Categorie esatte

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 11 giugno 2025.

Indice

1 Preliminari 5

- 1.1 Kernel e cokernel 5
- 1.2 Categorie preadditive 6
- 1.3 Categorie additive 10

2 Categorie esatte 11

- 2.1 Coppie kernel-cokernel 11
- 2.2 Stutture e categorie esatte 11

1

Preliminari

In queste note si assume almeno la Teoria delle Categorie che si può imparare da [Lei16]. Un altro validissimo testo che insegna le basi è anche [Rie17]. Nozioni sulle categorie preadditive si possono trovare in [Mac78] che è considerato un vero e proprio classico.

1.1 Kernel e cokernel

Noi lavoreremo con categorie in cui sono presenti oggetti che sono sia terminali che iniziali. Oggetti di questo tipo sono detti *oggetti zero*. Non si tratta di categorie come **Set**, **Top** e **Ring**, ma è il caso di **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, con R anello.

Definizione 1.1.1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* che indichiamo con 0. Per $a, b \in |\mathcal{C}|$, il *morfismo nullo* o *zero* da a a b è la composizione dei morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b$$

Scriveremo questo morfismo come 0_a^b oppure, se dal contesto è chiaro, semplicemente 0.

Esempio 1.1.2. In casi come **Grp** e $\mathbf{Mod}_R$, il morfismo nullo è quello che manda tutti gli elementi del dominio nell'identità. Anche **Ring** possiede omomorfismi come questi; tuttavia in **Ring** l'oggetto iniziale è $\mathbb{Z}$ che non è terminale mentre i morfismi zero sono definiti attraverso oggetti zero.

Comporre con un morfismo nullo dà un morfismo nullo. Più precisamente:

Proposizione 1.1.3. Sia $\mathcal{C}$ una categoria con *oggetto zero* 0, e $a, b, c \in |\mathcal{C}|$. Allora per ogni $f : b \to c$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$f \circ 0_a^b = 0_a^c$$

e per ogni $g : c \to a$ di $\mathcal{C}$ si ha

$$0_a^b \circ g = 0_c^b.$$

Dimostrazione. Proviamo solo una delle due uguaglianze perché l'altra è simile. Consideriamo i morfismi

$$a \xrightarrow{\exists!} 0 \xrightarrow{\exists!} b \xrightarrow{f} c$$

Poiché 0 è iniziale, la composizione delle ultime due frecce è l'unica che può esserci. Quindi $f \circ 0_a^b$ è la composizione della freccia $a \to 0$ con la freccia $0 \to c$, ed abbiamo concluso. □

Definizione 1.1.4 (Kernel e cokernel)**.** In una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il *kernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi degli equalizzatori di

$$a \underset{0_a^b}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

Dualmente, il *cokernel* di $f : a \to b$ è uno qualsiasi dei coequalizzatori della stessa coppia di morfismi.

Osservazione 1.1.5. Ricordiamo che in generale gli equalizzatori sono monomorfismi e i coequalizzatori sono epimorfismi. Questa informazione può dare delle indicazioni su come sono fatti i kernel e i cokernel in categorie in cui monomorfismo ed epimorfismo significano rispettivamente iniettivo e suriettivo.

Esempio 1.1.6 (Kernel di omomorfismi di moduli)**.** In Algebra, si parla di *kernel* di morfismi in vari ambiti. Per esempio, se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$$

è un sottomodulo di M. Per entrare nel linguaggio della Teoria delle Categorie,

> l'omomorfismo inclusione $i : \ker f \hookrightarrow M$ è un equalizzatore della coppia di omomorfismi
>
> $$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

Esempio 1.1.7 (Cokernel di omomorfismi di moduli)**.** Se M e N sono due moduli su un fissato anello R e $f : M \to N$ è un omomorfismo, allora

$$\operatorname{coker} f := \frac{N}{\operatorname{im} f}$$

è un sottomodulo di M chiamato *cokernel* di f. Questa nozione è il duale di kernel, nel senso che

> l'omomorfismo di proiezione canonica al quoziente $\pi_N : N \to \operatorname{coker} f$ è un coequalizzatore della coppia di omomorfismi
>
> $$M \underset{0_M^N}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

Osservazione 1.1.8. In Algebra, kernel e cokernel sono degli oggetti, mentre tecnicamente come sono definiti qui sono dei morfismi.

1.2 Categorie preadditive

Definizione 1.2.1. Una *categoria preadditiva* è una categoria $\mathcal{C}$ in cui:

1. Per ogni $a, b \in |\mathcal{C}|$ la classe $\mathcal{C}(a, b)$ è dotata di un'operazione interna

   $$+_{a,b} : \mathcal{C}(a, b) \times \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

   e ha un elemento $0_a^b : a \to b$ che lo rendono un gruppo abeliano.

2. Per ogni $a, b, c \in |\mathcal{C}|$ e $f : a \to b$ di $\mathcal{C}$, le funzioni

$$f_* := \mathcal{C}(c, f) : \mathcal{C}(c, a) \to \mathcal{C}(c, b)$$
$$f^* := \mathcal{C}(f, c) : \mathcal{C}(b, c) \to \mathcal{C}(a, c)$$

sono omomorfismi di gruppi abeliani.

Richiamo 1.2.2. Ricordiamo che $f_*(g) := f \circ g$ mentre $f^*(h) := h \circ f$.

Spesso scriveremo semplicemente + senza pedici, perché in genere è chiaro di quali frecce stiamo sommando.

Inoltre, come nei primi teoremi di Algebra, il morfismo zero è l'unico elemento neutro e per ogni $f : a \to b$ è unico l'opposto. In coerenza con la notazione additiva indichiamo con $-f$ l'opposto di $f : a \to b$.

Un'altra osservazione da fare è questa. Il simbolo 0_a^b in una categoria $\mathcal{C}$ con oggetto zero indica il morfismo zero $a \to b$. Se $\mathcal{C}$ è preaddittiva, non sono notazioni in conflitto? No.

Proposizione 1.2.3. In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, il morfismo nullo è elemento neutro.

Dimostrazione. Poiché 0 è iniziale, $\mathcal{C}(0, b)$ è banale e in particolare 0_0^b è elemento neutro. L'omomorfismo

$$\left(0_a^0\right)^* : \mathcal{C}(0, b) \to \mathcal{C}(a, b)$$

manda l'elemento neutro del dominio in quello del codominio, che è

$$\left(0_a^0\right)^* \left(0_0^b\right) = 0_0^b \circ 0_a^0 = 0_a^b. \qquad \square$$

Ora parleremo di alcune peculiarità dei limiti e dei colimiti in categorie preadditive.

Osservazione 1.2.4. A tal proposito è utile osservare che se $\mathcal{C}$ è una categoria preadditiva, anche il suo duale $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ lo è. La conseguenza più pratica per noi è che dimezza le dimostrazioni: una volta dimostrato un enunciato, quello duale è automatico.

Proposizione 1.2.5. In un categoria preadditiva $\mathcal{C}$ gli oggetti terminali sono iniziali e viceversa.

Quindi in una categoria preadditiva gli oggetti terminali e iniziali sono oggetti zero.

Dimostrazione. Sia t un oggetto terminale di $\mathcal{C}$. Se riusciamo a mostrare che $\mathcal{C}(t, a)$ è un gruppo banale per ogni oggetto a di $\mathcal{C}$, allora possiamo concludere. Prendiamo un $f : t \to a$ qualsiasi in $\mathcal{C}$ e guardiamo l'omomorfismo di gruppi

$$f_* = \mathcal{C}(t, f) : \mathcal{C}(t, t) \to \mathcal{C}(t, a).$$

Il dominio è un gruppo banale perché t è terminale; in particolare, $1_t = 0_t^t$. Inoltre, trattandosi di omomorfismo,

$$\underbrace{f_*\left(1_t\right)}_{=f} = f\left(0_t^t\right) = 0_t^a. \qquad \square$$

Vediamo i prodotti e i coprodotti finiti ora.

Proposizione 1.2.6. Sia $\mathcal{C}$ una categoria preadditiva con oggetto zero 0 e

$$a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$$

un prodotto in $\mathcal{C}$. Grazie alla proprietà universale di prodotto, introduciamo le frecce $i_a : a \to a \times b$ e $i_b : b \to a \times b$ come le uniche frecce di $\mathcal{C}$ che fanno commutare i diagrammi

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "1_a"'] \arrow[d] \arrow[dr, "0_a^b"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & b \arrow[dl, "0_b^a"'] \arrow[d] \arrow[dr, "1_b"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b \end{tikzcd}$$

Allora

$$a \xrightarrow{i_a} a \times b \xleftarrow{i_b} b$$

è coprodotto in $\mathcal{C}$. Dualmente, se

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

é un coprodotto e se $p_a : a + b \to a$ e $p_b : a + b \to b$ sono introdotti attraverso la proprietà universale di coprodotto come le uniche frecce che fanno commutare i diagrammi

$$\begin{tikzcd} & a & \\ a \arrow[ur, "1_a"] \arrow[r, "i_a"'] & a + b \arrow[u] & b \arrow[ul, "0_b^a"'] \arrow[l, "i_b"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a & \\ a \arrow[ur, "1_a"] \arrow[r, "i_a"'] & a + b \arrow[u] & b \arrow[ul, "0_b^a"'] \arrow[l, "i_b"] \end{tikzcd}$$

allora

$$a \xleftarrow{p_a} a + b \xrightarrow{p_b} b$$

è un prodotto in $\mathcal{C}$.

In breve: in categorie preadditive si ha $a \times b \cong a + b$.

Dimostrazione. Possiamo limitarci a dimostrare solo il primo fatto. Consideriamo un qualsiasi oggetto con morfismi

$$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$$

e cerchiamo un modo di costruire un morfismo $a \times b \to c$. Le frecce $f \circ p_a$ e $g \circ p_b$ sono di questo tipo, ma non vanno bene per i nostri scopi. Invece la somma sì, perché il diagramma

$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "i_a"'] & a + b \arrow[u, "f \circ p_a + g \circ p_b"] & b \arrow[ul, bend right, "g"'] \arrow[l, "i_b"] \end{tikzcd}$$

commuta. □

Definizione 1.2.7. Un *biprodotto* in una categoria preadditiva consta di oggetti e frecce

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & c \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

tali che

$$p_a \circ i_a = 1_a \tag{1.2.1}$$
$$p_b \circ i_b = 1_b \tag{1.2.2}$$
$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_c \tag{1.2.3}$$

Osservazione 1.2.8. Dalle identità 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 discendono

$$p_a \circ i_b = 0^a_b \tag{1.2.4}$$
$$p_b \circ i_a = 0^b_a \tag{1.2.5}$$

Proviamo solo la prima visto che l'altra si fa similmente.

$$p_a \underbrace{=}_{(1.2.3)} p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \underbrace{=}_{(1.2.1)} p_a + p_a \circ i_b \circ p_b$$

da cui

$$p_a \circ i_b \circ p_b = 0^a_c.$$

Postcomponendo con i_b e usando (1.2.2), concludiamo $p_a \circ i_b = 0^a_b$.

Proposizione 1.2.9. In una categoria preadditiva con oggetto zero 0, un prodotto

$$a \xleftarrow{p_a} a \times b \xrightarrow{p_b} b$$

dà un biprodotto

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a \times b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

in cui i_a e i_b sono introdotti come nella proposizione precedente. Dualmente, un coprodotto

$$a \xrightarrow{i_a} a + b \xleftarrow{i_b} b$$

dà un biprodotto

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a + b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

in cui p_a e p_b sono introdotti come nella proposizione precedente. Viceversa, se si ha un biprodotto

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_a"'] & a + b \arrow[l, shift right, "p_a"'] \arrow[r, shift left, "p_b"] & b \arrow[l, shift left, "i_b"] \end{tikzcd}$$

allora la coppia di frecce p_a e p_b è prodotto e la coppia i_a e i_b è coprodotto.

Quindi in categorie preadditive esiste un modo piuttosto compatto di esprimere prodotti e coprodotti (che sono la stessa cosa) senza passare per le proprietà universali.

Dimostrazione. Verifichiamo ad esempio che i prodotti danno biprodotti. Le identità (1.2.1) e (1.2.2) discendono direttamente da come sono introdotte i_a e i_b. Consideriamo ora il morfismo

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b : a \times b \to a \times b.$$

Componendo una volta con p_a e l'altra con p_b si ha (vedi anche (1.2.4) e (1.2.5))

$$p_a \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = \underbrace{p_a \circ i_a}_{=1_a} \circ p_a + \underbrace{p_a \circ i_b}_{=0_b^a} \circ p_b = p_a$$
$$p_b \circ (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) = \underbrace{p_b \circ i_a}_{=0_a^b} \circ p_a + \underbrace{p_b \circ i_b}_{=1_b} \circ p_b = p_b$$

Per la proprietà universale di prodotto, si può concludere che

$$i_a \circ p_a + i_b \circ p_b = 1_{a \times b}.$$

Per il viceversa prendendo qualsiasi coppia di morfismi

$$a \xleftarrow{f} a \times b \xrightarrow{g} b$$

si ha

$$p_a \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = f$$
$$p_b \circ (i_a \circ f + i_b \circ g) = g$$

Ora se $h : c \to a \times b$ è tale che $p_a \circ h = f$ e $p_b \circ h = g$, allora

$$h = 1_{a \times b} \circ h = (i_a \circ p_a + i_b \circ p_b) \circ h = i_a \circ f + i_b \circ g.$$ □

Proposizione 1.2.10. In una categoria preadditiva $\mathcal{C}$ con oggetto zero 0, gli equalizzatori di

$$a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

sono equalizzatori di

$$a \underset{0_a^b}{\overset{f-g}{\rightrightarrows}} b$$

e viceversa. Analogamente vale per i coequalizzatori.

Quindi un (co)equalizzatore di una coppia di morfismi è un (co)kernel della differenza dei due.

Dimostrazione. Basta osservare che

$$e \xrightarrow{i} a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$$

commuta se e solo se commuta

$$e \xrightarrow{i} a \underset{0_a^b}{\overset{f-g}{\rightrightarrows}} b$$ □

1.3 Categorie additive

2

Categorie esatte

2.1 Coppie kernel-cokernel

2.2 Stutture e categorie esatte

Bibliografia

[Lei16] T. Leinster. *Basic Category Theory*. arXiv, 2016. URL: https://arxiv.org/abs/1612.09375.

[Mac78] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8.

[Rie17] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. URL: https://math.jhu.edu/~eriehl/context/.