4, la base di questo diagramma è parte della successione esatta corta $B \xrightarrow{1_B} B \xrightarrow{\exists!} 0$. Possiamo appellarci a (E7) ora: il pullback di $B \to 0$ lungo $A \to 0$, vale a dire $p_A$, è un epimorfismo ammissibile. Il Lemma 2.1.4 ci dà un coppia ker-coker: essendo chiusa per isomorfismo, questa coppia sta in $\mathcal{E}$. □

**Richiamo 2.2.7.** In generale, in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto terminale 1, se

$$A \xleftarrow{p_A} A \times 1 \xrightarrow{p_1} 1$$

è un prodotto, allora l'unico morfismo $A \to A \times 1$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\exists!"] & \\ A & A \times 1 \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_1"'] & 1 \end{tikzcd}$$

è un isomorfismo. Quindi, se $\mathcal{C}$ è anche preadditiva, allora questo isomorfismo è $i_A : A \to A \oplus 0$ che ha inversa $p_A : A \oplus 0 \to A$.

**Proposizione 2.2.8.** "In una categoria esatta la somma di successioni esatte corte è esatta corta". Vale a dire: in una categoria esatta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, se

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
$$A' \xrightarrow[f']{} B' \xrightarrow[g']{} C'$$

sono successioni esatte corte, allora lo è anche

$$A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus f'} B \oplus B' \xrightarrow{g \oplus g'} C \oplus C' \tag{2.2.1}$$

Quindi $\mathcal{E}$ è chiusa rispetto alla somma di successioni esatte corte.

*Dimostrazione.* Il piano per la dimostrazione si struttura su questa osservazione: se riusciamo a dimostrare che

$$\begin{gathered} A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus 1_{A'}} B \oplus A' \xrightarrow{g p_B^{BA'}} C \\ B \oplus A' \xrightarrow[1_B \oplus g]{} B \oplus B' \xrightarrow[g' p_{B'}^{BB'}]{} C' \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

sono esatte corte allora, a causa di (E5),

$$A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus f'} B \oplus B'$$

è un monomorfismo ammissibile. A questo punto Lemma 2.1.5 permette di concludere l'opera.
Mostriamo solo che la prima delle (2.2.2) è esatta corta, perché l'altra si fa similmente. A causa del Lemma 2.1.4 e della (E5), è sufficiente dimostrare che la prima delle 2.2.2 è una coppia ker-coker. Il Lemma 2.1.5 ci dà una coppia ker-coker che coinvolge $f \oplus 1_{A'}$:

$$A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus 1_{A'}} B \oplus A' \xrightarrow{g \oplus 0^0_{A'}} C \oplus 0$$

Ricordando ora che $p_C^{C0} : C \oplus 0 \to C$ è un isomorfismo e che $p_C^{C0}(g \oplus 0^0_{A'}) = g p_B^{BA'}$, abbiamo finito. $\square$

**Proposizione 2.2.9.** Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \end{tikzcd}$$

in cui le frecce orizzontali sono monomorfismi ammissibili. Allora sono equivalenti:

(i) Il quadrato è di pushout.

(ii) La successione

$$A \xrightarrow{\binom{i}{f}} B \oplus A' \xrightarrow{(f' \ -i')} B'$$

è esatta corta.

(iii) Il quadrato è bicartesiano (cioè di pullback e di pushout).

(iv) Il quadrato è parte del diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, two heads, "p"] & \\ & & C \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \arrow[ur, two heads, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

dove $(i, p)$ e $(i', p')$ sono successioni esatte corte.

*Dimostrazione.* (i) ⇒(ii). La Proposizione 1.3.13 ci dice che $\begin{pmatrix} f' & -i' \end{pmatrix}$ è cokernel di $\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}$. Quindi il piano è verificare che quest'ultimo morfismo è un monomorfismo ammissibile. Usiamo un po' di calcolo matriciale:

$$\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0^B_{A'} \\ 0^{A'}_A & 1_{A'} \end{pmatrix}}_{i\oplus 1_{A'}} \begin{pmatrix} 1_A & 0^A_{A'} \\ f & 1_{A'} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1_A \\ 0^{A'}_A \end{pmatrix}}_{i_A}$$

Come abbiamo visto $i_A$ è monomorfismo ammissibile (Proposizione 2.2.6) così come $i \oplus 1_{A'}$ (Proposizione 2.2.8). Il morfismo in mezzo è un isomorfismo (calcola esplicitamente l'inverso) e quindi è un monomorfismo ammissibile. In definitiva, $\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}$ è ammissibile perché è composizione di monomorfismi ammissibili.

(ii) ⇒(iii). Questa è ovvia, sempre a causa della Proposizione 1.3.13.

(iii) ⇒(i). Anche questa è ovvia.

(i) ⇒(iv). Sia $p : B \to C$ un cokernel di $i : A \to B$ e, attraverso la proprietà universale di pushout, sia $p' : B' \to C$ la freccia tale che $p = f'p'$ e $0^C_{A'} = p'i'$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, bend left, "p"] & \\ A' \arrow[r, "i'"] \arrow[drr, bend right, "0^C_{A'}"'] & B' \arrow[dr, "p'"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

Per come abbiamo scelto $p$, la successione $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ è esatta corta. Per provare che anche $A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} C$ lo è, mostriamo che $p'$ è cokernel di $i'$. Sia $h : B' \to X$ tale che $hi' = h0^{B'}_{A'} = 0^X_{A'}$. Allora ne segue che

$$hf'i = hi'f = 0^X_A.$$

Poiché $p : B \to C$ è cokernel di $i : A \to B$, allora $hf' = kp$ per un unico morfismo $k : C \to X$. A questo punto abbiamo

$$\begin{aligned} hf' &= kp = kp'f' \\ kp'i' &= 0^X_{A'} = hi' \end{aligned}$$

che, per la proprietà universale di pushout, dà $kp' = h$. Per concludere, ricordiamo che essendo $p = p'f'$ un epimorfismo, anche $p'$ lo è. Questo ci permette di dire che se $k' : C \to X$ è tale che $h = k'p'$, allora $k = k'$.

(iv) ⇒(ii). Il piano sarà di costruire in qualche modo una successione esatta corta $A \rightarrowtail D \twoheadrightarrow B'$ in cui $D \cong B \oplus A'$ e per cui commmuta

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "\cong"] & \\ A \arrow[ur, tail] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}"'] & & B' \\ & B \oplus A' \arrow[ur, "\begin{pmatrix} f' & -i' \end{pmatrix}"'] & \end{tikzcd}$$

Questo basta per dimostrare ciò che ci serve visto che la classe delle successioni esatte corte è chiusa per isomorfismi.

Incominciamo con le costruzioni. Sia il quadrato di pullback

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d, two heads, "q"'] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ B' \arrow[r, two heads, "p'"'] & C \end{tikzcd}$$

in cui osserviamo che $q$ e $q'$ sono epimorfismi ammissibili in quanto pullback di epimorfismi ammissibili. Sfruttando il duale della implicazione (i) ⇒(iv), possiamo disegnare

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dl, tail, "j"'] \arrow[d, tail, "i"] \\ & D \arrow[r, two heads, "q'"'] \arrow[d, two heads, "q"] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"'] \arrow[ur, tail, "j'"] & B' \arrow[r, two heads, "p'"'] & C \end{tikzcd}$$

Ecco la successione esatta corta $A \overset{j}{\rightarrowtail} D \overset{q}{\twoheadrightarrow} B'$ che avevamo annunciato.
Per la proprietà universale di pullback, sia $k : B \to D$ tale che $q'k = 1_B$ e $qk = f'$. In particolare $q'(1_D - kq') = 0_D^B$. Poiché $j'$ è kernel di $q'$, sia $l : D \to A'$ il morfismo tale che $j'l = 1_D - kq'$. Postcomponendo ambo i membri di questa equazione una volta per $k$ e un'altra per $j'$ e ricordando che $j'$ è monico, deriviamo che $lk = 0_B^{A'}$ e $lj' = 1_{A'}$. Inoltre $i'lj = -i'f$ (per calcolo diretto) da cui segue che $lj = -f$ perché $i'$ e monico.
Si può mostrare finalmente che

$$\begin{pmatrix} k & j' \end{pmatrix} : B \oplus A' \to D \qquad \begin{pmatrix} q' \\ l \end{pmatrix} : D \to B \oplus A'$$

sono una l'inversa dell'altra. □

**Richiamo 2.2.10** (Il lemma dei pullback)**.** In una categoria $\mathcal{C}$ consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "Q_1"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "Q_2"] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Allora:

1. Se $Q_1$ e $Q_2$ sono di pullback, allora il rettangolo esterno è di pullback.
2. Se il rettangolo e $Q_2$ sono di pullback, allora $Q_1$ lo è.

**Corollario 2.2.11.** In una categoria esatta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, il rettangolo esterno in un diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, phantom, "PO"] & C \arrow[d, "k"] \\ A' \arrow[r, two heads, "f'"'] & B' \arrow[r, tail, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

è bicartesiano e

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ gf \end{pmatrix}} A \oplus C \xrightarrow{\begin{pmatrix} g'f' & -k \end{pmatrix}} C' \tag{2.2.3}$$

è una successione esatta corta.

*Dimostrazione.* Ne consegue dalla Proposizione 2.2.9 che entrambi i quadrati sono bicartesiani. Grazie al lemma dei pullback (Richiamo 2.2.10), incollare i due quadrati produce un altro quadrato bicartesiano. Per la Proposizione 1.3.13, i morfismi in (2.2.3) formano una coppia ker-coker. Per concludere proviamo che questa coppia appartiene a $\mathcal{E}$.

$$\begin{pmatrix} g'f' & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g' & -k \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}}_{f' \oplus 1_C}$$

mostra $\begin{pmatrix} g'f' & k \end{pmatrix}$ come una composizione di epimorfismi ammissibili secondo la Proposizione 2.2.8 e la Proposizione 2.2.9. □

**Proposizione 2.2.12.** In una categoria esatta il pullback di un monomorfismo ammissibile lungo un epimorfismo ammissibile produce un monomorfismo ammissibile.

*Dimostrazione.* Sia $i : A \to B$ un monomorfismo ammissibile e $e : B' \to B$ un epimorfismo ammissibile. A causa di (E7) abbiamo il quadrato di pullback

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, two heads, "e'"] \arrow[d, "i'"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & A \arrow[d, tail, "i"] \\ B' \arrow[r, two heads, "e"'] & B \end{tikzcd}$$

Quindi dobbiamo dimostrare che $i'$ è un monomorfismo ammissibile.
Guardiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B' \arrow[d, "e"] \arrow[dr, "pe"] & \\ A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "p"'] & C \end{tikzcd}$$

dove $p$ è un cokernel di $i$. Qui $p$ è un epimorfismo ammissibile e lo è anche $pe$ per la (E5). Per vedere che $i'$ è un monomorfismo ammissibile, è sufficiente dimostrare che $i'$ è un kernel di $pe$.
Anzitutto $pei' = pie' = 0^C_{A'}$. Supponiamo che $g' : X \to B'$ sia tale che $peg' = 0^C_X$ e cerchiamo un modo di costruire una freccia $X \to A'$ per cui commuta il triangolo in

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "pe"] & C \\ X \arrow[u] \arrow[ur, "g'"'] & & \end{tikzcd}$$

Essendo $i$ kernel di $p$, esiste una sola $f : X \to A$ per cui $eg' = if$. Applicando la proprietà universale del quadrato del pullback, sia $f' : X \to A'$ tale che $e'f' = f$ e $i'f' = g'$: è l'ultima identità che ci serve.

Vediamo l'unicità. In generale in una categoria qualsiasi, il pullback di un monomorfismo è un monomorfismo: nel nostro caso, questo significa che $i'$ è monico perché $i$ lo è. $f'$ è l'unico morfismo tale che $i'f' = g'$ e abbiamo finito. □

**Proposizione 2.2.13** (Assioma Oscuro)**.** In una categoria esatta, supponiamo che $i : A \to B$ sia un morfismo che ammette un cokernel. Se esiste un morfismo $j : B \to C$ in $\mathcal{C}$ tale che $ji : A \to C$ è un monomorfismo ammissibile, allora $i$ è un monomorfismo ammissibile.

**Osservazione 2.2.14.** Si chiama "*assioma* oscuro" perché in alcune trattazioni (in Quillen, per esempio) faceva parte della definizione di categoria esatta. Tuttavia viene provata la sua ridondanza da Yoneda e Keller.

*Dimostrazione.* Sia $p : B \to D$ un cokernel di $i$ e consideriamo un quadrato di pushout (che esiste a causa di (E6))

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "ji"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r, tail] & E \end{tikzcd}$$

Inoltre, grazie alla Proposizione 2.2.9, abbiamo che $\begin{pmatrix} i \\ ji \end{pmatrix} : A \to B \oplus C$ è un monomorfismo ammissibile. Ora osserviamo anche che $\begin{pmatrix} 1_B & 0^B_C \\ -j & 1_C \end{pmatrix} : B \oplus C \to B \oplus C$ è un isomorfismo (l'inversa si può calcolare direttamente), in particolare è un monomorfismo ammissibile. A causa di (E4) anche la freccia $\begin{pmatrix} i \\ 0^C_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_B & 0^B_C \\ -j & 1_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ ji \end{pmatrix}$ è un monomorfismo ammissibile. Osserviamo inoltre che $p \oplus 1_C : B \oplus C \to D \oplus C$ è un cokernel di $\begin{pmatrix} i \\ 0^C_A \end{pmatrix}$ (infatti $p \oplus 1_C$ è coker di $i \oplus 0^C_0$), quindi è un epimorfismo ammissibile. Considera il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_B \\ 0^C_B \end{pmatrix}"] & D \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_D \\ 0^C_D \end{pmatrix}"] \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} i \\ 0^C_A \end{pmatrix}"'] & B \oplus C \arrow[r, "p \oplus 1_C"'] & D \oplus C \end{tikzcd}$$

Qui il quadrato di destra è un pullback, di conseguenza $p$ è un epimorfismo ammissibile e $i$ è un kernel di $p$ □

## 2.3 Alcuni teoremi classici

**Proposizione 2.3.1.** Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta. Un morfismo di successioni esatte corte (vedi definizione di $\mathcal{C}^{\to\to}$)

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b"] & C' \arrow[d, "c"] \\ A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

si fattorizza attraverso una successione esatta corta $A \to D \to C'$

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "BC"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b'"] & C' \arrow[d, "1_{C'}"] \\
A \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[d, "1_A"'] & D \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "b''"'] \arrow[dr, phantom, "BC"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C
\end{tikzcd}
\tag{2.3.1}
$$

in modo tale che i due quadrati contrassegnati con $BC$ sono bicartesiani. In particolare, esiste un isomorfismo canonico $A \cup_{A'} B' \cong B \times_C C'$.

*Dimostrazione.* Il pushout di $f' : A' \rightarrowtail B'$ lungo $a$ dà i morfismi $m : A \rightarrowtail D$ e $b' : B' \to D$. Attraverso la proprietà universale di pushout, introduciamo il morfismo $e : D \to C'$ tale che $eb' = 1_{C'}g' = g'$ e $em = 0$ e sia $b'' : D \to B$ il morfismo tale che $b''b' = b : B' \to B$ e $b''m = f1_A = f$. La Proposizione 2.2.9 ci consente di dire che $e$ è un cokernel di $m$. Guardiamo il quadrato in basso a destra. Abbiamo

$$
\begin{cases} ceb' = cg' \\ cem = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} gb''b' = gb = cg' \\ gb''m = gf = 0 \end{cases}
$$

Per la proprietà universale di pushout del quadrato in alto a sinistra concludiamo che $ce = gb''$. Sempre a causa della Proposizione 2.2.9, possiamo concludere che anche questo è bicartesiano. □

**Corollario 2.3.2** ("Five Lemma")**.** In una categoria esatta considera un morfismo di successioni esatte corte

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail] \arrow[d, "a"'] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "b"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & C
\end{tikzcd}
$$

Se $a$ e $c$ sono isomorfismi, monomorfismi ammissibili oppure epimorfismi ammissibili, allora anche $b$ è dello stesso tipo.

*Dimostrazione.* Assumiamo prima che $a$ e $c$ siano isomorfismi. Poiché gli isomorfismi preservano pullback e pushout e guardando la fattorizzazione (2.3.1), si ha che $b$ è la composizione di due isomorfismi $B' \to D \to B$. Se $a$ e $c$ sono entrambi monici ammissibili, sempre guardando il diagramma (2.3.1), si ha che $b$ è la composizione di due monomorfismi ammissibili (per la freccia $D \to B$ vedi la Proposizione 2.2.12). Il caso degli epimorfismi ammissibili è duale. □

**Lemma 2.3.3** (Isomorfismo di Noether, $C/B \cong (C/A)/(B/A)$)**.** In una categoria esatta, sia il diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, tail, dashed] \\
A \arrow[r, tail] & C \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Y \arrow[d, two heads, dashed] \\
& Z \arrow[r, "1_Z"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

in cui le prime due righe orizzontali e la colonna centrale sono esatte corte. Allora la terza colonna esiste, è esatta corta e è unicamente determinata dalla condizione che rende il diagramma commutativo. Inoltre, il quadrato in alto a destra è bicartesiano.

*Dimostrazione.* Il morfismo $X \to Y$ esiste unico poiché la prima riga è esatta e la composizione $A \to C \to Y$ è zero, mentre il morfismo $Y \to Z$ esiste unico poiché la seconda riga è esatta e la composizione $B \to C \to Z$ si annulla. Per la Proposizione 2.2.9, il quadrato contenente $X \to Y$ è bicartesiano. Ne consegue che $X \to Y$ è un monico ammissibile e che $Y \to Z$ è il suo cokernel, sempre a causa della stessa proposizione. □

**Corollario 2.3.4** (Lemma $3 \times 3$)**.** In una categoria esatta, considera un diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, tail, "a"'] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, tail, "b"] & C' \arrow[d, tail, "c"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "a'"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "b'"] & C \arrow[d, two heads, "c'"] \\
A'' \arrow[r, "f''"'] & B'' \arrow[r, "g''"'] & C''
\end{tikzcd}
$$

in cui le colonne sono esatte corte e si assume inoltre che una delle seguenti condizioni sia vera:

(i) la riga centrale e una delle righe esterne è esatta corta;

(ii) le due righe esterne sono esatte corte e $gf = 0$.

Allora anche la riga rimanente è esatta corta.

*Dimostrazione.* Assumiamo (i). Le due possibilità sono duali l'una all'altra, quindi dobbiamo considerare solo il caso in cui le prime due righe sono esatte. Applichiamo la Proposizione 2.3.1 alle prime due righe per ottenere il diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "BC"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "i"] & C' \arrow[d, "1_{C'}"] \\
A \arrow[r, tail, "\overline{f}"'] \arrow[d, "1_A"'] & D \arrow[r, two heads, "\overline{g}"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "BC"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

dove $ji = b$. Notiamo che $i$ e $j$ sono monici ammissibili rispettivamente perché pushout di un monomorfismo ammissibile e a causa della Proposizione 2.2.12, rispettivamente. Per la Proposizione 2.2.9, il morfismo $i' : D \to A''$ determinato da $i'i = 0$ e $i'\overline{f} = a'$ è un cokernel di $i$ e il morfismo $j' : B \twoheadrightarrow C''$ dato da $j' = c'g = g''b'$ è un cokernel di $j$.

Se sappiamo che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "1_{B'}"'] & D \arrow[r, two heads, "i'"] \arrow[d, tail, "j"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\
B' \arrow[r, tail, "b"] & B \arrow[r, two heads, "b'"] \arrow[d, two heads, "j'"'] & B'' \arrow[d, "g''"] \\
 & C'' \arrow[r, "1_{C''}"'] & C''
\end{tikzcd}$$

è commutativo, possiamo concludere grazie al Lemma 2.3.3 che $(f'', g'')$ è una successione esatta corta.
Rimane quindi da dimostrare che $f''i' = b'j$ poiché le altre relazioni di commutatività $b = ji$ e $g''b' = j'$ sono valide per costruzione. Osserviamo il quadrato $A'B'AD$. Abbiamo

$$(f''i')i = 0 = b'b = (b'j)i \quad \text{e} \quad (b'j)\overline{f} = b'f = f''a' = (f''i')\overline{f}.$$

Per la proprietà universale di pushout, possiamo concludere che $f''i' = b'j$. □

## 2.4 Categorie quasi-abeliane

**Definizione 2.4.1.** Una *categoria quasi-abeliana* è una categoria additiva in cui:

1. Ogni morfismo ha kernel e cokernel.
2. Il pushout di un kernel lungo un qualsiasi morfismo è esso stesso un kernel e il pullback di un cokernel lungo un qualsiasi morfismo è esso stesso un cokernel.

Nelle categorie abeliane sappiamo, grazie alla Proposizione 1.4.10, che il pushout di un kernel è un kernel e il pullback di un cokernel è un cokernel. E questo dimostra che le categorie abeliane sono quasi-abeliane.

**Osservazione 2.4.2.** In **Ban**

1. i monomorfismi sono esattamente le applicazioni lineare limitate iniettive;
2. gli epimorfismi sono esattamente le applicazioni lineari limitate con immagine densa;
3. un monomorfimo è un kernel se e solo se ha immagine chiusa;
4. un epimorfismo è un cokernel se e solo se è suriettivo.

**Esempio 2.4.3.** La categoria additiva **Ban** è quasi-abeliana. Una dimostrazione di questo fatto si può trovare in [Büh08] (Teorema 2.3.3) oppure in [Sch99] (Proposizione 3.2.4). Sia

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\
A' \arrow[r, "m'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

un quadrato di pushout in **Ban** e proviamo che $m'$ è un kernel. Grazie alla Proposizione 1.3.13, il quadrato di pushout diventa

$$A \xrightarrow{\binom{f}{m}} A' \oplus B \xrightarrow{(m' \ -f')} B'$$

dove la seconda freccia è cokernel della prima. A patto di dimenticare la struttura extra di **Ban** rispetto a $\mathbf{Vect}_k$, si può dimostrare che (vedi Osservazione precedente) $\begin{pmatrix} m' & -f' \end{pmatrix}$ è cokernel di $\begin{pmatrix} f \\ m \end{pmatrix}$ nella categoria degli spazi vettoriali. Di nuovo per la Proposizione 1.3.13, abbiamo che il quadrato di pushout in **Ban** rimane tale in $\mathbf{Vect}_k$. Richiamiamo che $\mathbf{Vect}_k$ è una categoria abeliana: grazie alla Proposizione 1.4.10, possiamo concludere che $m'$ è un monomorfismo in $\mathbf{Vect}_k$ e quindi, da definizione di categoria abeliana, un kernel. In realtà questo vale anche in **Ban**, visto che il funtore dimenticante $\mathbf{Ban} \to \mathbf{Vect}_k$ è fedele.

Possiamo mostrare anche che le categorie quasi-abeliane sono categorie esatte. Più precisamente:

**Proposizione 2.4.4.** La classe $\mathcal{E}_{\max}$ delle coppie ker-coker di una categoria quasi-abeliana $\mathcal{C}$ è una struttura esatta per la categoria stessa.

*Dimostrazione.* È chiaro che $\mathcal{E}_{\max}$ è chiusa per isomorfismi (vedi definizione di $\mathcal{C}^{\to\to}$) e che tra queste coppie ker-coker figurano anche coppie in cui appaiono le identità. Gli assiomi di pullback e pushout sono parte della definizione di categorie quasi-abeliane. Dimostriamo che la classe dei cokernel è chiusa sotto composizione. Per i kernel si ragiona dualmente.
Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due cokernel e $h := gf$. Indichiamo con $i_f : F \to A$, $i_g : G \to B$ e $i_h : H \to A$ i kernel rispettivamente di $f$, $g$ e $h$. Nel diagramma

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[dr, "i_f"'] & H \arrow[r, dashed, "v"] \arrow[d, "i_h"] & G \arrow[d, "i_g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

esistono unici due morfismi $u$ e $v$ che rendono il diagramma commutativo, usando la proprietà universale di kernel. Si può facilmente verificare che il quadrato in alto a destra è un pullback. Ne segue che $v$ è un cokernel perché pullback del cokernel $f$ e $u$ è il suo kernel.
Per concludere, mostriamo che $h$ è cokernel di $i_h$. Sia $h' : A \to X$ tale che $h' i_h = 0_H^X$. Poiché $i_f = i_h u$, allora $h' i_f = 0_F^X$. Poiché $f$ è cokernel di $i_f$, sia $f' : B \to X$ tale che $f' f = h'$. Per costruire un morfismo $C \to X$, mostriamo che $f' i_g = 0_G^X$. Questa uguaglianza segue da

$$f' i_g v = f' f i_h = h' i_h = 0_H^X$$

e dal fatto che $v$ è un epimorfismo. Per la proprietà universale di cokernel, sia $g' : C \to X$ tale che $g' g = f'$. Componendo per $f$ entrambi i membri, arriviamo a $h' = f' f = g' g f = g' h$. Infine, se $h' = g'' h$, ne segue che $g'' = g'$, essendo $h$ un epimorfismo. $\square$

# Bibliografia


[Alu21] P. Aluffi. *Algebra: Notes from the Underground.* Cambridge University Press, 2021.

[Büh08] Theo Bühler. *On the algebraic foundation of bounded cohomology.* 2008. URL: https://www.research-collection.ethz.ch/entities/publication/9b39459b-f80a-4021-a4bf-8c64baeda0e0.

[Büh09] Theo Bühler. *Exact Categories.* 2009. URL: https://arxiv.org/abs/0811.1480.

[Ita22] Progetto ItaCa. *Corso Teoria delle Categorie.* 2021 — 2022. URL: https://www.youtube.com/playlist?list=PLwOJoZOlTAm-rQUkbmfyDMsLk7-JDy5Vm.

[Lei16] Tom Leinster. *Basic Category Theory.* 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1612.09375.

[Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.

[Rie17] E. Riehl. *Category Theory in Context.* Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context/.

[Sch99] Jean-Pierre Schneiders. *Quasi-abelian categories and sheaves.* Mémoires de la Société Mathématique de France. Société mathématique de France, 1999. DOI: 10.24033/msmf.389. URL: https://www.numdam.org/item/MSMF_1999_2_76__R3_0/.