

**林晓明** 执业证书编号：S0570516010001  
研究员 0755-82080134  
linxiaoming@htsc.com

**黄晓彬** 执业证书编号：S0570516070001  
研究员 0755-23950493  
huangxiaobin@htsc.com

#### 相关研究

- 1 《金工：因子收益率的周期性研究初探》  
2018.06
- 2 《金工：指数增强方法汇总及实例》2018.05
- 3 《金工：周期理论与机器学习资产收益预测》2018.05

## 养老目标驱动的多期博弈均衡模型

### 目标日期基金下滑曲线（Glide Path）开发实例

#### 全文摘要

本文养老目标驱动型投资策略从终点投资目标出发，在控制风险的前提下逐期逆向递推，同时采用多期博弈求解纳什均衡的方法，确定生命周期各期权益资产配置比重。报告第一部分对终点目标驱动的多期投资决策思路进行了介绍；第二部分将风险因素纳入考虑后构建了待优化的目标函数；第三部分引入纳什均衡法求解基于目标函数的多期决策均衡配置问题，并对模型在养老定投场景中的实用性进行了分析和说明。第四、五部分通过敏感性分析和随机模拟实验探讨本策略实现的下滑曲线的特征，并展示了一个应用于中国市场的目标日期基金下滑曲线开发实例。

#### 到期日养老目标驱动的权益资产下滑曲线设计思路

目标驱动型投资指的是投资者在未来某个确定时点有一个既定的收益目标，在目标的约束下优化投资决策。本文模型首先给定终点收益目标，在控制风险的前提下，求目标函数的最优解。养老目标型产品对保障投资者退休后收入的需求远高于对超额收益的追求，而目标驱动型投资也是以满足终点收益为目标进行策略设计的。因此，我们认为使用目标驱动型策略作为目标日期型基金下滑曲线设计的逻辑框架是比较合理的。

#### 风险约束下的养老投资目标函数构建方法

本模型采用两种方法来衡量风险并构建相应的目标函数：方法一以每期成本的波动率作为风险度量，以最小化投资者每期支出成本期望及其波动风险来构造目标函数。方法二以不能实现终点目标 $P_N$ 的概率 $(1-p)$ 作为风险度量，采用 $Q(p)$ 表示策略在到期时有 $p$ 的概率达到终点目标 $P_N$ 的期初支出，通过最小化目标函数 $Q(p)$ ，我们能够在最小化期初投资成本的同时，将不能实现终点目标的概率控制在 $1-p$ 以内。对以上两种目标函数进行最优化解，即可得到当期权益类资产配置比例。

#### 博弈论框架下的多期投资成本最小化策略求解每期配置权重

为使投资者每年重新优化决策时得到的（子）下滑曲线与最初设计的下滑曲线保持一致，我们引入博弈论框架，基于纳什均衡的思想逆向递推循环优化求解，最终得到纳什均衡条件下的每期最优资产配置方案，即投资人无法通过改变本文模型所得任何一期配置比例，提升投资业绩表现。

#### 下滑曲线的随机模拟实验与参数敏感性分析

对本文策略参数进行敏感性分析后发现，风险承受水平 $p$ 的改变影响下滑曲线的整体位置， $p$ 的取值越大，代表投资人越厌恶风险，每期权益类资产权重越小；各类资产收益率与波动率的改变影响下滑曲线的整体形状，权益类资产收益率越高或波动率越低，权益类资产的权重将越大，并且收益率的变动相比波动率对下滑曲线影响更大。通过多次随机模拟实验我们发现，本文模型在资产配置权重的选择上均比较稳健，权益资产配置比例不会因为资产收益率等随机因素的变化出现剧烈的波动。

#### 本文策略的中国市场下滑曲线开发实例与业绩回溯

为进一步分析养老目标驱动的多期博弈模型在实际中的表现，我们使用国内外6个代表性资产的历史数据进行实证分析，按照本文模型设计的下滑曲线在前13年高配权益资产，之后逐渐下滑至到期日的13%。策略在回溯期间（2009年至2017年）的年化收益率为7.68%，年化波动率为10.80%，夏普比率为0.71，业绩表现介于权益和债券之间，低风险稳健收益的特征明显。

风险提示：成熟市场经验在应用于本土市场时，存在市场基础、政策条件、投资者成熟程度等多方面的差异，直接应用可能存在不适用性，需要就本土市场特征进一步分析后才可应用。

## 正文目录

本文导言 .....	3
到期日养老目标驱动的权益资产下滑曲线设计思路 .....	4
风险约束下的养老投资目标函数构建方法 .....	5
方法一：每期成本波动作为风险约束的目标函数 .....	5
方法二：以不能实现终点目标的概率作为风险约束的目标函数 .....	6
博弈论框架下的多期投资成本最小化策略求解每期配置权重 .....	7
策略思路：多期博弈纳什均衡下的终点逐期逆向递推过程 .....	7
公式推导：以单期投资决策为例 .....	8
方法一的相关公式推导 .....	8
方法二的相关公式推导 .....	9
本文模型在养老定投场景中的实用性分析 .....	9
下滑曲线的随机模拟实验与参数敏感性分析 .....	11
单次模拟实验 .....	11
模拟实验设计 .....	11
参数敏感性分析 .....	13
多次随机模拟实验 .....	15
本文策略的中国市场下滑曲线开发实例与业绩回测 .....	17
参数的确定 .....	17
目标日期 2048 基金下滑曲线的实证结果 .....	17
基于下滑曲线实例的业绩回测 .....	18
风险提示 .....	19

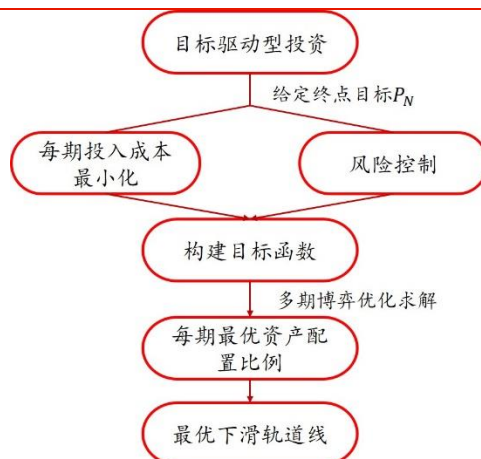
## 本文导言

目标日期基金 (Target Date Fund, TDF) 诞生于上世纪九十年代的美国，是一类专门服务于个人养老金投资的基金。随着美国 401k 和 IRAs 的高速发展，目标日期基金的市场规模快速增长，现在已成为美国养老金市场投资者主流的投资选择之一。目标日期基金是随投资者年龄的增加而动态调整权益类资产配置比例，以达到风险或收益预定目标的一类养老目标基金。由于随着目标日期（退休日）的临近，投资者对风险的厌恶程度逐渐增大，对风险的承受能力逐渐减小，因此基金资产组合中的权益类资产配置比例通常呈下降趋势。权益类资产比例随时间的变动路径又称为下滑曲线 (Glide Path)。

传统的目标日期基金下滑曲线开发策略是在给定初始资产的前提下，最优化投资组合的风险收益属性，从而实现资产增值，以满足到期日养老支出的需要。本文则是从预先设定的终点投资目标出发，在控制风险的前提下最小化每期投资所需的成本（即最大化每期投资收益率），同时引入多期博弈纳什均衡的求解方法，得到在生命周期各时点的最优决策，获得一条统一的下滑曲线。具体步骤如下：

- 在目标驱动型投资的框架下设定终点目标：例如投资者当前 25 岁，希望在 65 岁退休日拿到 100 万作为养老金。在这个确定的 100 万元终点目标的约束下，我们以最小化各期投入成本为优化目标来构建目标函数。
- 构建考虑风险控制的目标函数：在构建目标函数时，除了各期投入成本以外，风险控制也是我们要考虑的重要因素。在确定风险度量方式后，我们将每期投入成本与对应风险因素结合在一起构建出待优化的目标函数。
- 对目标函数优化求解的同时引入博弈论的思路，得到最优下滑曲线：在单期投资模型中，对目标函数进行优化后即可求得最佳权益类资产配置比例。但在与实际情况更加贴近的多期投资模型中，考虑到各期优化所得的最优下滑曲线可能会不一致，我们引入博弈论的框架进行分析。假设投资者每年重新选择一次资产配置方案，将 25 岁至 64 岁的投资者看成投资者的 40 个“分身”，这 40 个投资者“分身”进行博弈，每个“分身”的目标都是使得其当期成本最小，每个“分身”之间的决策相互制约，形成一个多期博弈模型。通过求解每个“分身”的最优策略，可以得到 40 个最优权益类资产比例，即下滑曲线。

图表1：策略思路流程图



资料来源：华泰证券研究所

本策略的创新点在于：1、引入了与养老金投资者投资目的更为匹配的目标驱动型投资逻辑框架；2、引入博弈论来解决多期投资中最优下滑曲线可能不一致的问题。下面我们将按照流程图上显示的顺序对每一个模块进行详细解说。

## 到期日养老目标驱动的权益资产下滑曲线设计思路

本策略基于目标驱动型投资（Commitment Driven Investing, CDI）逻辑框架。顾名思义，目标驱动型投资指的是投资者在未来某个确定时点有一个确定的收益目标，投资者在此目标的约束下构建投资决策。终点收益目标是本资产配置方案及资金投入策略选择时的主要因素，也是投资组合风险水平选择时的主要依据。

目标驱动型投资与传统投资决策模型在投资理念上有一定差别。传统的投资决策模式考虑的是如何在给定初始资产的前提下，最优化投资组合的风险收益属性，以使得资产尽量增值。而终点目标驱动型投资的思路恰好相反，首先给定终点收益目标，在控制风险的前提下，最小化每期的资金投入成本。相比传统投资决策模式，目标驱动型投资的投资理念与养老目标产品的设计理念可能更加契合。养老目标型产品对稳定保障投资者退休后收入的要求远高于对超额收益的追求，而目标驱动型投资也是以满足终点收益目标为主要前提进行资产配置及策略设计。

图表2：目标驱动型投资与传统投资组合模型思路对比

	目标驱动型投资	传统投资组合模型
前提假设	给定未来支出目标（收益目标） $P_N$	给定现有资产 $A_0$
优化对象	每期投资成本（现值） $RA_k$	每期资产价值 $A_k$
（不考虑风险的情况下）	$RA_k = \frac{P_N}{(1+R_k) \cdots (1+R_N)}$	$A_k = A_0(1+R_1) \cdots (1+R_k)$
	其中： $k = 1, 2, \dots, N$	其中： $k = 1, 2, \dots, N$
	$R_1, R_2, \dots, R_N$ 为每期投资收益率	$R_1, R_2, \dots, R_N$ 为每期投资收益率
优化方向	最小化	最大化

资料来源：华泰证券研究所

在介绍了目标驱动型投资理论的主要逻辑后，我们将进一步细化到具体的操作步骤。假设在单期投资模型中，投资者在 $N$ 年以后有一个支出目标 $P_N$ ，那么在目标驱动型投资的理论体系下，投资者需要考虑的就是如何在控制风险的前提下，以最小的当期投入成本（Required Assets） $RA = P_N / (1 + R)$ 来实现 $N$ 年后的支出目标，其中 $R$ 为投资组合收益率。

如果将目标驱动单期投资模型扩展到多期，投资者在 $N$ 年后有一个支出目标 $P_N$ ，投资者每年需要选择资产配置方案，总共进行 $N$ 次投资决策。假设投资组合的当期收益率分别为 $R_1, R_2, \dots, R_N$ （ $R_1, R_2, \dots, R_N$ 为随机变量），则我们以 $1/(1+R_k), k = 1, 2, \dots, N$ 为折现率将终点目标 $P_N$ 折现到各期作为各期成本：终点目标 $P_N$ 在第 $N-1$ 年的现值 $RA_{N-1} = P_N / (1 + R_N)$ ；第 $k$ 年终点目标 $P_N$ 的现值 $RA_k = P_N / (1 + R_k)(1 + R_{k+1}) \cdots (1 + R_N)$ ；终点目标 $P_N$ 的首期现值 $RA_1$ 为： $RA_1 = P_N / (1 + R_1) \cdots (1 + R_k) \cdots (1 + R_N)$ 。投资者需要考虑的就是如何在控制风险的前提下，使每期投入成本 $RA_1, RA_2, \dots, RA_N$ 最小化。

以最简单的情形为例，假设投资者仅在期初进行一次投资，则首期现值 $RA_1$ 最小化等价于最大化 $R_1, R_2, \dots, R_N$ ，也就是说，我们可以通过最大化每期投资收益率来达到最小化投入成本的目的。然而，投资收益率的增大常常以提升组合风险为代价，这将导致到期无法实现既定目标的概率随之提升。目标日期策略设计的出发点是满足投资者的养老目标，投资者对预期不达的厌恶远大于超预期的投资回报所增加的效用。因此，在最优化每期投入成本的同时，我们还需要对组合风险进行控制，以确保到期日实现净值目标的概率足够大。



## 风险约束下的养老投资目标函数构建方法

通过前文对终点目标驱动型投资的分析，我们明确了在模型构建中以每期投入成本 RA 作为主要分析对象，也确定了 RA 的优化方向，但在对 RA 进行优化的同时，也要将风险因素纳入考虑。常见的通用风险度量工具有波动率、最大回撤和 VaR (Value at Risk) 等，针对本策略的设计目的，我们还可以使用不能实现终点目标的概率等指标对风险进行度量。我们同时采用每期成本的波动率以及不能实现终点目标的概率这两种方法来度量风险，将每期投入成本与对应风险因素结合在一起构建目标函数，并通过对目标函数的优化求解，得到当期最优权益类资产配置比例。

### 方法一：每期成本波动作为风险约束的目标函数

回顾前文假设，投资者 N 年后有一个终点目标  $P_N$ ，则根据投资收益率  $R_1, R_2, \dots, R_N$  将  $P_N$  折现至第 k 年，得到在第 k 年的终点目标现值（成本） $RA_k$  为：

$$RA_k = \frac{P_N}{(1+R_k)(1+R_{k+1}) \cdots (1+R_N)}, k = 1, 2, \dots, N$$

我们期望最小化每期成本  $RA_1, RA_2, \dots, RA_N$ （即最大化投资收益率  $R_1, R_2, \dots, R_N$ ），但在进行最优化时，我们也要对成本减少（收益提高）带来的风险纳入考虑。在方法一中我们将每期成本  $RA_1, RA_2, \dots, RA_N$  的波动率作为风险度量方式，定义目标函数为风险加权的成本函数  $C_k$ ：

$$C_k = E_k + \lambda \times Var_k$$

其中：

$$E_k = E(RA_k)$$

$$Var_k = Var(RA_k)$$

$\lambda$  为风险厌恶系数

关于成本函数  $C_k$  的形式，我们参考了传统马科维茨模型中使用的，且被国内外业界学界广泛接受的效用函数形式来进行设计。在马科维茨的均值方差模型中，给定投资组合的收益率  $R_k$  的均值  $E_k$ 、方差  $Var_k$  以及风险厌恶系数  $\lambda$ ，可以构造投资者的效用函数  $U = E_k - \lambda \times Var_k$ ，优化方向为效用函数越大越好。本方法给定每期投入成本  $RA_k$  的均值  $E_k$ 、方差  $Var_k$  以及风险厌恶系数  $\lambda$ ，可以构造投资者的成本函数  $C_k = E_k + \lambda \times Var_k$ ，对成本函数进行最小化求解，即可得到当期最优权益类资产配置比例。

图表3：目标驱动型投资优化函数与马科维茨组合模型优化函数对比

	目标驱动型投资	马科维茨组合模型
分析对象	$RA_k$	$R_k$
最优形式	未来每期投资成本 越小越好	未来每期投资组合收益率 越大越好
目标函数	$C_k = E_k + \lambda \times Var_k$	$U_k = E_k - \lambda \times Var_k$
(控制风险的情况下) 其中：	其中：	
	$E_k = E(RA_k)$	$E_k = E(R_k)$
	$Var_k = Var(RA_k)$	$Var_k = Var(R_k)$
优化问题	给定 $\lambda$ ，最小化 C	给定 $\lambda$ ，最大化 U

资料来源：华泰证券研究所

## 方法二：以不能实现终点目标的概率作为风险约束的目标函数

在方法二中，我们以不能实现终点目标的概率作为风险的度量。在这部分中，我们引入 RA 的  $p$  分位数  $Q(p)$  作为目标函数，以同时将成本与风险纳入考虑。RA 的  $p$  分位数指的是在成本 RA(终点目标  $P_N$  的现值) 的所有可能取值中，有  $p$  的 RA 小于  $Q(p)$ 。因此， $Q(p)$  的确切含义为：使得策略在到期时有  $p$  的概率达到终点目标  $P_N$  的最小期初支出。通过最小化目标函数  $Q(p)$ ，我们能够在最小化成本的同时，将不能实现终点目标的概率控制在  $1-p$  以内。

需要说明的是，概率  $p$  与投资者的风险承受能力密切相关。假设投资者期初的投入成本为  $A$ ，终点目标为  $P_N$ ，期间  $N$  期的投资收益率依次为  $R_1, R_2, \dots, R_N$ 。则概率  $p$  的定义为使得期初投入能在期末满足终点目标  $P_N$  的概率，定义式如下：

$$p = \Pr(A(1 + R_1) \dots (1 + R_N) \geq P_N) = \Pr(RA \leq A)$$

如前所述，初期投资金额最小化等价于最大化每期资产组合投资收益，但资产组合收益的增大常常以提升组合风险为前提，这将导致到期实现到期回报  $P_N$  的概率  $p$  随之降低。因此，我们可以将  $p$  与投资者的风险承受水平对应起来， $p$  值越大，说明投资者希望实现到期回报  $P_N$  的概率越大，那么该投资者的风险承受水平相对较低，反之同理。

## 博弈论框架下的多期投资成本最小化策略求解每期配置权重

在前述的终点目标驱动的多期成本最小化策略中，我们根据对风险约束的衡量方式不同将目标函数分为以每期成本波动作为风险约束的目标函数和以能够到达期末预设回报的概率作为风险约束的目标函数。投资者每年进行调仓时会对当期的目标函数进行优化从而得到最优资产配置比例，但是在每期优化的过程中，我们得到的资产配置比例可能不会与预先设定的下滑曲线配置比例相同。

为了使得最初设计的下滑曲线在此后各期的决策下保持不变，即：投资者每年重新优化决策时得到的（子）下滑曲线与最初设计的下滑曲线相同，我们引入博弈论的框架求解此问题。

### 策略思路：多期博弈纳什均衡下的终点逐期逆向递推过程

假设投资者现在 25 岁，并且希望在 65 岁时拿到 100 万退休金，在 40 年间，投资者每年都会重新选择一次资产配置方案，那么从 25 岁至 64 岁，投资者预计将会进行 40 次投资组合选择决策。引入博弈论的框架后，我们将进行这 40 次决策时的投资者看成 40 个该投资者的“分身”，由这 40 个完全理性且互相拥有完全信息的“分身”进行博弈，每个“分身”都有自己的风险偏好水平，每个“分身”进行决策的目标是最优化自己的目标函数以最小化当期成本。

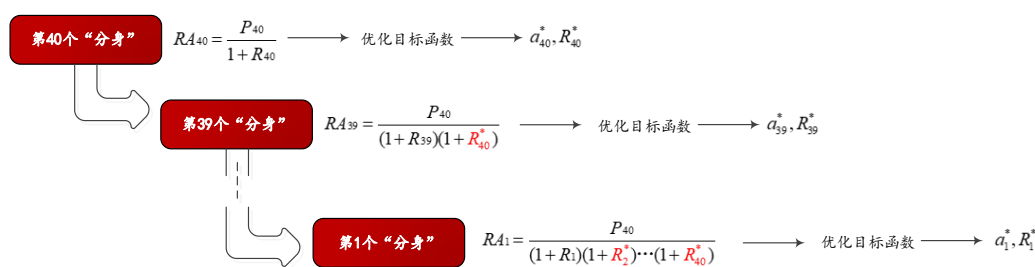
这个博弈问题的最终目的是使每个“分身”优化决策时得到的子下滑曲线  $g_1, g_2, g_3, g_4, \dots, g_{40}$  在同一年度的配置相同（角标  $k = 1, 2, \dots, 40$  代表做决策的期序，分别对应 25 岁至 64 岁的投资者“分身”），每个分身无法通过仅改变自己的决策来改善自己的状况，即：如果 25 岁的“分身”决策出的最优下滑曲线为  $g_1$ ，那么 26 岁的“分身”决策出的最优（子）下滑曲线  $g_2$  与  $g_1$  在相同的时间区间是重合的，以此类推， $g_3, g_4, \dots, g_{40}$  均与  $g_1$  重合。这意味着 26 岁至 64 岁的任一“分身”决策偏离  $g_1$  并不能获得更优的终点业绩表现，因此  $g_1$  以及与  $g_1$  重合的  $g_2, g_3, g_4, \dots, g_{40}$  共同构成纳什均衡策略。

由于每个“分身”的决策仅受其后面所有更高年龄“分身”决策的影响，而与其前面所有“分身”的决策无关。因此我们可以通过逆向归纳法求解纳什均衡。逆向归纳法的思路如下：64 岁的“分身”（第 40 个参与方）具有先发优势，其他参与者的行为不影响他的决策。当 64 岁的“分身”（第 40 个参与方）做出决策后，63 岁的“分身”（第 39 个参与方）基于 64 岁的“分身”（第 40 个参与方）的行为，做出对自身最有利的决策，以此类推，最终得到 25 岁的“分身”（第 1 个参与方）的决策。

针对本模型，假设第  $k$  年股票和债券的预期收益率分别为  $rs_k$  和  $rb_k$ ，( $k = 1, 2, \dots, 40$ )，逆向归纳法的具体步骤如下：

- 64 岁的“分身”根据自己的风险偏好水平，通过优化目标函数决定最优的股票配置比例  $\alpha_{40}^*$ ，进而可以得到最优投资组合收益率  $R_{40}^* = \alpha_{40}^* \cdot rs_{40} + (1 - \alpha_{40}^*) \cdot rb_{40}$ ；
- 63 岁的“分身”需要选择最优的  $R_{39}, R_{40}$  使得其目标函数达到最优，但是在观察到 64 岁“分身”的选择后，63 岁“分身”的  $R_{40}$  会选择 64 岁“分身”优化得出的  $R_{40}^*$ 。即 63 岁“分身”只需在  $R_{40}^*$  的基础上，选择最优的  $R_{39}$ 。通过优化目标函数得到最优的股票配置比例  $\alpha_{39}^*$  后，我们可以得到最优投资组合收益率  $R_{39}^* = \alpha_{39}^* \cdot rs_{39} + (1 - \alpha_{39}^*) \cdot rb_{39}$ ；
- 以此类推，25 岁“分身”只需在  $R_{40}^*, R_{39}^*, \dots, R_2^*$  的基础上，选择最优的  $R_1$ ，得到最优股票配置比例  $\alpha_1^*$ 。由此得到的最优股票配置比例  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{40}^*$  构成纳什均衡下的最优（子）下滑曲线。

图表4：逆向归纳法求解纳什均衡流程图



资料来源：华泰证券研究所

### 公式推导：以单期投资决策为例

为简化过程便于理解，我们首先在单期投资的情境下对成本最小化模型进行公式推导，我们假设：

- 投资者只在期初进行投资，并每年调整资产组合配置；
- 投资者的目标是在给定风险偏好水平下最小化期初投资金额；
- 资产组合收益率  $R$  服从对数正态分布，即： $1 + R = e^x$ ，其中： $x$ 服从正态分布；
- 不同年份的资产组合收益率是不相关的；
- 无交易费用。

为求解最优股票配置比例，我们使用股票和债券两类资产来构建投资组合。假设股票、债券的期望收益率分别为： $R_s$ 、 $R_b$ ，方差分别为  $Var_s$ 、 $Var_b$ ，协方差为  $cov(s, b)$ ，股票投资比例为  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )，则资产组合  $R$  的期望收益率  $E(R)$  和方差  $Var(R)$  的表达式分别为：

$$E(R) = \alpha \cdot R_s + (1 - \alpha) \cdot R_b$$

$$Var(R) = \alpha^2 \cdot Var_s + (1 - \alpha)^2 \cdot Var_b + 2\alpha(1 - \alpha) \cdot cov(s, b)$$

得到资产组合的期望与方差后，我们将其作为已知量代入前文提到的两种目标函数构建方法中，推导出目标函数的表达式，为后文的实证分析做好理论铺垫。

### 方法一的相关公式推导

资产组合收益率  $R$  服从对数正态分布，即： $1 + R = e^x$ ，其中  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。假设  $E(R) = m$ ， $Var(R) = v$ ，则  $m, v, \mu, \sigma^2$  存在如下关系：

$$m = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right) - 1$$

$$v = \exp(\sigma^2 + 2\mu) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1]$$

$$\mu = \ln((1 + m)^2 / \sqrt{v + (1 + m)^2})$$

$$\sigma^2 = \ln(v / (1 + m)^2 + 1)$$

定义  $RA = 1 / (1 + R)$ ，则  $RA = e^{-x}$ ，其中  $-x \sim N(-\mu, \sigma^2)$  则利用上述等式可以求得  $RA$  的期望和方差：

$$E(RA) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right)$$

$$Var(RA) = \exp(\sigma^2 - 2\mu) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1]$$

将其代入表达式  $C_k = E_k + \lambda \times Var_k$  即可得到需要优化的目标函数。



### 方法二的相关公式推导

设  $R_1, R_2, \dots, R_N$  是  $N$  个相互独立且满足对数正态分布的随机变量, 定义随机变量  $RA$  如下:

$$RA = \frac{P_N}{(1 + R_1) \cdots (1 + R_N)}$$

据此我们可求出  $RA$  的  $p$  分位数  $Q(p)$  作为目标函数:

$$Q(p) = \frac{\sqrt{C_2}}{C_1} e^{\varphi^{-1}(p)\sqrt{\ln C_2}}$$

其中:

$$C_1 = \prod_{k=1}^N (1 + m_k)$$

$$C_2 = \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{s_k^2}{(1 + m_k)^2}\right)$$

$$E(R_k) = m_k$$

$$\text{Var}(R_k) = s_k^2$$

$\varphi^{-1}(p)$  是标准正态分布的  $p$  分位数

这里  $Q(p)$  的含义可以解释为: 在所有  $RA$  可能的取值中, 有比例为  $p$  的  $RA$  样本值小于  $Q(p)$ , 因此,  $Q(p)$  等价于初始投资金额  $A$ 。投资者的目标即最小化  $Q(p)$ , 使得期初的投资额  $Q(p)$  有  $p$  的概率能够实现期末  $P_N$  的收益。

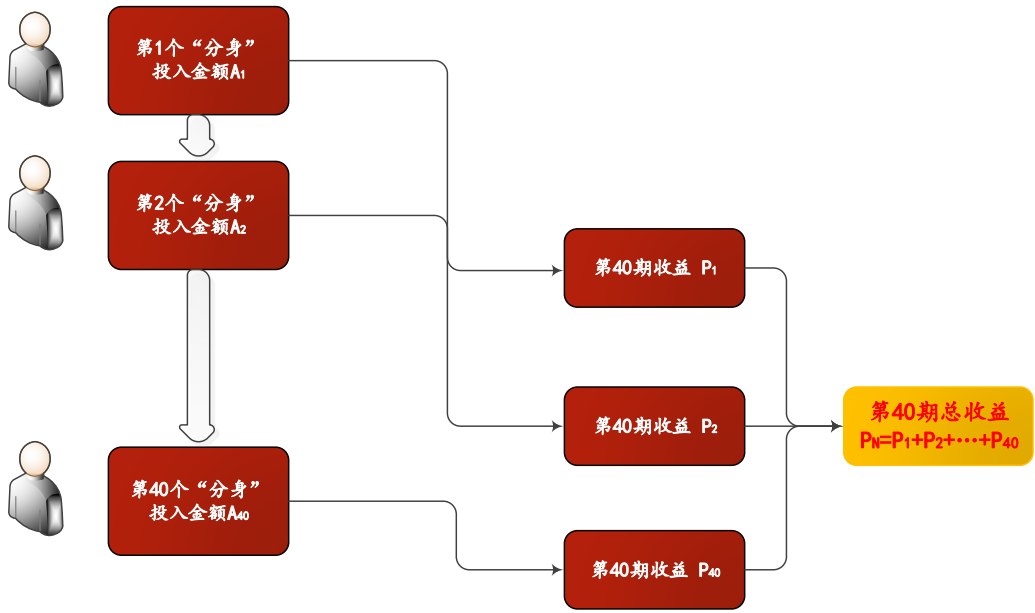
### 本文模型在养老定投场景中的实用性分析

在实际养老投资中, 目标日期基金的投资是一个长期定投的过程。一般来说, 投资者在选定适合自己的目标日期基金后, 会约定好扣款日期间隔、扣款方式及每期投资金额, 以定期定额的形式长期投资于该目标日期基金。而在前文的模型假设中, 多期博弈模型假设投资者在整个投资过程中只在期初以一次性投资的方式进行投资, 投资者在满足终点目标  $P_N$  的基础上最小化期初投资金额。事实上, 本文所采用的多期博弈模型同样适用于以定投方式进行投资的目标日期基金资产配置决策。假设投资时长为 40 年, 投资者每年定期投入一笔金额  $A_i$ , 该笔金额  $A_i$  在到期日时的终值为  $P_i$ , 40 期后得到投资报酬  $P_N$  ( $P_N$  等于第 40 期的  $P_i$  之和)。投资者的目标是在满足期末报酬为  $P_N$  的基础上最小化每期投入金额之和。因此, 在引入定投的投资方式后, 只需要对多期博弈模型进行 40 次重复即可得到最优资产配置权重。

我们将 40 期投资行为看做投资者的 40 个“分身”, 每个“分身”均满足多期博弈模型中只在期初进行一次性投资的假设, 第一个“分身”的投资期为 40 期, 第二个“分身”的投资期为 39 期, 以此类推, 第 40 个“分身”的投资期为 1 期。我们的目标是使 40 个“分身”的投资金额之和最小化。

根据多期博弈模型的逐期逆向递推循环, 我们首先进行第 40 期的投资决策, 由于每个“分身”的投资期都包括了第 40 期, 所以 40 个“分身”均参与第 40 期的投资决策, 那么目标函数仅是对原始目标函数的 40 次重复加总, 因此这并不会改变第 40 期的最优资产配置。其次, 我们进行第 39 期的投资决策, 这时第 40 个“分身”并未参与投资, 因此第 39 期共 39 个“分身”参与投资决策, 目标函数仅是对原始目标函数的 39 次重复加总, 这并不会改变第 39 期的最优资产配置。以此类推, 最终得到的 40 期最优资产配置与原模型计算结果无差别。因此, 本文所采用的多期博弈模型可应用于定投场景的目标日期基金资产配置决策中。

图表5： 定期投资下的投资过程



资料来源：华泰证券研究所

## 下滑曲线的随机模拟实验与参数敏感性分析

### 单次模拟实验

基于上文所提出的养老目标驱动的多期博弈均衡模型，本节将选取代表性权益类、债券类指数历史数据进行单次模拟实验以初步了解本文策略所设计下滑曲线的形状和特征，并通过参数敏感性分析研究模型面对不同市场变量可能发生的变化。

### 模拟实验设计

在养老目标驱动的多期博弈均衡模型中，通过输入各类资产收益率和波动率参数，由后往前递推进行迭代运算，最终我们可以确定一条以总支出最小化为目标的下滑曲线。我们对下滑曲线进行初步的模拟计算，假设标的资产为权益类资产和债券类资产，选取境内外具有代表性的指数从 2000 年 1 月起至 2018 年 5 月的月频数据计算其年化波动率及收益率如下表所示。

图表6：境内外代表性指数收益率及波动率（2000 年 1 月-2018 年 5 月）

指数类别	指数名称	年化收益率	年化波动率
权益类	沪深 300	11.89%	29.39%
	中证 500	21.72%	34.65%
	MSCI 美国	4.63%	14.50%
	MSCI 新兴市场	7.14%	21.78%
	MSCI 欧洲	2.77%	18.16%
债券类	中债-总财富(总值)指数	3.45%	3.04%
	上证国债	3.30%	2.49%
	上证信用 100	5.36%	3.18%
	巴克莱美国综合指数	3.64%	2.82%
	巴克莱美国高收益债券指数	12.56%	7.83%

资料来源：Wind，华泰证券研究所

根据以上指数年化波动率及收益率的历史变化范围确定模型变量取值，并代入模型求解可以得到一条下滑曲线。需要用到的变量及基础取值如下：

图表7：境内外代表性变量取值基准（2000 年 1 月-2018 年 5 月）

变量	取值	计算方法
权益类资产年收益率 $E(R_S)$	14%	权益类指数年化收益率计算结果大致在 2.77%-21.72% 内变化，我们选取 14% 作为基础取值
债券类资产年收益率 $E(R_B)$	4%	债券类指数年化收益率计算结果大致在 3.3%-12.56% 内变化，我们选取 4% 作为基础取值
权益类资产波动率 $s(R_S)$	15%	权益类指数年化波动率计算结果大致在 14.50%-29.39% 内变化，我们选取 15% 作为基础取值
债券类资产波动率 $s(R_B)$	3%	债券类指数年化波动率计算结果大致在 2.49%-7.83% 内变化，我们选取 3% 作为基础取值
风险承受水平 $p$	70%	风险承受水平 $p$ 指期初的投资额有 $p$ 的概率满足期末 $P_N$ 的收益（在接下来下滑曲线的设计过程中，为方便计算，我们假设 $P_N = 1$ ）。因此， $p$ 的取值越小，代表投资者的风险偏好程度越高。我们选取 70% 作为基础取值

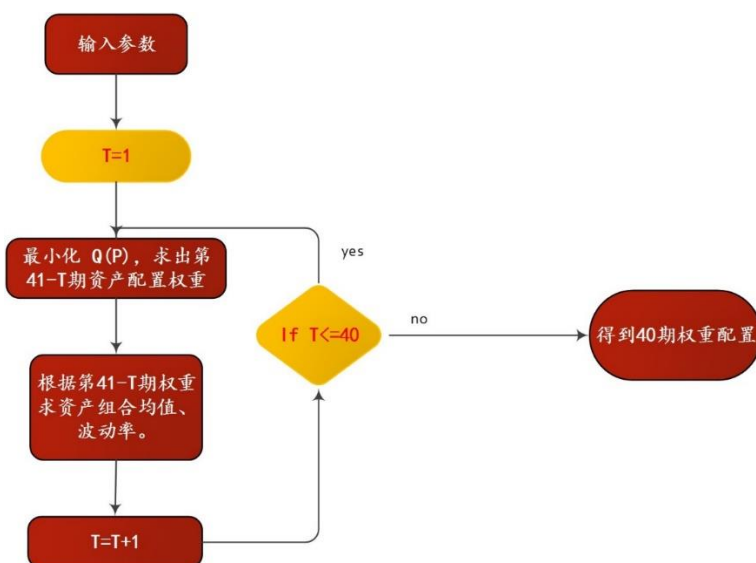
资料来源：华泰证券研究所

根据以上参数可绘制下滑曲线，具体绘制步骤如下：

- 输入参数 $E(R_S), E(R_B), s(R_S), s(R_B), p$ ，在权益类资产和债券类资产权重相加等于 1 的约束条件下，最小化 $Q(p)$ ，求出第 40 期权益类资产的最优权重。
- 根据权重求解结果，计算第 40 期当期资产组合收益率、波动率。
- 根据参数 $E(R_S), E(R_B), s(R_S), s(R_B), p$ 以及第 40 期资产组合收益率、波动率，在权益类资产和债券类资产权重相加等于 1 的约束条件下，最小化 $Q(p)$ ，求出第 39 期权益类资产的最优权重。
- 对第 39 期、38 期、……、第 1 期资产组合重复循环步骤 2、3，直至求出第 1 期权益类资产的最优权重。

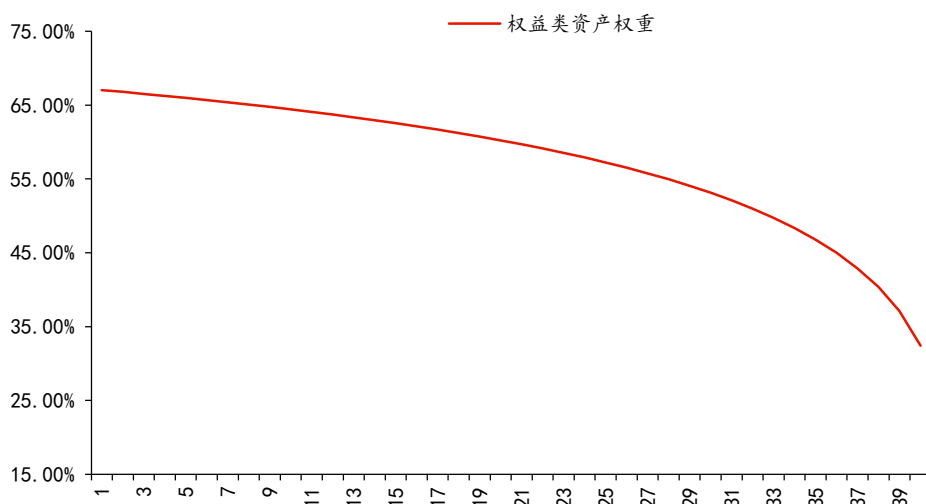
计算程序运算逻辑如下图所示。

图表8：多期博弈模型运算逻辑



资料来源：华泰证券研究所

根据以上变量取值和计算步骤，我们得到权益资产比重的下滑曲线，按照这样的权重配置，投资人将以 70% 的概率实现养老投资目标。如下图所示，第一期权益类资产配置比例在 67% 左右，随着时间的推移这一比重逐渐下降，直至最后一期下降到 32.41 %。同时，权益类资产权重的下降速度也随时间推移而不断增加，因此整体来看下滑曲线呈抛物线形状。

**图表9： 基于方法二设计目标函数与历史数据计算变量基础取值绘制的下滑曲线**

资料来源：华泰证券研究所

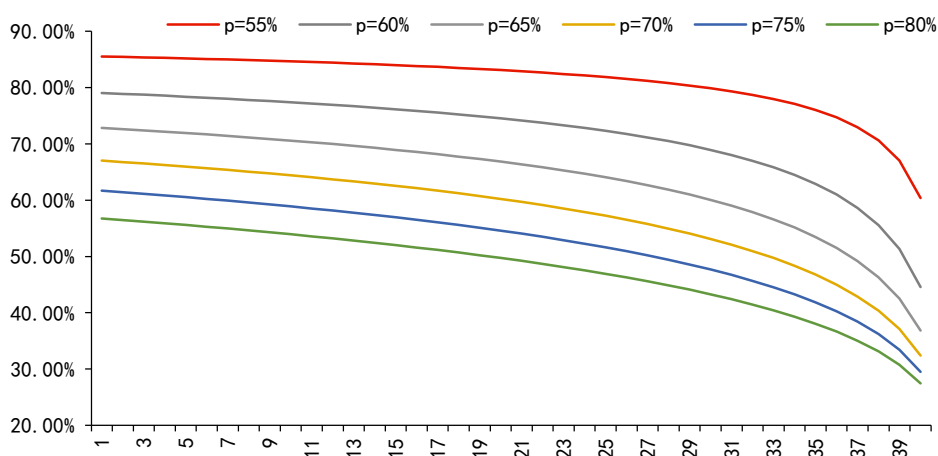
**参数敏感性分析**

针对上一节的下滑曲线，本节通过参数敏感性分析，深入理解每个模型变量对下滑曲线的形状可能产生的影响。

**风险水平 $p$ 值对下滑曲线的影响**

$p$ 代表了投资者的风险承受水平， $p$ 的取值越大，说明在其他条件相同的情况下，投资者希望其投资决策能有更高的可能性满足退休后支出水平，因此 $p$ 值较大的投资者风险承受能力较低。

$E(R_S) = 14\%$ ,  $E(R_B) = 4\%$ ,  $s(R_S) = 15\%$ ,  $s(R_B) = 3\%$ 保持不变，在55%-80%范围内以5%的单位变动幅度调整 $p$ 的取值，求出的一系列下滑曲线如下图所示。

**图表10： 风险承受水平 $p$ 对下滑曲线的影响**

资料来源：华泰证券研究所

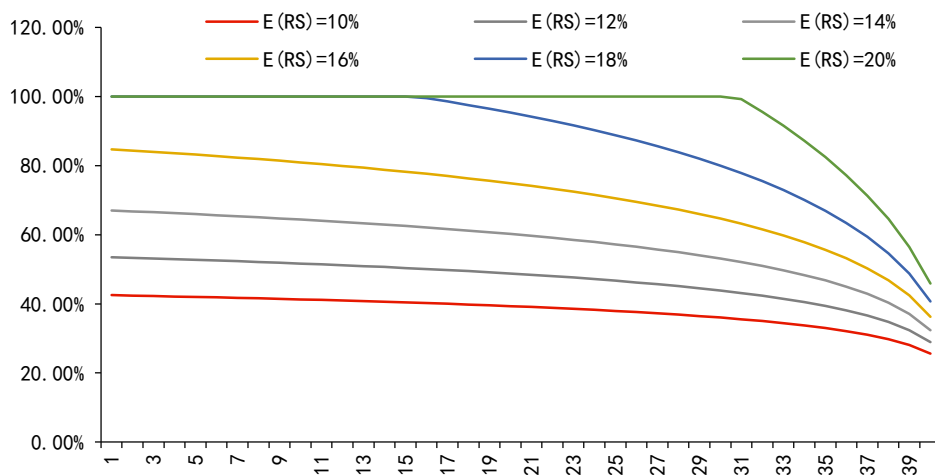
可以看到，风险水平 $p$ 取值的改变对下滑轨道的高低位置影响较为显著：随着 $p$ 取值逐渐提高，下滑曲线逐渐向下移动。这是因为 $p$ 值越大，投资者风险承受能力越低，因此该类投资者的下滑曲线每一期权益类资产仓位的权重都相对较低。



### 权益类资产收益率对下滑曲线的影响

$p = 70\%$ ,  $E(R_B) = 4\%$ ,  $s(R_S) = 15\%$ ,  $s(R_B) = 3\%$  保持不变, 在 10%-20% 的范围内以 2% 的单位变动幅度调整  $E(R_S)$  取值, 求出不同下滑曲线如下图所示。

图表11: 权益类资产收益率对下滑曲线的影响



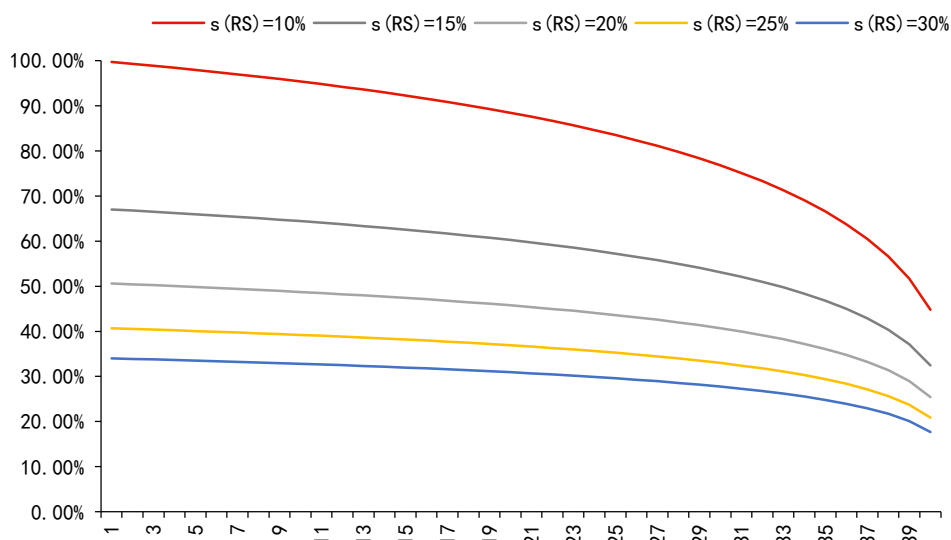
资料来源: 华泰证券研究所

可以看到, 权益类资产收益率的改变对下滑曲线的形状产生显著影响。在其他条件不变的情况下, 权益类资产收益率提高将带动权益类资产权重上升。从投资阶段来看, 收益率对投资者在财富积累阶段的权益类资产权重影响较为明显, 对临近目标日期的权重影响较弱, 如上图所示, 权益类资产收益率越高则投资者财富积累阶段权益类资产权重就越大, 之后下降速率也相应更快。由于本模型对下滑曲线的计算是一个从后往前递推的过程, 权益类资产收益率的改变首先将影响最后一期的资产配置, 往前递推的过程中将基于后期的资产配置进行计算, 因此在整个过程中权益类资产收益率的改变将产生逐级放大效应, 使得距离目标日期越远的权益类资产仓位权重受收益率影响越大。

### 权益类资产波动率对下滑曲线的影响

$p = 70\%$ ,  $E(R_B) = 4\%$ ,  $E(R_S) = 14\%$ ,  $s(R_B) = 3\%$  保持不变, 在 10%-30% 范围内以 5% 的单位变动幅度调整  $s(R_S)$  取值, 求出不同下滑曲线如下图所示。

图表12: 权益类资产波动率对下滑曲线的影响



资料来源: 华泰证券研究所

可以看到，权益类资产波动率的改变对下滑曲线的形状也产生显著影响。波动率越大，权益类资产仓位权重越低，其影响机制与权益类收益率对下滑曲线的影响机制相似，均是通过放大效应由后向前影响权益类资产仓位权重。对比波动率和收益率的单位变动量和对下滑曲线的影响效果可知，本文模型对收益率的变动更加敏感。

进一步的测试发现， $E(R_B), S(R_B)$  对下滑曲线影响的本质与  $E(R_S), S(R_S)$  相同，其他条件不变的情况下， $E(R_B)$  提升将带动债券类资产权重的上升， $S(R_B)$  的提升将带动债券类资产权重下降。

根据以上分析可知，五个主要变量的改变对下滑曲线有着不同程度的影响：风险水平  $p$  的改变影响着下滑曲线的整体位置， $p$  取值越大，配置越保守，权益类资产权重越小，则曲线在图中的位置约靠近横轴； $E(R_B), S(R_B), E(R_S), S(R_S)$  的改变影响着下滑曲线的整体形状， $E(R_S)$  越大， $S(R_S)$  越小，权益类资产权重越大， $E(R_B), S(R_B)$  反之。另外，相较于波动率而言，下滑曲线的设计对收益率的变动更加敏感。

### 多次随机模拟实验

目标日期基金权益资产下滑曲线的设计是为了在一定约束条件下寻找最优的资产配置方案以满足退休后投资人的支出需求，上文基于代表性权益类、债券类指数历史数据进行了单次模拟实验，并通过参数敏感性分析证明了本模型符合目标日期基金设计内涵。本节将通过多次随机模拟实验并对结果求取均值，力图呈现一个综合考虑各种市场变量随机性后的平均下滑曲线。

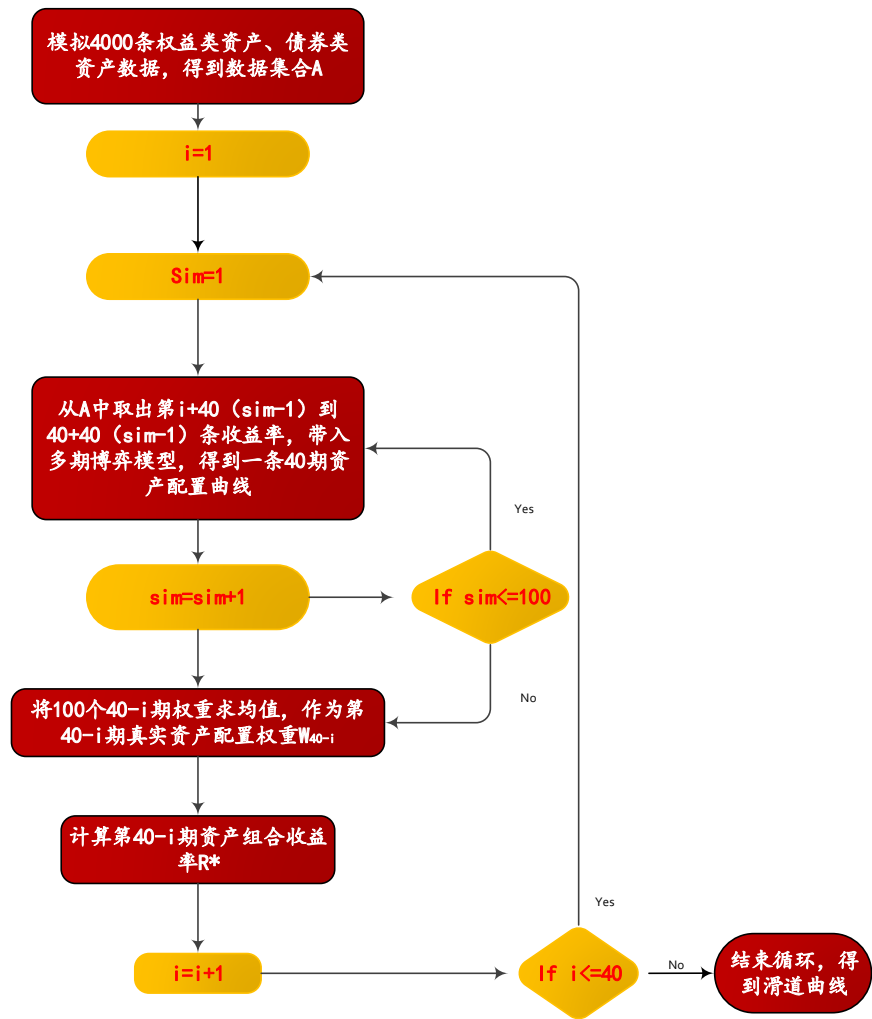
随机模拟假设权益类资产收益率、债券类资产收益率均服从对数正态分布。随机模拟的过程可以概括为：通过对变量大量随机取值，代入模型求解得到结果。通过进行多次随机模拟可以得到多个结果，不同结果代表着不同的可能性，多个结果的平均值则代表着综合考虑各种可能性后的平均情况。就本模型而言，通过多次随机模拟可以得到一条综合考虑市场不同走势变化可能性的下滑曲线。

随机模拟的结果依赖于对变量分布的假定，若假定的变量均值、方差或分布与真实市场情况偏差较大，那么随机模拟的结果也会出现较大误差。根据图表 7 可知，权益类指数年化收益率大致在 2.77%-21.72% 内变化，债券类指数年化收益率大致在 3.3%-12.56% 内变化，权益类指数年化波动率大致在 14.50%-29.39% 内变化，债券类指数年化波动率大致在 2.49%-7.83% 内变化，根据其变化范围，我们将权益类资产年化收益率均值设定为 9.6%，波动率设定为 24%，债券类资产年化收益率均值设定为 5.3%，波动率设定为 4%。

本节根据多期博弈模型进行  $40 \times 100$  次随机模拟。一般来说，下滑曲线的多次随机模拟过程是通过变量按照一定的规律或分布取大量随机值代入模型得到  $n$  条资产配置线，对每期资产配置求平均最终得到下滑曲线。由于本模型中，每一期的资产配置与其后一期的资产配置存在依赖关系，因此无法简单的通过对  $n$  条资产配置线求均值的方法得到下滑曲线。我们使用的改进方法是：

- 步骤 1：分别对权益类资产、债券类资产生成  $40 \times 100$  条数据，其中，权益类资产收益率服从均值为 9.6%、波动率为 24% 的对数正态分布，债券类资产收益率服从均值为 5.3%、波动率为 4% 的对数正态分布；
- 步骤 2：根据步骤 1 的数据模拟循环 100 次，得到 100 条第 40 期资产配置曲线；
- 步骤 3：将第 40 期资产配置权重求均值，作为最优下滑曲线在第 40 期的权益类资产配置权重  $\omega_{40}$ ；
- 步骤 4：对第 39、38……第 1 期重复进行 2、3 步骤，得到随机模拟的下滑曲线；
- 具体程序流程如下图所示，其中，sim 变量控制每期模拟次数，对于每一期资产配置权重的确定均需要模拟循环 100 次得到 100 条下滑曲线。

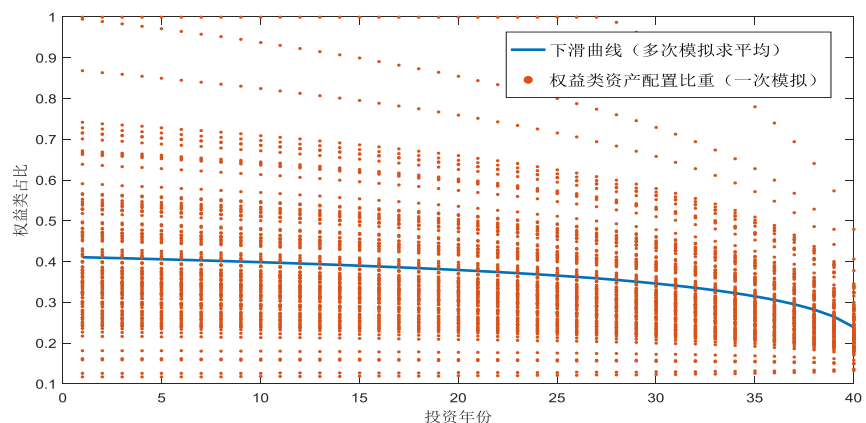
图表13： 随机模拟多期博弈模型



资料来源：华泰证券研究所

随机模拟后的下滑曲线及  $40 \times 100$  个权益类资产配置点如下图所示，在随机模拟过程中由于资产收益率和波动率取值的不同，权益类资产配置点数值出现了较为明显的差异，总体来看集中分布在 60% 以内，根据权益类资产配置计算得到的平均下滑曲线在第一期权重为 41%，随后逐渐下降至 24%。由随机模拟实验的结果可知本模型整体较为保守，针对市场上资产价格的不同走势，本模型资产配置权重的选择均比较稳健。

图表14： 权益类资产比例图



资料来源：华泰证券研究所

## 本文策略的中国市场下滑曲线开发实例与业绩回测

为进一步分析养老目标驱动的多期博弈模型在真实市场中的表现情况，本文通过选取代表性指数进行实证分析。本次实证选取中国、境外市场股票及债券类资产进行配置，选取沪深 300 指数、中证 500、标普 500 作为股票标的指数，反映股票市场回报。选取中证全债、中证国债指数作为中国债券标的指数，选取巴克莱美国综合债指数作为境外债券标的指数，该指数选取评级较高的美国债券作为成分资产，总体来说风险相对较低。

本次实证假设目标日期基金于 2048 年到期，每年年底进行资产权重更新，基于多期博弈模型，我们模拟其 2009 年到 2048 年资产配置情况并绘制相应下滑曲线（2009 年年末开始第一次配置资产权重）。

图表15： 指数样本数据（2002 年 12 月-2017 年 12 月）

资产类别	相关指数	指数类别
中国市场股票	沪深 300	股票类
	中证 500	股票类
境外市场股票	标普 500	股票类
中国市场债券	中证全债	债券类
	中证国债	债券类
境外市场债券	巴克莱美国综合债指数	债券类

资料来源：Wind，华泰证券研究所

## 参数的确定

为求出 40 期各类资产配置权重，我们需要确定的参数有：风险承受水平 $p$ 、6 个标的指数年化收益率、波动率及协方差。参数计算方式如下表所示。

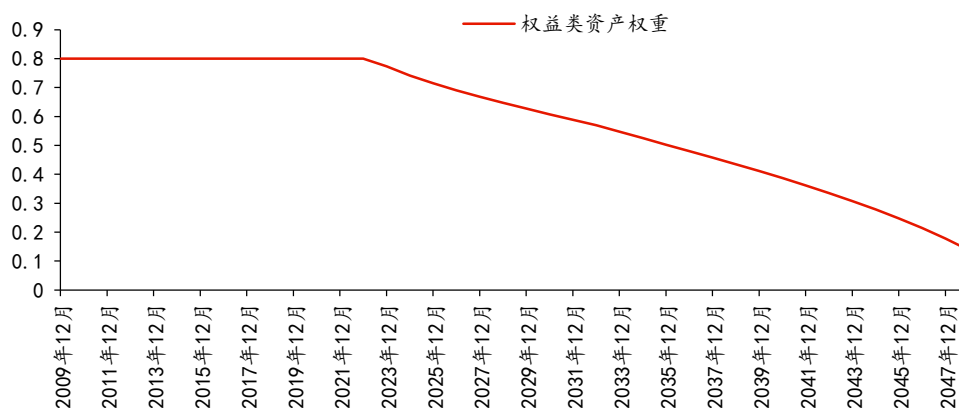
图表16： 参数计算方法

参数名称	计算方法
风险承受水平 $p$	假设风险承受水平 $p=70\%$
6 个标的指数年化收益率 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$	分别根据 6 个指数 2002 年 12 月-2009 年 12 月月度行情序列计算年化收益率，得到 6 个指数年化收益率参数。
6 个标的指数波动率 $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$	分别根据 6 个指数 2002 年 12 月-2009 年 12 月月度行情序列计算年化收益率，求其标准差得到 6 个指数波动率参数。
6 个标的指数间协方差	根据 6 个年化收益率序列计算协方差。

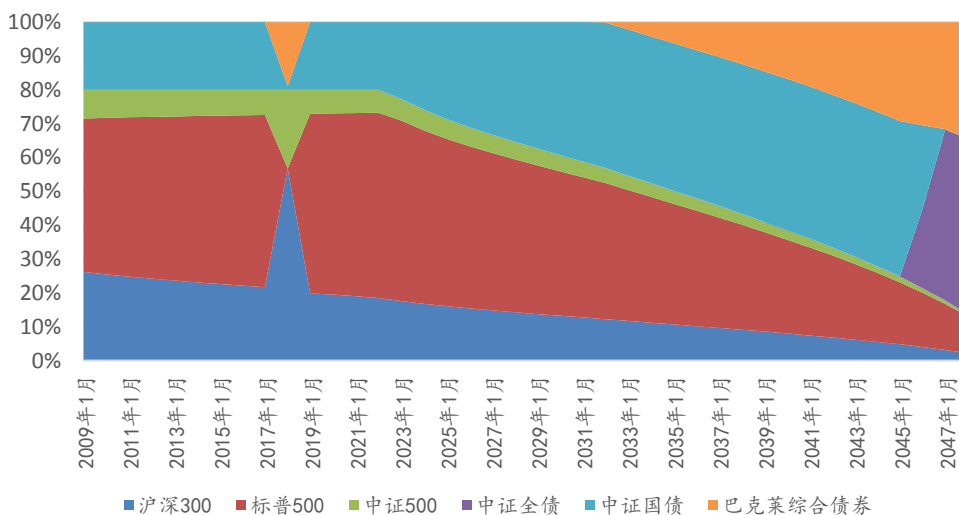
资料来源：华泰证券研究所

## 目标日期 2048 基金下滑曲线的实证结果

将参数代入模型得到 6 个指数持仓情况和相应下滑曲线。根据中国证监会《养老目标证券投资基金指引（试行）》的要求，养老目标基金权益资产上限不超过 80%，为此我们将权益类资产上限设定为 80%。如图表 17 可知，本策略下滑曲线在第 13 期之后逐渐下降，并于最后一期下降到 13%。从具体持仓情况来看，权益类资产主要包括沪深 300 及标普 500，债券类资产在前 21 期完全以中证国债为主，第 21 期之后巴克莱综合债券指数及中证全债指数占比开始增加。

**图表17：实证策略下滑曲线**

资料来源：Wind，华泰证券研究所

**图表18：实证策略持仓图**

资料来源：Wind，华泰证券研究所

## 基于下滑曲线实例的业绩回测

回测说明：

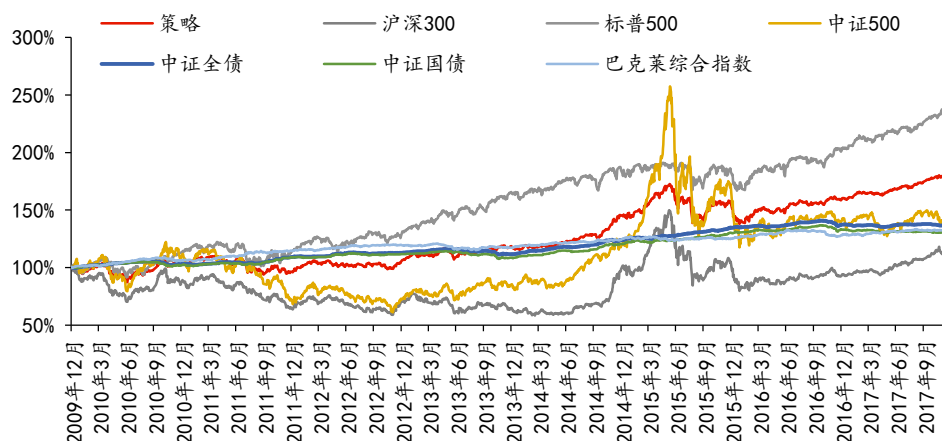
- 受限于部分指数的长度限制，我们选取 2009 年 12 月至 2017 年 12 月年度行情数据作为回测区间样本，共计 9 年；
- 不考虑交易费用。

按照 2002 年 12 月至 2009 年 12 月各指数月度价格序列我们计算得到指数年化收益率、波动率参数代入模型，将模型 2009 年 12 月至 2017 年 12 月资产配置结果与代表性市场指数进行比较，计算相关业绩评价指标如下：

本策略 9 年共实现 181% 的收益回报，年化收益率为 7.68%，年化波动率为 10.80%，最大回撤率为 20.09%，夏普比率为 0.71，卡尔曼比率为 0.38。从业绩表现来看，本策略累计净值曲线、夏普比率、卡尔曼比率介于权益类资产和债券类资产之间。可以看出，在最初 9 年的投资期间由于持有权益类资产较多，投资风格相对较为激进，年化收益率、年化波动率和最大回撤率绝对值相较于债券类资产而言均较高，随着权益类资产权重的逐渐降低，本策略将逐渐趋于稳健。



图表19：策略及各类资产累计净值



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表20：策略表现（2009 年 12 月-2017 年 12 月）

指数名称	年化收益率 <sup>1</sup>	年化波动率	最大回撤率	夏普比率	卡尔曼比率
策略	8.02%	10.80%	20.09%	0.74	0.40
沪深 300	3.76%	23.21%	46.70%	0.16	0.08
标普 500	11.93%	14.57%	17.90%	0.82	0.67
中证 500	7.19%	26.99%	54.35%	0.27	0.13
中证全债	4.08%	1.48%	4.28%	2.76	0.95
中证国债	3.53%	1.96%	5.87%	1.8	0.60
巴克莱综合	3.66%	3.26%	4.87%	1.12	0.75

资料来源：Wind，华泰证券研究所

### 风险提示

成熟市场经验在应用于本土市场时，存在市场基础、政策条件、投资者成熟程度等多方面的差异，直接应用可能存在不适用性，需要就本土市场特征进一步分析后才可应用。

<sup>1</sup> 年化收益率为统计区间每年收益的算术平均值，即收益率  $r = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_T}{T}$ ，这里 T 为回测区间长度（年）， $r_i$  为指数回测期间内第 i 年收益率。

## 免责声明

本报告仅供华泰证券股份有限公司（以下简称“本公司”）客户使用。本公司不因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、评估及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。同时，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可能会波动。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，不构成所述证券的买卖出价或征价。该等观点、建议并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对客户私人投资建议。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

本公司及作者在自身所知情的范围内，与本报告所指的证券或投资标的不存在法律禁止的利害关系。在法律许可的情况下，本公司及其所属关联机构可能会持有报告中提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为之提供或者争取提供投资银行、财务顾问或者金融产品等相关服务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰证券研究所”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权力。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

本公司具有中国证监会核准的“证券投资咨询”业务资格，经营许可证编号为：91320000704041011J。

全资子公司华泰金融控股（香港）有限公司具有香港证监会核准的“就证券提供意见”业务资格，经营许可证编号为：A0K809

©版权所有 2018 年华泰证券股份有限公司

## 评级说明

### 行业评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

增持行业股票指数超越基准

中性行业股票指数基本与基准持平

减持行业股票指数明显弱于基准

### 公司评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

买入股价超越基准 20%以上

增持股价超越基准 5%-20%

中性股价相对基准波动在-5%~5%之间

减持股价弱于基准 5%-20%

卖出股价弱于基准 20%以上

## 华泰证券研究

### 南京

南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码：210019

电话：86 25 83389999/传真：86 25 83387521

电子邮件：ht-rd@htsc.com

### 深圳

深圳市福田区深南大道 4011 号香港中旅大厦 24 层/邮政编码：518048

电话：86 755 82493932/传真：86 755 82492062

电子邮件：ht-rd@htsc.com

### 北京

北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层

邮政编码：100032

电话：86 10 63211166/传真：86 10 63211275

电子邮件：ht-rd@htsc.com

### 上海

上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码：200120

电话：86 21 28972098/传真：86 21 28972068

电子邮件：ht-rd@htsc.com