Categorie esatte

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 8 luglio 2025.

Indice

1 Preliminari

In queste note si assume almeno la Teoria delle Categorie che si può imparare da [Lei16]. Un altro validissimo testo che insegna le basi è anche [Rie17]. Nozioni sulle categorie preadditive si possono trovare in [Mac78] che è considerato un vero e proprio classico.

1.1 *Kernel e cokernel*

Noi lavoreremo con categorie in cui sono presenti oggetti che sono sia terminali che iniziali. Oggetti di questo tipo sono detti *oggetti zero*. Non si tratta di categorie come **Set**, **Top** e **Ring**, ma è il caso di **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, con R anello.

Definizione 1.1.1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0. Per $a, b \in |\mathcal{C}|$, il *morfismo nullo* o *zero* da a a b è la composizione dei morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b$$

Scriveremo questo morfismo come 0_a^b oppure, se dal contesto è chiaro, semplicemente 0.

Esempio 1.1.2. In casi come **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, il morfismo nullo è quello che manda tutti gli elementi del dominio nell'identità. Anche **Ring** possiede omomorfismi come questi; tuttavia in **Ring** l'oggetto iniziale è $\mathbb{Z}$ che non è terminale mentre i morfismi zero sono definiti attraverso oggetti zero.

Comporre con un morfismo nullo dà un morfismo nullo. Più precisamente:

Proposizione 1.1.3. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* 0, e $a, b, c \in |\mathcal{C}|$. Allora per ogni $f : b \to c$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$f \circ 0_a^b = 0_a^c$$

e per ogni $g : c \to a$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$0_a^b \circ g = 0_c^b.$$

Dimostrazione. Proviamo solo una delle due uguaglianze perché l'altra è simile. Consideriamo i morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b \xrightarrow{f} c$$

Poiché 0 è iniziale, la composizione delle ultime due frecce è l'unica che può esserci. Quindi $f \circ 0_a^b$ è la composizione della freccia $a \to 0$ con la freccia $0 \to c$, ed abbiamo concluso. □

Definizione 1.1.4 (Kernel e cokernel)**.** In una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il *kernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi degli equalizzatori di

$$a \overset{f}{\underset{0_a^b}{\rightrightarrows}} b$$

Dualmente, il *cokernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi dei coequalizzatori della stessa coppia di morfismi.

Osservazione 1.1.5. Ricordiamo che in generale gli equalizzatori sono monomorfismi e i coequalizzatori sono epimorfismi. Questa informazione può dare delle indicazioni su come sono fatti i kernel e i cokernel in categorie in cui monomorfismo ed epimorfismo significano rispettivamente iniettivo e suriettivo.

Esempio 1.1.6 (Kernel di omomorfismi di moduli)**.** In Algebra, si parla di *kernel* di morfismi in vari ambiti. Per esempio, se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$$

è un sottomodulo di M. Per entrare nel linguaggio della Teoria delle Categorie,

> l'omomorfismo inclusione $i : \ker f \hookrightarrow M$ è un equalizzatore della coppia di omomorfismi
> $$M \overset{f}{\underset{0_M^N}{\rightrightarrows}} N$$

Esempio 1.1.7 (Cokernel di omomorfismi di moduli)**.** Se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\operatorname{coker} f := \frac{N}{\operatorname{im} f}$$

è un sottomodulo di M chiamato *cokernel* di f. Questa nozione è il duale di kernel, nel senso che

> l'omomorfismo di proiezione canonica al quoziente $\pi_N : N \to \operatorname{coker} f$ è un coequalizzatore della coppia di omomorfismi
> $$M \overset{f}{\underset{0_M^N}{\rightrightarrows}} N$$

Osservazione 1.1.8. In Algebra, kernel e cokernel sono degli oggetti, mentre tecnicamente come sono definiti qui sono dei morfismi.

1.2 *Categorie preadditive*

Definizione 1.2.1. Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathcal{C}$ in cui:

1. Per ogni $a, b \in |\mathcal{C}|$ la classe $\mathcal{C}(a, b)$ è dotata di un'operazione interna

$$+_{a,b} : \mathcal{C}(a, b) \times \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

e ha un elemento $0_a^b : a \to b$ che lo rendono un gruppo abeliano.

2. Per ogni $a, b, c \in |\mathcal{C}|$ e $f : a \to b$ di $\mathcal{C}$, le funzioni

$$f_* := \mathcal{C}(c, f) : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, c) : \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

sono omomorfismi di gruppi abeliani.

Richiamo 1.2.2. Ricordiamo che $f_*(g) := f \circ g$ mentre $f^*(h) := h \circ f$.

Spesso scriveremo semplicemente + senza pedici, perché in genere è chiaro di quali frecce stiamo sommando.

Inoltre, come nei primi teoremi di Algebra, il morfismo zero è l'unico elemento neutro e per ogni $f : a \to b$ è unico l'opposto. In coerenza con la notazione additiva indichiamo con $-f$ l'opposto di $f : a \to b$.

Un'altra osservazione da fare è questa. Il simbolo 0_a^b in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero indica il morfismo zero $a \to b$. Se $\mathcal{C}$ è preaddittiva, non sono notazioni in conflitto? No.

Proposizione 1.2.3. In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il morfismo nullo è elemento neutro.

Dimostrazione. Poiché 0 è iniziale, $\mathcal{C}(0, b)$ è banale e in particolare 0_0^b è elemento neutro. L'omomorfismo

$$\left(0_a^0\right)^* : \mathcal{C}(0, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

manda l'elemento neutro del dominio in quello del codominio, che è

$$\left(0_a^0\right)^* \left(0_0^b\right) = 0_0^b \circ 0_a^0 = 0_a^b. \qquad \square$$

Ora parleremo di alcune peculiarità dei limiti e dei colimiti in categorie preadditive.

Osservazione 1.2.4. A tal proposito è utile osservare che se $\mathcal{C}$ è una categoria preadditiva, anche il suo duale $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ lo è. La conseguenza più pratica per noi è che dimezza le dimostrazioni: una volta dimostrato un enunciato, quello duale è automatico.

Proposizione 1.2.5. In un categoria preadditiva $\mathcal{C}$ gli oggetti terminali sono iniziali e viceversa.

Quindi in una categoria preadditiva gli oggetti terminali e iniziali sono oggetti zero.

Dimostrazione. Sia t un oggetto terminale di $\mathcal{C}$. Se riusciamo a mostrare che $\mathcal{C}(t, a)$ è un gruppo banale per ogni oggetto a di $\mathcal{C}$, allora possiamo concludere. Prendiamo un $f : t \to a$ qualsiasi in $\mathcal{C}$ e guardiamo l'omomorfismo di gruppi

$$f_* = \mathcal{C}(t, f) : \mathcal{C}(t, t) \to \mathcal{C}(t, a).$$

Il dominio è un gruppo banale perché t è terminale; in particolare, $1_t = 0_t^t$. Inoltre, trattandosi di omomorfismo,

$$\underbrace{f_*(1_t)}_{=f} = f \circ 0_t^t = 0_t^a. \qquad \square$$

Vediamo i prodotti e i coprodotti finiti ora.

Proposizione 1.2.6. Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero 0 e

$$a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$$

un prodotto in $\mathcal{C}$. Grazie alla proprietà universale di prodotto, introduciamo le frecce $i_a : a \to a \times b$ e $i_b : b \to a \times b$ come le uniche frecce di $\mathcal{C}$ che fanno commutare i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "1_a"'] \arrow[d] \arrow[dr, "0_a^b"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dl, "0_b^a"'] \arrow[d] \arrow[dr, "1_b"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \times b \xleftarrow{i_b} b$$

è coprodotto in $\mathcal{C}$. Dualmente, se

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

è un coprodotto e se $p_a : a + b \to a$ e $p_b : a + b \to b$ sono introdotti attraverso la proprietà universale di coprodotto come le uniche frecce che fanno commutare i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
 & a & \\
a \arrow[ur, "1_a"] \arrow[r, "i_a"'] & a + b \arrow[u] & b \arrow[ul, "0_b^a"'] \arrow[l, "i_b"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a & \\
a \arrow[ur, "1_a"] \arrow[r, "i_a"'] & a + b \arrow[u] & b \arrow[ul, "0_b^a"'] \arrow[l, "i_b"]
\end{tikzcd}$$

allora

$$a \xleftarrow{p_a} a + b \xrightarrow{p_b} b$$

è un prodotto in $\mathcal{C}$.

In breve: in categorie preadditive si ha $a \times b \cong a + b$.

Dimostrazione. Possiamo limitarci a dimostrare solo il primo fatto. Consideriamo un qualsiasi oggetto con morfismi

$$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$$

e cerchiamo un modo di costruire un morfismo $a \times b \to c$. Le frecce $f \circ p_a$ e $g \circ p_b$ sono di questo tipo, ma non vanno bene per i nostri scopi. Invece la somma sì, perché il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & c & \\
a \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "i_a"'] & a + b \arrow[u, "f \circ p_a + g \circ p_b"] & b \arrow[ul, bend right, "g"'] \arrow[l, "i_b"]
\end{tikzcd}$$

commuta. □

Definizione 1.2.7. Un *biprodotto* in una categoria preadditiva consta di oggetti e frecce

$$a \underset{i_a}{\overset{p_a}{\leftrightarrows}} c \underset{i_b}{\overset{p_b}{\rightleftarrows}} b$$

tali che

$$p_a \circ i_a = 1_a \tag{1.2.1}$$
$$p_b \circ i_b = 1_b \tag{1.2.2}$$
$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_c \tag{1.2.3}$$

Osservazione 1.2.8. Dalle identità 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 discendono

$$p_a \circ i_b = 0^a_b \tag{1.2.4}$$
$$p_b \circ i_a = 0^b_a \tag{1.2.5}$$

Proviamo solo la prima visto che l'altra si fa similmente.

$$p_a \underbrace{=}_{(1.2.3)} p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \underbrace{=}_{(1.2.1)} p_a + p_a \circ i_b \circ p_b$$

da cui

$$p_a \circ i_b \circ p_b = 0^a_c.$$

Postcomponendo con i_b e usando (1.2.2), concludiamo $p_a \circ i_b = 0^a_b$.

Un'altra proprietà utile per il futuro è questa.

Proposizione 1.2.9. I morfismi i_a e i_b della Definizione 1.2.7 sono monici. I morfismi p_a e p_b invece sono epici.

Dimostrazione. Ad esempio, sia $i_a \circ f = i_a \circ g$. Precomponendo ambo i mebri con p_a, a causa di (1.2.1), si ha $f = g$. Sia ora $k \circ p_a = h \circ p_a$. Postcomponendo ambi membri per i_a, sempre a causa di (1.2.1), si arriva a $h = k$. □

Proposizione 1.2.10. In una categoria preadditiva con oggetto zero 0, un prodotto

$$a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$$

dà un biprodotto

$$a \underset{i_a}{\overset{p_a}{\leftrightarrows}} a \times b \underset{i_b}{\overset{p_b}{\rightleftarrows}} b$$

in cui i_a e i_b sono introdotti come nella proposizione precedente. Dualmente, un coprodotto

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

dà un biprodotto

$$a \underset{i_a}{\overset{p_a}{\leftrightarrows}} a + b \underset{i_b}{\overset{p_b}{\rightleftarrows}} b$$

in cui p_a e p_b sono introdotti come nella proposizione precedente. Viceversa, se si ha un biprodotto

$$a \underset{i_a}{\overset{p_a}{\leftrightarrows}} a + b \underset{i_b}{\overset{p_b}{\rightleftarrows}} b$$

allora la coppia di frecce p_a e p_b è prodotto e la coppia i_a e i_b è coprodotto.

Quindi in categorie preadditive esiste un modo piuttosto compatto di esprimere prodotti e coprodotti (che sono la stessa cosa) senza passare per le proprietà universali.

Dimostrazione. Verifichiamo ad esempio che i prodotti danno biprodotti. Le identità (1.2.1), (1.2.2), (1.2.4) e (1.2.5) discendono direttamente da come sono introdotte i_a e i_b. Consideriamo ora il morfismo

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b : a \times b \to a \times b.$$

Componendo una volta con p_a e l'altra con p_b si ha

$$p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = \underbrace{p_a \circ i_a}_{=1_a} \circ p_a + \underbrace{p_a \circ i_b}_{=0_b^a} \circ p_b = p_a$$

$$p_b \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = \underbrace{p_b \circ i_a}_{=0_a^b} \circ p_a + \underbrace{p_b \circ i_b}_{=1_b} \circ p_b = p_b$$

Per la proprietà universale di prodotto, si può concludere che

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_{a \times b}.$$

Per il viceversa prendendo qualsiasi coppia di morfismi

$$a \xleftarrow{f} a \times b \xrightarrow{g} b$$

si ha

$$p_a \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = f$$
$$p_b \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = g$$

Ora se $h : c \to a \times b$ è tale che $p_a \circ h = f$ e $p_b \circ h = g$, allora

$$h = 1_{a \times b} \circ h = (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ h = i_a \circ f + i_b \circ g. \qquad \square$$

Proposizione 1.2.11. In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, gli equalizzatori di

$$a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

sono equalizzatori di

$$a \underset{0_a^b}{\overset{f-g}{\rightrightarrows}} b$$

e viceversa. Analogamente vale per i coequalizzatori.

Quindi un (co)equalizzatore di una coppia di morfismi è un (co)kernel della differenza dei due.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$e \xrightarrow{i} a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

commuta se e solo se commuta

$$e \xrightarrow{i} a \underset{0_a^b}{\overset{f-g}{\rightrightarrows}} b \qquad \square$$

1.3 *Categorie additive*

Definizione 1.3.1. Una *categoria additiva* è una categoria che ha oggetto zero e che per ogni coppia di oggetti a e b possiede biprodotto

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a \oplus b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"]
\end{tikzcd}
$$

2 Categorie esatte

In questo capitolo raccogliamo una serie di risultati elementari sulle successioni esatte corte, seguendo da vicino la trattazione che si può trovare in [Büh09].

2.1 *Coppie kernel-cokernel*

Definizione 2.1.1. Una *coppia kernel-cokernel* in una categoria additiva $\mathcal{C}$ consiste di due morfismi consecutivi

$$a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{p} c$$

tali che i è un kernel di p e p è un cokernel di i.

Esempio 2.1.2. Sia in $\mathbf{Mod}_R$ un omomorfismo $f : M \to N$ e consideriamo la proiezione al quoziente

$$\pi : M \to M/\ker f.$$

Come si è visto (Esempio 1.1.6) il kernel è $\ker \pi = \ker f$ con l'inclusione. Viceversa

$$i : \ker f \hookrightarrow M$$

ha come cokernel π (Esempio 1.1.7). Quindi

$$\ker f \xhookrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{\ker f}$$

è una coppia ker-coker in $\mathbf{Mod}_R$. In generale, se H è un sottomodulo di M, allora

$$H \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi_H} \frac{M}{H}$$

è una coppia ker-coker.

Osservazione 2.1.3. Ricordiamo che i kernel sono certi equalizzatori, quindi sono monomorfismi. Dualmente, i cokernel sono dei coequalizzatori, quindi sono epimorfismi.

I seguenti lemmi sono in preparazione alla successiva definizione.

Lemma 2.1.4. In una categoria additiva $\mathcal{C}$,

$$0 \xrightarrow{\exists!} a \xrightarrow{1_a} a$$

è una coppia ker-coker.

Dimostrazione. Il diagramma

$$0 \xrightarrow{\exists!} a \underset{0_a^a}{\overset{1_a}{\rightrightarrows}} a$$

commuta perché $\mathcal{C}(0, a)$ è banale, essendo 0 iniziale. Sia $i : e \to a$ tale che

$$e \xrightarrow{i} a \underset{0_a^a}{\overset{1_a}{\rightrightarrows}} a$$

commuta, cioè $i = 0_e^a$. Essendo 0 terminale, c'è esattamente un $e \to 0$. Il triangolo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] & a \\ e \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

commuta per come sono definiti i morfismi nulli. Verifichiamo ora che 1_a è cokernel di $0 \to a$. Anzitutto

$$0 \underset{0_0^a}{\overset{\exists!}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{1_a} a$$

commuta poichè $\mathcal{C}(0, a)$ è banale (0 è iniziale). Sia $j : a \to q$ tale che

$$0 \underset{0_0^a}{\overset{\exists!}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{j} q$$

commuta. Esiste uno e una sola freccia $a \to q$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "1_a"] \arrow[dr, "j"'] & a \arrow[d] \\ & q \end{tikzcd}$$

ed è j stessa. $\square$

Lemma 2.1.5. In una categoria additiva $\mathcal{C}$ considerare il biprodotto

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a \oplus b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \xrightarrow{p_b} b$$

$$b \xrightarrow{i_b} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

sono coppie ker-coker.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione solo la prima coppia, la dimostrazione dell'altra è simile. Il diagramma

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \underset{0_{a\oplus b}^b}{\overset{p_b}{\rightrightarrows}} b$$

commuta, vedi Definizione 1.2.7. Consideriamo ora il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "j"] & a \oplus b \arrow[r, shift left, "p_p"] \arrow[r, shift right, "0^b_{a\oplus b}"'] & b \end{tikzcd}$$

Essendo i_a un monomorfismo, allora è sufficiente mostrare costruire un morfismo $c \to a$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i_a"] & a \oplus b \\ c \arrow[u] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Ciò che possiamo prendere in esame con quello che abbiamo è

$$p_a \circ j : c \xrightarrow{j} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

Infatti

$$\begin{aligned} j = 1_{a\oplus b} \circ j \underbrace{=}_{(1.2.3)} (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ j = \\ = i_a \circ p_a \circ j + i_b \circ \underbrace{p_b \circ j}_{=0^b_{a\oplus b}\circ j = 0^b_c} = i \circ p_a \circ j. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.6. Siano in una categoria additiva $\mathcal{C}$

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

$$a' \xrightarrow[f']{} b' \xrightarrow[g']{} c'$$

con f e f' kernel di g e g' rispettivamente. Allora $f \oplus f' : a \oplus a' \to b \oplus b'$ è kernel di $g \oplus g' : b \oplus b' \to c \oplus c'$. Dualizzando, si ha che se g e g' sono cokernel di f e f' rispettivamente, allora $g \oplus g'$ è cokernel di $f \oplus f'$.

Dimostrazione. Verifichiamo che

$$\begin{tikzcd} a \oplus a' \arrow[r, "f\oplus f'"] & b \oplus b' \arrow[r, shift left, "g\oplus g'"] \arrow[r, shift right, "0^{c\oplus c'}_{b\oplus b'}"'] & c \oplus c' \end{tikzcd}$$

commuta. Poiché $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è un bifuntore [scrivere di questa cosa nell'introduzione], infatti

$$(g \oplus g') \circ (f \oplus f') = (g \circ f) \otimes (g' \circ f) = 0^{c\oplus c'}_{a\oplus a'}$$

Consideriamo ora un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "h"] & b \oplus b' \arrow[r, shift left, "g\oplus g'"] \arrow[r, shift right, "0^{c\oplus c'}_{b\oplus b'}"'] & c \oplus c' \end{tikzcd}$$

e troviamo un modo di costruire una freccia $d \to a \oplus a'$ in modo che commuti

$$\begin{tikzcd} a \oplus a' \arrow[r, "f\oplus f'"] & b \oplus b' \\ d \arrow[u] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Abbiamo le frecce

$$p_b^{bb'} \circ h : d \to b$$
$$p_{b'}^{bb'} \circ h : d \to b'$$

che rendono commutativi i diagrammi

$$d \xrightarrow{p_b^{bb'} \circ h} b \underset{0_b^c}{\overset{g}{\rightrightarrows}} c$$

e

$$d \xrightarrow{p_{b'}^{bb'} \circ h} b' \underset{0_{b'}^{c'}}{\overset{g'}{\rightrightarrows}} c'$$

rispettivamente. Per la proprietà universale di equalizzatore, esistono unici $i : d \to a$ e $j : d \to a'$ tali che

$$f \circ i = p_b^{bb'} \circ h$$
$$f' \circ j = p_{b'}^{bb'} \circ h.$$

La proprietà universale di prodotto ci permette di introdurre $(i, j) : d \to a \oplus a'$. Calcoliamo ora:

$$p_b^{bb'} \circ (f \oplus f') \circ (i, j) = f \circ p_a^{aa'} \circ (i, j) = f \circ i = p_b^{bb'} \circ h$$
$$p_{b'}^{bb'} \circ (f \oplus f') \circ (i, j) = f' \circ p_{a'}^{aa'} \circ (i, j) = f' \circ j = p_{b'}^{bb'} \circ h$$

Quindi, sempre per la proprietà universale di prodotto, possiamo concludere che

$$(f \oplus f') \circ (i, j) = h.$$

La parte dell'unicità della freccia $d \to a \oplus a'$ è immediata: $f \oplus f'$ è un monomorfismo essendo f oppure f' – in questo caso entrambi – monici (ricorda che i kernel sono equalizzatori e quindi sono monomorfismi). □

2.2 *Stutture e categorie esatte*

Definizione 2.2.1. Una *struttura esatta* per una categoria additiva $\mathcal{C}$ è una classe $\mathcal{E}$ di coppie ker-coker in $\mathcal{C}$ con le seguenti proprietà:

(E1) Per ogni $a \in |\mathcal{C}|$, le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{*} *$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E2) Per ogni $a \in |\mathcal{C}|$, le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{1_a} a$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E3) Se $\mathcal{E}$ contiene le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{*} *$$
$$b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{*} *$$

allora contiene anche le coppie ker-coker

$$a \xrightarrow{g\circ f} c \xrightarrow{*} *$$

(E4) Se $\mathcal{E}$ contiene le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{f} b$$
$$* \xrightarrow{*} b \xrightarrow{g} c$$

allora anche le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{g\circ f} c$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E5) Se

$$a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{*} *$$

sta in $\mathcal{E}$ e $f : a \to a'$ è in $\mathcal{C}$, il pushout di i lungo f esiste in $\mathcal{C}$ e, indicandolo con $i' : a' \to b'$, anche le coppie ker-coker

$$a' \xrightarrow{i'} b' \xrightarrow{*} *$$

stanno in $\mathcal{E}$.

(E6) Se

$$* \xrightarrow{*} a \xrightarrow{p} b$$

sta in $\mathcal{E}$ e $f : c' \to c$ è in $\mathcal{C}$, il pullback di p lungo f esiste in $\mathcal{C}$ e, indicandolo con $p' : b' \to c'$, anche le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a' \xrightarrow{p'} b'$$

stanno in $\mathcal{E}$.

Una *categoria esatta* è una coppia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ come sopra e gli elementi di $\mathcal{E}$ si chiamano *sequenze esatte corte.*

Primi esempi di sequenze esatte corte derivano coinvolgono le identità.

Proposizione 2.2.2. Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta. Sono successioni esatte corte

$$0 \xrightarrow{\exists!} a \xrightarrow{1_a} a$$
$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{\exists!} 0$$

In $\mathbf{Mod}_R$ questo vuol dire una cosa piuttosto semplice: il kernel dell'omomorfismo $1_M : M \to M$ è banale, mentre il cokernel è M stesso.

Dimostrazione. Grazie al Lemma 2.1.4, le due coppie sono ker-coker. Poi si invocano Definizione 2.2.1-E1 e Definizione 2.2.1-E2. $\square$

Richiamo 2.2.3. In generale, in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto terminale 1 un pullback di

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\exists!"] \\ b \arrow[r, "\exists!"'] & 1 \end{tikzcd}$$

è un prodotto di a e b. Dualmente, se C è una categoria con oggetto iniziale 0, allora un pushout di

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\exists!"] \arrow[d, "\exists!"'] & a \\ b & \end{tikzcd}$$

è un coprodotto di a e b.

Proposizione 2.2.4. Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e sia

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a \oplus b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

un biprodotto. Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \oplus b \xrightarrow{p_b} b$$
$$b \xrightarrow{i_b} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

sono sequenze esatte corte, cioè coppie ker-coker in $\mathcal{E}$.

Il Lemma 2.1.5 ci dava queste due coppie ker-coker. Questo proposizione invece dice che ogni struttura esatta contiene queste coppie ker-coker.

Dimostrazione. Per il richiamo appena fatto,

$$\begin{tikzcd} a \oplus b \arrow[r, "p_a"] \arrow[d, "p_b"'] & a \arrow[d, "\exists!"] \\ b \arrow[r, "\exists!"'] & 0 \end{tikzcd}$$

è un quadrato di pushout. Inoltre per la Proposizione 2.2.2, la base di questo diagramma è parte della sequenza esatta corta $b \xrightarrow{1_b} b \xrightarrow{\exists!} 0$. Possiamo appellarci a Definizione 2.2.1-E6 ora: il pullback di $b \to 0$ lungo $a \to 0$, va a dire p_a, è tale che le coppie ker-coker

$$* \xrightarrow{*} a \oplus b \xrightarrow{p_a} a$$

stanno in $\mathcal{E}$. Il Lemma 2.1.5 ci dà quella che ci serve. □

Richiamo 2.2.5. In generale, in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto terminale 1, se

$$a \xleftarrow{p_a} a \times 1 \xrightarrow{p_1} 1$$

è un prodotto, allora l'unico morfismo $a \to a \times 1$ che fa commutare

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "1_a"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\exists!"] & \\ a & a \times 1 \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_1"'] & 1 \end{tikzcd}$$

è un isomorfismo. Quindi, se $\mathcal{C}$ è anche preadditiva, allora questo isomorfismo è $i_a : a \to a \oplus 0$ che ha inversa $p_a : a \oplus 0 \to a$.

Proposizione 2.2.6. "In una categoria esatta corta la somma di sequenze esatte corte è esatta corta". Vale a dire: in una categoria esatta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, se

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

$$a' \xrightarrow[f']{} b' \xrightarrow[g']{} c'$$

sono sequenze esatte corte, allora anche

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus g} a' \oplus b' \xrightarrow{f' \oplus g'} a'' \oplus b'' \tag{2.2.1}$$

lo è.

Dimostrazione. Il piano per la dimostrazione si struttura su questa osservazione: se riusciamo a dimostrare che

$$\begin{gathered} a \oplus b \xrightarrow{f \oplus 1_b} a' \oplus b \xrightarrow{f' \circ p_{a'}^{a'b}} a'' \\ a' \oplus b \xrightarrow[1_a \oplus g]{} a' \oplus b' \xrightarrow[g' \circ p_{b'}^{a'b'}]{} b'' \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

sono esatte corte allora, a causa di Definizione 2.2.1-E4 sono sequenze esatte le coppie ker-coker

$$a \oplus b \overset{f \oplus g}{\longrightarrow} a' \oplus b' \xrightarrow{*} *$$

A questo punto Lemma 2.1.6 permette di concludere l'opera.
Mostriamo solo che la prima delle (2.2.2) è esatta corta, perché l'altra si fa similmente. A causa del Lemma 2.1.5 e della Definizione 2.2.1-E4, è sufficiente dimostrare che la prima delle 2.2.2 è una coppia ker-coker. Il Lemma 2.1.6 ci dà una coppia ker-coker che coinvolge $f \oplus 1_b$:

$$a \oplus b \xrightarrow{f \oplus 1_b} a' \oplus b \xrightarrow{f' \oplus 0_b^0} a'' \oplus 0$$

Ricordando ora che $p_{a''}^{a''0} : a \oplus 0 \to a$ è un isomorfismo e che $p_{a''}^{a''0} \circ (f' \oplus 0_b^0) = f \circ p_{a'}^{a'b}$, abbiamo finito. $\square$

Bibliografia

[Büh09] Theo Bühler. *Exact Categories*. 2009. URL: https://arxiv.org/abs/0811.1480.

[Lei16] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1612.09375.

[Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.

[Rie17] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context/.