深 圳 大 学 实 验 报 告

课程名称：算法分析与设计

实验名称：分治法求最近点对问题

学院：计算机与软件学院 专业：软件工程

报告人：敖宇飞、朱伟晔 学号：2021150241、2021150205

班级：软件工程 02 班

指导教师：杜智华

实验时间：2024/3/30

实验报告提交时间：2024/4/11

教务处制

实验二 分治法求最近点对问题

一、实验目的

（1） 掌握分治法思想。
（2） 学会最近点对问题求解方法。

二、实验概述

1. 对于平面上给定的N个点，给出所有点对的最短距离，即，输入是平面上的N个点，输出是N点中具有最短距离的两点。
2. 要求随机生成N个点的平面坐标，应用蛮力法编程计算出所有点对的最短距离。
3. 要求随机生成N个点的平面坐标，应用分治法编程计算出所有点对的最短距离。
4. 分别对N=100000—1000000，统计算法运行时间，比较理论效率与实测效率的差异，同时对蛮力法和分治法的算法效率进行分析和比较。
5. 如果能将算法执行过程利用图形界面输出，可获加分。

三、实验内容以及步骤

（一）、蛮力法求解

1. 算法原理：
   (1) 存在 N 个点，那么就存在 N（N - 1）/ 2 对点间的距离。穷举所有情况，选出最小值。

2. 伪代码：

for i = 1 to N – 1

for j = i + 1 to N

if (dis(p[i], p[j]) < min)

min = dis(p[i], p[j])

3. 复杂度分析：
   (1) 需要遍历 N（N - 1）/ 2 种情况来找出最小值，最好最坏和平均情况的时间复杂度都为 O(n^2)
   (2) 需要一个临时变量用来存储最小值，所以空间复杂度为 O(1)。

4. 上述思路代码实现：
   这段代码是一个名为 bruteForceClosestPair 的函数，其目的是在给定的点集 points 中

找到距离最近的点对。这个函数使用了一种简单粗暴的方法，即遍历所有可能的点对，并计算它们之间的距离，然后记录下最小距离和对应的点对。

```javascript
function bruteForceClosestPair(points) {
  let minDistance = Infinity;
  let closestPair = [];

  for (let i = 0; i < points.length - 1; i++) {
      for (let j = i + 1; j < points.length; j++) {
          const distance = calculateDistance(points[i], points[j]);
          if (distance < minDistance) {
              minDistance = distance;
              closestPair = [points[i], points[j]];
          }
      }
  }

  return closestPair;
}
```

5. 数据测试

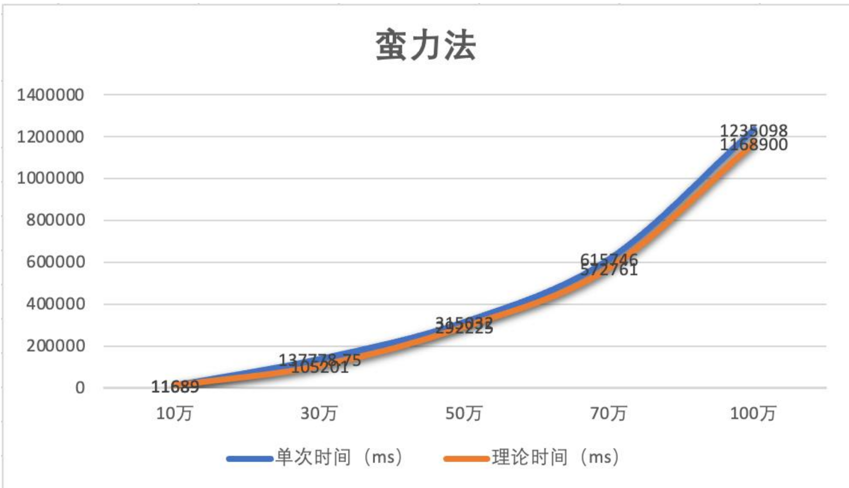
使用随机数生成，均匀分布的生成了 10 万、30 万、50 万、70 万以及 100 万的数据集。为了减少数据的偶然性，每个数据量都进行了 10 次测试并取平均值。

为了检验实验是否准确，将实际值将理论值进行对比（基准点为 10 万）。理论值计算方法如下：

$$T_{基准} = k \times n_{基准}^2$$
$$T_{理论} = k \times n_{理论}^2$$
$$\Rightarrow T_{理论} = T_{基准} \times \left(\frac{n_{理论}}{n_{基准}}\right)^2$$

最终结果如下：

数据量	10 万	30 万	50 万	70 万	100 万
单次时间 (ms)	11689	137778.75	315032	615746	1235098
理论时间 (ms)	11689	105201	292225	572761	1168900



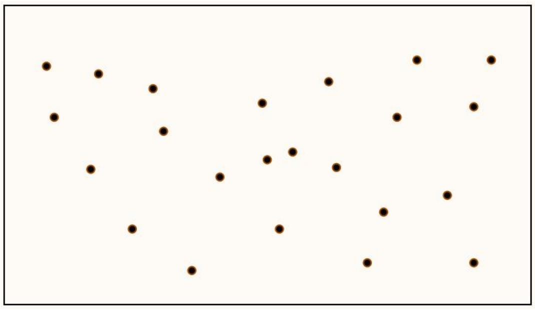
图像上符合 O(n^2) 二次曲线，并且理论值与实际值误差较小。

（二）、分治法求解

1. 分治法基本思路

本题思路： 分 -- 将整体分为左右两个区域； 治 -- 递归计算左右两区域的最短距离； 合 -- 合并左右区域，并求合并后的最短距离；

对于本题而言，可以转化为：

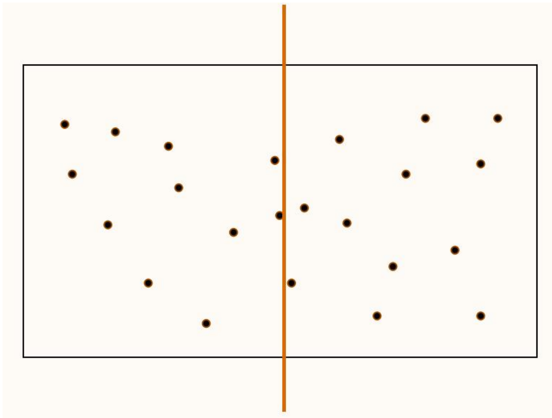


(1) 分 -- 将整体分为左右两个区域；

将所有点根据 x 坐标进行排序，取中间点。所以算法时间复杂度下限：O（nlogn）

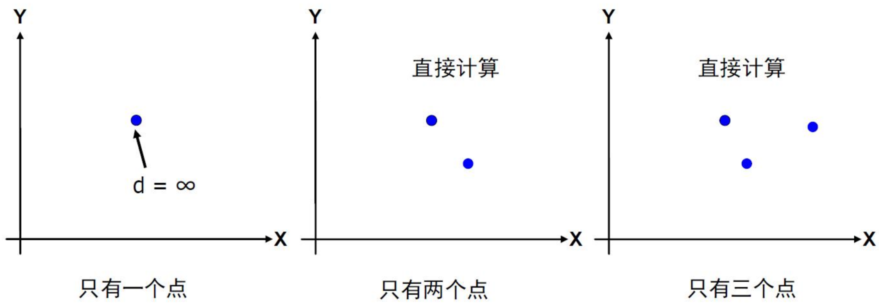
$$mid = (l + r) / 2$$

做到左右区域点集数目基本相同，降低数据随机性带来的影响



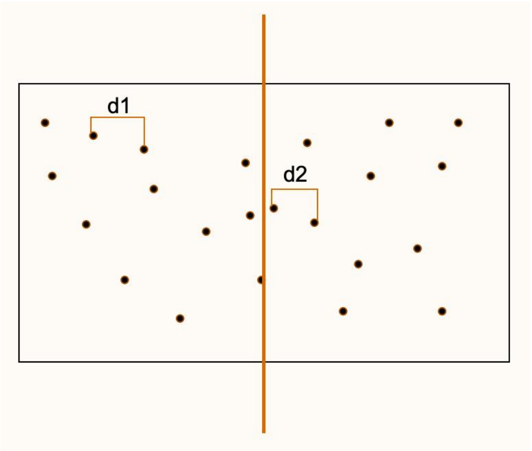
(2) 治 -- 递归计算左右两区域的最短距离

子问题最小规模



递归调用函数，即可获取左右两区域的最短距离

(3) 合 -- 合并左右区域，并求合并后的最短距离



【问题转化为：“已知左右区域各自最短距离，求合并后的最短距离。”】

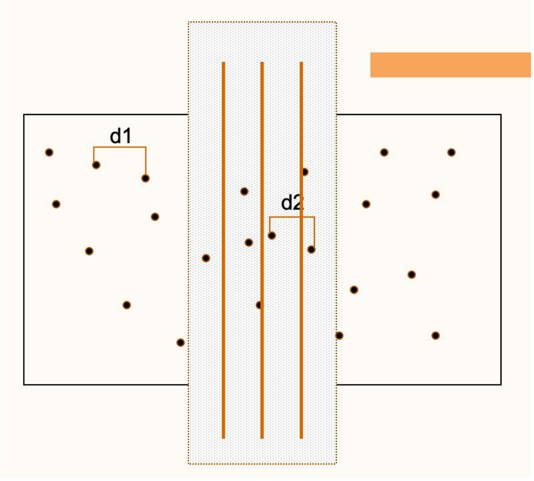
合并之后最短点对的选择一共有三种情况 ： 左+右、左+左、右+右

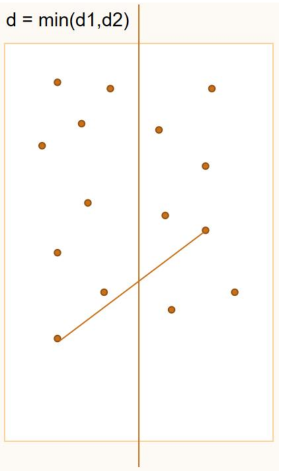
对于左+左、右+右的情况，利用第二步中的递归调用即可获取。

所以主要问题在于，如果最短点对来自于左+右的合并操作。

解决思路：

两点必定来自于中轴线左右两侧附近，并且两点距离小于 min(d1,d2)





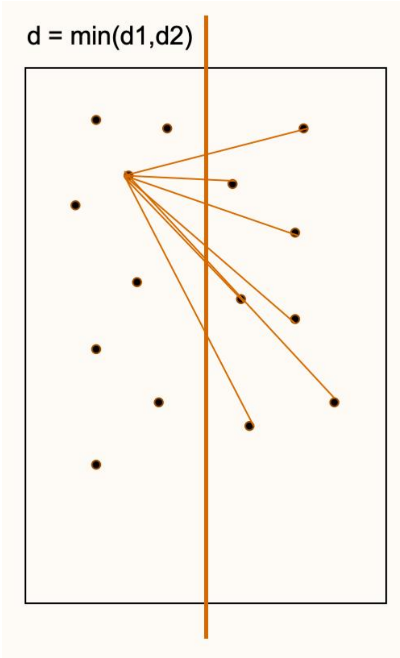
如左图所示，可以在中轴线附近取带状区域，其左右宽度为 min(d1,d2)。在如此带状区域内，左右两点距离必定小于 min(d1,d2)，极限状态为一侧宽度长度。

【问题转化为：“从左右区域内各取一点，与 d1，d2 比较，取最短距离。”】

解决方法有如下展示三种。

I) 分治——部分蛮力

(1) 算法原理：



遍历左右带中的所有点，比较获得最短距离。

（2） 伪代码：

```
ans = min(d1,d2)
for i = 1 to left.size
    for j = 1 to right.size
        if ( dis(left[i], right[j]) < ans )
            ans = dis(left[i], right[j])
```

（3） 复杂度分析：

有两种方法可以用来计算 d_C。对于均匀分布的大型点集，预计位于该带中的点的个数是非常少的。事实上，容易论证平均只有 $O(\sqrt{N})$个点是在这个带中。因此，我们可以以$O(N)$时间对这些点进行蛮力计算。图 10-32 中的伪代码实现该方法，其中按照 C 语言的约定，点的下标从 0 开始。

-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P280

查询资料可知，对于均匀分布的点集而言，带中的元素个数为√n

递推公式为：

平均情况 T(n) = 2T(n/2) + (√n)^2

总体时间复杂度 O(nlogn)

对于非均匀分布的点集，最差情况带中的元素个数为 n

递推公式为：

最坏情况 T(n) = 2T(n/2) + (n)^2

总体时间复杂度 O(n^2)

（4） 上述思路代码实现：

先对点进行 x 轴上的排序：

```
function closestPairDivideAndConquer(points) {
  // Sort points by x-coordinate
  const sortedPoints = points.slice().sort((a, b) => a.x - b.x);
```

初始化变量：设置一个变量 minDistance 来存储最小距离，初始值为无穷大（Infinity），以及一个数组 closestPair 来存储距离最近的点对。

```
// Recursive function to find closest pair
function closestPairRec(sortedX, sortedY) {
    const n = sortedX.length;

    if (n <= 3) {
        return bruteForceClosestPair(sortedX);
    }

    // Divide the points into left and right halves
    const midIndex = Math.floor(n / 2);
    const midPoint = sortedX[midIndex];
    const leftX = sortedX.slice(0, midIndex);
    const rightX = sortedX.slice(midIndex);

    // Split points into left and right based on midPoint's x-coordinate
    const leftY = [];
    const rightY = [];
    for (const point of sortedY) {
        if (point.x <= midPoint.x) {
            leftY.push(point);
        } else {
            rightY.push(point);
        }
    }
```

```
// Recursively find closest pairs in left and right halves
const closestLeft = closestPairRec(leftX, leftY);
const closestRight = closestPairRec(rightX, rightY);

// Find the closest pair overall
let minDistance;
let closestPair;
if (closestLeft && closestRight) {
    const distLeft = calculateDistance(closestLeft[0], closestLeft[1]);
    const distRight = calculateDistance(closestRight[0], closestRight[1
    if (distLeft < distRight) {
        minDistance = distl 单击以折叠范围。
        closestPair = closestLeft;
    } else {
        minDistance = distRight;
        closestPair = closestRight;
    }
} else if (closestLeft) {
    minDistance = calculateDistance(closestLeft[0], closestLeft[1]);
    closestPair = closestLeft;
} else if (closestRight) {
    minDistance = calculateDistance(closestRight[0], closestRight[1]);
    closestPair = closestRight;
}
```

双重循环遍历：使用两个嵌套的循环来遍历点集中的所有点对。外层循环从第一个点开始，内层循环从外层循环当前点的下一个点开始，确保每一对点只被比较一次。

```
for (let i = 0; i < strip.length - 1; i++) {
    for (let j = i + 1; j < Math.min(i + 7, strip.length); j++) {
        const distance = calculateDistance(strip[i], strip[j]);
        if (distance < minDistance) {
            minDistance = distance;
            closestPair = [strip[i], strip[j]];
```

计算距离：对于每一对点，调用 calculateDistance 函数来计算它们之间的距离。

```
function calculateDistance(point1, point2) {
  return Math.sqrt((point2.x - point1.x) ** 2 + (point2.y - point1.y) ** 2);
}
```

更新最小距离和点对：如果计算出的距离小于当前记录的最小距离，则更新 minDistance 和 closestPair。

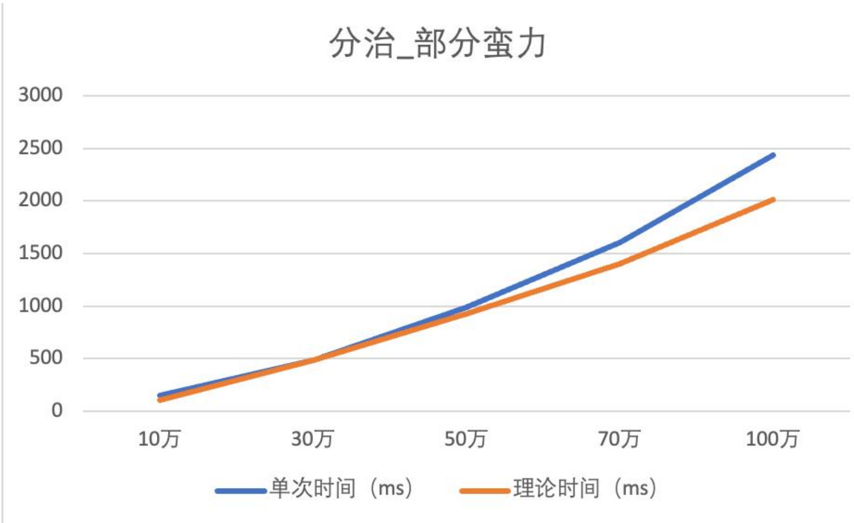
```
for (let i = 0; i < strip.length - 1; i++) {
    for (let j = i + 1; j < Math.min(i + 7, strip.length); j++) {
        const distance = calculateDistance(strip[i], strip[j]);
        if (distance < minDistance) {
            minDistance = distance;
            closestPair = [strip[i], strip[j]];
        }
    }
}
```

返回结果：在遍历完所有点对后，closestPair 将包含距离最近的点对，函数返回这个点对。

（5） 数据分析：

最终结果如下：

数据量	10 万	30 万	50 万	70 万	100 万
单次时间（ms）	152.599	482.966	993.825	1608.5	2310
理论时间（ms）	108.988	482.966	925.837	1407.656	1993.231



图像上符合 O(nlogn) 曲线，并且理论值与实际值误差较小。

显然对于最差情况仍然为 O(n^2)，需要改进。

II） 分治——多趟查询

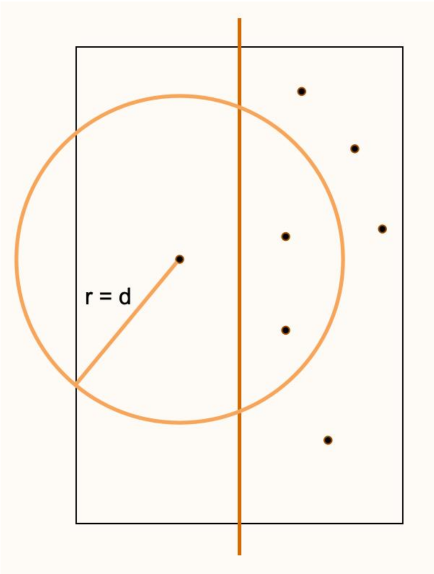
（1） 算法原理：

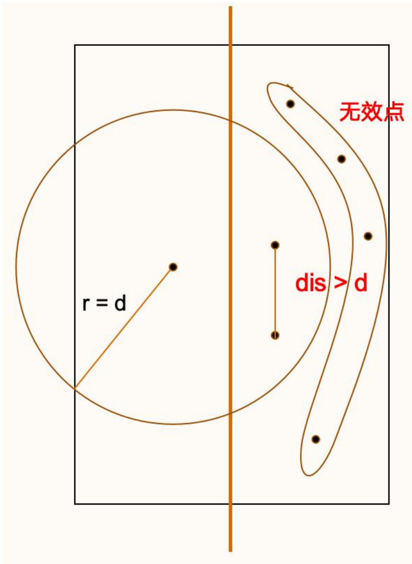
遍历左带内的所有点，并与右带内所有符合条件的点进行长度比较。

右侧符合条件点集筛选过程及原理:

结论: 右侧点位于以左侧点为中心，上下高度 d，右侧宽度 d 的 d*2d 的范围内。且右侧点的个数存在上限。

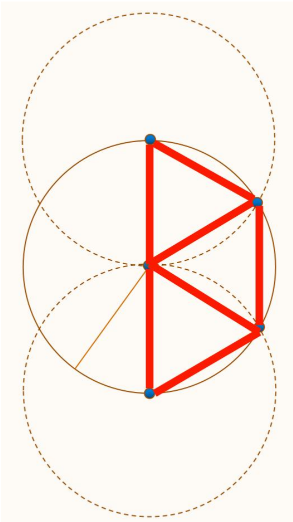
证明如下：

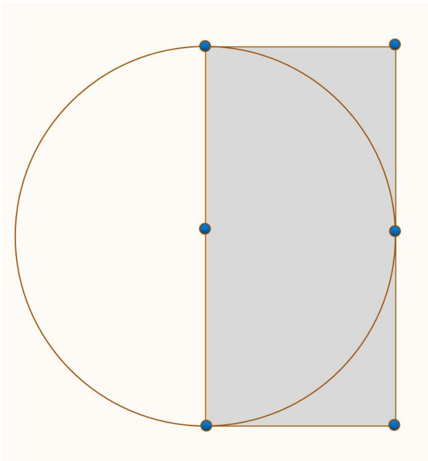




对于左侧的点，只有两点距离小于 d 才有合并时减小 d 的可能，所以右侧点必定在以左侧点为圆心、d 为半径的圆内（上左图所示），其余点为无效点（上右图所示）。

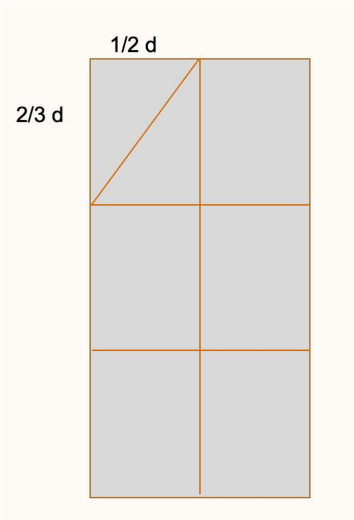
又因为右侧区域内任意两点距离最小值为 d2 >= d，所以圆内两点距离大于等于半径。





因为右侧点一定位于圆心右侧，最大可覆盖区域为右半圆，又因为两点距离大于半径，所以最多可能存在 5 个点满足条件（上左图所示）。

在计算机中对点坐标的排序为 x 或 y 坐标排序，难以对圆形区域进行判断，所以将半圆扩展为矩形便于计算机运算。改矩形范围内最多可能存在 6 个点满足条件（上左图所示）。



将矩形分为 6 个等大的 2/3d*1/2d 的小矩形，假设存在 7 个点，则必定有一个矩形内有两个点。
同一小矩形内两大距离最大值为对角线，即 0.8333d < d 与题意不符，所以不能有 7 个点。而 6 个点的情况如上右图所示。

综上所述， 右侧点位于以左侧点为中心，上下高度 d，右侧宽度 d 的 d*2d 的范围内。且右侧点的个数存在上限。

所以在查找过程中，只需要找到第一个属于左侧点对应矩形范围内的点，并之多向上查找 6 次，即可完成查询。

依次遍历左带中的点，并自下而上的遍历右带直到遇到第一个符合条件的点。

(2) 伪代码：

```
for i = 1 to left.size
    for j = 1 to right.size
        if right[j] 在相应的矩形内
            for k = j to j + 6 and k < right.size
                ans = min(ans, dis(left[i], right[j]))
```

(3) 复杂度分析：

有两种方法可以用来计算 d_C。对于均匀分布的大型点集，预计位于该带中的点的个数是非常少的。事实上，容易论证平均只有 $O(\sqrt{N})$个点是在这个带中。因此，我们可以以$O(N)$时间对这些点进行蛮力计算。图 10-32 中的伪代码实现该方法，其中按照 C 语言的约定，点的下标从 0 开始。

-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P280

递推公式：

平均情况 T(n) = 2T(n/2) + (√n)^2
总体时间复杂度 O（nlogn)

最坏情况 T(n) = 2T(n/2) + (n)^2
总体时间复杂度 O（n^2)

(4) 上述思路代码实现：

首先，对点集按照 x 坐标进行排序，得到 sortedPoints。然后，对点集按照 y 坐标

进行排序，得到 sortedY。

递归函数 closestPairRec：这个内部函数是分治算法的核心，它递归地寻找最近点对。如果点集的大小 n 小于等于 3，由于点集很小，直接使用暴力方法 bruteForceClosestPairWithinStrip 来找到最近点对。否则，找到中点 midPoint，并将点集分为左右两部分 leftX 和 rightX。同时，根据中点的 x 坐标，将 sortedY 分为 leftY 和 rightY。对左右两部分分别递归调用 closestPairRec 函数，找到左右两边的最近点对 closestLeft 和 closestRight。

```
function closestPairDivideAndConquer(points) {
    const sortedPoints = points.slice().sort((a, b) => a.x - b.x);

    function closestPairRec(sortedX, sortedY) {
        const n = sortedX.length;

        if (n <= 3) {
            return bruteForceClosestPairWithinStrip(sortedY, Infinity);
        }

        const midIndex = Math.floor(n / 2);
        const midPoint = sortedX[midIndex];
        const leftX = sortedX.slice(0, midIndex);
        const rightX = sortedX.slice(midIndex);

        const leftY = [];
        const rightY = [];
        for (const point of sortedY) {
            if (point.x <= midPoint.x) {
                leftY.push(point);
            } else {
                rightY.push(point);
            }
        }

        const closestLeft = closestPairRec(leftX, leftY);
        const closestRight = closestPairRec(rightX, rightY);
```

```
let minDistance;
let closestPair;
if (closestLeft && closestRight) {
    const distLeft = calculateDistance(closestLeft[0], closestLeft[1]);
    const distRight = calculateDistance(closestRight[0], closestRight[1]);
    if (distLeft < distRight) {
        minDistance = distLeft;
        closestPair = closestLeft;
    } else {
        minDistance = distRight;
        closestPair = closestRight;
    }
} else if (closestLeft) {
    minDistance = calculateDistance(closestLeft[0], closestLeft[1]);
    closestPair = closestLeft;
} else if (closestRight) {
    minDistance = calculateDistance(closestRight[0], closestRight[1]);
    closestPair = closestRight;
}

const strip = [];
for (const point of sortedY) {
    if (Math.abs(point.x - midPoint.x) < minDistance) {
        strip.push(point);
    }
}
```

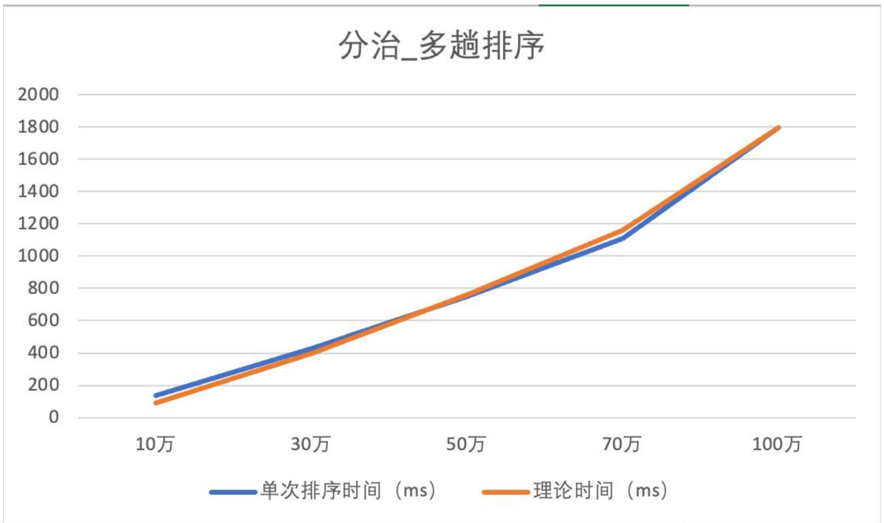
比较左右两边的最近点对，取距离更近的一个作为当前的最近点对 closestPair，并更新最小距离 minDistance。创建一个条带 strip，包含所有 x 坐标与中点 x 坐标距离小于 minDistance 的点。检查条带内的点对：在条带 strip 内使用暴力方法，遍历所有点对，计算它们之间的距离，并更新最小距离和最近点对。

```
for (let i = 0; i < strip.length - 1; i++) {
    for (let j = i + 1; j < Math.min(i + 7, strip.length); j++) {
        const distance = calculateDistance(strip[i], strip[j]);
        if (distance < minDistance) {
            minDistance = distance;
            closestPair = [strip[i], strip[j]];
```

（5） 数据分析：

最终结果如下：

数据量	10 万	30 万	50 万	70 万	100 万
单次时间（ms）	136.25	429.031	748.738	1111	1797
理论时间（ms）	89.85	398.158	763.262	1160.474	1797



图像上符合 O(nlogn) 曲线，并且理论值与实际值误差较小。

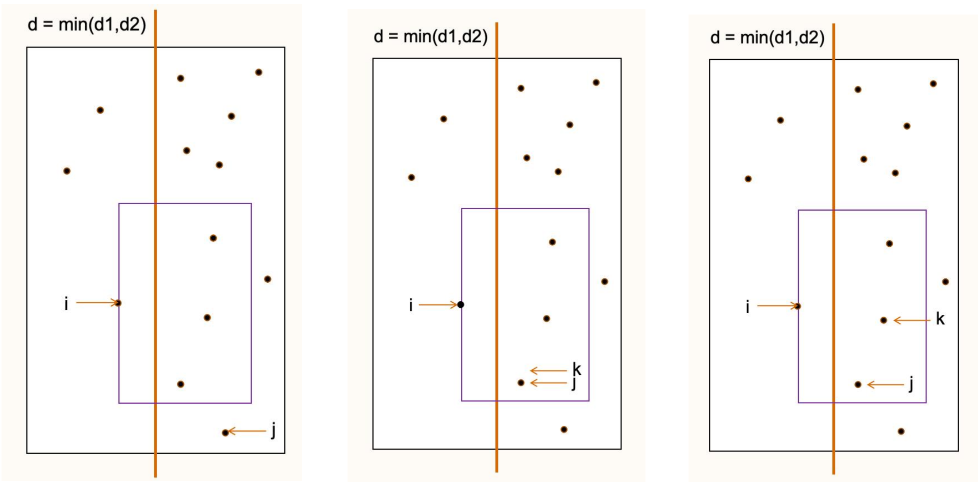
显然对于最差情况仍然为 O(n^2)，需要改进。

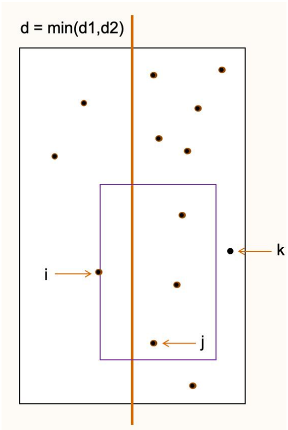
III） 分治——一趟查询

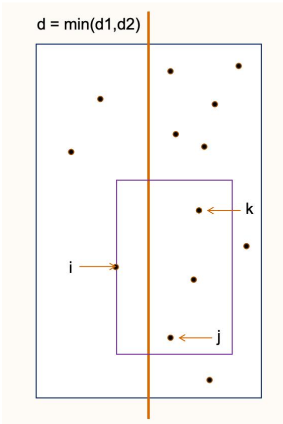
（1） 算法原理：

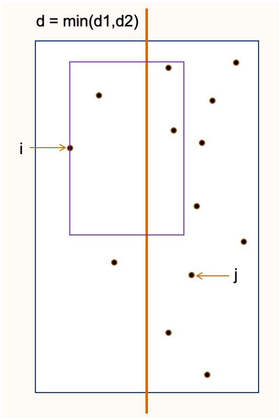
此算法在上一部分的基础上进行了部分改进，达到了线性的查找效率。

方法是对于左右侧的点都自下而上进行查找。因为矩形区域是固定的，所以随着左侧点的 y 坐标增大，矩形的最低点也是逐渐增大，右侧符合条件的第一个点的 y 也会逐渐增大，并不需要返回重新查找。









（2） 伪代码：

j = 0
for i = 1 to left.size
    while j < right.size and right[j].y < left[i].y - d
        j += 1
    for k = j to j + 6 and right[k].y < left[i].y + d
        ans = min(ans, dis(left[i], right[j]))

（3） 复杂度分析：

在此过程中，只需要对左右带中的点进行依次遍历，即可找到最短距离，最多比较 6n 次即可，达到了线性效率。

递推公式：

T(n) = 2T(n/2) + n

总体时间复杂度 O（nlogn）

（4） 上述思路代码实现：

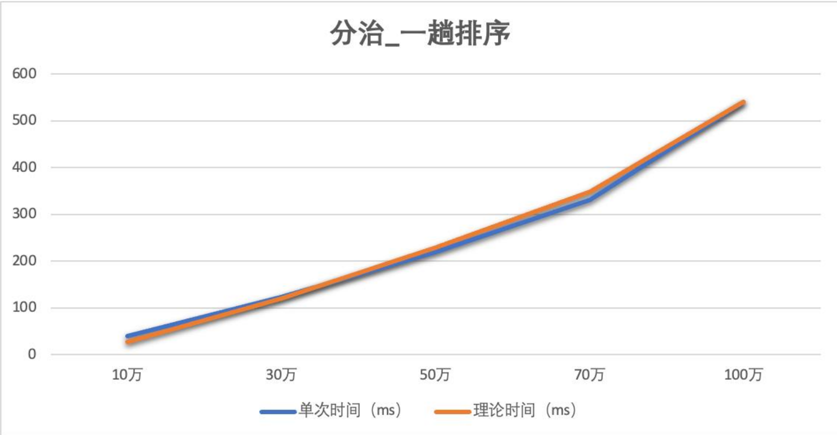
closestPairOnePass：这个函数尝试在一次遍历中找到最近点对。它首先对点集按照 x 坐标进行排序。然后，它使用两个指针（leftIndex 和 rightIndex）来遍历排序后的点集。在遍历过程中，它计算两个指针所指的点之间的距离，并更新最小距离和最近点对。如果右指针与左指针的距离大于 1 且当前点的 y 坐标与左指针所指点的 y 坐标之差大于最小距离，则移动左指针。

```
function closestPairOnePass(points) {
    const sortedPoints = points.slice().sort((a, b) => a.x - b.x);

    let closestPair = [];
    let minDistance = Infinity;
    let leftIndex = 0;
    let rightIndex = 1;

    while (rightIndex < sortedPoints.length) {
        const leftPoint = sortedPoints[leftIndex];
        const rightPoint = sortedPoints[rightIndex];
        const distance = calculateDistance(leftPoint, rightPoint);

        if (distance < minDistance) {
            closestPair = [leftPoint, rightPoint];
            minDistance = distance;
        }

        if (rightIndex - leftIndex === 1 || rightPoint.y - leftPoint.y < minDistance) {
            rightIndex++;
        } else {
            leftIndex++;
        }
```

（5） 数据分析：

最终结果如下：

数据量	10 万	30 万	50 万	70 万	100 万
单次时间（ms）	39.967	123.128	219.903	331.7	540.15
理论时间（ms）	27.008	119.680	229.425	348.820	540.15



图像上符合 O(nlogn) 曲线，并且理论值与实际值误差较小。

2. 问题思考：

上述合并的方法是利用自下而上的遍历左右带中的点集，所以需要对带中的点以 y 坐标进行排序。

前提条件：左右区域内的点是依据 y 坐标进行排序的。

实际条件：左右区域内的点是依据 x 坐标进行排序的。（获取中轴线时，已排序）

所以每次递归的过程之中都需要对 y 进行排序。

有两种方法可以用来计算 d_C。对于均匀分布的大型点集，预计位于该带中的点的个数是非常少的。事实上，容易论证平均只有 $O(\sqrt{N})$个点是在这个带中。因此，我们可以以$O(N)$时间对这些点进行蛮力计算。图 10-32 中的伪代码实现该方法，其中按照 C 语言的约定，点的下标从 0 开始。

-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P280

递推公式：

平均情况 T(n) = 2T(n/2) + √n·log√n < 2T(n/2) + n

合并效率小于 O(nlogn)，又因为一开始对 x 排序，O(nlogn)为时间效率下限。

总体时间复杂度 O(nlogn)

最坏情况 T(n) = 2T(n/2) + nlogn

总体时间复杂度 O(nlognlogn)

虽然最坏情况下为 O(nlognlogn)，但相较于 O(n^2)有较大提升。

为了解决这一问题，引入以下方法。

解决方案：

> 我们将保留两个表。一个是按照 x 坐标排序的点的表，而另一个是按照 y 坐标排序的点的表。我们分别称这两个表为 P 和 Q。这两个表可以通过一个预处理排序步骤花费 $O(N \log N)$ 得到，因此并不影响时间界。P_L 和 Q_L 是传递给左半部分递归调用的参数表，P_R 和 Q_R 是传递给右半部分递归调用的参数表。我们已经看到，P 很容易在中间分开。一旦分割线已知，我们依序转到 Q，把每一个元素放入相应的 Q_L 或 Q_R。容易看出，Q_L 和 Q_R 将自动地按照 y 坐标排序。当递归调用返回时，我们扫描 Q 表并删除其 x 坐标不在带内的所有点。此时 Q 只含有带中的点，而这些点保证是按照它们的 y 坐标排序的。

-----《数据结构与算法分析-C 语言描述》P281

递推公式：

T(n) = 2T(n/2) + n

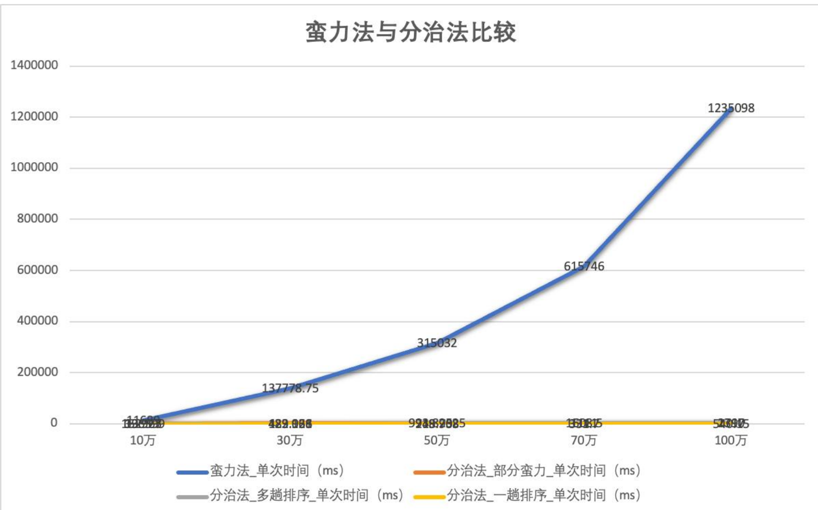
总体时间复杂度 O(nlogn)

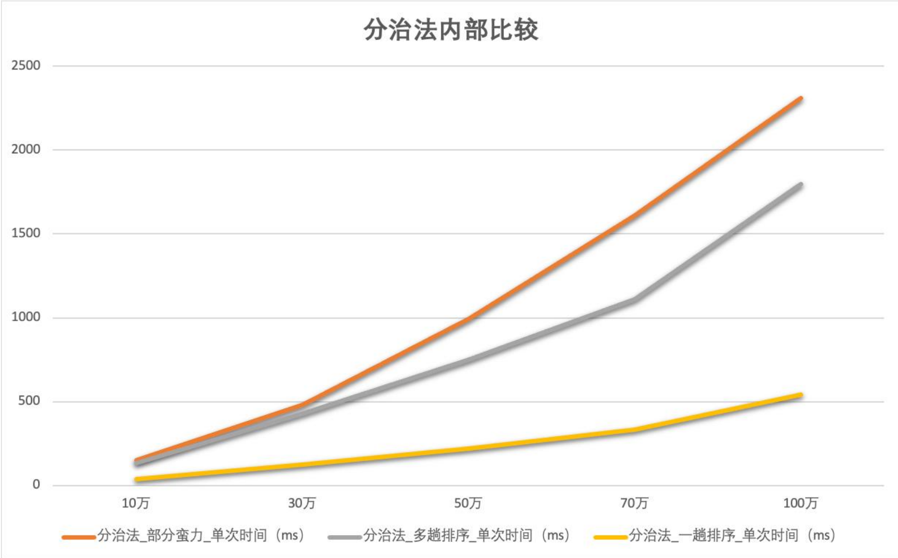
3. 综合分析

（1）数据分析：

数据量	10 万	30 万	50 万	70 万	100 万
蛮力法_单次时间（ms）	11689	137778.75	315032	615746	1235098
分治法_部分蛮力_单次时间（ms）	152.599	482.966	993.82525	1608.5	2310
分治法_多趟排序_单次时间（ms）	136.25	429.031	748.738	1111	1797
分治法_一趟排序_单次时间（ms）	39.967	123.128	219.903	331.7	540.15

（2）对比图像展示：





（3）结论：

显然，分治法的时间效率是要远远优于蛮力法。每一次的优化，都对于时间效率有着一定幅度的提升。

四、 经验总结

通过本次实验，我深入理解了分治法的核心思想，即通过将大问题分解为若干个小规模子问题，逐个解决并合并结果，从而有效解决复杂问题。在求解最近点对问题的过程中，我掌握了预处理数据、递归求解子问题以及合并结果的关键步骤，进一步加深了对分治法的应用和理解。

在优化算法方面，我通过仔细分析合并过程，成功降低了算法的时间复杂度，从原本的O(n^2)提升到了 O(nlogn)，显著提升了算法的性能。这一优化过程不仅提高了算法的效率，还锻炼了我的算法设计和分析能力。

为了验证分治法的正确性和效率优势，我设计了一系列实验，通过随机生成数据并使用蛮力法和分治法进行求解。实验结果显示，分治法不仅在时间效率上明显优于蛮力法，而且能够准确找到最近点对。这一结果验证了分治法的正确性和高效性，让我对分治法有了更深入的认识。

在实验过程中，我不断思考和优化代码细节，通过引入额外的数据结构进一步提升算法效率。这些实践经历让我深刻认识到，在实现算法时，细节优化和引入辅助数据结构对于提升算法性能至关重要。

综上所述，本次实验不仅让我掌握了分治法的应用技巧，还锻炼了我的算法设计和优化能力。通过不断实践和思考，我对分治法的理解更加深入，对算法实现和优化也有了更深刻的认识。

指导教师批阅意见：   成绩评定：   指导教师签字： 年 月 日
备注：

注：1、报告内的项目或内容设置，可根据实际情况加以调整和补充。

2、教师批改学生实验报告时间应在学生提交实验报告时间后 10 日内。