Note di Teoria della Misura

Indrjo Dedej

Ultima revisione: 4 aprile 2024.

Indice

1 Spazi di misura

Definizione 1.1 (Spazi misurabili)**.** Una *σ-algebra* su un insieme Ω è una qualsiasi famiglia $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ tale che:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha $\Omega - A \in \mathcal{A}$
3. per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ si ha $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

I sottoinsiemi di Ω che appartengono a $\mathcal{A}$ sono chiamati *misurabili*. Uno *spazio misurabile* consiste di un insieme Ω e una sua σ-algebra $\mathcal{A}$. Di solito ci riferiremo a questo nuovo oggetto attraverso la coppia $(\Omega, \mathcal{A})$.

Osservazione 1.2. La terza condizione della definizione sembra essere non dire nulla sulle unioni finite di insiemi, ma non è così. Basta scegliere una successione in cui tutti tranne un numero finito di termini sono nulli.

Proposizione 1.3. Sia Ω un insieme e $F \subseteq 2^\Omega$ qualsiasi. Allora esiste una e una sola σ-algebra $\mathcal{A}$ su Ω tale che

1. $F \subseteq \mathcal{A}$
2. per ogni σ-algebra $\mathcal{B}$ su Ω tale che $F \subseteq \mathcal{B}$ si ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Almeno una σ-algebra contenente F esiste ed è 2^Ω. Inoltre si mostra facilmente che l'intersezione di σ-algebre è ancora una σ-algebra, quindi indichiamo con $\mathcal{A}$ l'intersezione di tutte le σ-algebre di Ω che contengono F. Si può verificare facilmente che questa è la σ-algebra cercata. $\square$

Definizione 1.4 (σ-algebra generata)**.** La σ-algebra $\mathcal{A}$ della proposizione precedente viene detta *σ-algebra generata* da F.

Definizione 1.5 (Spazi di misura)**.** Una *misura* su uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ è una funzione

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

tale che:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

Uno *spazio di misura* è il dato di uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ e di una misura $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ su questo. Come prima, raccogliamo questi tre dati in una tripla $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$.

[Fare osservazione sulla convergenza della serie in definizione. Parlare anche delle unioni finite.]

Esempio 1.6. Un esempio particolarmente importante per la Teoria della Probabilità e per la Statistica è il seguente. Sia Ω un insieme che in genere viene chiamato *insieme degli eventi elementari*; supponiamo per di più che abbia cardinalità finita n e scriviamo x_1, ... e x_n i suoi elementi. Una volta scelti n numeri reali $p_1, \dots, p_n \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, sullo spazio misurabile discreto $(\Omega, 2^{\Omega})$ esiste una e una sola misura

$$\pi : 2^{\Omega} \to [0, +\infty]$$

tale che $\pi\left(\{x_i\}\right) = p_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. A seconda che si è nella Teoria della Probabilità o nella Statistica, i numeri p_1, ... e p_n possono essere visti come probabilità di un evento elementare oppure come la frequenza di un evento. Essendo poi che π assume valori in $[0, 1]$, si sceglie solitamente questo come codominio della misura.

Esempio 1.7. Un altro esempio importante è questo. Preso uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$, la *misura di Dirac* concentrata in $x_0 \in \Omega$ è la funzione

$$\delta_{x_0} : \mathcal{A} \to [0, +\infty], \ \delta_{x_0}(E) := \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Vedremo l'importanza delle delta di Dirac quando parleremo di integrazione.

Esempio 1.8. Banalmente, il conteggio degli elementi può fornire una misura. Per $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, definiamo la misura

$$\# : \mathcal{A} \to [0, +\infty], \ \#(E) := \begin{cases} \text{numero di elementi di } E & \text{se } E \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Tuttavia, non è un modo raffinato di dire la cardinalità di un insieme dato che non distingue insiemi infiniti ma che hanno diverse cardinalità.

Altri esempi di misure notevoli verranno in seguito.

Definizione 1.9 (Insieme trascurabile)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Un insieme $A \in \mathcal{A}$ si dice *trascurabile* qualora $\mu(A) = 0$.

Lemma 1.10. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.

1. Per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ tali che $A_n \subseteq A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$
2. Per ogni successione $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ tali che $B_{n+1} \subseteq B_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(B_0) < +\infty$ si ha
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

Dimostrazione. Osserviamo che qualunque sia la successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, possiamo costruirne un'altra, che chiamiamo $\{A'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, i cui elementi sono a due a due disgiunti e la cui unione sia proprio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$:
$$A'_0 := A_0\,,\ A'_n := A_n - A_{n-1}.$$
Inoltre si può provare (per induzione, per esempio) che
$$A_n = \bigcup_{i\leq n} A'_i \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$
Possiamo quindi provare il primo punto:
$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{i\leq n} A'_i\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A'_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$
Rimane da provare il secondo punto. Consideriamo la successione $\{B'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ assegnata come
$$B'_n := B_0 - B_n.$$
Essendo $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ decrescente, allora $\{B'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è crescente. Quello che ci permette di concludere la dimostrazione è:
$$B_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B'_n \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$
in cui l'unione e l'intersezione sono chiaramente disgiunti. Quindi:
$$\mu(B_0) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B'_n\right) + \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$
Nel membro a destra, il primo addendo è uguale a $\lim_{n\to+\infty} \mu(B'_n) = \mu(B_0) - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n)$ per il primo punto di questa proposizione. (Abbiamo appena usato il fatto che $\mu(B_0) < +\infty$. Precisamente dove?) Concludiamo che
$$0 = -\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) + \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$
e cioè la tesi. □

2 Funzioni misurabili

Definizione 2.1 (Funzione misurabili)**.** Siano $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ due spazi misurabili. Una *funzione misurabile* da $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ a $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ è una qualsiasi funzione $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ tale che per ogni $E \in \mathcal{A}_2$ si ha $f^{-1}E \in \mathcal{A}_1$. Per dire che f è una funzione misurabile da $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ a $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ scriveremo

$$f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$$

oppure semplicemente $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ quando è chiaro dal contesto quali sono le rispettive σ-algebre.

La verifica della misurabilità di una funzione può semplificarsi "drasticamente" nella caso in cui la σ-algebra del codominio sia generata:

Lemma 2.2. Siano due spazi misurabili $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ e $\Omega_2, \mathcal{A}_2$ con $\mathcal{A}_2$ una σ-algebra generata da una famiglia S. Allora sono equivalenti:

1. $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ è misurabile
2. per ogni $E \in S$ si ha $f^{-1}E \in \mathcal{A}_1$.

Dimostrazione. L'implicazione $(1) \Rightarrow (2)$ è ovvia, proviamo l'altro verso. L'insieme

$$\mathcal{U} := \left\{ E \in \mathcal{A}_2 \mid f^{-1}E \in \mathcal{A}_1 \right\}$$

contiene S ed è una σ-algebra per $\mathcal{A}_2$: per la definizione di σ-algebra generata, abbiamo quindi che $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{U}$, e l'asserto può considerarsi provato. □

Noi in particolare ci interesseremo di una classe di funzioni misurabili. Prima di tutto, chiamiamo *algebra di Borel* la più piccola σ-algebra contente gli aperti della topologia euclidea di $\mathbb{R}$. Indichiamo questa σ-algebra con $\mathbb{B}$. Il lemma che segue dice che per l'algebra di borel si possono scegliere altre base che possono fare comodo in certe situazioni.

Lemma 2.3. Altre basi dell'algebra di Borel sono:

- la famiglia degli intervalli aperti e limitati
- la famiglia degli intervalli chiusi e limitati
- la famiglia degli intervalli della forma $[a, b)$ (oppure $(a, b]$), per $a, b \in \mathbb{R}$
- la famiglia degli intervalli del tipo $(-\infty, a)$ (oppure $(a, +\infty)$), per $a \in \mathbb{R}$
- la famiglia degli intervalli del tipo $(-\infty, a]$ (oppure $[a, +\infty)$), per $a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Essenzialmente, basta ricordarsi cosa significa "σ-algebra generata" e qualche fatto topologico. La topologia euclidea ha una base numerabile fatta di intervalli aperti e limitati, quindi il primo punto è provato. Dimostriamo alcuni degli punti, i restanti vengono lasciati per esercizio.
Facciamo vedere che la sigma algebra generata dagli intervalli $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, è quella di Borel. Una inclusione è banale, per far vedere l'altra osserviamo che

$$(a, b) = (-\infty, b) - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right).$$

Per definizione di σ-algebra, gli intervalli (a, b) appartengono alla σ-algebra generata dagli intervalli $(-\infty, c)$. □

D'ora in poi quando si parla di $\mathbb{R}$, si suppone che questa abbia con sé l'algebra di Borel.

Proposizione 2.4. Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Sono misurabili le funzioni

$$f_+ : \Omega \to \mathbb{R}, \; f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_- : \Omega \to \mathbb{R}, \; f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Lo sono anche kf, con $k \in \mathbb{R}$, e $|f|$. Inoltre se $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è una altra funzione misurabile, allora lo sono anche $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$.

Dimostrazione. Useremo il Lemma 2.3. [Ancora da terminare...] □

[C'è qualche altra proposizione riguardante le funzioni misurabili. Ancora da TEXare...]

3 Misura di Lebesgue

In questa sezione, descriveremo uno spazio di misura molto importante. Come c'è da aspettarsi dalla definizione, costruiremo prima uno spazio misurabile e poi ci inventeremo una misura su questo spazio.

Con *intervallo* di $\mathbb{R}$ intendiamo un insieme limitato della forma (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ oppure $[a, b]$. Un *intervallo* di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n intervalli di $\mathbb{R}$. La *misura di Lebesgue* di un intervallo $I \subseteq R$ di estremi a e b è il numero reale $|a - b|$; la *misura di Lebesgue* di un intervallo $I = \prod_{j=1}^{n} I_j$ di $\mathbb{R}^n$ è il prodotto delle misure degli I_j. Indichiamo in ogni caso con $|I|$ la misura di Lebesgue di un intervallo I.

Definizione 3.1 (Misura di Lebesgue)**.** Chiamiamo *ricoprimento*[1] di un $A \subseteq \mathbb{R}^n$ una qualsiasi successione di intervalli $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tale che $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. La *misura di Lebesgue* di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è il numero (eventualmente infinito)

$$\lambda(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n| \,\middle|\, \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ ricoprimento di } A \right\}.$$

Abbiamo usato il termine "misura", ma darne effettivamente una giustificazione non è banale. Anzi tutto bisogna affiancare a $\mathbb{R}^n$ una σ-algebra e per poi sperare di arrivare ad una misura come quella in definizione. Per ora, quello che abbiamo è solo una funzione

$$\lambda : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty].$$

Lemma 3.2. Valgono le seguenti proprietà:

1. $\lambda(\varnothing) = 0$.
2. Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sono tali che $A \subseteq B$, allora $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.
3. $\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$ per ogni successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

1 In Topologia, il ricoprimento è fatto di aperti. In questa sede non ci interessa questo.

Dimostrazione. I primi due punti sono immediati, ci limitiamo a dimostrare l'ultimo. Chiamiamo A l'insieme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Da definizione di λ, comunque preso $\varepsilon > 0$, per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ esiste una successione di intervalli $\{I_{n,j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ tale che

$$A_n \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_{n,j} \quad \text{e} \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} |I_{n,j}| \leq \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Evidentemente $A \subseteq \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} I_{i,j}$; pertanto, per definizione di λ,

$$\lambda(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |I_{n,j}| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) + \varepsilon$$

che per l'arbitrarietà di ε implica quello che vogliamo. □

Proposizione 3.3. $\lambda(I) = |I|$ per ogni intervallo di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Essendo evidentemente $\lambda(I) \leq |I|$, proviamo la disuguaglianza opposta. Osserviamo in tal caso che, se proviamo che $|I| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n|$ per ogni ricoprimento $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di I, allora necessariamente $|I| \leq \lambda(I)$.
Fissiamo $\varepsilon > 0$. Si può trovare in tal caso $J \subseteq I$ intervallo chiuso con $|J| \geq |I| - \frac{\varepsilon}{2}$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ un intervallo aperto A_n che contiene I_n e tale che $|A_n| < |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Ora, gli A_n formano un ricoprimento di aperti del compatto J, e quindi esiste $F \subseteq \mathbb{N}$ finito tale che $\{A_n \mid n \in F\}$ ricopre J. Quindi

$$|I| - \frac{\varepsilon}{2} \leq |J| \leq \sum_{n\in F} |A_n| \leq \sum_{n\in F} |I_n| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| + \frac{\varepsilon}{2}$$

cioè

$$|I| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε, abbiamo concluso. □

Lemma 3.4. Siano $F_1, \dots, F_n \subseteq \mathbb{R}^n$ chiusi, limitati e a due a due disgiunti. Allora

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda(F_i).$$

Dimostrazione. [Ancora da TEXare...] □

Proposizione 3.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C \subseteq A$ chiuso tale che $\lambda(A) - \varepsilon < \lambda(C)$.

Dimostrazione. [Ancora da TEXare...] □

Proposizione 3.6. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $C \subseteq A$ chiuso. Allora

$$\lambda(A - C) = \lambda(A) - \lambda(C).$$

Dimostrazione. [Ancora da TEXare...] □

Definizione 3.7 (Misurabilità secondo Lebesgue)**.** Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* qualora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ed un aperto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $F \subseteq A \subseteq G$ e $\lambda(G - F) < \varepsilon$. Indichiamo con $\mathcal{L}_n$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili secondo Lebesgue.

Proposizione 3.8. $\mathcal{L}_n$ è una σ-algebra.

Dimostrazione. [Ancora da TEXare...] □

Proposizione 3.9. La restrizione di λ a $\mathcal{L}_n$ è una misura sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n)$.

Dimostrazione. [Ancora da TEXare...] □

[Sezione ancora da concludere...]

4 Integrazione secondo Lebesgue

Diciamo che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è *semplice* nel caso in cui la sua immagine abbia cardinalità finita, cioè $f\Omega = \{c_1, \ldots, c_n\}$. In generale, le fibre di una funzione[2] sono a due a due disgiunte e la loro unione è il dominio. Nel nostro caso, abbiamo un numero finito di fibre $E_1 := f^{-1}\{c_1\}$, ..., e $E_n := f^{-1}\{c_n\}$, le quali, osserviamo, costituiscono anche una partizione di Ω.

Quindi le funzioni semplici sono funzioni “costanti a tratti”, cioè funzioni introdotte come segue

$$f(x) := \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in E_1 \\ \vdots & \quad\vdots \\ c_i & \text{se } x \in E_i \\ \vdots & \quad\vdots \\ c_n & \text{se } x \in E_n \end{cases} \tag{4.1}$$

Tuttavia, per funzioni con dominio $\mathbb{R}$, esiste un modo molto compatto e comodo di dire (4.1). Per questo abbiamo bisogno di più notazione.

Sia Ω un qualsiasi insieme; ogni suo sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ ha una sua *funzione caratteristica*[3]

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ \chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

È immediato verificare che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice se e solo se si può scrivere come combinazione finita di funzioni caratteristiche:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega$$

dove $E_1, \ldots, E_n$ sono sottoinsiemi a due a due disgiunti di Ω e tali che $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$. In realtà, senza perdere generalità, possiamo anche scegliere $E_i = f^{-1}\{c_i\}$ per pura comodità, dove le $c_1, \ldots, c_n$ sono le immagini di f.

Alcune ulteriori proprietà che vale la pena evidenziare sono le seguenti. Se $\{A_n \mid n \in I\}$ è una partizione di $A \subseteq \Omega$, allora

$$\chi_A(x) = \sum_{i \in I} \chi_{A_i}(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Qui I può essere anche $\mathbb{N}$, senza alcun problema di convergenza di serie: infatti nella somma solo un addendo è 1, mentre tutti gli altri sono 0. Inoltre, se $A, B \subseteq \Omega$ allora

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

La proposizione che segue dice che si può approssimare una qualsiasi funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con una successione di funzioni semplici che gli converge contro puntualmente.

2 Le fibre di una funzione $f : X \to Y$ sono gli insiemi $f^{-1}\{y\} := \{x \in X \mid f(x) = y\}$ per $y \in Y$.
3 In Teoria delle Probabilità, potreste aver sentito parlare di funzioni indicatrici.

Lemma 4.1. Per ogni funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ esiste una successione di funzioni semplici $\{s_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ tali che $s_n \to f$ puntualmente. Se f è pure misurabile (ciò presuppone che Ω sia uno spazio misurabile), allora le s_n possono essere scelte misurabili. Se $f \geq 0$, allora la successione può essere presa crescente.

Dimostrazione. Ricordiamo che ogni funzione $\Omega \to \mathbb{R}$ è la differenza tra la sua parte positiva e quella negativa, dove queste due sono entrambe non negative. Pertanto, facciamo vedere come per ogni funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ non negativa riusciamo a costruire una successione di funzioni semplici convergenti puntualmente a f. Consideriamo, per $n \in \mathbb{N}$, gli insiemi

$$\begin{aligned} E_{n,i} &:= f^{-1}\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \quad \text{con } i \in \{0, \dots, n2^n - 1\} \\ F_n &:= f^{-1}[n, +\infty). \end{aligned}$$

Osserviamo che questi insiemi sono a due a due disgiunti e ricoprono Ω. La suddivisione di $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ha un senso: fissato un certo n, l'unione degli intervalli $\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)$ è $[0, n)$, e questo intervallo è suddiviso in sotto-intervalli di lunghezza $\frac{1}{2^n}$. Quindi non solo con questi intervalli si ricoprono porzioni sempre più grandi di $\mathbb{R}_{\geq 0}$, ma al interno di $[0, n)$ si pratica una suddivisone sempre più fine.
A questo punto, consideriamo le funzioni semplici

$$s_n : \Omega \to \mathbb{R}\,, \ s_n(x) := \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x).$$

Facciamo vedere la convergenza puntuale. Per costruzione, comunque preso $x \in \Omega$, esiste $n_x \in \mathbb{N}$ per cui per ogni $n \geq n_x$ si ha x sta in uno e un solo $E_{n,i}$; allora, per $n \geq n_x$,

$$|f(x) - s_n(x)| = \underbrace{\left|f(x) - \frac{i}{2^n}\right|}_{i \text{ è quello per cui } x \in E_{n,i}} < \left|\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Possiamo quindi concludere

$$\lim_{n \to +\infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Il resto della proposizione è semplice da dimostrare. Se f è misurabile, allora gli $E_{n,i}$ e gli F_n sono insiemi misurabili, e quindi le s_n sono misurabili a causa della Proposizione 2.4. Se $f \geq 0$, allora è anche $s_n \leq s_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, vedi la costruzione che abbiamo fatto. □

Ora per parlare di integrazione, entrano nel discorso le misure.

Definizione 4.2 (Integrale secondo Lebesgue)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $s : \Omega \to \mathbb{R}$ una semplice funzione misurabile, cioè

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

per opportuni E_1, ... e E_n misurabili che partizionano Ω. Chiamiamo *integrale* di s il numero (eventualmente infinito)

$$\int s \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i).$$

Sia ora $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile non negativa. L'*integrale* di f è il numero reale

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{s:\Omega\to\mathbb{R} \text{ semplice,} \\ \text{misurabile e } 0\leq s\leq f}} \int_\Omega s \mathrm{d}\mu.$$

Qualora sia un numero reale eventualmente infinito, l'*integrale secondo Lebesgue* di una funzione misurabile qualsiasi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è

$$\int f \mathrm{d}\mu := \int f_+ \mathrm{d}\mu - \int f_- \mathrm{d}\mu.$$

Molto spesso però, si vuole integrare solo sua una parte del dominio: se $E \in \mathcal{A}$, allora

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \int (\chi_E f)\, \mathrm{d}\mu.$$

Una funzione misurabile $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile* su $E \subseteq \Omega$ misurabile se e solo se sono finiti $\int_E f_+ \mathrm{d}\mu$ e $\int_E f_- \mathrm{d}\mu$.

Un criterio molto semplice per verificare l'integrabilità di una funzione misurabile è il seguente.

Proposizione 4.3. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e $E \in \mathcal{A}$. Se esiste una funzione misurabile $g : \Omega \to \mathbb{R}$ che sia integrabile su E e che $|f| \leq g$ su E, allora f è integrabile su E.

Dimostrazione. Infatti dalle ipotesi segue che $0 \leq f_+, f_- \leq g$ e quindi $\int_E f_+ \mathrm{d}\mu$ e $\int_E f_- \mathrm{d}\mu$ sono compresi tra 0 e $\int_E g \mathrm{d}\mu$, che è finito. □

Esempio 4.4. Consideriamo lo spazio di misura $[1, +\infty)$ con la struttura di σ-algebra ereditata da $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$, dove $\mathcal{L}$ è la σ-algebra di Lebesgue e $\lambda : \mathcal{L} \to [0, +\infty]$ è la misura unidimensionale di Lebesgue ristretti a $\mathbb{R}_{>0}$. Consideriamo la funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Vediamo se è integrabile su $[1, +\infty)$ e la funzione gradino

$$\overline{f} : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ \overline{f}(x) := \frac{1}{n^\alpha} \text{ dove } n \leq x < n + 1.$$

L'integrale di Lebesgue in questo caso è molto semplice da calcolare:

$$\int_{[1,+\infty)} \overline{f} \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Se $\alpha > 1$, allora la serie converge e l'integrale è finito; inoltre $|f(x)| \leq \overline{f}(x)$ per ogni $x \in [1, +\infty)$. In questo caso, f è integrabile su $[1, +\infty)$.

Esercizio 4.5. Considera il precedente esempio: e se $\alpha \in (0, 1]$? Costruisci una opportuna funzione gradino $\underline{f} : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $\underline{f} \leq f$ e il cui integrale su $[1, +\infty)$ è infinito.

Esempio 4.6. L'integrale di Riemann e quello di Lebesgue non sono la stessa cosa. Considera la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \chi_{[n,n+1)}(x).$$

Secondo Riemann, l'integrale è il numero reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

(la serie è convergente). Secondo Lebesgue invece no: bisogna considerare le parti positiva e negativa e integrarle separatamente

$$\int_{\mathbb{R}} f_+ \mathrm{d}\lambda = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pari}}} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_- \mathrm{d}\lambda = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}} \frac{1}{n} = +\infty$$

Proposizione 4.7. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e non negativa. Allora la funzione

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$
$$\nu(E) := \int_E f \mathrm{d}\mu$$

è una misura per lo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$.

Per dimostrare questa proposizione, dimostriamo prima che vale per le funzioni semplici.

Lemma 4.8. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione semplice, misurabile e non negativa. Allora

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$
$$\nu(E) := \int_E f \mathrm{d}\mu$$

è una misura per lo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$.

Dimostrazione. È banale verificare che $\nu(\varnothing) = 0$. Sia ora $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti. Per comodità, $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Inoltre, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è semplice, perciò scriviamo

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i}$$

con gli E_i che partizionano Ω e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E_i \cap A_n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_i \cap A_n).$$

Qui, le successioni $\{E_i \cap A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono di elementi a due a due disgiunti, quindi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=i}^{k} c_i \mu(E_i \cap A) = \int_A f \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

Dimostrazione della Proposizione 4.7. È immediato vedere che $\nu(\varnothing) = 0$. Sia ora una $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di elementi $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, e per comodità $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Facciamo vedere che $\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$, vale a dire

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

Per ogni funzione semplice, misurabile e tale che $0 \leq s \leq f$ si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu \geq \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} s \mathrm{d}\mu = \int_A s \mathrm{d}\mu}_{\text{vedi lemma precedente}}$$

e quindi, per definizione di integrale, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) \geq \nu(A)$.
Rimane solo da provare la disuguaglianza opposta. Osserviamo preliminarmente che se qualche $\nu(A_n)$ è infinito, allora, questa disuguaglianza è verificata. Ragione per cui d'ora in poi si suppone che tutti gli $\nu(A_n)$ siano finiti. Fissato $\varepsilon > 0$, per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ si ha che esiste una funzione $s_n : \Omega \to \mathbb{R}$ semplice, misurabile e tale che $0 \leq s_n \leq f$ per cui

$$\int_{A_n} f \mathrm{d}\mu - \frac{\varepsilon}{n} \leq \int_{A_n} s_n \mathrm{d}\mu.$$

Se ne deduce che

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu - \varepsilon \leq \underbrace{\sum_{n=0} \int_{A_n} s_n \mathrm{d}\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} \left(\sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} s_n \right) \mathrm{d}\mu}_{\text{esercizio}} \leq \int_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

E quindi per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu \leq \int_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

Pertanto per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{k} \nu(A_n) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \right) \leq \nu(A)$$

e, a maggior ragione, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n) \leq \nu(A)$. Dove è stata usata la non negatività di f? $\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$ è una serie che converge oppure diverge a $+\infty$ dato che i singoli $\nu(A_n) \geq 0$ proprio perché $f \geq 0$. □

Esempio 4.9. Consideriamo la funzione misurabile

$$g : (0, 1] \to \mathbb{R}, \ g(x) := \frac{1}{x^\alpha}$$

e vediamo se è integrabile rispetto alla misura di Lebesgue. Osserviamo che

$$(0, 1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right].$$

Ora, per la Proposizione 4.7 si ha

$$\int_{(0,1]} g \mathrm{d}\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]} g \mathrm{d}\lambda.$$

Su ciascuno degli intervalli $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$, la funzione g è maggiorata dalla funzione costante a $2^{\alpha(n+1)}$. E quindi abbiamo

$$\int_{(0,1]} g \mathrm{d}\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(2^\alpha\right)^{n+1} \lambda \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(2^{\alpha-1}\right)^{n+1}.$$

Se $\alpha < 1$, allora l'integrale è finito, quindi la funzione g è integrabile.
Equivalentemente, si sarebbe potuto procedere considerando la funzione gradino che sta sopra g:

$$\overline{g} : (0,1] \to \mathbb{R}, \ \overline{g}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \chi_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]}(x).$$

Corollario 4.10. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e integrabile. Allora per ogni successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti si ha

$$\int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \mathrm{d}\mu.$$

Proposizione 4.11. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e integrabile. Allora $|f|$ è integrabile su e

$$\left| \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Uno potrebbe pensare di procedere così. Si ricorda che $|f| = f_+ + f_-$, e poi di fare

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_+ \mathrm{d}\mu + \int_\Omega f_- \mathrm{d}\mu.$$

Il punto è questo fatto verrà provato solo dopo aver provato qualche risultato sulla convergenza. Si potrebbe dimostrare questo teorema una volta arrivati là, ma si può fare anche già adesso.

Dimostrazione. Ω è partizionato in due insiemi misurabili:

$$E_1 := \{x \in \Omega \mid f(x) \geq 0\}, \ E_2 := \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}.$$

Abbiamo visto [davvero?] poi che, se f è misurabile, pure $|f|$ lo è. In questo caso,

$$\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} (-f) \mathrm{d}\mu$$

e quindi $|f|$ è integrabile. Rimangono dei conti da fare:

$$\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu = \underbrace{\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu}_{\int_\Omega f_+ \mathrm{d}\mu} + \underbrace{\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu}_{\int_\Omega f_- \mathrm{d}\mu} \geq \left| \int_\Omega f_+ \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_- \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right|. \qquad \square$$

5 Integrazione e successioni di funzioni

In questa sezione presentiamo alcuni teoremi classici riguardanti i "limiti sotto il segno integrale". Probabilmente, si sono già incontrati vari teoremi di questo tipo di contenuto nel contesto delle funzioni continue. Qui, vogliamo vedere se si può generalizzare all'intera classe di funzioni misurabili.

Proposizione 5.1 (Teorema di Beppo-Levi, o "della convergenza dominata"). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione crescente di funzioni misurabili e non negative. Considerata la funzione

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \ f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

si ha

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Vale la pena osservare che, essendo la successione di funzioni crescente, lo è anche la successione degli integrali $\int_\Omega f d\mu$: ragione per cui il limite $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu$ è definito.

Dimostrazione. Poiché la successione è crescente, sia ha subito che $\int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu$ e quindi la disuguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu.$$

Per pura comodità, $\alpha := \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu$. Se proviamo che $\alpha \geq \int_\Omega s d\mu$ per ogni funzione misurabile semplice $s : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $0 \leq s \leq f$, possiamo dire di aver provato anche che $\alpha \geq \int_\Omega f d\mu$. Consideriamo infatti una qualsiasi di queste funzioni. Preso $\delta \in (0, 1)$ gli insiemi misurabili

$$E_n := \{x \in \Omega \mid f_n(x) \geq \delta s(x)\}$$

sono tali che $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ricoprono Ω (quest'ultimo è un semplice fatto pertinente i limiti di successione). Quindi

$$\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} \delta s d\mu \geq \delta \int_{E_n} s d\mu \geq \delta \int_{\bigcup_{i=0}^n E_i} s d\mu.$$

Dato che ciò accade per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo scrivere

$$\int_\Omega f_n d\mu \geq \delta \int_\Omega s d\mu$$

per ogni $\delta \in (0, 1)$. Per l'arbitrarietà di δ, la tesi. □

Corollario 5.2. Se due funzioni misurabili $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ sono integrabili, allora pure $f + g$ lo è e

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$$

Dimostrazione. Anzitutto, $f + g$ è misurabile, perché lo sono i singoli addendi. Supponiamo preliminarmente $f, g \geq 0$. Per il Lemma 4.1, possimao scegliere due successioni $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{g_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ crescenti di funzioni misurabili e non negative convergenti puntualmente a f e a g rispettivamente. Siamo nelle ipotesi della Proposizione 5.1, e quindi

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n + g_n) d\mu.$$

Ora è facile verificare che $\int_\Omega (f_n + g_n) d\mu = \int_\Omega f_n d\mu + \int_\Omega g_n d\mu$. Applicando di nuovo la Proposizione 5.1, abbiamo

$$\int_\Omega (f + g) d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu + \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$$

In particolare, ricaviamo che la somma di sue funzioni integrabili non negative è integrabile. Possiamo a questo punto verificare pure l'integrabilità di $f + g$ senza l'ipotesi aggiuntiva non negatività delle due funzioni. Sappiamo che $|f|$ e $|g|$ sono integrabili perché lo sono f e g. Ora $|f + g| \leq |f| + |g|$ dove

$$\int_\Omega (|f| + |g|) d\mu = \underbrace{\int_\Omega |f| \, d\mu + \int_\Omega |g| \, d\mu < +\infty}_{\text{perché } f \text{ e } g \text{ sono integrabili}}.$$

La Proposizione 4.3 ci permette di dire che $f + g$ è integrabile. Possiamo quindi dimostrare la proposizione nel caso generale di f e g di segno variabile, ricordando che le funzioni $\Omega \to \mathbb{R}$ possono essere scritte come differenza di funzioni non negative, $f = f_+ - f_-$ e $g = g_+ - g_-$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega [(f_+ + g_+) - (f_- + g_-)]\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_\Omega (f_+ + g_+)\mathrm{d}\mu - \int_\Omega (f_- + g_-)\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_\Omega f_+\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g_+\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_-\mathrm{d}\mu - \int_\Omega g_-\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_\Omega f\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

e abbiamo concluso. □

Proposizione 5.3 (Teorema di Beppo-Levi II)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e consideriamo una successione monotona $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ di funzioni integrabili su E e tali che la successione $\left\{ \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ sia limitata. Presa

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \; f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x),$$

si ha che f è integrabile e

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Una delle conclusioni di questa proposizione ricorda la Proposizione 5.1: in più però fornisce un criterio per verificare l'integrabilità di una funzione. Questo però non viene senza fatica perché bisogna trovare una successione che di funzioni che converga puntualmente verso di lei, ma nel caso di serie può fare molto comodo.

Dimostrazione Proposizione 5.3. Supponiamo che le f_n siano crescenti, se sono decrescenti si procede analogamente. Qui $f_n - f_0 \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; la successione $\{f_n - f_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ è crescente e di funzioni misurabili non negative. Per la Proposizione 5.1 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f_0)\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (f - f_0)\mathrm{d}\mu.$$

Poiché il primo membro è finito, allora $f - f_0$ è integrabile in E, e quindi lo è pure f. La conclusione è immediata. [Ma quindi non serve il Lemma di Fatou?] □

Lemma 5.4 (di Fatou)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e prendiamo una successione $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ di funzioni misurabili e non negative. Allora, preso

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \; f(x) := \liminf_{n\to+\infty} f_n(x),$$

si ha

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Qualche volta, al posto della disuguaglianza appena scritta si scrive

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu$$

per dire che il $\liminf_{n\to+\infty}$ non proprio si può tirare fuori dall'integrale.

Per comodità, richiamiamo come è definito il *limite inferiore* di una successione:

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n := \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{m\ge n} x_m\right).$$

Ricordiamo anche che, essendo $\{\inf_{m\ge n} x_m \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione crescente, questo oggetto è sempre definito (finito od al più infinito). Inoltre è immediato verificare che se una successione ha limite, allora questo coincide con il suo limite inferiore.

Dimostrazione del Lemma 5.4. [Questa è una cosa di cui scrivere...] Sappiamo che f è misurabile; ovviamente è anche non negativa. Anche $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := \inf_{m\ge n} f_m(x)$ è misurabile [anche di questa cosa bisogna scrivere...]; inoltre è non negativa e crescente. Quindi

$$\underbrace{\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \mathrm{d}\mu}_{\text{Teorema di Beppo-Levi}} = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \qquad \square$$

Lemma 5.5 (di Fatou II)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e prendiamo una successione $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ di funzioni misurabili e supponiamo che esiste $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile tale che $f_n \le g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, preso

$$f : \Omega \to \mathbb{R},\ f(x) := \limsup_{n\to+\infty} f_n(x),$$

si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \mathrm{d}\mu.$$

Per comodità, richiamiamo come è definito il *limite superiore* di una successione:

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n := \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{m\ge n} x_m\right).$$

Ricordiamo anche che, essendo $\{\inf_{m\ge n} x_m \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione decrescente, questo oggetto è sempre definito (finito od al più infinito). Inoltre è immediato verificare che se una successione ha limite, allora questo coincide con il suo limite inferiore. Una proprietà che useremo per dimostrare questo lemma è

$$-\liminf_{n\to+\infty} (-x_n) = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Dimostrazione. La successione $\{g - f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa le ipotesi del Lemma di Fatou, quindi

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} (g - f_n) \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega (g - f_n) \mathrm{d}\mu.$$

Ora, essendo $\int_\Omega g \mathrm{d}\mu < +\infty$ per ipotesi, si ha

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} (-f_n) \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \left(-\int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu\right). \qquad \square$$

I due lemmi precedenti servono a provare un criterio che può fare molto comodo in diverse situazioni, sia teoriche che pratiche.

Proposizione 5.6 (Teorema di Lebesgue, o "della convergenza dominata")**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni misurabili convergenti puntualmente a $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se esiste $g : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile che sia integrabile e tale che $|f_n| \leq g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora f è integrabile e

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Dimostrazione. L'integrabilità è immediata: da ipotesi, $|f_n| \leq g$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi passando al limite per $n \to +\infty$ si ha $|f| \leq g$. Inoltre, poiché g è integrabile lo è anche f. Ora osserviamo che se proviamo che se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

allora l'uguaglianza dell'enunciato. Possiamo usare il Lemma di Fatou II, poiché $|f - f_n|$ è misurabile e $|f - f_n| \leq 2g$ con $2g$ integrabile: quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \underbrace{\limsup_{n\to+\infty} |f - f_n|}_{=0 \text{ da ipotesi}} \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Usando il Lemma di Fatou, si ha

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega \underbrace{\liminf_{n\to+\infty} |f - f_n|}_{=0 \text{ per ipotesi}} \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

E abbiamo concluso, perché i limiti inferiore e superiore coincidono. □

6 Convergenze

Definizione 6.1 (Convergenza quasi uniforme)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Diciamo che una successione di funzioni misurabili $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *converge quasi uniformemente* a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qualora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $E \in \mathcal{A}$ per cui $\mu(\Omega \setminus E) < \epsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente su E per $n \to +\infty$.

La convergenza quasi uniforme implica quella quasi ovunque.

Proposizione 6.2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni misurabili. Se converge quasi uniformemente a $f : \Omega \to \mathbb{R}$, allora converge quasi ovunque a f, cioè esiste un $N \in \mathcal{A}$ di misura nulla per cui

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega \setminus N.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Contestualmente abbiamo un $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ per cui $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ e su sul quale si ha che $f_n \to f$ uniformemente. Se indichiamo con $C \subseteq \Omega$ l'insieme dei punti in cui la successione converge puntualmente, abbiamo che $E_\varepsilon \subseteq C$, e quindi $\mu(\Omega \setminus C) \leq \mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε, possiamo concludere che $\mu(\Omega \setminus C) = 0$ e possiamo scegliere $N = \Omega \setminus C$. □

Esempio 6.3. Consideriamo $f_n := \chi_{[n,n+1]}$. Converge puntualmente a 0 in ogni punto di $\mathbb{R}$, per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ di misura finita, si ha

$$\sup_{x \in \Omega \setminus E} |f_n(x)| = 1$$

da un certo n in poi.

Come abbiamo appena visto, l'implicazione contraria non è sempre vera. Tuttavia sotto un'ipotesi aggiuntiva la cosa funziona.

Proposizione 6.4 (Teorema di Severini-Egorov)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$ e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni misurabili. Se converge quasi ovunque a $f : \Omega \to \mathbb{R}$, allora converge quasi uniformemente a f.

Prima di partire con la dimostrazione, è essenziale per la dimostrazione che segue osservare che sono equivalenti questi due fatti:

1. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ converge puntualmente verso $f : \Omega \to \mathbb{R}$
2. per ogni $\delta > 0$ si ha

$$\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| < \delta\}.$$

La Teoria della Misura subentra nel momento in cui ci si rende conto che che al variare di $m \in \mathbb{N}$ al successione degli insiemi misurabili

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| < \delta\}$$

è crescente. e che quindi si può usare il Lemma 1.10.

Dimostrazione della Proposizione 6.4. Possiamo supporre che f_n converga puntualmente per ogni $x \in \Omega$, questo senza ledere la validità della dimostrazione: infatti se f_n non converge puntualmente su tutto Ω, allora basta rimuovere il sottoinsieme di Ω per cui non lo fa, essendo questo di misura nulla.
Introduciamo dei nomi: per $k, n \in \mathbb{N}$

$$E_{n,k} := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Come abbiamo visto prima di iniziare la dimostrazione, abbiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$, gli $E_{n,k}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ ricoprono Ω. Inoltre $\{E_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{A}$ è una successione crescente e quindi per il Lemma 1.10 abbiamo che

$$\mu(\Omega) = \lim_{m \to +\infty} \mu\left(\bigcap_{n \geq m} E_{n,k} \right).$$

Di conseguenza, poiché $\mu(\Omega) < +\infty$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere $m_k \in \mathbb{N}$ in modo che

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcap_{n \geq m_k} E_{n,k} \right) < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Abbiamo quindi

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m_k} E_{n,k} \right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\left(\Omega \setminus \bigcap_{n \geq m_k} E_{n,k} \right) = \epsilon$$

e per costruzione f_n converge uniformemente verso f su $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m_k} E_{n,k}$. □

Definizione 6.5 (Convergenza in misura)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Diciamo che una successione di funzioni misurabili $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *converge in misura* a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qualora per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Proposizione 6.6. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni misurabili. Se f_n converge a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ quasi uniformemente, allora f_n converge a f in misura.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Allora abbiamo $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(\Omega \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente. Quindi esiste un certo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$A_\varepsilon \subseteq \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon.$$

Quindi

$$\mu\underbrace{\left(\Omega \setminus \{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}\right)}_{\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}} \leq \mu\left(\Omega \setminus A_\varepsilon\right) < \varepsilon. \qquad \square$$

In generale, invece, non accade il contrario.

Esempio 6.7. Nella famiglia degli intervalli del tipo

$$\left[\frac{i}{j}, \frac{i+1}{j}\right] \text{ per } j \in \mathbb{N}_{\geq 1}, i \in \mathbb{N}, i \leq j$$

definiamo una successione di insiemi in questo modo: $A_0 := [0, 1]$ e poi, avendo $A_n := \left[\frac{i}{j}, \frac{i+1}{j}\right]$ per certi i, j,

$$A_{n+1} := \begin{cases} \left[0, \frac{1}{j+1}\right] & \text{se } i + 1 = j \\ \left[\frac{i+1}{j}, \frac{i+2}{j}\right] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora esaminiamo $f_n := \chi_{A_n}$. Osserviamo che

$$\mu\left(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \varnothing$$

se $\varepsilon > 1$, quindi limitiamoci soltanto a $0 < \varepsilon \leq 1$. In questo caso poi

$$\mu\left(\{x \in \Omega \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = A_n.$$

La lunghezza degli intervalli A_n è decrescente e per ogni $\delta > 0$ si può sempre trovare $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_n) \leq \delta$. Questo ci permette di concludere che $f_n \to 0$ in misura. Tuttavia non converge quai ovunque a 0, a dire il vero il limite puntuale non è definito in alcun punto. Di conseguenza non può convergere neanche quasi uniformemente.

Lemma 6.8 (di Borel-Cantelli)**.** Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e una qualsiasi successione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$. Se

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(A_n\right) < +\infty$$

allora

$$\mu\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n\right) = 0.$$

Dimostrazione. Poiché $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < +\infty$, possiamo applicare il Lemma 1.10 alla successione decrescente $\left\{ \bigcup_{n\geq m} A_n \,\middle|\, m \in \mathbb{N} \right\}$. □

Proposizione 6.9. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di funzioni misurabili convergenti in misura verso $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Allora $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ha una sottosuccessione convergente verso f quasi ovunque.

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere un $n_k \in \mathbb{N}$ per cui

$$\mu\left(\left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}\right) < \frac{1}{k^2}.$$

Possiamo pertanto concludere applicando il Lemma 6.8: infatti l'insieme

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

ha misura nulla e sul complementare f_{n_k} converge puntualmente contro f. □

Indice Analitico