

Categorie esatte

Indrjo Dedej

Università degli Studi di Pavia

Pavia, 28/10/2025



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

Due categorie...

	Mod_R	Ban
oggetti	moduli su R	spazi di Banach
morfismi	applicazioni lineari	applicazioni lineari limitate

Richiamo: un'applicazione lineare tra spazi normati

$f : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ è detta *limitata* se esiste $M > 0$ per cui $\|fx\| \leq M \|x\|_X$ per ogni $x \in X$.

Kernel e cokernel

Definizione

Sia \mathcal{C} una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0 .

- *Morfismo nullo* $0_A^B : A \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} B$
- *Kernel* di $f : A \rightarrow B$: equalizzatore di $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0_A^B} \end{smallmatrix} B$
- *Cokernel* di $f : A \rightarrow B$: coequalizzatore di $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{0_A^B} \end{smallmatrix} B$

Esempi

In \mathbf{Mod}_R :

- kernel di $f : M \rightarrow N$: inclusione $\ker f \hookrightarrow M$
- cokernel di $f : M \rightarrow N$: proiezione canonica $N \rightarrow N/\operatorname{im} f$

In \mathbf{Ban} :

- kernel di $f : M \rightarrow N$: inclusione $\ker f \hookrightarrow M$
- cokernel di $f : M \rightarrow N$: proiezione canonica $N \rightarrow \overline{N/\operatorname{im} f}$

Richiamo: $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach e $M \subseteq X$ chiuso $\implies (X/M, [\cdot])$ spazio di Banach con $\|x + M\| := \inf_{m \in M} \|x + m\|$

Categorie preadditive

Definizione

Una *categoria preadditiva* è una categoria \mathcal{C} in cui:

- 1 Per ogni $A, B \in |\mathcal{C}|$ la classe $\mathcal{C}(A, B)$ è dotata di un'operazione interna

$$+_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, B)$$

e ha un elemento $0_A^B : A \rightarrow B$ che lo rendono un gruppo abeliano.

- 2 Per ogni $A, B, C, D \in |\mathcal{C}|$ e $f : A \rightarrow B$ di \mathcal{C} , le funzioni

$$f_* := \mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) \rightarrow \mathcal{C}(C, B)$$

$$f^* := \mathcal{C}(f, D) : \mathcal{C}(B, D) \rightarrow \mathcal{C}(A, D)$$

sono omomorfismi di gruppi abeliani.

Proprietà ed esempi

- **\mathbf{Mod}_R** e **\mathbf{Ban}** sono categorie preaddittive.
- Un adagio: in una categoria preadditiva con oggetto zero 0 , $f : A \rightarrow B$ è monomorfismo se e solo se $0 \xrightarrow{\exists!} A$ è kernel di f .
- Enunciato duale.
- Esempio: caratterizzazione morfismi di **\mathbf{Ban}**

Biprodotti

Definizione

Un *biprodotto* in una categoria preadditiva consta di oggetti e frecce

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{p_A} \\ \xrightarrow{i_A} \end{array} C \begin{array}{c} \xleftarrow{p_B} \\ \xrightarrow{i_B} \end{array} B$$

tali che

$$p_A i_A = 1_A \quad (1)$$

$$p_B i_B = 1_B \quad (2)$$

$$i_A p_A + i_B p_B = 1_C \quad (3)$$

Proposizione

(p_A, p_B) è un prodotto, (i_A, i_B) è un coprodotto.

Categorie additive

Definizione

Una *categoria additiva* è una categoria che ha oggetto zero e che per ogni coppia di oggetti A e B possiede biprodotto

$$A \begin{matrix} \xleftarrow{p_A^{AB}} \\ \xrightarrow{i_A^{AB}} \end{matrix} A \oplus B \begin{matrix} \xleftarrow{p_B^{AB}} \\ \xrightarrow{i_B^{AB}} \end{matrix} B$$

Esempio

Mod _{R} e **Ban** sono additive.

Richiamo: norma su $X \oplus Y$ in **Ban**: $\|(x, y)\|_{X \oplus Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$

Categorie Abeliane

Definizione

Una *categoria abeliana* è una categoria additiva in cui:

- 1 Ogni morfismo ha un kernel e un cokernel.
- 2 Ogni monomorfismo è un kernel e ogni epimorfismo è un cokernel.

Esempi

- **Mod_R** è una categoria abeliana.
- **Ban** è una categoria abeliana?

Categorie Abeliane

Proprietà

- Le categorie abeliane sono finitamente complete e cocomplete.
- Nelle categorie abeliane, $\text{mono e epi} \implies \text{iso}$.

Categorie Abeliane

Proprietà

- Le categorie abeliane sono finitamente complete e cocomplete.
- Nelle categorie abeliane, $\text{mono e epi} \implies \text{iso}$.

Esempio

Quindi, no, **Ban** non è abeliana.

$$C_c^0[a, b] \hookrightarrow L^p[a, b]$$

è mono ed epi, ma non iso.

Verso le categorie esatte

Proposizione

In una categoria abeliana, i pushout preservano i kernel e i pullback preservano i cokernel.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & B \\
 f \downarrow & PO & \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 B' & \xrightarrow{p'} \twoheadrightarrow & C' \\
 \downarrow & PB & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{p} \twoheadrightarrow & C
 \end{array}$$

Verso le categorie esatte

Proposizione

In una categoria abeliana, i pushout preservano i kernel e i pullback preservano i cokernel.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & B \\
 f \downarrow & PO & \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 B' & \xrightarrow{p'} \twoheadrightarrow & C' \\
 \downarrow & PB & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow[p]{} \twoheadrightarrow & C
 \end{array}$$

Ma...

Anche in **Ban** vale!

Categorie quasi-abeliane

Definizione

Una *categoria quasi-abeliana* è una categoria additiva in cui:

- ① Ogni morfismo ha kernel e cokernel.
- ② I pushout preservano i kernel e i pullback preservano i cokernel.

Esempio

Ban è quasi-abeliana.

Proposizione

Abeliana \implies quasi-abeliana.

Definizione categorie esatte, I

Definizione

Una *struttura esatta* per una categoria additiva \mathcal{C} è una classe \mathcal{E} di coppie \ker - coker di \mathcal{C} in cui:

- Chiamiamo *monomorfismi ammissibili* le frecce $i : A \rightarrow B$ per le quali esiste $p : B \rightarrow C$ tale che $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ appartiene ad \mathcal{E} .
- Chiamiamo *epimorfismi ammissibili* le frecce $p : B \rightarrow C$ per le quali esiste $i : A \rightarrow B$ tale che $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ appartiene ad \mathcal{E} .

tale che...

Definizione categorie esatte, II

Definizione

... tale che:

- \mathcal{E} è chiusa per isomorfismo, cioè se $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ è in \mathcal{E} ed è isomorfo a $A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{p'} C'$ come oggetto di $\mathcal{C}^{\rightarrow\rightarrow}$, allora anche quest'ultima coppia di frecce è in \mathcal{E} .
- $1_A : A \rightarrow A$ è un monomorfismo ammissibile per ogni $A \in |\mathcal{C}|$.
- $1_A : A \rightarrow A$ è un epimorfismo ammissibile per ogni $A \in |\mathcal{C}|$.
- La composizione di due monomorfismi ammissibili è un monomorfismo ammissibile.
- La composizione di due epimorfismi ammissibili è un epimorfismo ammissibile.

...

Definizione categorie esatte, III

Definizione

...

- Il pushout di un monomorfismo ammissibile lungo un qualsiasi morfismo di \mathcal{C} esiste ed è un monomorfismo ammissibile.
- Il pullback di un epimorfismo ammissibile lungo un qualsiasi morfismo di \mathcal{C} esiste ed è un epimorfismo ammissibile.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & B \\
 f \downarrow & PO & \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 B' & \xrightarrow{p'} \twoheadrightarrow & C' \\
 \downarrow & PB & \downarrow g \\
 B & \xrightarrow{p} \twoheadrightarrow & C
 \end{array}$$

Una *categoria esatta* è una coppia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ come sopra e gli elementi di \mathcal{E} si chiamano *successioni esatte corte*.

Alcune osservazioni

- Una categoria è esatta perché viene munita di una struttura, mentre per le categorie abeliane e quasi-abeliane gli assiomi sulla struttura sono proprietà interne.

Alcune osservazioni

- Una categoria è esatta perché viene munita di una struttura, mentre per le categorie abeliane e quasi-abeliane gli assiomi sulla struttura sono proprietà interne.

Proposizione

Per una categoria quasi-abeliana \mathcal{C} ci sono diverse strutture esatte:

- la classe \mathcal{E}_{\max} di tutte le coppie ker-coker di \mathcal{C}
- la classe $\mathcal{E}_{\text{split}}$ delle coppie ker-coker

$$A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \xrightarrow{p_B} B$$

e coppie ker-coker isomorfe.

Successioni esatte corte, I

Proposizione

Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta e sia

$$A \begin{array}{c} \xleftarrow{p_A} \\ \xrightarrow{i_A} \end{array} A \oplus B \begin{array}{c} \xleftarrow{p_B} \\ \xrightarrow{i_B} \end{array} B$$

un biprodotto. Allora

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus B & \xrightarrow{p_B} & B \\ B & \xrightarrow{i_B} & A \oplus B & \xrightarrow{p_A} & A \end{array}$$

sono successioni esatte corte, cioè coppie ker-coker in \mathcal{E} .

Successioni esatte corte, II

Proposizione

“In una categoria esatta la somma di successioni esatte corte è esatta corta”. Vale a dire: in una categoria esatta $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, se

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C'$$

sono successioni esatte corte, allora lo è anche

$$A \oplus A' \xrightarrow{f \oplus f'} B \oplus B' \xrightarrow{g \oplus g'} C \oplus C'$$

Successioni esatte corte, III

Proposizione

In una categoria esatta consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow f' \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B'
 \end{array}$$

Sono equivalenti:

- Il quadrato è di pushout.
- $A \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ f \end{pmatrix}} B \oplus A' \xrightarrow{(f' - i')} B'$ è esatta corta.
- ...

Successioni esatte corte, III

Proposizione

- ...
- Il quadrato è bicartesiano (cioè di pullback e di pushout).
- Il quadrato è parte del diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & B & & \\
 f \downarrow & & f' \downarrow & \searrow p & \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B' & \nearrow p' & C
 \end{array}$$

dove (i, p) e (i', p') sono successioni esatte corte.

Ancora un risultato

Teorema di Noether, " $C/B \cong (C/A)/(B/A)$ "

In una categoria esatta, sia il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & B & \twoheadrightarrow & X \\
 \downarrow 1_A & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{\quad} & C & \twoheadrightarrow & Y \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & Z & \xrightarrow{1_Z} & Z
 \end{array}$$

in cui le prime due righe orizzontali e la colonna centrale sono esatte corte. Allora la terza colonna esiste, è esatta corta e è unicamente determinata dalla condizione che rende il diagramma commutativo. Inoltre, il quadrato in alto a destra è bicartesiano.

Un teorema di embedding, I

Lemma di Yoneda

Se \mathcal{C} è una categoria localmente piccola, l'embedding di Yoneda $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ è un funtore pieno e fedele.

Un teorema di embedding, I

Lemma di Yoneda

Se \mathcal{C} è una categoria localmente piccola, l'embedding di Yoneda $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ è un funtore pieno e fedele.

Domanda

E se \mathcal{C} è una categoria additiva?

Possiamo considerare questo embedding di Yoneda:

$$\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]$$

Un teorema di embedding, I

Lemma di Yoneda

Se \mathcal{C} è una categoria localmente piccola, l'embedding di Yoneda $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ è un funtore pieno e fedele.

Domanda

E se \mathcal{C} è una categoria additiva?

Possiamo considerare questo embedding di Yoneda:

$$\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]$$

Teorema di embedding

Sia $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ una categoria esatta piccola. L'embedding di Yoneda $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]$ preserva e riflette l'esattezza.

Un teorema di embedding, II

Come $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ incorpora \mathcal{C} nella categoria dei prefasci $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$...

Un teorema di embedding, II

Come $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ incorpora \mathcal{C} nella categoria dei prefasci $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$...

... $\mathcal{Y} : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]$ incorpora una categoria esatta in una **categoria abeliana**: la sottocategoria piena dei funtori esatti a sinistra.