

周期趋同现象的动力学系统模型

华泰周期起源系列研究报告之二

林晓明 执业证书编号：S0570516010001
研究员 0755-82080134
linxiaoming@htsc.com

陈烨 执业证书编号：S0570518080004
研究员 010-56793942
chenye@htsc.com

刘志成 执业证书编号：S0570518080005
研究员 010-56793940
liuzhicheng@htsc.com

李子钰 执业证书编号：S0570519110003
研究员 0755-23987436
liziyu@htsc.com

何康 021-28972039
联系人 hekang@htsc.com

源洁莹 0755-82366825
联系人 yuanjieying@htsc.com

王晨宇
联系人 wangchenyu@htsc.com

相关研究

- 1 《金工：从微观同步到宏观周期》2019.12
- 2 《金工：基于投入产出表的产业链分析》2019.12
- 3 《金工：投资优质股票：红利类 Smart Beta》2019.12

周期趋同现象的动力学系统模型

本研究尝试以动力学系统模型解释周期趋同现象。自然界和社科领域存在大量系统级别的周期现象，如萤火虫同步闪烁、惠更斯钟摆同步、经济金融系统的周期轮回等。宏观系统的周期现象可能源自每一个微观个体的周期趋同。周期趋同现象可以由多个主体的动力学系统模型刻画，模型的核心是包含耦合函数的二阶微分方程组。借助模型能够模拟周期趋同现象，同时解释产生周期趋同的原因以及必要条件。动力学系统模型为我们深入理解经济周期起源提供了窗口。

从“上帝视角”到“蚂蚁视角”

动力学系统是刻画物体运动时空规律的数理模型，描述运动规律有“上帝视角”和“蚂蚁视角”两类方式。“上帝视角”通常为时间的函数，可以用来预测物体在未来任意时刻的状态。“蚂蚁视角”通常为微分方程形式，特点是“只看当下”，基于当前时刻状态预测下一时刻状态的变化量，最终同样可以预测物体未来的状态。由于“蚂蚁视角”更易获得，微分方程的数值模拟是更常用的动力学系统研究方法。一阶动力学系统不具备周期性，二阶动力学系统是刻画物体运动周期现象的常用工具。

从心理学现象到动力学系统模型

Haken-Kelso-Bunz (HKB) 模型是最早解释周期趋同的动力学系统模型之一。HKB 模型基于一个有趣的心理学现象：当左右手指初始状态为异步时，如果提高周期摆动的频率，超过一定阈值时，左右手指会切换到同步状态。HKB 模型的核心是包含两个主体的动力学系统二阶微分方程组。其中单只手指周期运动由 Rayleigh 振子刻画，手指间的相互影响由耦合函数刻画，神经系统的随机性由高斯噪音项刻画，系统能量注入由频率提升刻画。通过对 HKB 模型的数值模拟，能够很好地复现周期趋同现象。将自下而上的微分方程与自上而下的势函数相结合，能够解释产生周期趋同的原因。

从动力学系统语境到经济系统语境

动力学系统模型为我们理解经济周期打开了窗口，对于动力学系统语境下周期趋同的四个必要条件，我们希望能经济系统语境下找到相应的要素。例如单个主体的周期可能对应经销商周期进货，季节性农业生产，固定周期的工资发放或货币结算等；主体之间的相互影响可能对应经济者之间的良好交互机制，如商品和货币的流通；系统的随机性在微观上可能对应生产者 and 消费者的行为，在宏观上可能对应科学技术的进步等；有能量注入系统可能对应人的劳动。未来或有可能对每个要素分别进行动力学系统建模，最终定量阐释经济周期的起源。

风险提示：自然科学领域的周期规律可能无法直接迁移到社会科学领域；动力学系统模型是对真实世界的简单刻画，存在过度简化的可能；周期规律基于历史数据总结，历史规律可能失效；周期规律对市场长期规律进行研究，无法判断短期的市场情绪与政策冲击带来的影响；市场在某些极端情形下可能出现规律以外的交易风险。

正文目录

研究导读	5
二阶动力学系统是刻画周期现象的常用工具	6
如何刻画自由落体运动：上帝视角和蚂蚁视角	6
自由落体的“上帝视角”：时间 t 的函数	6
自由落体的“蚂蚁视角”：微分方程	6
上帝视角和蚂蚁视角的讨论	7
何为动力学系统	7
一阶动力学系统：最简单的动力学系统	8
一阶动力学系统的一般形式	8
一阶线性动力学系统的“蚂蚁视角”	8
一阶线性动力学系统的“上帝视角”	8
一阶非线性动力学系统	9
二阶动力学系统：具备周期性的动力学系统	10
无阻尼弹簧振子的“蚂蚁视角”	10
无阻尼弹簧振子的“上帝视角”	10
带阻尼的弹簧振子	11
本章小结	12
自然界的周期趋同现象及 HKB 模型	13
手指运动的周期趋同现象	13
自下而上理解 HKB 模型：动力学系统微分方程组的推导和模拟	14
动力学系统的状态变量：位置和相位差	14
单只手指周期运动位置的力学系统微分方程：Rayleigh 振子	14
两只手指周期运动位置的力学系统微分方程组：引入耦合函数	15
HKB 模型对手指周期运动位置的数值模拟	15
两只手指周期运动相位差的力学系统微分方程	16
HKB 模型对手指周期运动位置和相位差的数值模拟	17
自上而下理解 HKB 模型：势函数	17
势函数的概念	17
HKB 模型相位差的势函数及其图像	18
周期趋同的前提条件：势函数形态改变和临界频率	19
本章小结	20
周期趋同的必要条件探讨	21
必要条件 1：单个主体存在周期性	21
必要条件 2：主体之间相互影响	22
两个主体	22
三个主体强耦合	23
三个主体弱耦合	24
必要条件 3：系统存在随机性	26

初始相位差为 π	26
初始相位差不为 π	27
必要条件 4: 有能量注入系统	27
本章小结	28
全文总结与未来展望	29
从“上帝视角”到“蚂蚁视角”	29
从心理学现象到动力学系统模型	29
从动力学系统语境到经济系统语境	30
展望	30
参考文献	30
风险提示	30
附录: HKB 模型的推导	31
Rayleigh 振子振幅与频率关系	31
相位差的动力学系统微分方程	32

图表目录

图表 1: 分别从“上帝视角”和“蚂蚁视角”观察自由落体运动	7
图表 2: 动力学系统的分类	8
图表 3: 一阶线性动力学系统的指数衰减	9
图表 4: 弹簧振子示意图	10
图表 5: 带阻尼弹簧振子的周期衰减	11
图表 6: 手指同步运动示意图 (相位差为 0)	13
图表 7: 手指异步运动示意图 (相位差为 π)	13
图表 8: 手指运动的周期趋同现象	14
图表 9: HKB 模型位置模拟结果 (初始相位差为 π)	16
图表 10: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 π)	17
图表 11: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 $10\pi/11$)	17
图表 12: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 $5\pi/6$)	17
图表 13: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 $\pi/2$)	17
图表 14: 相位差的势函数 ($b/a=1$)	18
图表 15: 不同 b/a 取值下的相位差势函数	19
图表 16: HKB 模型位置模拟结果 (一阶导数项引入噪音, $\lambda=0.875$)	21
图表 17: HKB 模型位置模拟结果 (一阶导数项引入噪音, $\lambda=0.75$)	21
图表 18: HKB 模型位置模拟结果 (一阶导数项引入噪音, $\lambda=0.625$)	22
图表 19: HKB 模型位置模拟结果 (一阶导数项引入噪音, $\lambda=0.5$)	22
图表 20: HKB 模型位置模拟结果 (无耦合, $I_{12}=I_{21}=0$)	22
图表 21: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 1 对主体 2 有影响, $I_{12}=0$)	23
图表 22: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 2 对主体 1 有影响, $I_{21}=0$)	23
图表 23: HKB 模型位置模拟结果 (三个主体, 强耦合)	24

图表 24: HKB 模型位置模拟结果 (三个主体, 弱耦合)	24
图表 25: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 2、3 受主体 1 影响)	25
图表 26: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 1 受 2、3 影响, $t=0\sim 100$)	25
图表 27: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 1 受 2、3 影响, $t=200\sim 300$)	25
图表 28: 三个主体之间不同耦合方式对周期趋同的影响	26
图表 29: HKB 模型位置模拟结果 (初始相位差为 π , 不存在噪音)	26
图表 30: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (噪音 $\sigma=0.001$)	26
图表 31: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (噪音 $\sigma=0.01$)	26
图表 32: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (噪音 $\sigma=0.1$)	27
图表 33: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (噪音 $\sigma=1$)	27
图表 34: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 $10\pi/11$, 无噪音)	27
图表 35: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 $\pi/2$, 无噪音)	27
图表 36: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 π , 频率不变)	28
图表 37: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 $\pi/2$, 频率不变)	28
图表 38: 经典动力学系统汇总	29
图表 39: 两个主体周期运动趋同现象的动力学系统模型	29
图表 40: 从动力学系统语境到经济系统语境	30

研究导读

经济周期源自何处？传统的宏观经济研究或将经济周期归结为货币周期，或归因于生产资料的过度投资，或认为周期源于乐观和悲观心理预期的交替。然而，单纯从宏观的角度似乎只能解释表象，无法阐明表象背后的深层原因——为什么货币、投资、心理存在周期，也无法解释市场一致性行为的基础——为什么所有生产者都投资过度、所有人都预期乐观，更无法定量解释经济周期的起源。

在华泰金工《从微观同步到宏观周期》(20191225) 研究报告中，我们从萤火虫同步闪烁、惠更斯钟摆同步等自然界的周期现象中获得启发，产生出一种解释经济周期起源的新思路。对比经济系统与自然界中的非线性系统，我们发现两者存在诸多相似，经济周期可能是通过微观经济行为同步而自发产生的周期现象。然而，彼时我们对该问题的理解仅仅停留在定性描述阶段，难以定量刻画周期起源。事实上，面对如此庞大、复杂的经济系统，任何传统的经济学研究方法可能都是徒劳的。

科学研究的魅力在于，在某一个领域播下的种子，会不期在另一片田地结出果实。传统经济学解决不了的问题，我们在心理学找到了可能的答案。心理学研究发现，人的左右手运动存在有趣的周期趋同现象，研究者借助非线性动力学系统对该现象进行建模，由此提出的 Haken-Kelso-Bunz (HKB) 模型成功并且定量地解释了周期运动趋同的起源。

HKB 模型为我们理解经济周期打开了窗口。什么是动力学系统？不同的动力学系统有怎样的特点？怎样的动力学系统能够刻画周期性？动力学系统模型能否模拟周期趋同现象？周期趋同的必要条件有哪些？这些必要条件能否在经济系统中找到相对应的要素？本文将尝试予以解答。

二阶动力学系统是刻画周期现象的常用工具

“人生代代无穷已，江月年年望相似”。万物自有其运行规律，而代代人类希望以有穷之心智探求无尽的世间奥秘。对于社会科学而言，研究者往往借助史料、实录等工具理解世界，“究天人之际，通古今之变”。对于自然科学而言，研究者往往借助数理模型等工具刻画事物的运动规律，最终试图理解世界。

本章首先从最简单的运动——自由落体运动开始，介绍刻画物体运动规律的两种常见方式——“上帝视角”的显式解和“蚂蚁视角”的隐式微分方程表达，进而引出动力学系统的概念。其次介绍最简单的一阶线性和非线性动力学系统，指出一阶动力学系统无法刻画相对复杂的运动规律。最后通过介绍无阻尼和带阻尼的弹簧振子，引出二阶动力学系统的概念，指出二阶动力学系统是刻画周期现象的最常用工具。

如何刻画自由落体运动：上帝视角和蚂蚁视角

自由落体的“上帝视角”：时间 t 的函数

暂且抛开枯燥的术语和过于繁琐的公式，我们从最简单的物体运动之一——自由落体运动谈起。中学物理课本告诉我们，如果一只苹果以静止状态开始从空中坠落，那么在任意时刻 t ，这只苹果的位置可以用关于时间的运动方程刻画：

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

其中 x 为苹果运动的位置，它是时间 t 的函数，有时也写作 $x(t)$ ； g 为重力加速度，通常取常数 9.8 米/秒²。

自由落体公式的伟大之处在于，牛顿帮助人类开启了“上帝视角”：我们不仅可以回溯这只苹果已经走过的轨迹，还可以显式地对其未来的运动轨迹进行预测。例如，当时间 $t=0$ 秒时，苹果位置 $x=0$ 米；当时间 $t=0.01$ 秒时，苹果相对于初始点的位置 $x=0.00049$ 米；当时间 $t=0.02$ 秒时，苹果相对于初始点的位置 $x=0.00196$ 米。如果苹果从无穷高处坠落，我们甚至可以精确预测它的运动状态直至“宇宙终结”。

自由落体的“蚂蚁视角”：微分方程

接下来我们对上式做简单变换，将等式两边对时间 t 求一阶导数：

$$\dot{x} = gt$$

再将上式两边对时间 t 求导：

$$\ddot{x} = g$$

上面的式子看似简单，但是同样刻画了自由落体运动的本质：苹果坠落的加速度为定值。此时，我们暂无法显式地知悉未来任意时刻苹果的运动状态，但是基于初始位置 x_0 、初始速度 \dot{x}_0 、当前的加速度 \ddot{x} ，可以推知它在极短时间 Δt 后的速度：

$$\dot{x}_{\Delta t} = \dot{x}_0 + \ddot{x}\Delta t$$

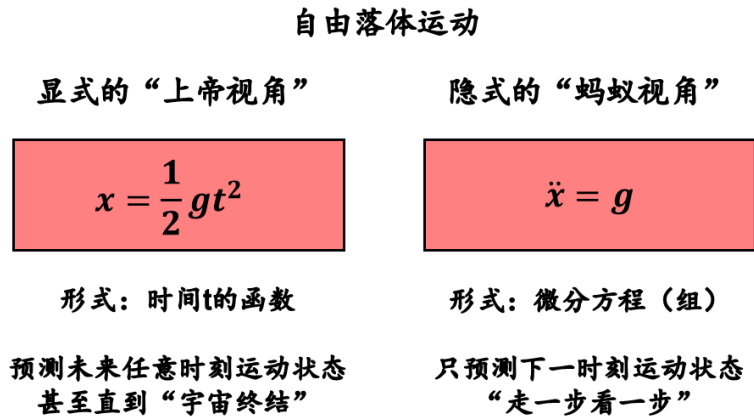
进而推知它在极短时间 Δt 后的位置：

$$x_{\Delta t} = x_0 + \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_{\Delta t}}{2}\Delta t$$

例如，假设苹果初始位置 $x_0 = 0$ 米，初始速度 $\dot{x}_0 = 0$ 米/秒；经过时间 $\Delta t = 0.01$ 秒后，苹果速度 $\dot{x}_{\Delta t} = 0.098$ 米/秒，位置 $x_{\Delta t} = 0.00049$ 米；再次经过时间 $\Delta t = 0.01$ 秒后，苹果速度 $\dot{x}_{2\Delta t} = 0.196$ 米/秒，位置 $x_{2\Delta t} = 0.00196$ 米。

通过上述迭代，我们同样可以推算未来任意时刻苹果的运动状态。这种“不看长远，只看当下”、隐式地刻画物体运动的方式，我们不妨称之为“蚂蚁视角”。由于 $\ddot{x} = g$ 的左边为微分项，该式子也可以视作微分方程的一个特例。对比可知，上帝视角和蚂蚁视角的计算结果相同。

图1：分别从“上帝视角”和“蚂蚁视角”观察自由落体运动



资料来源：华泰证券研究所

上帝视角和蚂蚁视角的讨论

上帝视角和蚂蚁视角同样能够刻画物体运动，哪种方式更好？从计算简便的角度考虑，无疑是上帝视角。然而，并非所有运动都像自由落体运动一样易于研究。即使是古典物理学中的三体问题，都无法写出显式的运动方程，更遑论微观粒子运动，乃至细胞、生物、群体行为等。尤其是面对复杂系统，无法从上帝视角解读，只能依靠蚂蚁视角。上帝视角的显式解一般是未知的，蚂蚁视角的隐式表达（即微分方程）才是我们更容易获知的。

总的来看，上帝视角的答案简洁但难以达至，蚂蚁视角的答案更容易获得。两者的目标都是刻画物体运动，殊途同归。这种刻画物体运动时空规律的数理模型统称为动力学系统（Dynamic Systems）。

何为动力学系统

自然界中动力学系统无处不在，小至苹果的自由落体，大至行星的自转和公转，都可视为动力学系统。我们将动力学系统的研究对象（如苹果、星体）称为主体（Agent）。主体的运动规律不一定局限于可量化的物理学准则，只要主体的运动随时间演化，任意时刻的状态可测，均可视为动力学系统。如两种具有协整关系资产的价格变化，又如多个经济体之间的周期演进等。

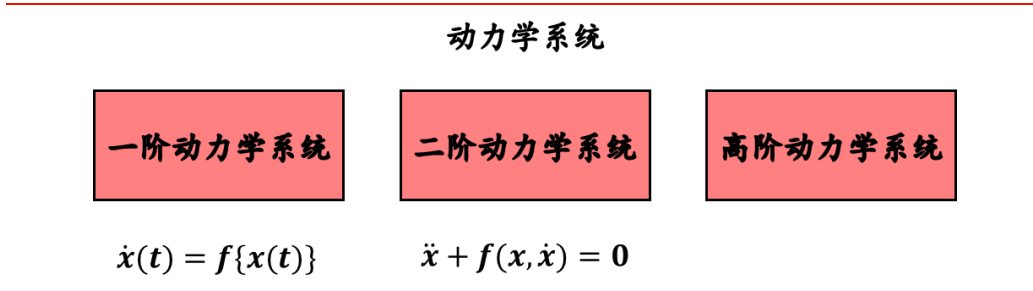
系统中各个主体随时间的运动方程是动力学系统最直观的描述，即上节所述的“上帝视角”。随着时间的推进，物体的运动可能趋向于稳定的周期变化，可能趋向于恒定运动，可能趋向于随机运动，也可能在不同运动状态之间转变等。在运动方程的基础上，可以对其过去和未来的运动状态进行精准刻画。

对于简单的动力学系统，藉由力学规律可推导出系统的显式解。然而更多的动力学系统并不能得出简洁直观的显式运动方程。例如，当系统中存在多个主体时，主体之间的互相影响会使得运动规律更为复杂，此时难以用一个简单函数推断物体在任意时刻的运动状态。

狭义的动力学系统理论从微分方程或方程组切入，试图定量刻画系统中主体的运动规律，即上节所述的“蚂蚁视角”。当运动规律无法给出显式表达时，微分方程的定性分析、数值计算等隐式方法都是重要的研究途径。在现实世界，有时我们并不关注系统中的主体在特定时刻的状态，仅仅关注系统运动的趋势，此时微分方程的隐式解法已经能满足要求。

动力学系统根据其复杂程度，可分为一阶动力学系统、二阶动力学系统和高阶动力学系统。下一节我们将从简单的一阶动力学系统开始，了解动力学系统的基本性质和研究方法。最终我们将回答下面的问题：什么样的动力学系统能够刻画周期运动的特性？

图表2： 动力学系统的分类



资料来源：华泰证券研究所

一阶动力学系统：最简单的动力学系统

一阶动力学系统的一般形式

假设动力学系统存在 n 个主体 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，其一阶动力学系统微分方程组表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

其中 x_i 代表主体 i 在 t 时刻的状态，例如物体位置，资产价格等； \dot{x}_i 代表主体 i 在 t 时刻状态的一阶导数，即状态的改变量，例如物体运动速度，资产收益率等。由上式知，**一阶动力学系统的核心假设是：物体当前的运动状态决定状态的一阶变化量**。例如，当状态的量纲为“位置”时，一阶动力学系统的核心假设为：物体当前的“位置”决定其运动的“速度”；当状态的量纲为“价格”时，核心假设为：资产当前的“价格”决定其下一刻的“收益率”。

一阶线性动力学系统的“蚂蚁视角”

当 f_1, f_2, \dots, f_n 都可以表示成 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性组合形式时，该系统称为线性动力学系统，此时一阶线性动力学系统微分方程组可表示成：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中 a_{ij} 可以是常数，也可以是依赖于时间 t 的函数。

上述式子可能略显抽象。我们举一个最简单的例子，假设线性动力学系统中仅有单个主体，此时一阶线性动力学系统微分方程为：

$$\dot{x} = rx$$

为了后续描述方便起见，改写成如下形式，保证 r 为非负数：

$$\dot{x} = -rx$$

上式看似简单，实际上足以刻画诸多自然现象。例如放射性元素的衰变过程即遵循上述线性动力学系统。以碳 14 的衰变为例：其中 x 为碳 14 原子的数量； \dot{x} 为极短时间 Δt 内碳 14 原子数量的变化量，通常为负数，其绝对值代表发生衰变的碳 14 原子数量；非负常数 r 为衰变速度， r 越大，衰变速度越快。

对上式的解读是：在任意时刻，固定比例 r 的碳 14 原子发生衰变。这是碳 14 衰变过程的“蚂蚁视角”。除碳 14 衰变外，控制论里经典的 τ 策略（Tau-dot Strategy）也可以由一阶线性动力学系统刻画，这里不作展开。

一阶线性动力学系统的“上帝视角”

上述线性动力学系统较为简单，借助高等数学知识，可以求出该一阶线性微分方程的解析解。首先将 x 的一阶导数写作 dx/dt ，此时一阶线性动力学系统微分方程为：

$$\frac{dx}{dt} = -rx$$

即：

$$\frac{dx}{x} = -r dt$$

两边对 dt 求不定积分：

$$\int \frac{1}{x} dx = -r \int dt$$

由不定积分性质可知：

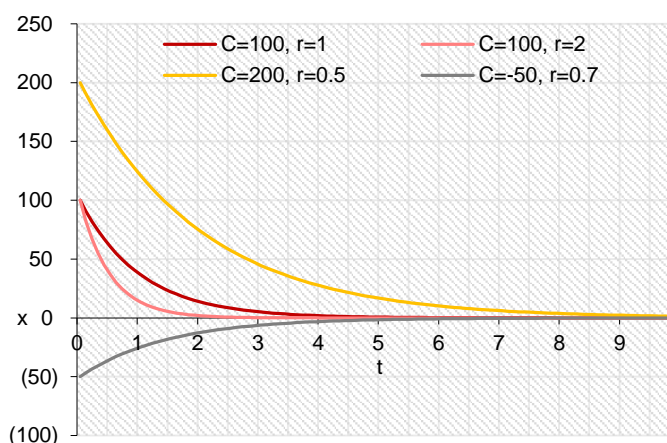
$$\ln|x| = -rt + C'$$

其中 C' 为常数。两边以 e 为底求幂，得到唯一的解析解：

$$x = Ce^{-rt}$$

其中常数项 C 为碳 14 原子的初始数量。上式可以从概率上预测任意 t 时刻剩余碳 14 原子的数量。上述方程也称为指数衰减过程，下图展示了不同 C 、 r 取值下的衰减情况。这是碳 14 衰变的“上帝视角”。

图表3：一阶线性动力学系统的指数衰减



资料来源：华泰证券研究所

进一步地，由指数衰减方程可知，对于一阶线性动力学系统 $\dot{x} = -rx$ ，当参数 r 为非负数时，经过足够长的时间，系统将收敛至唯一的稳定状态 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ ；当参数 r 为正数时，经过足够长的时间，系统将趋于发散至无穷大。这种系统状态随参数取值不同而发生变化的现象称为分岔（Bifurcation）。

事实上，一阶线性动力学系统或收敛至唯一的稳定点，或发散至无穷；由于系统较为简单，不具备周期性。描述动力学系统稳定或发散特性的更常用方式是相图（Phase Portraits），本文暂不作展开。

一阶非线性动力学系统

在一阶动力学系统的一般形式中，若 f_1, f_2, \dots, f_n 不能表示成 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性组合，则该系统为一阶非线性动力学系统。例如，在一阶线性动力学系统微分方程的右侧添加三次项，得到如下“蚂蚁视角”的一阶非线性动力学系统微分方程：

$$\dot{x} = rx - x^3$$

该一阶非线性微分方程同样存在“上帝视角”的显式解（推导过程从略）：

$$x = \pm \sqrt{\frac{r}{e^{2r(c_1+t)} - 1}} e^{r(c_1+t)}$$

根据 r 取值的不同，系统的最终状态也不尽相同。当 $r \geq 0$ 时，经过足够长的时间，动力学系统将收敛至稳定状态 $(x, \dot{x}) = (\pm\sqrt{r}, 0)$ ；当 $r < 0$ 时，动力学系统将收敛至稳定状态 $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ 。该动力学系统对应的物理模型如欧拉压杆（Euler Strut），这里不作展开。

事实上，和一阶线性动力学系统类似，一阶非线性动力学系统或收敛至稳定点，或发散至无穷，同样不具备周期性。总的来看，对于一般的一阶动力学系统，无论是线性还是非线性，均无法刻画周期运动的特性。下面我们将考察更为复杂的二阶动力学系统。

二阶动力学系统：具备周期性的动力学系统

当描述动力学系统的微分方程中具有二阶微分项时，动力学系统称为二阶动力学系统。考虑只有单个主体的系统，二阶动力学系统微分方程的一般形式为：

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

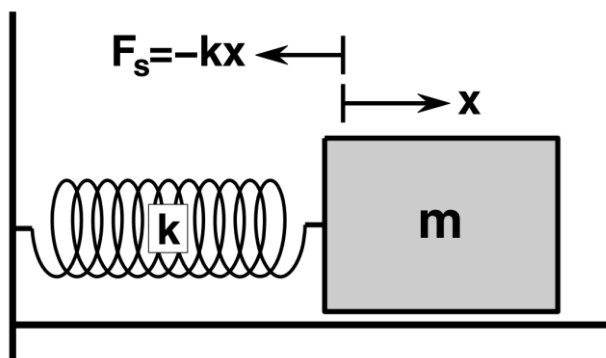
二阶动力学系统的核心假设是：物体当前的运动状态以及状态的一阶变化量，共同决定状态的二阶变化量。例如，当状态的量纲为“位置”时，二阶动力学系统的核心假设为：物体当前的“位置”与其运动的“速度”，共同决定物体运动的“加速度”。

二阶微分项的存在使得动力学系统的性质不同于一阶动力学系统。当 $f(x, \dot{x})$ 的表达式较为复杂时，上述方程难以给出简洁的显式解，给理解二阶动力学系统特性带来一定困难，因此我们将从较为简单二阶动力学系统——弹簧振子入手研究。

无阻尼弹簧振子的“蚂蚁视角”

物理学中的弹簧振子是经典的二阶动力学系统。典型的弹簧振子如下图所示，劲度系数为 k 的弹簧一端固定，另一端与质量为 m 的物体连接。首先考虑没有阻尼的情况，此时振子不受摩擦力干扰，系统能量守恒，弹簧振子以固定的振幅循环往复运动。

图表4： 弹簧振子示意图



资料来源：Nonlinear Dynamics in Complex Systems，华泰证券研究所

当振子运动到某个位置 x 时，结合牛顿第二定律 $F=ma$ 以及胡克定律 $F=-kx$ ，可得到描述振子运动的二阶动力学系统微分方程：

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

上述动力学系统微分方程不存在一阶微分项，可以视作是二阶动力学系统的特殊情形。这是无阻尼弹簧振子的“蚂蚁视角”。

无阻尼弹簧振子的“上帝视角”

如何求上述微分方程的显式解？令 $\omega^2=k/m$ ，将上式改写为：

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

我们需要寻找一类函数，其二阶导数是原函数的相反数再乘以一个常数。正弦函数和余弦函数恰好满足该特性：

$$x(t) = \sin \omega t, \quad \dot{x}(t) = \omega \cos \omega t, \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 \sin \omega t$$

$$x(t) = \cos \omega t, \quad \dot{x}(t) = -\omega \sin \omega t, \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 \cos \omega t$$

因此，无阻尼弹簧振子显式解的一般形式可表示为余弦函数和正弦函数的线性组合：

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

其中 a 、 b 为常数，与弹簧振子的初始状态有关。

特别地，当弹簧振子的初始位置为 x_0 ，初始速度为 v_0 时，无阻尼弹簧振子的显式解为：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中频率 ω ：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

振幅 A 为常数，不随时间衰减：

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_0^2}{k}}$$

初始相位 φ_0 ：

$$\varphi_0 = -\arctan \frac{v_0}{x_0} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

这是无阻尼弹簧振子的“上帝视角”。弹簧振子的运动规律由简洁的三角函数表示，除了可以得出任意时刻弹簧振子周期运动的状态，我们还能计算其运动频率和振幅。

带阻尼的弹簧振子

现实世界中的系统存在阻尼，阻尼的刻画方式是在原有微分方程中增加一阶微分项，用 γ 表示阻尼系数，则带阻尼的弹簧振子“蚂蚁视角”的二阶动力学系统微分方程为：

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

对应“上帝视角”的显式解需要对阻尼系数进行分类讨论。令：

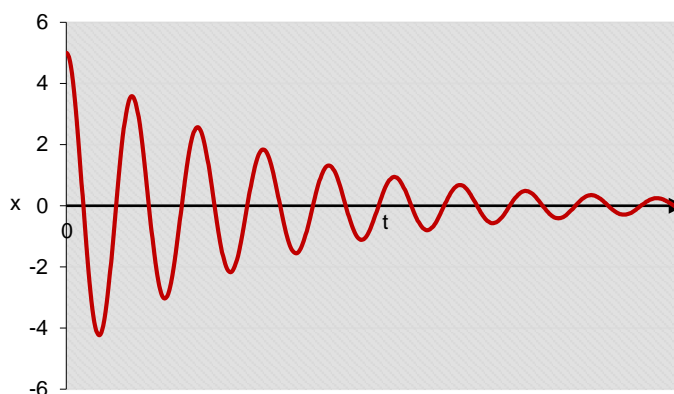
$$\delta = \frac{\gamma}{2m}, \omega^2 = \frac{k}{m}$$

当 $\delta < \omega$ 时，二阶微分方程的显式解为（推导过程从略）：

$$x = Ae^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \varphi_0)$$

由于阻尼的存在，弹簧振子系统的能量不断损失，周期运动的振幅 $Ae^{-\delta t}$ 以指数速度衰减，最后收敛至 0，如下图所示。当 $\delta \geq \omega$ 时，系统不具备周期性，此处不予讨论。

图表5：带阻尼弹簧振子的周期衰减



资料来源：华泰证券研究所

总的来看，二阶动力学系统具备周期性，弹簧振子的周期振动、钟摆的周期运动、甚至经济周期均可以用二阶微分方程进行刻画。带阻尼（一阶微分项）系统相比于无阻尼系统更贴近现实世界。弹簧振子的阻尼来自于物体与桌面的摩擦力，钟摆的阻尼来自于悬挂点的摩擦力，经济周期的阻尼则可能来自于政策等外部事件的干扰。

本章小结

通过对自由落体运动、碳 14 衰变以及弹簧振子三个例子的介绍，我们对动力学系统有了初步的认识，重要结论如下：

1. 动力学系统的本质是刻画物体运动的时空规律。动力学系统存在显式解（上帝视角）和隐式表达（蚂蚁视角）两种形式。显式解较为简洁，但并非所有动力学系统都存在显式解。隐式表达更容易得到，常用微分方程描述。
2. 一阶动力学系统的核心假设是：物体当前的运动状态决定状态的一阶变化量。一阶动力学系统或收敛至稳定点，或发散至无穷。一般而言，一阶动力学系统无法刻画周期现象。
3. 二阶动力学系统的核心假设是：物体当前的运动状态以及状态的一阶变化量，共同决定状态的二阶变化量。二阶动力学系统具备周期性，是刻画周期现象的常用工具。

实际上，特殊的一阶动力学系统也可以刻画周期性，更高阶的动力学系统（如三阶动力学系统）能够刻画比周期性更为复杂的运动规律，但不在本文的讨论范围内。

无论是自由落体运动、碳 14 衰变还是弹簧振子，其动力学系统都只包含单个主体。当动力学系统存在两个或多个主体时，主体之间是否可能存在相互作用？更进一步，自然科学领域的研究者发现，两个进行周期运动的主体在满足一定条件时，会发生周期同步现象。动力学系统能否解释周期同步？下一章我们将以心理学运动控制领域经典的 HKB 模型为例一窥究竟。

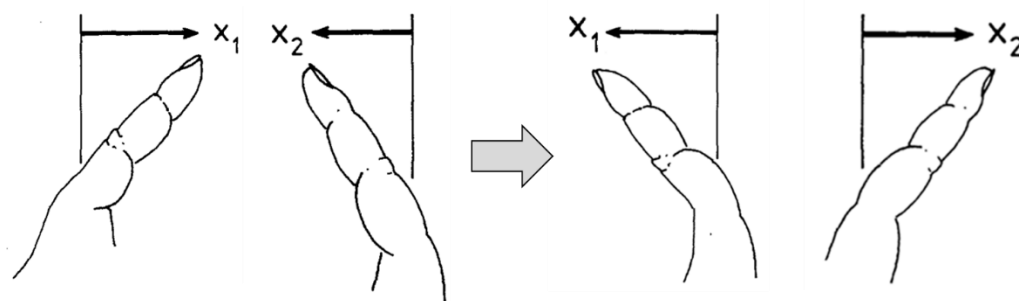
自然界的周期趋同现象及 HKB 模型

自然科学中存在很多微观振子通过耦合达成周期趋同的现象，比如萤火虫同步闪烁、惠更斯钟摆同步等。这些美妙现象或被冠以神秘之名，为人津津乐道。事实上，大自然感性之美的背后可能潜藏着数理模型的理性之美。Haken-Kelso-Bunz（简记为 HKB）模型来自于心理学的运动控制领域，是最早解释周期趋同现象的模型之一。本章将从手指运动的周期趋同现象开始，介绍 HKB 模型并展示模拟结果。

手指运动的周期趋同现象

HKB 模型源于一个有趣的心理学实验现象。介绍该现象之前，首先定义两种手指运动的方式。将食指看成一个围绕定轴——掌指关节做单摆运动的刚体。如下图所示，当左右食指以对称的方式持续摇摆，即同时向内侧或同时向外侧旋转时，称为“同步”（In-phase）运动。由于左右手镜像对称，此时左右手食指肌肉激活模式相同，故视作同步。单只手指的周期运动可以用正弦函数或余弦函数表示，左右手指同步时相位差为 0。

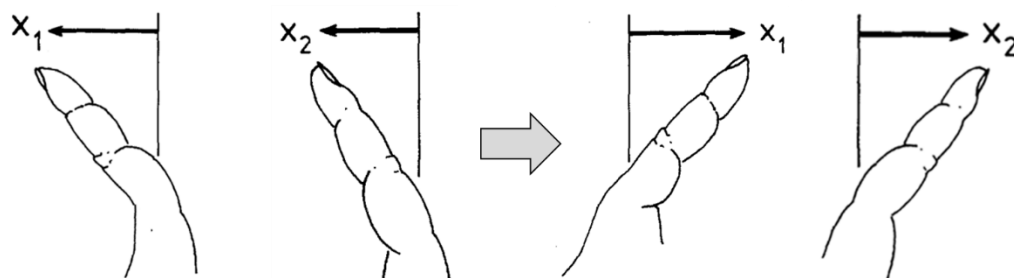
图表6：手指同步运动示意图（相位差为 0）



资料来源：A Theoretical Model of Phase Transitions in Human Hand Movements，华泰证券研究所

如下图所示，当左右手食指以相反的方式持续摇摆，即一只手指向内侧旋转时另一只手指向外侧旋转，称为“异步”（Anti-phase）运动。左右手指异步时相位差为 π 。

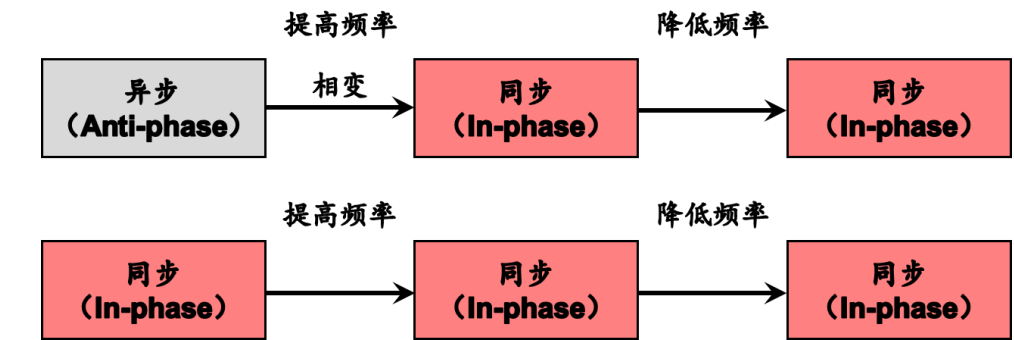
图表7：手指异步运动示意图（相位差为 π ）



资料来源：A Theoretical Model of Phase Transitions in Human Hand Movements，华泰证券研究所

Kelso 等学者发现，人类能够稳定保持左右手指同步运动或异步运动，换言之同步和异步都属于系统的稳定状态。有趣的是，当左右手指初始状态为异步时，如果提高周期摆动的频率，超过一定频率阈值时，左右手指会切换到同步状态，这种周期趋同的现象也称为相变（Phase Transition）；此时如果降低周期摆动的频率，左右手指会继续保持同步，而不会切换回异步状态。

图表8：手指运动的周期趋同现象



资料来源：华泰证券研究所

在这个简单而有趣的手指运动周期趋同现象背后，有以下几个问题值得思考：

1. 两只手指摆动频率在达到一定阈值时，将发生从异步到同步的相变，为什么会发生周期趋同，频率阈值如何确定？
2. 如果两只手指的初始状态并非完全异步，即相位差相比于 π 存在一定偏差，那么随着摆动频率增加是否仍会出现周期趋同，趋同所需的时间有何变化？
3. 两只手指周期趋同后为什么不可逆转，即降低频率后不会发生从同步到异步的相变？

手指的周期运动存在时空规律，可以由动力学系统刻画。HKB 模型从周期趋同现象出发，对手指运动进行动力学系统建模，最终模拟出实验现象，并成功回答上述问题。HKB 模型相对复杂，我们尝试由浅入深阐明该动力学系统模型的推导过程。

自下而上理解 HKB 模型：动力学系统微分方程组的推导和模拟

动力学系统的状态变量：位置和相位差

在动力学系统建模之前，首先需要明确：我们对什么变量进行建模？换言之，我们希望模拟或预测的状态变量是什么？

最直观的状态变量是左右两只手指的位置。单个手指的周期摇摆可以视作以掌指关节为定轴的单摆运动，在不考虑阻力及其它因素影响的理想情况下，站在“上帝视角”，两只手指的周期运动可由关于时间 t 的余弦函数表示：

$$x_1 = r_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = r_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

其中 x_1 和 x_2 分别为两只手指的位置， r_1 和 r_2 分别为两只手指的振幅， ω 为周期摆动频率， φ_1 和 φ_2 分别为两只手指的初始相位。 r 、 ω 和 φ 可能随时间变化，均为时间 t 的函数。

进一步思考异步和同步两种状态。当两只手指异步运动时，相位 φ_1 和 φ_2 应相反，相位差为 π ；当两只手指同步运动时，相位 φ_1 和 φ_2 应相同，相位差为 0。周期趋同本质上是相位差从 π 缩小至 0 的过程。相位差可视作动力学系统的另一组状态变量：

$$\phi = \varphi_1 - \varphi_2$$

比较位置和相位差这两种状态变量，位置需要 x_1 和 x_2 两个变量刻画，而相位差仅需 ϕ 一个变量。位置更直观，相位差更清晰。下面我们将首先对位置进行动力学系统微分方程建模，随后推导相位差的动力学系统微分方程。

单只手指周期运动位置的力学系统微分方程：Rayleigh 振子

接下来介绍单只手指周期运动的动力学系统微分方程。如前文所述，二阶动力学系统具备周期性，是刻画周期现象的常用工具。二阶动力学系统微分方程的一般形式为：

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

动力学系统中主体（即本例里的手指）的运动特性决定了 $f(x, \dot{x})$ 的具体表达式。单只手指的周期运动具有以下两个特性：

1. 运动存在阻尼，即微分方程存在一阶微分项；

2. 运动频率增加时，振幅将减小。

简单的带阻尼弹簧振子不满足第二个条件，而经典的 Rayleigh 振子 (Rayleigh Oscillator) 满足上述两项特性。我们采用 Rayleigh 振子作为单只手指的动力学系统微分方程：

$$\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^2 - \delta)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

本文附录第一节详细推导了 Rayleigh 振子振幅随频率增加而减小的性质。关于单个手指的动力学系统微分方程，也有文献采用 Van-de-Pol 振子 (Van-de-Pol Oscillator) 和 Rayleigh 振子的结合——混合振子 (Hybrid Oscillator) 进行建模，这里不作展开。

两只手指周期运动位置的力学系统微分方程组：引入耦合函数

在手指周期趋同现象中，左右两只手指为不同的主体，需要分别建模。设想一种极端情况，假设两只手指完全独立，互不影响，那么各自的动力学系统微分方程可以表示为：

$$\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) = 0$$

在这种极端情况下，两只手指以各自的相位独立做周期运动，不会出现周期趋同。

事实上，人类的左右手会互相影响，这种影响通过中枢神经系统传递。如何在动力学系统微分方程中刻画主体之间的影响？我们在单只手指运动的微分方程等式右侧引入耦合 (Coupling) 函数：

$$\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = I_{12}(x_1, x_2)$$

$$\ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) = I_{21}(x_2, x_1)$$

$I_{12}(x_1, x_2)$ 代表右手手指对左手手指的影响， $I_{21}(x_2, x_1)$ 代表左手手指对右手手指的影响。由于人类左右手对称，两个耦合函数应具有相似的形式。

耦合函数对动力学系统至关重要，并非任意一个耦合函数都能带来周期趋同的结果。Kelso 等学者研究发现，如下所示的耦合函数可以模拟出周期趋同现象：

$$I_{12} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\alpha + \beta(x_1 - x_2)^2)$$

$$I_{21} = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2)$$

其中 α 和 β 是事先给定的参数。

将上述耦合函数代入上一节单只手指的动力学系统微分方程，至此得到“蚂蚁视角”下 HKB 模型描述两只手指位置动力学系统微分方程组的最终形式：

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\alpha + \beta(x_1 - x_2)^2)$$

$$\ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2)$$

我们将利用微分方程的数值解法模拟两只手指的运动状态，考察引入耦合函数后是否存在周期趋同现象。

在数值模拟过程中，我们在动力学系统微分方程组的右侧引入噪音项，用以刻画神经系统的固有噪音。噪音的具体形式不重要，可以用简单的均值为 0 标准差为 σ 的高斯噪音 $N(0, \sigma)$ 模拟：

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\alpha + \beta(x_1 - x_2)^2) + N(0, \sigma)$$

$$\ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2) + N(0, \sigma)$$

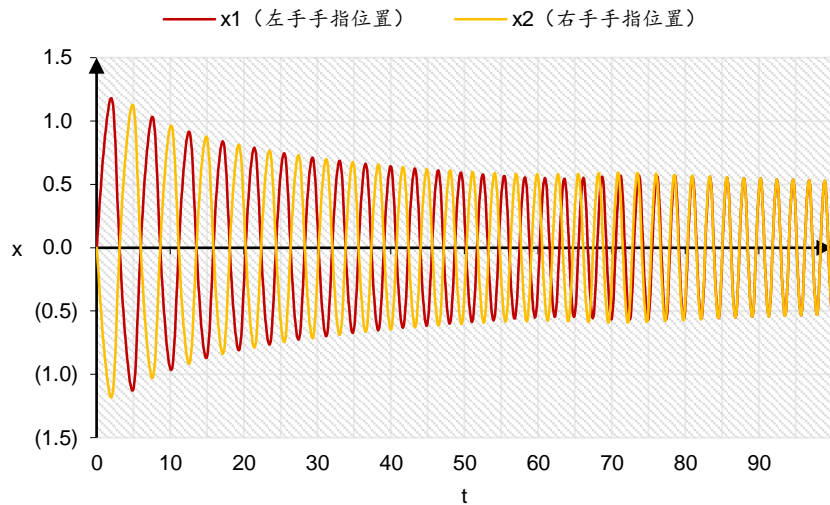
HKB 模型对手指周期运动位置的数值模拟

我们采用 HKB 模型的动力学系统微分方程组，对两只手指周期运动的位置做数值模拟。模型相关设置及参数取值如下。如未作特殊说明，后文模拟将继续沿用下列设置和参数。

1. 起始时间 $t_{min} = 0$ ，结束时间 $t_{max} = 100$ ，最小时间间隔 $\Delta t = 0.1$ ；
2. $\varepsilon = 1$ ， $\delta = 1$ ， $\alpha = -0.2$ ， $\beta = 0.2$ ， $\sigma = 0.01$ ；
3. $\omega = \frac{3.05-1.17}{t_{max}-t_{min}}t + 1.17$ ，即 ω 从 1.17 线性增加至 3.05；
4. 初始位置 $(x_1, x_2) = (0, 0)$ ，初始速度 $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (1, -1)$ ，此时初始相位差为 π 。

模拟结果如下图所示：

图表9：HKB 模型位置模拟结果（初始相位差为 π ）



资料来源：华泰证券研究所

通过上图可以观察到两个较为明显的规律：

1. 随着运动频率 ω 的提高，振幅逐渐减小，这是 Rayleigh 振子的基本性质；
2. 在运动早期，两只手指的运动方向相反；在 $t=60\sim80$ 阶段，两只手指的运动逐渐趋于一致；在 $t=60\sim80$ 之后，两只手指运动周期同步。

至此，我们借助 HKB 模型成功模拟出两只手指运动位置的周期趋同现象。

两只手指周期运动相位差的动力学系统微分方程

此前我们指出，在手指周期运动的动力学系统中，位置和相位差同为关键的状态变量。左右手位置的变化规律可以用一组带耦合函数的二阶动力学系统微分方程组表示。相位差 ϕ 比位置 x_1 、 x_2 在表达上更为简洁，但是其动力学系统微分方程的推导更为繁琐。本节我们仅介绍推导思想，详细推导过程请参考本文附录第二节。

站在“上帝视角”，手指周期运动的位置可以表示成如下余弦函数形式：

$$x = 2r \cos(\omega t + \varphi)$$

根据欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

可推出：

$$x = r(e^{i\varphi} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi} e^{-i\omega t})$$

由此，我们将位置 x 转换成振幅 r 、相位 φ 、频率 ω 和时间 t 的函数。

对上式分别求一阶导数和二阶导数，并且基于两步近似，可推出：

$$\begin{aligned} \dot{x} &\approx i r \omega (e^{i\varphi} e^{i\omega t} - e^{-i\varphi} e^{-i\omega t}) \\ \ddot{x} &\approx -r(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi})(e^{i\varphi} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi} e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

暂时忽略噪音项，两只手指周期运动的动力学系统微分方程组为：

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\alpha + \beta(x_1 - x_2)^2) \\ \ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2) \end{aligned}$$

将 x_1 、 x_2 及其一阶导数、二阶导数代入上面两个方程，注意到代入后方程仍包含时间 t 。对时间 t 在区间 $[0, 2\pi/\omega]$ 内积分，得到两个不包含时间 t 的方程。将两个方程相减，将其中的 $\varphi_1 - \varphi_2$ 项以相位差 ϕ 替换，最终整理可得两只手指相位差的动力学系统微分方程：

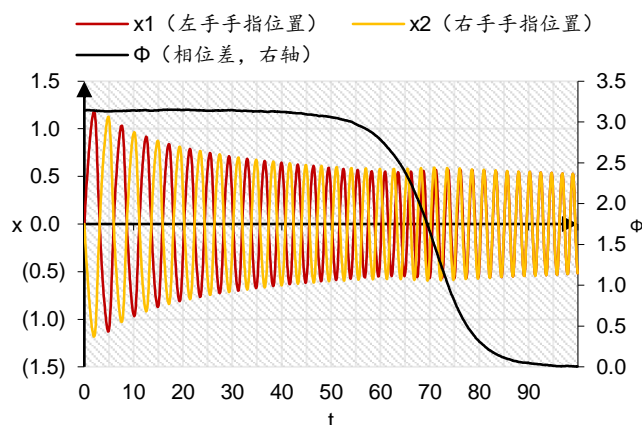
$$\dot{\phi} = (\alpha + 2\beta r^2) \sin \phi - \beta r^2 \sin 2\phi$$

HKB 模型对手指周期运动位置和相位差的数值模拟

基于上面的微分方程，我们可以对手指周期运动的相位差进行数值模拟。我们对不同初始相位差 (π 、 $10\pi/11$ 、 $5\pi/6$ 、 $\pi/2$) 条件进行模拟，HKB 模型的其它设置和参数与此前的模拟一致。

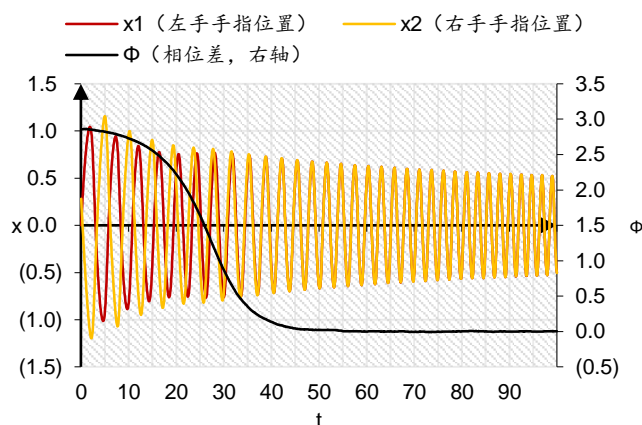
结果如下图所示，初始相位差越小，相位差下降的时间点越靠前，两只手指周期趋同的速度越快。当初始相位差为 π 时，周期趋同出现在 $t=60\sim 80$ 时间段；当初始相位差为 $10\pi/11$ 时，周期趋同出现在 $t=20\sim 40$ 时间段；当初始相位差为 $5\pi/6$ 时，周期趋同出现在 $t=10\sim 30$ 时间段；当初始相位差为 $\pi/2$ 时，周期趋同出现在 $t=0\sim 10$ 时间段。

图表10: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 π)



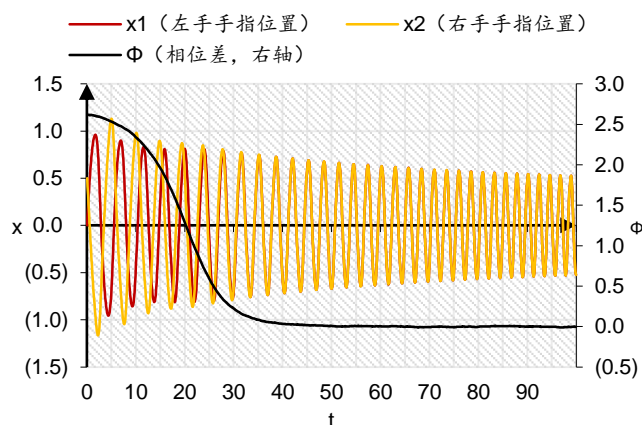
资料来源：华泰证券研究所

图表11: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 $10\pi/11$)



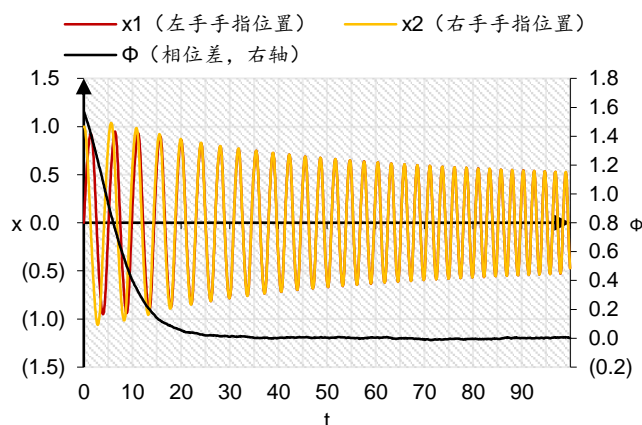
资料来源：华泰证券研究所

图表12: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 $5\pi/6$)



资料来源：华泰证券研究所

图表13: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (初始相位差为 $\pi/2$)



资料来源：华泰证券研究所

自上而下理解 HKB 模型：势函数

至此，我们借助两只手指的动力学系统微分方程，模拟出周期趋同现象。这种从个体建模出发最终解释现象的方式，属于自下而上理解动力学系统。然而，微分方程无法直接回答本章开头提出的问题：当手指运动频率提高到什么水平时，会出现周期趋同现象？此时，我们需要借助另一条路径——势函数 (Potential Function)，自上而下理解动力学系统。

势函数的概念

势函数类似物理中势能的概念。水往低处流，是因为水在高处的重力势能大，在低处的重力势能小，水从势能高的地方流向势能低的地方。两只手指运动周期趋同，即发生从异步到同步的相变，可能是因为异步状态势能大，同步状态势能小，系统倾向于从势能高的状态转化至势能低的状态。

如何定义动力学系统的势函数？对于一阶动力学系统，状态变量 x 总是朝着势函数更低的方向变化，那么其速度应等于势函数 V 的负梯度：

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

特别地，当系统处于稳定状态时，状态变量 x 不再发生改变， x 的一阶导数（即 x 的速度）为 0，等式左侧等于 0；此时，对应的势函数取极小值，势函数 V 关于 x 的一阶导数为 0，等式右侧等于 0。

HKB 模型相位差的势函数及其图像

对于以相位差 ϕ 为状态变量的动力学系统，其势函数满足：

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

由前文知，对于两只手指周期运动的 HKB 模型，其相位差满足如下动力学系统微分方程：

$$\dot{\phi} = (\alpha + 2\beta r^2)\sin\phi - \beta r^2\sin 2\phi$$

可推出 HKB 模型相位差 ϕ 的势函数：

$$V = -(\alpha + 2\beta r^2)\cos\phi + \frac{1}{2}\beta r^2\cos 2\phi$$

为便于后续推导，令：

$$a = \alpha + 2\beta r^2, \quad b = -\frac{1}{2}\beta r^2$$

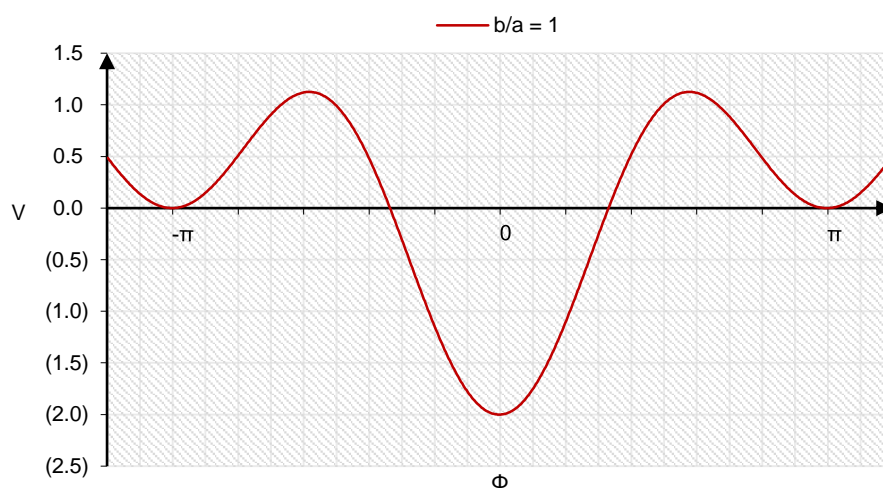
则势函数可以简记为：

$$V = -a\cos\phi - b\cos 2\phi$$

其中 a 、 b 为自由参数。易知该势函数为偶函数（对称性），且最小正周期为 2π （周期性）。

图像可以帮助我们直观掌握势函数的性质。令参数 $a=1$ ， $b/a=1$ ，势函数如下图所示：

图表14：相位差的势函数（ $b/a=1$ ）



资料来源：华泰证券研究所

在 $[-\pi, \pi]$ 的区间内，势函数存在三个低点：

1. 相位差 $\phi=0$ 时，势函数取全局最小值；此时两只手指周期同步，动力学系统处于稳定状态；
2. 相位差 $\phi=\pm\pi$ 时，势函数取局部最小值；此时两只手指周期异步，动力学系统处于亚稳定状态。

动力学系统的稳定及亚稳定状态除了根据势函数图像判别之外，还可以直接求势函数极值的解析解。令势函数的导数为 0：

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = a \sin \phi + 2b \sin 2\phi = 0$$

解得：

$$\phi_1 = 0, \pm\pi \text{ or } \cos \phi_2 = -\frac{a}{4b}$$

其中第一组解 ϕ_1 表示势函数取极大值点； $\phi_1=0$ 对应稳定状态； $\phi_1=\pm\pi$ 对应亚稳定状态。第二组解 ϕ_2 表示势函数取极大值点：若 ϕ_2 存在，相当于在 $\phi_1=0$ 及 $\phi_1=\pm\pi$ 之间设置了一个“屏障”；由于系统不能自发从低能量状态转化到高能状态，因此无法从 $\phi_1=\pm\pi$ 的亚稳定状态直接转换为 $\phi_1=0$ 的稳定状态，此时系统维持亚稳定状态。换言之，一般情况下，对于两只手指周期运动的动力系统，无法从相位差为 π 的异步状态直接转换为相位差为 0 的同步状态。

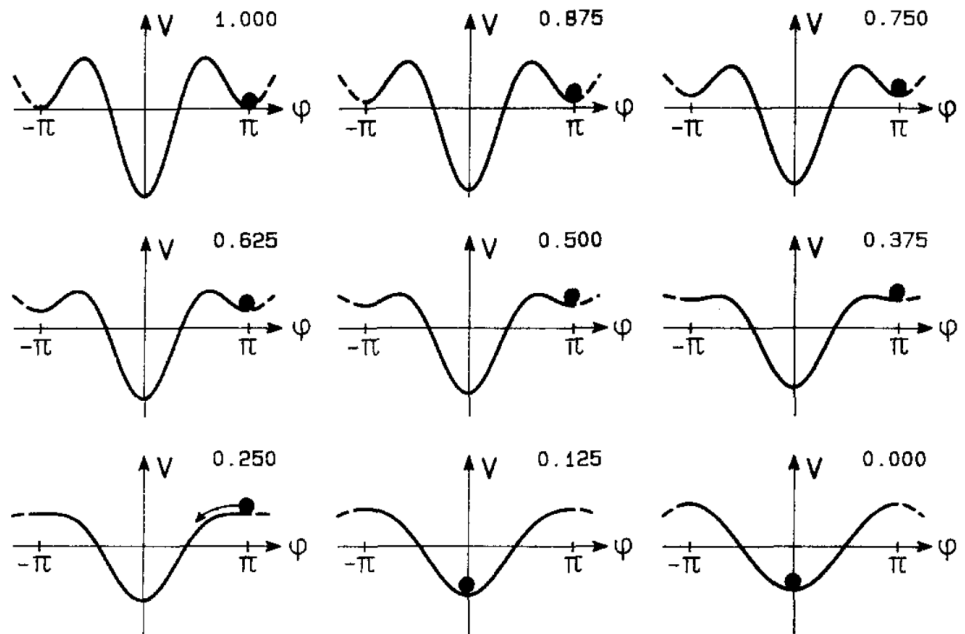
周期趋同的前提条件：势函数形态改变和临界频率

要使动力学系统从亚稳定状态转变为稳定状态，需要改变势函数形态，令上述“屏障”消失，“屏障”消失的临界点就是两只手指开始周期趋同的时点。我们测试不同的参数 b/a 取值，观察势函数的形态。

观察下图可知，当 $b/a=0.25$ 时全局最小值和局部最小值之间的“屏障”消失，对应手指运动开始周期趋同的前提条件。代入势函数 V 的原始参数，则临界条件为：

$$\frac{b}{a} = \frac{-\frac{1}{2}\beta r^2}{\alpha + 2\beta r^2} = \frac{1}{4}$$

图表15：不同 b/a 取值下的相位差势函数



资料来源：A Theoretical Model of Phase Transitions in Human Hand Movements，华泰证券研究所

此时临界振幅为：

$$r_c^2 = -\frac{\alpha}{4\beta}$$

临界频率为：

$$\omega_c^2 = -\frac{4\beta\delta^2}{3\alpha}$$

“屏障”一旦消失，只需对亚稳定状态的动力学系统施加轻微扰动，系统就会发生相变，转换为稳定状态，即相位差由 π 缩小至 0。

从势函数的观点出发也可以解释，为什么两只手指周期趋同以后，放慢运动频率，不会回复到最初的异步状态：周期趋同后，降低运动频率，势函数重新出现局部最小值，但此时动力学系统无法自发从全局最小值“跃迁”至局部最小值。

本章小结

HKB 模型是刻画自然界周期趋同现象的经典模型。本章从心理学的手指周期运动趋同现象出发，借助动力学系统对周期运动进行建模，分别从自下而上的微分方程和自上而下的势函数两个角度，理解 HKB 模型。重要结论如下：

1. 左右手指初始状态为异步时，如果提高周期摆动的频率，超过一定频率阈值时，左右手指会切换到同步状态，这种周期趋同的现象称为相变。观察现象是构建模型的起点。
2. 单只手指周期运动位置的动力学系统可以由 Rayleigh 振子的二阶微分方程刻画。Rayleigh 振子的重要特性是周期振动的振幅随着频率的增大而减小。
3. 两只手指周期运动位置的动力学系统可以由引入耦合函数的 Rayleigh 振子二阶微分方程组刻画。耦合函数用以描述两个运动主体的相互影响，这是周期同步的前提条件。
4. 基于位置的二阶动力学系统微分方程，可以推导出基于相位差的一阶动力学系统微分方程。通过对微分方程的数值模拟，能够复现出两只手指的周期趋同现象。初始相位差越小，周期趋同速度越快。
5. HKB 模型的势函数包含对应周期同步状态的全局最小值以及对应周期异步状态的局部最小值。周期运动频率提升会导致势函数形态变化，全局最小值和局部最小值之间的“屏障”消失，系统自发从局部最小值转换至全局最小值，从而产生周期趋同。

周期趋同的必要条件探讨

自然界和社会科学领域都存在众多系统级别的周期现象，如萤火虫的同步闪烁、惠更斯钟摆同步、经济金融系统的周期轮回等。宏观系统的周期现象可能源自每一个微观个体的周期趋同。在华泰金工《从微观同步到宏观周期》（20191225）报告中，我们通过对自然界周期现象的观察，猜测从微观同步到宏观周期可能需要满足四个条件：

1. 微观个体有类周期的行为；
2. 微观个体之间会互相影响；
3. 系统存在随机性；
4. 有能量注入来维持系统的运转。

在手指运动周期趋同的例子中，这四个条件显然是成立的：单只手指可视作周期运动的单摆；两只手指的运动共同受神经系统调控；神经系统本身存在随机性；维持运动以及提高摆动频率需要消耗化学能。对于其它周期现象似乎也能找到对应的要素。

然而，上述四个周期趋同的必要条件仅仅来自于对现象的归纳和猜想，能否从模型的角度论证其必要性？手指运动周期趋同的 HKB 模型为我们提供了思路，模型高度灵活，我们可以自由改变模型的各项组成部分，以验证不同的猜想。

为了不失一般性，本章将对 HKB 模型的若干表述进行调整，用“主体”代替“单只手指”，其含义也等价于“微观个体”；用“系统”代替“两只手指”。测试前，我们再次重申 HKB 模型描述两个主体位置的二阶动力学系统微分方程组，这将是后续测试的起点：

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\alpha + \beta(x_1 - x_2)^2) + N(0, \sigma) \\ \ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2) + N(0, \sigma)\end{aligned}$$

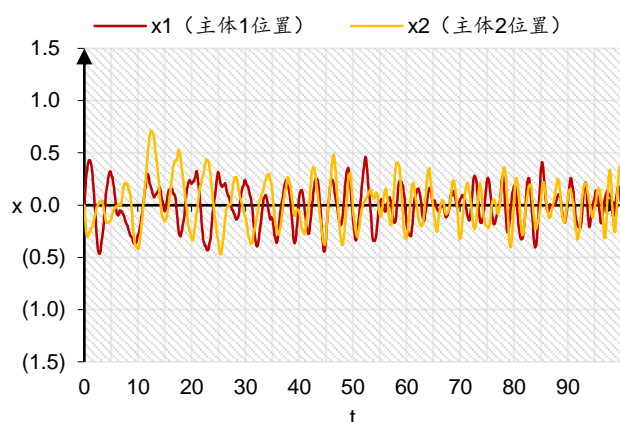
必要条件 1：单个主体存在周期性

本节希望回答：如果单个主体本身不存在周期性，是否还会产生系统的周期趋同？在 HKB 模型中，我们考虑对单个主体运动的一阶导数增加随机噪音，以减弱或消除单个主体运动的周期性：

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \lambda(\ddot{x}_t \times \Delta t + \dot{x}_t) + (1 - \lambda)N(0, 1)$$

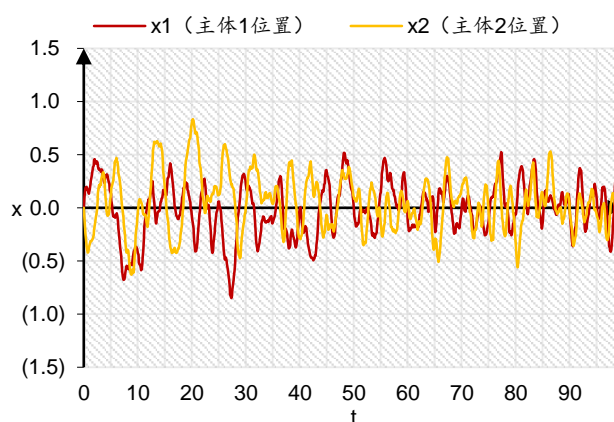
其中 λ 为 0~1 之间的实数。当 λ 取 1 时，代表不添加随机噪音； λ 越小，主体运动一阶导数的噪音越大，主体的周期性越弱；当 λ 取 0 时，主体运动的一阶导数为服从标准正态分布的随机数，此时单个主体将不具备周期性。

图表 16：HKB 模型位置模拟结果（一阶导数项引入噪音， $\lambda=0.875$ ）

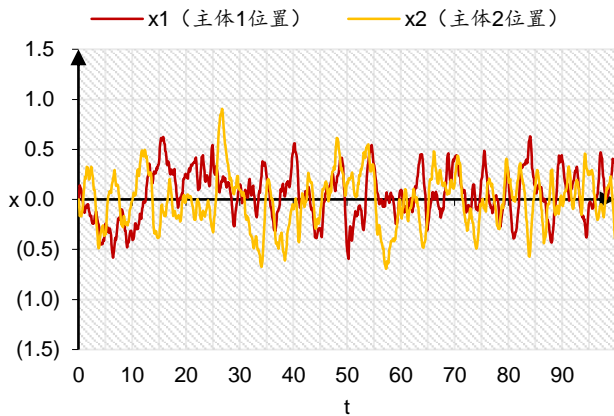


资料来源：华泰证券研究所

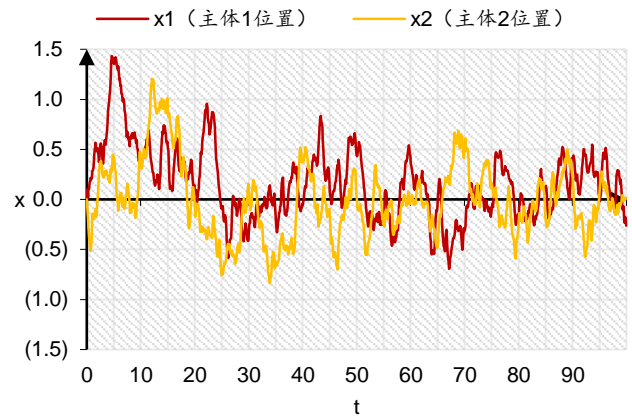
图表 17：HKB 模型位置模拟结果（一阶导数项引入噪音， $\lambda=0.75$ ）



资料来源：华泰证券研究所

图表18: HKB 模型位置模拟结果 (一阶导数项引入噪音, $\lambda=0.625$)

资料来源: 华泰证券研究所

图表19: HKB 模型位置模拟结果 (一阶导数项引入噪音, $\lambda=0.5$)

资料来源: 华泰证券研究所

上面四张图展示不同 λ 取值的模拟结果。当 λ 取 0.875 和 0.75 时, 尚能观察到周期趋同; 当 λ 取 0.625 和 0.5 时, 已观察不到周期趋同现象。上述模拟结果显示, 单个主体本身周期性较弱或不存在周期性时, 系统不再发生周期趋同; 单个主体存在周期是系统周期趋同的必要条件。

必要条件 2: 主体之间相互影响

本节希望回答: 如果主体之间不存在相互影响, 是否还会产生系统的周期趋同? 在 HKB 模型中, 主体之间通过耦合函数相互影响, 我们将通过直接修改耦合函数的方式进行考察。

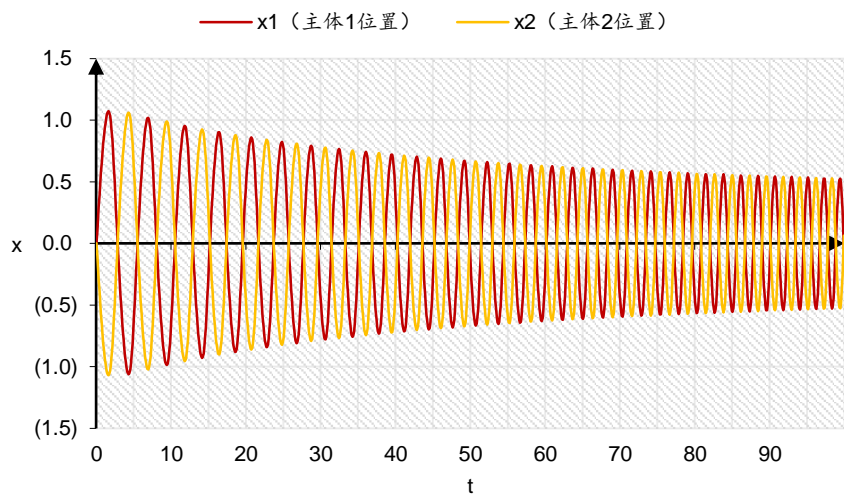
两个主体

首先考虑两个主体之间完全不存在相互影响的情形, 将耦合函数 h_{12} 和 h_{21} 设为 0:

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = N(0, \sigma)$$

$$\ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = N(0, \sigma)$$

模拟结果如下图所示, 两个主体按各自的周期相位运动, 不会发生周期趋同。

图表20: HKB 模型位置模拟结果 (无耦合, $h_{12}=h_{21}=0$)

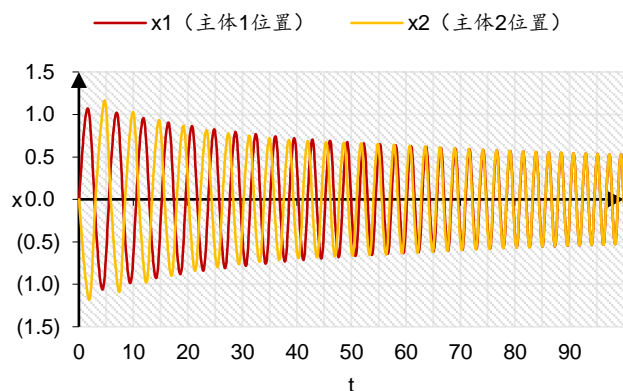
资料来源: 华泰证券研究所

下面我们研究当主体 1 对主体 2 有影响, 而主体 2 对主体 1 无影响时, 系统是否存在周期趋同现象。令耦合函数 h_{12} 为 0:

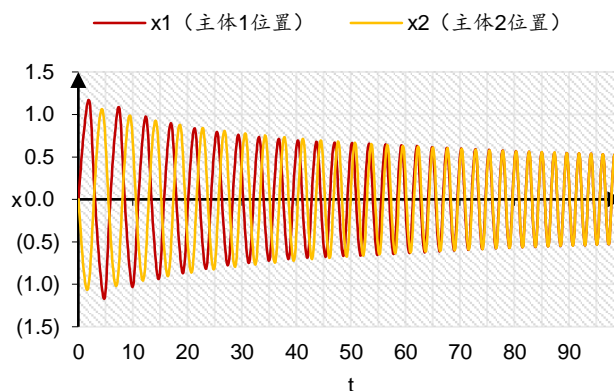
$$\ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = N(0, \sigma)$$

$$\ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2) + N(0, \sigma)$$

左下图模拟结果表明,此时主体 1 按自身的周期相位运动,主体 2 相位逐渐向主体 1 靠拢,最终产生周期趋同现象。类似地,当主体 2 对主体 1 有影响,而主体 1 对主体 2 无影响时,右下图模拟结果显示,此时主体 2 按自身的周期相位运动,主体 1 相位逐渐向主体 2 靠拢,最终仍会产生周期趋同现象。

图表21: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 1 对主体 2 有影响, $I_{12}=0$)


资料来源: 华泰证券研究所

图表22: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 2 对主体 1 有影响, $I_{21}=0$)


资料来源: 华泰证券研究所

总的来看,当系统仅存在两个主体时,只需某个主体对另一主体存在影响,无需相互影响,即能够产生周期趋同。

三个主体强耦合

包含两个主体的动力学系统微分方程组可以表示成:

$$\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = I_{12}(x_1, x_2)$$

$$\ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) = I_{21}(x_2, x_1)$$

其中耦合函数 I_{12} 代表主体 2 对主体 1 的影响, I_{21} 代表主体 1 对主体 2 的影响。

当系统包含三个主体时,耦合函数将如何影响周期趋同? 如果任意主体均受另外两个主体影响,那么包含三个主体的动力学系统微分方程组可以表示成:

$$\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = I_{12}(x_1, x_2) + I_{13}(x_1, x_3)$$

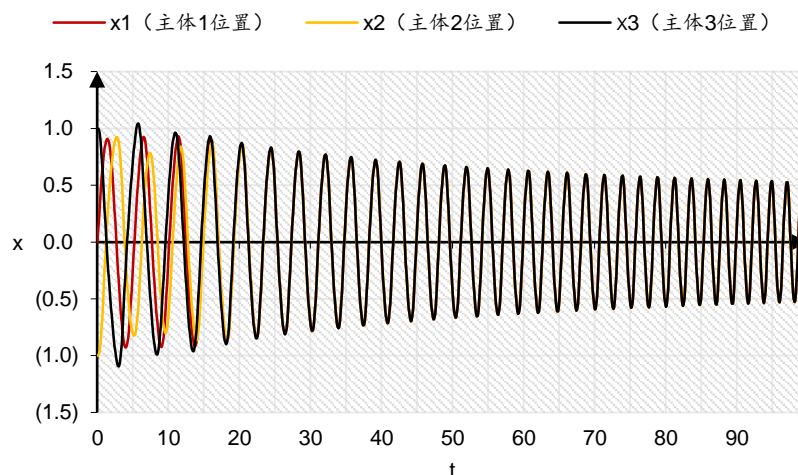
$$\ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) = I_{21}(x_2, x_1) + I_{23}(x_2, x_3)$$

$$\ddot{x}_3 + f(x_3, \dot{x}_3) = I_{31}(x_3, x_1) + I_{32}(x_3, x_2)$$

我们将该系统称为强耦合。

三个主体动力学系统模拟过程中,三个主体的初始状态如下: 初始位置 $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 1)$, 初始速度 $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = (1, 1, -1)$ 。此时初始相位差: $\varphi_3 - \varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ 。

下图展示三个主体强耦合的模拟结果。观察可知三个主体在各自的第三个周期即已完成周期趋同,趋同速度非常快。

图表23： HKB 模型位置模拟结果（三个主体，强耦合）

资料来源：华泰证券研究所

三个主体弱耦合

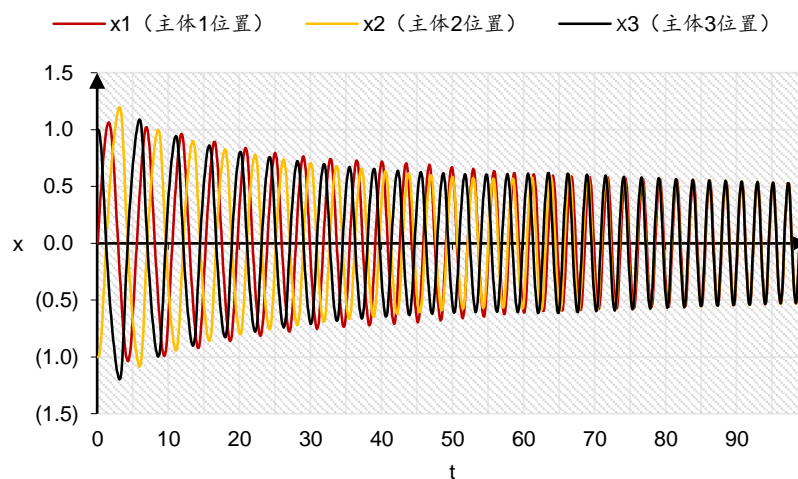
当三个主体并非两两之间均存在相互影响时，我们将这种系统称为弱耦合。例如以下形式的弱耦合：

$$\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = I_{12}(x_1, x_2)$$

$$\ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) = I_{23}(x_2, x_3)$$

$$\ddot{x}_3 + f(x_3, \dot{x}_3) = I_{31}(x_3, x_1)$$

其中主体 2 对主体 1 有影响，主体 3 对主体 2 有影响，主体 1 对主体 3 有影响。模拟结果如下图所示，三个主体最终仍产生周期趋同，但趋同速度显著慢于强耦合情况。

图表24： HKB 模型位置模拟结果（三个主体，弱耦合）

资料来源：华泰证券研究所

弱耦合还可以表示成其它形式，如：

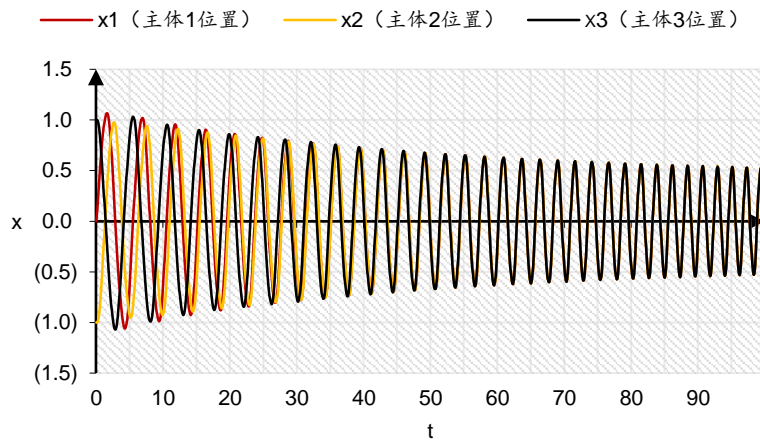
$$\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) = I_{23}(x_2, x_3)$$

$$\ddot{x}_3 + f(x_3, \dot{x}_3) = I_{13}(x_3, x_1)$$

此时仅主体 2、3 受主体 1 影响。模拟结果如下图所示，周期趋同仍会产生，但趋同速度慢于强耦合情况。

图表25: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 2、3 受主体 1 影响)



资料来源: 华泰证券研究所

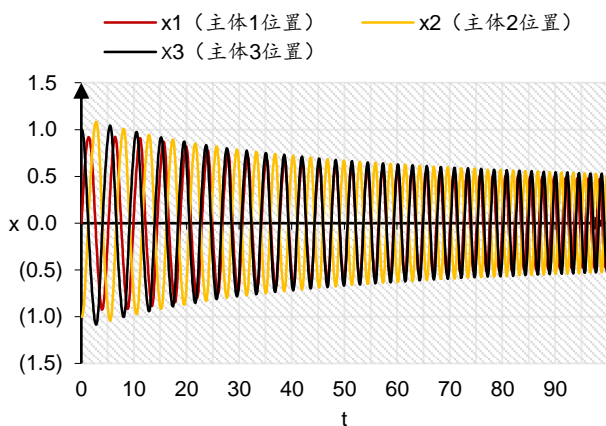
当弱耦合表示成如下形式:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) &= I_{12}(x_1, x_2) + I_{13}(x_1, x_3) \\ \ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) &= 0 \\ \ddot{x}_3 + f(x_3, \dot{x}_3) &= 0\end{aligned}$$

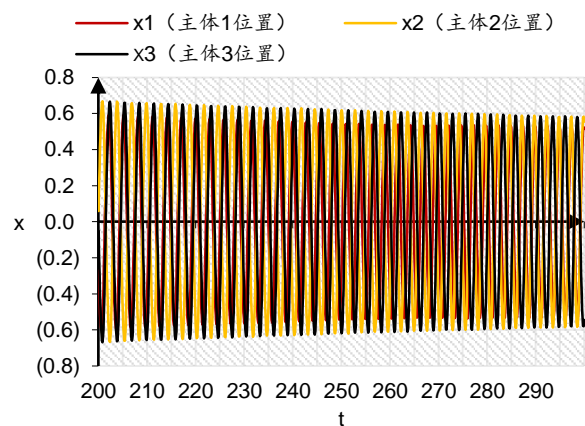
此时仅主体 1 受主体 2、3 影响。当时间 $t=0\sim 100$ 时, 模拟结果如左下图所示, 主体 1 和主体 3 出现周期趋同, 但和主体 2 存在 π 的相位差。

然而, 如果我们将模拟的时间延长至 $t=200\sim 300$, 结果如右下图所示, 会发现很有意思的现象。在 $t=200$ 时刻, 主体 1 和主体 3 周期趋同, 和主体 2 存在 π 的相位差; 随着系统的演进, 主体 1 逐渐“脱离”主体 3, 而向主体 2 “靠近”; 直到 $t=300$ 时刻, 主体 1 和主体 2 周期趋同, 和主体 3 存在 π 的相位差。

在这种情况下, 三个主体无法产生真正的周期趋同。我们认为其原因在于主体 2、3 不受其它主体影响, 不存在有效联通, 因而维持稳定的初始相位差; 此时主体 1 时而与主体 2 周期趋同, 时而与主体 3 周期趋同。

图表26: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 1 受 2、3 影响, $t=0\sim 100$)

资料来源: 华泰证券研究所

图表27: HKB 模型位置模拟结果 (仅主体 1 受 2、3 影响, $t=200\sim 300$)

资料来源: 华泰证券研究所

总的来看, 三个主体的动力学系统较为复杂, 在强耦合条件下会产生周期趋同; 在弱耦合条件下, 当各个主体之间存在有效联通时, 会产生周期趋同。有效联通对周期趋同的影响可能和主体之间小世界网络的构建方式有关, 有待进一步研究。

图表28：三个主体之间不同耦合方式对周期趋同的影响

主体 1	主体 2 ($\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$)	主体 3 ($\varphi_3 - \varphi_1 = \pi/2$)	周期趋同结果
受 2,3 影响	受 1,3 影响	受 1,2 影响	迅速趋同
受 2 影响	受 3 影响	受 1 影响	趋同
受 2 影响	受 3 影响	无	缓慢趋同
无	受 1 影响	受 1 影响	趋同
受 2,3 影响	无	无	2,3 不趋同；1 时而和 2 趋同，时而和 3 趋同
无	受 1,3 影响	无	1,3 不趋同；2 相位介于 1,3 之间
无	无	受 1,2 影响	1,2 不趋同；3 相位介于 1,2 之间

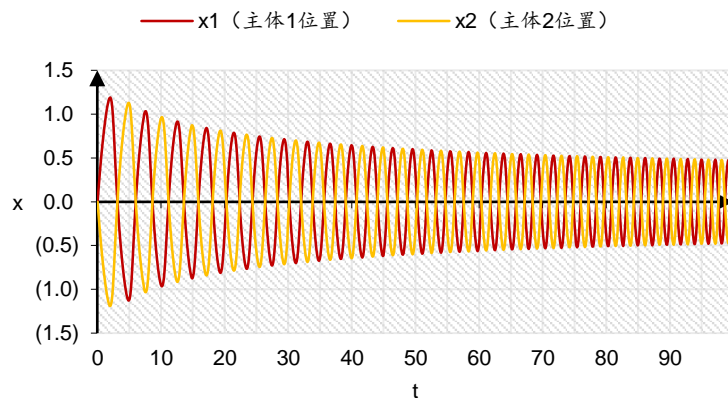
资料来源：华泰证券研究所

必要条件 3：系统存在随机性

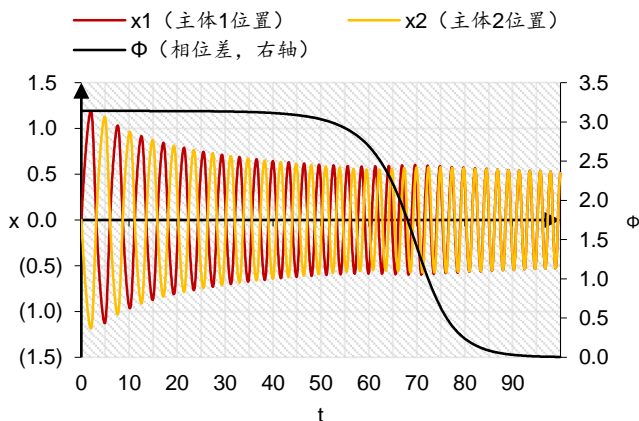
本节希望回答：如果系统不存在随机性，是否还会产生系统的周期趋同？在 HKB 模型中，我们将通过直接修改随机噪音项 $N(0, \sigma)$ 的标准差 σ 进行考察。

初始相位差为 π

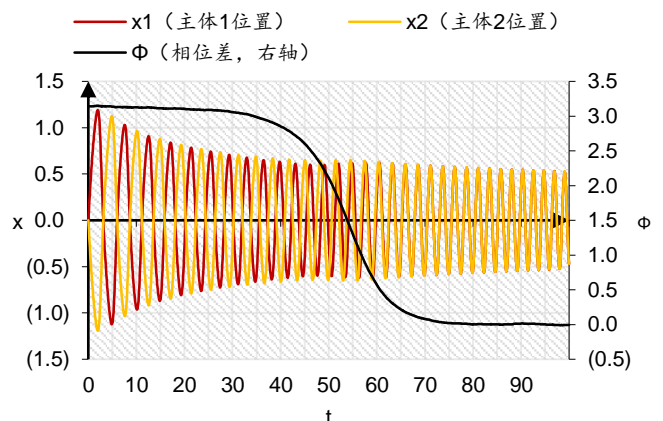
首先考虑两个主体初始相位差为 π 的动力学系统，此时系统初始状态即为亚稳定状态。当 σ 为 0，即不存在噪音时，模拟结果如下图所示，系统不会产生周期趋同。这一现象可以由势函数解释。当周期运动频率提升，稳定状态（相位差为 0）和亚稳定状态（相位差为 π ）之间的“屏障”已经消失，但若不加外部扰动，系统仍会停留在亚稳定状态，而不发生相变。

图表29：HKB 模型位置模拟结果（初始相位差为 π ，不存在噪音）

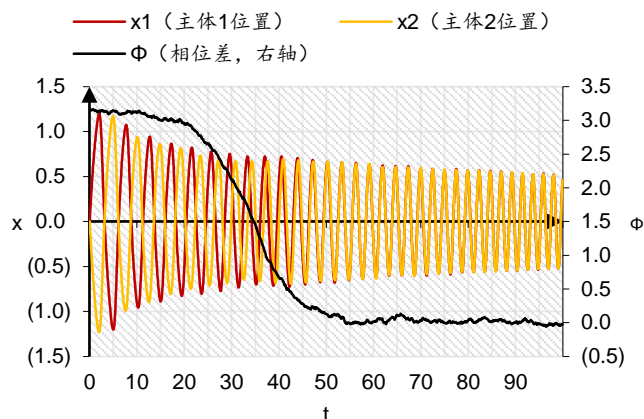
资料来源：华泰证券研究所

图表30：HKB 模型位置和相位差模拟结果（噪音 $\sigma=0.001$ ）

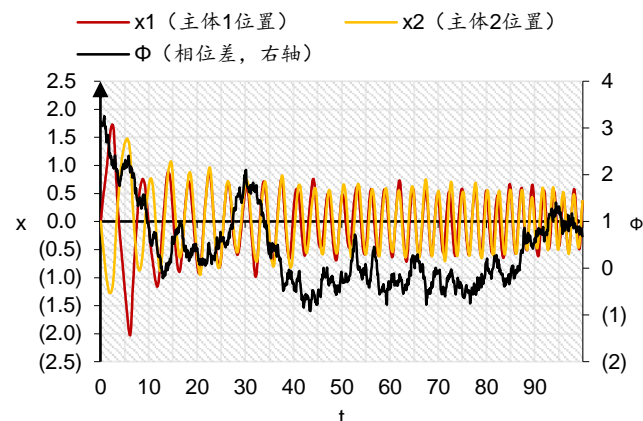
资料来源：华泰证券研究所

图表31：HKB 模型位置和相位差模拟结果（噪音 $\sigma=0.01$ ）

资料来源：华泰证券研究所

图表32: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (噪音 $\sigma=0.1$)

资料来源: 华泰证券研究所

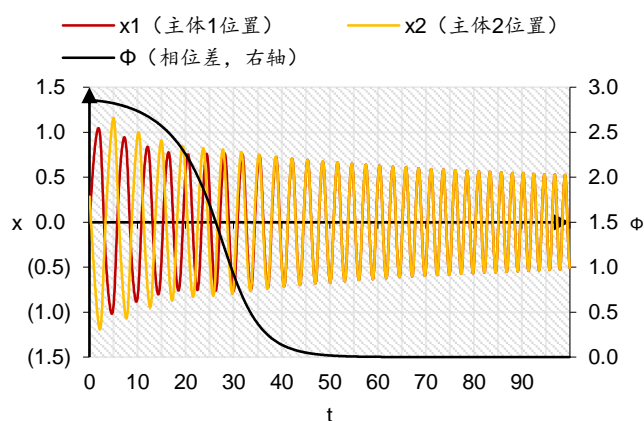
图表33: HKB 模型位置和相位差模拟结果 (噪音 $\sigma=1$)

资料来源: 华泰证券研究所

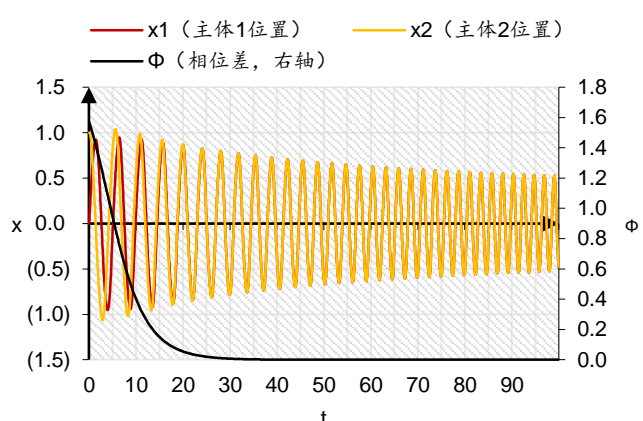
当 σ 大于 0 时, 如上图所示, 对于不同的 σ 取值 (0.001、0.01、0.1 和 1), 均能观察到周期趋同现象。 σ 越大, 周期趋同速度越快。当 σ 等于 1 时, 相位差迅速下降; 但由于随机噪音较大, 相位差下降至 0 附近后, 仍可能围绕 0 出现一定波动。

初始相位差不为 π

其次考虑两个主体初始相位差不为 π , 即初始状态并非亚稳定状态的动力系统。当 σ 等于 0, 即系统无噪音时, 模拟结果如下图所示, 系统仍会产生周期趋同。这一现象仍可以由势函数解释。当初始状态并非亚稳定状态时, 系统无需借助外力, 就能自发达到势函数最低的稳定状态。

图表34: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 $10\pi/11$, 无噪音)

资料来源: 华泰证券研究所

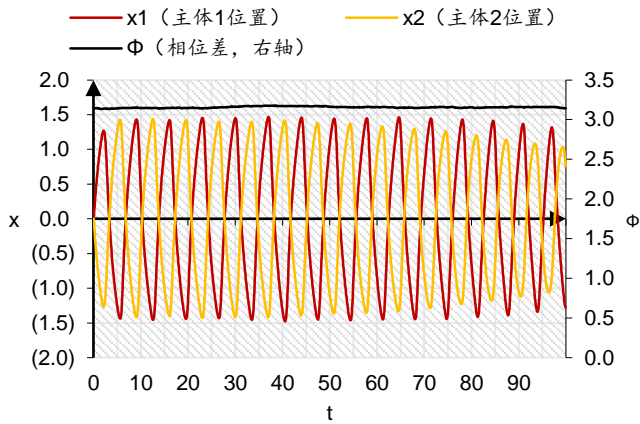
图表35: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 $\pi/2$, 无噪音)

资料来源: 华泰证券研究所

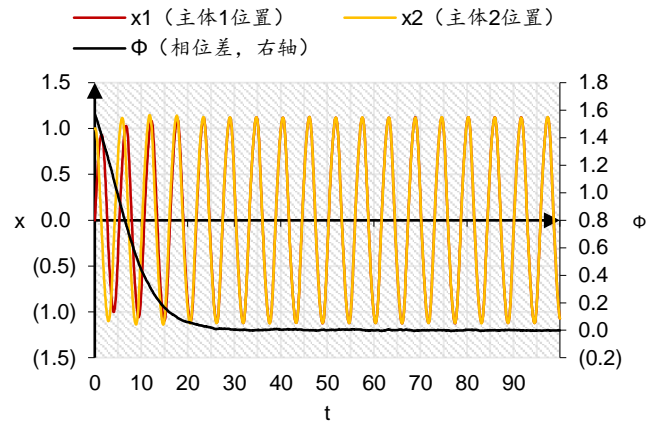
总的来看, 当系统初始状态为亚稳定状态时, 如果不存在随机性, 将无法产生周期趋同; 当系统初始状态并非亚稳定状态时, 即使不存在随机性, 仍会自发产生周期趋同。

必要条件 4: 有能量注入系统

本节希望回答: 如果没有能量注入系统, 是否还会产生系统的周期趋同? 在 HKB 模型中, 周期运动频率的提升意味着能量的注入。上一章势函数一节已有论述, 如果频率保持不变, 势函数中全局最小值(相位差为 0 的稳定状态)和局部最小值(相位差为 π 的亚稳定状态)之间的“屏障”仍然存在, 那么系统无法自发从亚稳定状态转变为稳定状态, 将不会出现周期趋同。

图表36: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 π , 频率不变)

资料来源: 华泰证券研究所

图表37: HKB 模型位置和相位差模拟 (初始相位差 $\pi/2$, 频率不变)

资料来源: 华泰证券研究所

我们可以通过模拟的方式加以验证。如果周期频率不变, 当初始相位差为 π 时, 如左上图所示, 系统仍然维持在亚稳定状态, 不会产生周期趋同; 当初始相位差不为 π 时, 如右上图所示, 系统会自发转换为稳定状态, 产生周期趋同。

总的来看, 当系统初始状态为亚稳定状态时, 如果没有能量注入, 将无法产生周期趋同; 当系统初始状态并非亚稳定状态时, 即使没有能量注入, 仍会自发产生周期趋同。

本章小结

本章从 HKB 模型出发, 采用数值模拟和势函数分析的方法, 对动力学系统周期趋同的必要条件进行探讨, 重要结论如下:

1. 单个主体本身周期性较弱或不存在周期性时, 系统不再发生周期趋同。
2. 当系统仅存在两个主体时, 只需某个主体对另一主体存在影响, 无需相互影响, 即能够产生周期趋同; 三个主体的动力学系统较为复杂, 在强耦合条件下会产生周期趋同; 在弱耦合条件下, 当各个主体之间存在有效联通时, 会产生周期趋同。
3. 当系统初始状态为亚稳定状态时, 如果不存在随机性, 将无法产生周期趋同; 当系统初始状态并非亚稳定状态时, 即使不存在随机性, 仍会自发产生周期趋同。
4. 当系统初始状态为亚稳定状态时, 如果没有能量注入, 将无法产生周期趋同; 当系统初始状态并非亚稳定状态时, 即使没有能量注入, 仍会自发产生周期趋同。

总的来看, 当系统初始状态为亚稳定状态时, 1) 单个主体存在周期性, 2) 主体之间相互影响, 3) 系统存在随机性, 4) 有能量注入系统, 以上四个条件均为周期趋同的必要条件。

全文总结与未来展望

本研究尝试以动力学系统模型解释周期趋同现象。自然界和社科领域存在大量系统级别的周期现象，如萤火虫同步闪烁、惠更斯钟摆同步、经济金融系统的周期轮回等。宏观系统的周期现象可能源自每一个微观个体的周期趋同。周期趋同现象可以由多个主体的动力学系统模型刻画，模型的核心是包含耦合函数的二阶微分方程组。借助模型能够模拟周期趋同现象，同时解释产生周期趋同的原因以及必要条件。动力学系统模型为我们深入理解经济周期起源提供了窗口。

从“上帝视角”到“蚂蚁视角”

动力学系统是刻画物体运动时空规律的数理模型，描述运动规律有“上帝视角”和“蚂蚁视角”两类方式。“上帝视角”通常为时间的函数，可以用来预测物体在未来任意时刻的状态。“蚂蚁视角”通常为微分方程形式，特点是“只看当下”，基于当前时刻状态预测下一时刻状态的变化量，最终同样可以预测物体未来的状态。由于“蚂蚁视角”更易获得，微分方程的数值模拟是更常用的动力学系统研究方法。一阶动力学系统不具备周期性，二阶动力学系统是刻画物体运动周期现象的常用工具。

图表38：经典动力学系统汇总

动力学系统类别	隐式的“蚂蚁视角”	显式的“上帝视角”	稳定性	实例
一阶动力学系统 (线性)	$\dot{x} = -rx$	$x = Ce^{-rt}$	收敛至唯一稳定点， 或发散至无穷	碳14衰变； 控制策略
一阶动力学系统 (非线性)	$\dot{x} = rx - x^3$	$x = \pm \sqrt{\frac{r}{e^{2r(c_1+t)} - 1}} e^{r(c_1+t)}$	收敛至稳定点	欧拉压杆
二阶动力学系统	$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$	振幅不变的 周期运动	无阻尼的 弹簧振子
二阶动力学系统	$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	$x = Ae^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}t + \varphi_0)$	振幅衰减的 周期运动	带阻尼的 弹簧振子

资料来源：华泰证券研究所

从心理学现象到动力学系统模型

Haken-Kelso-Bunz (HKB) 模型是最早解释周期趋同的动力学系统模型之一。HKB 模型基于一个有趣的心理学现象：当左右手指初始状态为异步时，如果提高周期摆动的频率，超过一定阈值时，左右手指会切换到同步状态。HKB 模型的核心是包含两个主体的动力学系统二阶微分方程组。其中单只手指周期运动由 Rayleigh 振子刻画，手指间的相互影响由耦合函数刻画，神经系统的随机性由高斯噪音项刻画，系统能量注入由频率提升刻画。通过对 HKB 模型的数值模拟，能够很好地复现周期趋同现象。将自下而上的微分方程与自上而下的势函数相结合，能够解释产生周期趋同的原因。

图表39：两个主体周期运动趋同现象的动力学系统模型

两个主体周期运动趋同现象的动力学系统模型：

单个主体存在周期性
由 Rayleigh 振子刻画

主体之间存在相互影响
由耦合函数刻画

系统存在随机性
由高斯噪音项刻画

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 \end{cases} = \begin{cases} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\alpha + \beta(x_1 - x_2)^2) \\ (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2) \end{cases} + \begin{cases} N(0, \sigma) \\ N(0, \sigma) \end{cases}$$

$$\omega = \frac{3.05 - 1.17}{t_{\max} - t_{\min}} t + 1.17$$

有能量注入系统
由频率提升刻画

资料来源：华泰证券研究所

从动力学系统语境到经济系统语境

动力学系统模型为我们理解经济周期打开了窗口，对于动力学系统语境下周期趋同的四个必要条件，我们希望能经济系统语境下找到相应的要素。例如单个主体的周期可能对应经销商周期进货，季节性农业生产，固定周期的工资发放或货币结算等；主体之间的相互影响可能对应经济者之间的良好交互机制，如商品和货币的流通；系统的随机性在微观上可能对应生产者和消费者的行为，在宏观上可能对应科学技术的进步等；有能量注入系统可能对应人的劳动。未来或有可能对每个要素分别进行动力学系统建模，最终定量阐释经济周期的起源。

图表40：从动力学系统语境到经济系统语境

动力学系统 对应要素	动力学系统语境： 周期趋同的必要条件	经济系统语境： 从微观同步到宏观周期的 必要条件	经济系统 对应要素
单个主体为Rayleigh 或Hybrid振子	单个主体存在周期性	微观个体有 类周期的行为	经销商进货；季节性农业生产； 以月为单位的工资发放 或货币结算
耦合函数	主体之间相互影响	微观个体之间会互相影响	经济参与者之间的良好交互机制； 商品和货币的流通
随机噪音项	系统存在随机性	系统存在随机性	生产者和消费者行为； 科学技术的进步
周期运动频率提升	有能量注入系统	有能量注入来 维持系统的运转	劳动

资料来源：华泰证券研究所

展望

事实上，社会科学领域的研究可能远比自然科学复杂，上述的类比可能只是对现实世界的过度简化，任何一个环节都值得深入探索。

例如，二阶 Rayleigh 振子只能刻画单一频率的周期运动，而经济周期可能是多个频率周期的叠加。此时系统不能视作传统意义上的周期（Periodicity），而更应视作准周期（Quasi-periodicity）或者混沌（Chaos）。二阶动力学系统无法刻画准周期和混沌，需要借助更高阶的动力学系统模型。

又如，耦合函数对周期趋同的产生至关重要。不同的耦合函数各自具备怎样的特点？真实世界中，经济参与者之间的耦合函数更可能以何种形式存在？系统包含多个主体时，主体之间通过耦合函数联通，不同的联通方式对周期趋同有何影响？是否可能借助小世界网络等工具定量刻画主体间的联通方式，最终预测周期趋同的速度以及稳定状态？

经济系统有着太多的不确定性，然而我们确信非线性动力学、复杂系统以及复杂性科学是理解经济系统的有力工具。作为本系列的第二篇报告，本文希望能为投资者提供一个独特的新视角。

参考文献

- Fuchs, A. . (2013). *Nonlinear Dynamics in Complex Systems*. Springer Berlin Heidelberg.
- Haken, H. , Kelso, J. A. S. , & Bunz, H. . (1985). A theoretical model of phase transitions in human hand movements. *Biological Cybernetics*, 51(5), 347-356.

风险提示

自然科学领域的周期规律可能无法直接迁移到社会科学领域；动力学系统模型是对真实世界的简单刻画，存在过度简化的可能；周期规律基于历史数据总结，历史规律可能失效；周期规律对市场长期规律进行研究，无法判断短期的市场情绪与政策冲击带来的影响；市场在某些极端情形下可能出现规律以外的交易风险。

附录：HKB 模型的推导

Rayleigh 振子振幅与频率关系

HKB 模型采用 Rayleigh 振子作为单只手指的动力学系统微分方程：

$$\ddot{x} + \varepsilon(\dot{x}^2 - \delta)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

等价于：

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x}^3 - \varepsilon\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Rayleigh 振子的振幅随频率的增大而减小。下面我们将展示推导过程。

站在“上帝视角”，手指周期运动的位置可以表示成如下余弦函数形式：

$$x = 2r\cos(\omega t + \varphi)$$

根据欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

可推出：

$$x = r(e^{i\varphi}e^{i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t})$$

上式中， φ 是依赖于时间 t 的函数，但是相比于 ωt 变化速度较慢，因此 φ 的一阶导数与 ω 相比时可以忽略。运动频率 ω 及振幅 r 本身随时间变化就很慢，因此在极短时间内可视为常数。基于上述两步近似，可以得到 x 的一、二阶导数表达式：

$$\dot{x} = -2r\sin(\omega t + \varphi) \underbrace{(\omega + \dot{\varphi})}_{\approx \omega} \approx i r \omega (e^{i\varphi}e^{i\omega t} - e^{-i\varphi}e^{-i\omega t})$$

$$\ddot{x} = -2r[\cos(\omega t + \varphi) \underbrace{(\omega + \dot{\varphi})^2}_{\approx \omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}} + \sin(\omega t + \varphi) \underbrace{\ddot{\varphi}}_{\approx 0}]$$

$$\approx -r(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi})(e^{i\varphi}e^{i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t})$$

将其代入 Rayleigh 振子的微分方程，分别对应方程中的四项，可得：

$$\begin{aligned} & -r(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi})(e^{i\varphi}e^{i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}) \\ & -ir^3\omega^3\varepsilon(e^{3i\varphi}e^{3i\omega t} + 3e^{-i\varphi}e^{-i\omega t} - 3e^{i\varphi}e^{i\omega t} - e^{-3i\varphi}e^{-3i\omega t}) \\ & -ir\omega\varepsilon\delta(e^{i\varphi}e^{i\omega t} - e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}) \\ & + r\omega^2(e^{i\varphi}e^{i\omega t} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}) = 0 \end{aligned}$$

推导的难点在于如何化简该式。

考虑下面引理：其中 k, j 都是整数且 j 非零，并且由于 φ 随时间变化较慢，因此 $e^{ik\varphi}$ 在区间 $[0, 2\pi/\omega]$ 内可以近似为常数：

$$\int_0^{2\pi/\omega} e^{ik\varphi} e^{ij\omega t} dt \approx \frac{e^{ik\varphi}}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos(jx) + i\sin(jx) dx = 0$$

对于前述待化简的 Rayleigh 振子微分方程，我们在左右两侧同时乘上 $e^{-ik\varphi}e^{-i\omega t}$ ，并对 t 在区间 $[0, 2\pi/\omega]$ 内积分，化简可得：

$$-r\omega \underbrace{(2\dot{\varphi} - 3ir^2\omega^2\varepsilon + i\delta\varepsilon)}_{\approx -3ir^2\omega^2\varepsilon} \approx i r \omega (3r^2\omega^2\varepsilon - \delta\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow r \approx \frac{\delta}{\sqrt{3}\omega}$$

由上可知，Rayleigh 振子的振幅 r 和频率 ω 成反比，振幅随频率的增大而减小。上述推导过程的关键思路是对时间 t 在区间 $[0, 2\pi/\omega]$ 内积分。在后续推导相位差动力学系统微分方程时，我们还会用到这个方法。

相位差的动力学系统微分方程

HKB 模型描述两只手指位置的力学系统微分方程组为：

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon(\dot{x}_1^2 - \delta)\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)(\alpha + \beta(x_1 - x_2)^2)$$

$$\ddot{x}_2 + \varepsilon(\dot{x}_2^2 - \delta)\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(\alpha + \beta(x_2 - x_1)^2)$$

我们希望推导两只手指相位差的力学系统微分方程，下面展示推导过程。

将微分方程组第一个方程的右侧记为 f_1 并展开：

$$f_1 = \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \beta(\dot{x}_1 x_1^2 + \dot{x}_1 x_2^2 - 2\dot{x}_1 x_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1^2 - \dot{x}_2 x_2^2 + 2\dot{x}_2 x_1 x_2)$$

展开式中的各项都可以直接代入并化简，其中：

$$x = r(e^{i\varphi} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi} e^{-i\omega t})$$

$$\dot{x} \approx ir\omega(e^{i\varphi} e^{i\omega t} - e^{-i\varphi} e^{-i\omega t})$$

$$\ddot{x} \approx -r(\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi})(e^{i\varphi} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi} e^{-i\omega t})$$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = ir\omega(e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} - e^{-i\varphi_1} e^{-i\omega t} - e^{i\varphi_2} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi_2} e^{-i\omega t})$$

而 f_1 表达式中含有 β 的各子项都具有相同的形式，可统一表示成：

$$\begin{aligned} \dot{x}_i x_j x_k &= ir^3 \omega (e^{i\varphi_i} e^{i\omega t} - e^{-i\varphi_i} e^{-i\omega t}) \\ &\quad \times (e^{i\varphi_j} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi_j} e^{-i\omega t})(e^{i\varphi_k} e^{i\omega t} + e^{-i\varphi_k} e^{-i\omega t}) \\ &= ir^3 \omega (e^{i\varphi_i} e^{i\omega t} - e^{-i\varphi_i} e^{-i\omega t}) \\ &\quad \times [e^{i(\varphi_j + \varphi_k)} e^{2i\omega t} + e^{i(\varphi_j - \varphi_k)} + e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} \\ &\quad + e^{i(-\varphi_j - \varphi_k)} e^{-2i\omega t}] \end{aligned}$$

将上述关于 x 的各项代入本节开头微分方程组的第一个方程，在方程左右两侧同时乘上 $e^{-i\varphi_1} e^{-i\omega t}$ ，并对时间 t 在区间 $[0, 2\pi/\omega]$ 内积分，整理可得：

$$-2\dot{\varphi}_1 + i\varepsilon(3r^2\omega^2 + \delta) = i[\alpha(1 - e^{-i\phi}) + \beta r^2(3 - e^{i\phi} - 3e^{-i\phi} + e^{-2i\phi})]$$

其中 ϕ 表示两只手指运动的相位差，即 $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ 。

类似可得微分方程组中第二个方程化简后的结果，只需将上式的 φ_1 改成 φ_2 ， ϕ 改成 $-\phi$ ：

$$-2\dot{\varphi}_2 + i\varepsilon(3r^2\omega^2 + \delta) = i[\alpha(1 - e^{i\phi}) + \beta r^2(3 - e^{-i\phi} - 3e^{i\phi} + e^{2i\phi})]$$

两式作差可得相位差的一阶微分方程表达式：

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{1}{2i} \left\{ \alpha \underbrace{(e^{i\phi} - e^{-i\phi})}_{=2i\sin\phi} + \beta r^2 \left[2 \underbrace{(e^{i\phi} - e^{-i\phi})}_{=2i\sin\phi} - \underbrace{(e^{2i\phi} - e^{-2i\phi})}_{=2i\sin 2\phi} \right] \right\} \\ &= (\alpha + 2\beta r^2) \sin\phi \\ &\quad - \beta r^2 \sin 2\phi \end{aligned}$$

免责声明

本报告仅供华泰证券股份有限公司（以下简称“本公司”）客户使用。本公司不因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、评估及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。同时，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可能会波动。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，不构成所述证券的买卖出价或征价。该等观点、建议并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对客户私人投资建议。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

本公司及作者在自身所知情的范围内，与本报告所指的证券或投资标的不存在法律禁止的利害关系。在法律许可的情况下，本公司及其所属关联机构可能会持有报告中提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为之提供或者争取提供投资银行、财务顾问或者金融产品等相关服务。本公司的资产管理部、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰证券研究所”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权力。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

本公司具有中国证监会核准的“证券投资咨询”业务资格，经营许可证编号为：91320000704041011J。

全资子公司华泰金融控股（香港）有限公司具有香港证监会核准的“就证券提供意见”业务资格，经营许可证编号为：A0K809

©版权所有 2020 年华泰证券股份有限公司

评级说明

行业评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

增持行业股票指数超越基准

中性行业股票指数基本与基准持平

减持行业股票指数明显弱于基准

公司评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

买入股价超越基准 20% 以上

增持股价超越基准 5%-20%

中性股价相对基准波动在 -5%~5% 之间

减持股价弱于基准 5%-20%

卖出股价弱于基准 20% 以上

华泰证券研究

南京

南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码：210019

电话：86 25 83389999/传真：86 25 83387521

电子邮件：ht-rd@htsc.com

深圳

深圳市福田区益田路 5999 号基金大厦 10 楼/邮政编码：518017

电话：86 755 82493932/传真：86 755 82492062

电子邮件：ht-rd@htsc.com

北京

北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层

邮政编码：100032

电话：86 10 63211166/传真：86 10 63211275

电子邮件：ht-rd@htsc.com

上海

上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码：200120

电话：86 21 28972098/传真：86 21 28972068

电子邮件：ht-rd@htsc.com