

林晓明 执业证书编号：S0570516010001
研究员 0755-82080134
linxiaoming@htsc.com

陈烨 执业证书编号：S0570518080004
研究员 010-56793942
chenye@htsc.com

李子钰 执业证书编号：S0570519110003
研究员 0755-23987436
liziyu@htsc.com

何康 021-28972039
联系人 hekang@htsc.com

源洁莹 0755-82366825
联系人 yuanjieying@htsc.com

王晨宇
联系人 wangchenyu@htsc.com

相关研究

1 《金工：引入高阶矩改进马科维茨组合表现》2020.05

2 《金工：资产配置模型对债券趋势项的依赖》2020.05

3 《金工：中国养老目标基金初诞全景回顾》2020.05

耦合振子同步的藏本模型

华泰周期起源系列研究之七

藏本模型是刻画耦合振子同步现象的经典模型

藏本模型是刻画耦合振子同步现象的经典模型。同步现象在自然界和人类社会广泛存在，其本质是系统中的微观个体相互耦合最终形成宏观级别的周期。藏本模型的基本形式是描述系统中每个振子相位的一维动力学方程。模型中，振子受到其它振子的吸引而趋于同步，其等价形式是振子受到平均场的吸引而趋于同步。振子数量 N 、耦合强度 K 、自然频率洛伦兹分布半高宽 γ 这三项关键参数对同步的影响不尽相同。Sakaguchi—Kuramoto 模型是藏本模型的变式，可借助该模型研究振子合作、叛逆等行为对系统终态的影响。

同步现象无处不在，本质是系统中的微观个体相互耦合形成宏观周期

同步现象无处不在，心脏起搏细胞自发同步产生有节律的心跳，夏夜萤火虫的同步闪烁，演出结束后观众自发产生有节奏的掌声，原子共同受激发射产生激光，钟摆或节拍器的同步摆动，全球经济指标及金融资产的同起同落，这些看似神奇的现象背后存在共通之处。系统的每个微观个体可视作周期运动的振子，众多个体通过相互间的耦合，最终形成步调一致的宏观周期，物理学中称为耦合振子同步。藏本模型是刻画耦合振子同步现象的经典模型。

藏本模型的基本形式是关于振子相位的一维动力学方程

藏本模型的基本形式是描述系统中每个振子相位的一维动力学方程。振子相位的变化量（即运动速度）由 1）该振子本身自然频率 ω ，2）耦合强度 K ，3）该振子和其它振子的相位差决定。耦合强度 $K > 0$ 使得振子间相互吸引。引入序参量、平均相位和平均场的概念后，振子受到其它振子的吸引而趋于同步，等价于振子受到平均场的吸引而趋于同步。

藏本模型中三项关键参数对同步的影响不尽相同

藏本模型中振子数量 N 、耦合强度 K 、自然频率洛伦兹分布半高宽 γ 这三项关键参数对同步的影响不尽相同。当振子数量 $N \geq 3$ 时，振子数量对同步速度影响不大。耦合强度 K 小于某个定值时，无法同步；大于某个定值时， K 越大同步越快。振子自然频率服从洛伦兹分布的半高宽 γ 越大，系统越难同步。当振子的自然频率在某个特定范围内时，振子能与平均场同步；当振子的自然频率超出该范围时，振子无法同步。

借助藏本模型变式研究振子合作、叛逆等行为对系统终态的影响

Sakaguchi—Kuramoto 模型是藏本模型的变式，可借助该模型研究振子合作、叛逆等行为对系统终态的影响。当系统由合作和叛逆振子组成时：若合作振子占优，则两类振子分别形成团簇而同步，团簇间相位差为 π ，即处于反相位；若叛逆振子占优，则系统无法同步。当系统由合作和孤立振子组成时，孤立振子始终按自身相位运动，合作振子形成同步。当系统由合作和延迟振子组成时，两类振子分别形成团簇而同步，团簇间存在相位延迟。合作振子占比越高，系统越倾向于同步；根据不同的合作振子占比 p 值，存在非相干态、 π 态和行波态三种不同的系统状态。

风险提示：包括藏本模型在内的动力学系统模型是对真实世界的简单刻画，存在过度简化的可能；周期规律基于历史数据总结，历史规律可能失效；周期规律对市场长期规律进行研究，无法判断短期的市场情绪与政策冲击带来的影响；市场在某些极端情形下可能出现规律以外的交易风险。

正文目录

藏本模型及其变式	5
耦合振子同步现象	5
基础知识	5
藏本模型	5
Sakaguchi—Kuramoto 模型	6
Hong—Strogatz 模型	7
复序参量、序参量和平均相位	7
平均场频率、旋转坐标系和有效频率	8
藏本模型模拟	10
振子数量 N 的影响	10
双振子情形 ($N=2$)	10
五振子情形 ($N=5$)	11
不同振子数量 N 比较	12
耦合强度 K 的影响	12
强耦合情形 ($K=0.8$)	12
中等耦合情形 ($K=0.5$)	13
弱耦合情形 ($K=0.2$)	13
不耦合情形 ($K \leq 0$)	14
不同耦合强度 K 比较	14
自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 的影响	14
$\gamma=0.05$ 情形	15
$\gamma=0.1$ 情形	16
$\gamma=0.2$ 情形	16
$\gamma=0.5$ 情形	17
不同自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 比较	17
临界频率的确定	18
小结	18
Sakaguchi—Kuramoto 模型模拟	19
两类振子组成的 Sakaguchi—Kuramoto 模型	19
合作振子和叛逆振子	19
合作振子和孤立振子	21
合作振子和延迟振子	22
合作振子占比 p 的影响	23
非相干态	24
π 态	25
行波态	25
小结	26
总结	27

参考文献.....	28
风险提示.....	28
附录.....	29
藏本模型两种形式恒等变换的推导.....	29
藏本模型静止坐标系转换至旋转坐标系的推导.....	29

图表目录

图表 1: 振子运动的直角坐标系和极坐标系表示.....	5
图表 2: 振子 j 对振子 i 的影响 ($K>0$)	6
图表 3: 耦合振子系统的复序参量、序参量和平均相位.....	7
图表 4: 耦合振子系统的平均场频率和旋转坐标系	8
图表 5: 藏本模型模拟结论——模型参数对同步的影响.....	10
图表 6: 藏本模型模拟参数	10
图表 7: 双振子相位 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=[0, \pi]$)	11
图表 8: 双振子相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=[0, \pi]$)	11
图表 9: 双振子系统序参量 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=[0, \pi]$)	11
图表 10: 双振子系统平均相位和平均相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1$)	11
图表 11: 五振子系统相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	12
图表 12: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	12
图表 13: 不同振子数量系统序参量 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/N$)	12
图表 14: 不同振子数量系统同步时间 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/N$)	12
图表 15: 五振子系统相位正弦值 ($K=0.8, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	13
图表 16: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=0.8, \omega=0.1$)	13
图表 17: 五振子系统相位正弦值 ($K=0.5, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	13
图表 18: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=0.5, \omega=0.1$)	13
图表 19: 五振子系统相位正弦值 ($K=0.2, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	13
图表 20: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=0.2, \omega=0.1$)	13
图表 21: 五振子系统相位正弦值 ($K=0, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	14
图表 22: 五振子系统相位正弦值 ($K=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	14
图表 23: 不同耦合强度系统序参量 ($N=5, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	14
图表 24: 不同振子数量系统同步时间 ($N=5, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	14
图表 25: 不同半高宽 γ 洛伦兹分布的概率密度函数	15
图表 26: 系统序参量和平均相位正弦值 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.05$)	15
图表 27: 系统各振子自然频率和有效频率 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.05$)	15
图表 28: 系统序参量和平均相位正弦值 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.1$)	16
图表 29: 系统各振子自然频率和有效频率 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.1$)	16
图表 30: 系统序参量和平均相位正弦值 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.2$)	16
图表 31: 系统各振子自然频率和有效频率 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.2$)	16
图表 32: 系统序参量和平均相位正弦值 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.5$)	17
图表 33: 系统各振子自然频率和有效频率 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.5$)	17

图表 34: 不同自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 下系统序参量 ($N=100, K=0.8, \theta_0=2i\pi/100$)	17
图表 35: 不同半高宽系统序参量均值 ($N=100, K=0.8, \theta_0=2i\pi/100$)	18
图表 36: 不同半高宽振子有效频率绝对值均值 ($N=100, K=0.8$)	18
图表 37: 系统 Kr 和同步振子 $\max \omega $ 的关系 ($N=100, \theta_0=2i\pi/100$)	18
图表 38: Sakaguchi—Kuramoto 模型模拟结论	19
图表 39: Sakaguchi—Kuramoto 模型模拟参数	19
图表 40: 合作振子和叛逆振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.6, K_1=1, K_2=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	20
图表 41: 合作振子和叛逆振子系统各振子相位正弦值细节 ($p=0.6, K_1=1, K_2=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	20
图表 42: 合作振子和叛逆振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.4, K_1=1, K_2=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	21
图表 43: 合作振子和孤立振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.6, K_1=1, K_2=0, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	21
图表 44: 合作振子和孤立振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.4, K_1=1, K_2=0, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	22
图表 45: 合作振子和延迟振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.6, K_1=1, K_2=0.5, \beta_2=\pi/2, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	22
图表 46: 合作振子和延迟振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.4, K_1=1, K_2=0.5, \beta_2=\pi/2, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)	23
图表 47: 不同合作振子占比系统序参量均值 ($N=100, K_1=1, K_2=-0.5, \gamma=0.05, \theta_0=2i\pi/N$)	23
图表 48: 不同合作振子占比系统序参量均值 ($N=25600, K_1=1, K_2=-0.5, \gamma=0.05$)	24
图表 49: 合作振子和叛逆振子系统序参量 ($N=100, p=0.1$)	24
图表 50: 合作振子和叛逆振子最终相位频次分布 ($N=100, p=0.1$)	24
图表 51: 合作振子和叛逆振子系统序参量 ($N=100, p=0.7$)	25
图表 52: 合作振子和叛逆振子最终相位频次分布 ($N=100, p=0.7$)	25
图表 53: 合作振子和叛逆振子系统序参量 ($N=100, p=0.55$)	25
图表 54: 合作振子和叛逆振子最终相位频次分布 ($N=100, p=0.55$)	25

藏本模型及其变式

耦合振子同步现象

同步现象无处不在。人类生命的维系离不开心脏近一万个起搏细胞的同步振荡，如果各细胞放电节律不一致，就可能出现心律不齐。夏夜林中萤火虫的同步闪烁，释放出强烈的求偶信号，使整个种群得以延续。演出大厅内，观众自发产生有节奏的鼓掌声。全球经济指标及金融资产时常同起同落。即便在非生命的世界，原子共同受激发射产生激光，钟摆或节拍器的同步摆动等等，这些同步现象也早已为人们熟知。

上述现象背后的共同点是，系统的每个微观个体都可视作周期运动的振子，众多个体通过相互间的耦合，最终形成步调一致的宏观周期，在物理学中称为**耦合振子同步**。奇妙的现象引发人们思考：同步背后的原理是什么？有没有模型能够刻画这些现象？

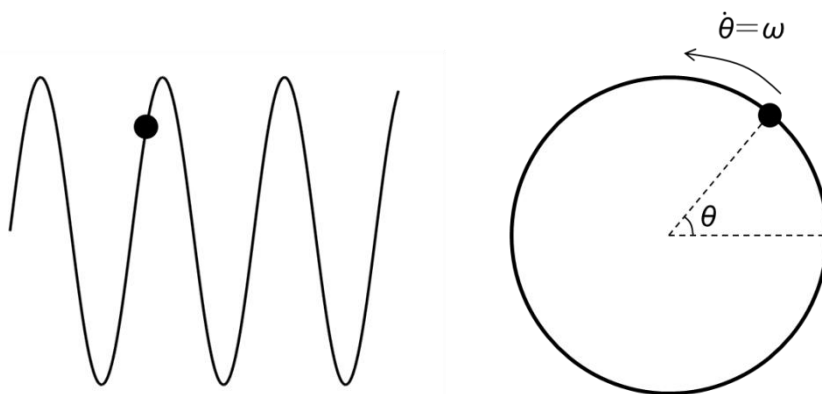
在华泰金工《周期起源 2：周期趋同现象的动力学系统模型》（20200102）一文中，我们展示了如何通过 Haken-Kelso-Burz 模型（简称 HKB 模型）解释心理学中的手指运动周期趋同现象，并提出我们对经济系统周期现象起源的一种猜测。在复杂系统领域，还有一些模型也能刻画耦合振子同步现象，应用范围较 HKB 模型更广，其中最具代表性的模型之一是**藏本模型**（Kuramoto Model）。

本文我们将首先介绍藏本模型及其变式 Sakaguchi-Kuramoto 模型和 Hong-Strogatz 模型（其中 Hong-Strogatz 模型可视为 Sakaguchi-Kuramoto 模型的特例）。随后我们将对藏本模型和 Sakaguchi-Kuramoto 模型进行模拟，展示耦合振子同步现象，并探讨关键参数以及振子合作、叛逆等行为对同步结果的影响。

基础知识

振子在空间内按一定规律振动，如常见的简谐振动，其运动轨迹可以由直角坐标系下的正弦波刻画，如左下图所示。以极坐标系视角考察，如右下图所示，振子在圆周上沿逆时针方向做周期运动，振子所处方向和极轴之间的夹角为相位 θ ，单位为弧度（rad）；运动的速度以角频率 ω 表示，即单位时间内相位的变化量 $\dot{\theta}$ ，等价于相位的一阶导数，也称为振子的固有频率或自然频率，单位为弧度/秒（rad/s）。

图表1：振子运动的直角坐标系和极坐标系表示



资料来源：华泰证券研究所

藏本模型

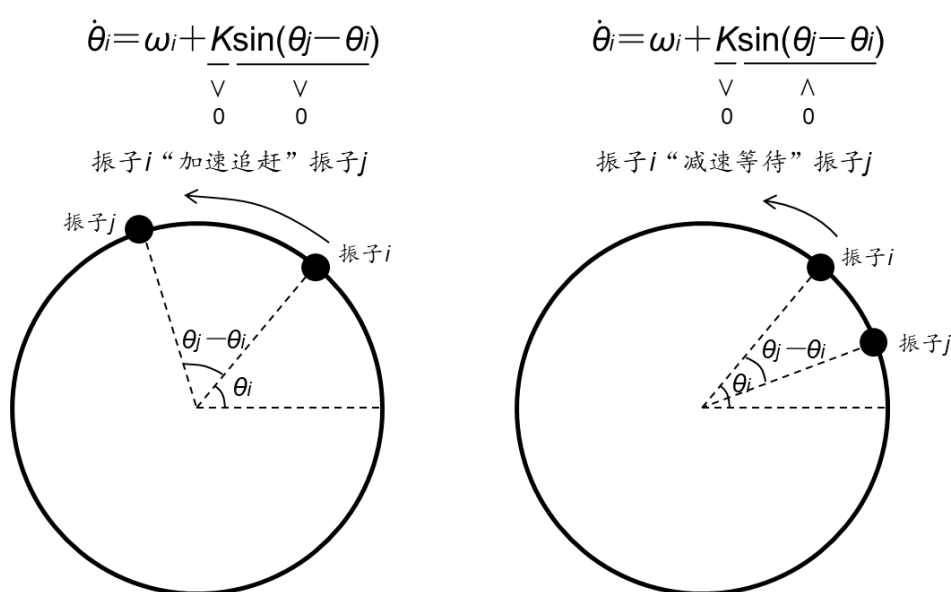
藏本模型由日本物理学家藏本由纪（Yoshiki Kuramoto）于 1975 年提出，形式简洁且易于理解，是描述耦合振子同步现象的经典模型，广泛应用于各领域。藏本模型的基本形式是描述系统中每个振子相位的一维动力学方程：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

其中，状态变量 θ_i 代表振子 i 的相位。等号左侧为 θ_i 的一阶导数，即相位的变化量，反映振子的运动速度。参数 ω_i 代表振子 i 的固有频率，一般假定服从洛伦兹分布、高斯分布等，概率密度函数以 $g(\omega)$ 表示。参数 N 为系统中振子总数。参数 K 代表耦合强度，即振子之间的相互作用强度，一般取 $K>0$ ，即振子之间相互“吸引”。求和符号 Σ 内的 $\sin(\theta_j - \theta_i)$ 代表振子 j 对振子 i 的作用，整个 Σ 代表系统内全部振子对振子 i 的影响之和。

藏本模型通俗化理解的经典案例是演出大厅里观众鼓掌声的同步现象，在 Neda 等 (2000) 和鞠萍 (2016) 文献中均有介绍。演出结束时，剧场内 N 个观众开始鼓掌，每个人自身的鼓掌速度 ω_i 有快有慢不尽相同，每个人鼓掌的相位 θ_i 也不同，在宏观上表现为杂乱无章的掌声。理想状态下，每个人会受到其他人掌声的“吸引”，掌声相位的变化量受相位差 $\theta_j - \theta_i$ 影响，相位 θ_i 不断作出调整。随着时间的进行，掌声最终趋于同步，每个人的相位 θ_i 保持一致。

图表2：振子 j 对振子 i 的影响 ($K>0$)



资料来源：华泰证券研究所

下面我们进一步阐述振子之间的相互作用机制。假设振子 i 和振子 j 的相位差 $\theta_j - \theta_i$ 介于 $-\pi$ 到 π 之间（若超过此范围，相当于长跑比赛中的“套圈”，可通过加减 2π 的整数倍而转化到此范围）：

1. 当 $\theta_j - \theta_i > 0$ ，即振子 i 落后振子 j 时，如左上图所示， $\sin(\theta_j - \theta_i) > 0$ ，由于 $K > 0$ ，此时振子 i 相位的变化量等于其固有频率加上一个正数，那么下一时刻振子 i 的相位将相对增大，即“加速追赶”振子 j 。
2. 当 $\theta_j - \theta_i < 0$ ，即振子 i 领先振子 j 时，如右上图所示， $\sin(\theta_j - \theta_i) < 0$ ，由于 $K > 0$ ，此时振子 i 相位的变化量等于其固有频率加上一个负数，那么下一时刻振子 i 的相位将相对减小，即“减速等待”振子 j 。
3. 当 $\theta_j - \theta_i = 0$ ，即振子 i 和振子 j 同步时， $\sin(\theta_j - \theta_i) = 0$ ，此时振子 i 相位的变化量等于其固有频率，振子 j 对振子 i 无影响，是一种相对稳定的状态。

总的来看， $K > 0$ 使得振子之间存在相互“吸引”作用。直观地看，吸引作用才能使得各振子最终趋于同步。

Sakaguchi—Kuramoto 模型

藏本模型较为简洁，后续的研究者提出各种藏本模型的变式，以适应更复杂的研究场景。1986 年 Sakaguchi 和 Kuramoto 提出 Sakaguchi—Kuramoto 模型，引入相位延迟 β ，此时动力学方程为：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i - \beta)$$

其中，除 β 外的各个变量含义均与原版藏本模型相同。相位延迟 β 的含义是，振子 i 并非倾向于和其它任意振子 j 同步，而是保持 β 的相位差。当 $\theta_i = \theta_j - \beta$ ，即振子 i 落后振子 j 的相位等于 β 时， $\sin(\theta_j - \theta_i - \beta) = 0$ ，此时振子 j 对振子 i 无影响，是一种相对稳定的状态。在 $K > 0$ 的假设下，习惯上 β 的范围取 $-\pi/2$ 至 $\pi/2$ 之间。

Hong—Strogatz 模型

2011 年 Hong 和 Strogatz 提出 Hong—Strogatz 模型，该模型和原始藏本模型的不同之处在于：原始藏本模型中，每个振子受其它振子的影响程度相同，耦合强度均为 K ；Hong—Strogatz 模型中，各振子受其它振子的影响程度不同，耦合强度以参数 K_i 表示：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K_i}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

原始藏本模型的 K 一般取正数，即认为振子之间为相互吸引关系。Hong—Strogatz 模型中， K_i 拓展至任意实数。当振子 i 的耦合强度 $K_i > 0$ 时，该振子倾向于受其它振子吸引，相当于系统中的“合作者”；当振子 i 的耦合强度 $K_i < 0$ 时，该振子倾向于和其它振子相排斥，相当于系统中的“叛逆者”。

特别地，当 $K_i < 0$ 时，“叛逆”振子的动力学方程可以写作：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{|K_i|}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i + \pi)$$

振子 i 倾向于和其它任意振子 j 保持 π 的相位差，即处于反相位的状态，正好相当于 Sakaguchi—Kuramoto 模型中相位延迟 β 取 π 的情形。因此，一般将 Hong—Strogatz 模型视作 Sakaguchi—Kuramoto 模型的特例。当 Sakaguchi—Kuramoto 模型允许“叛逆”振子的存在时，相位延迟 β 的范围可拓展到 $-\pi$ 至 π 之间。

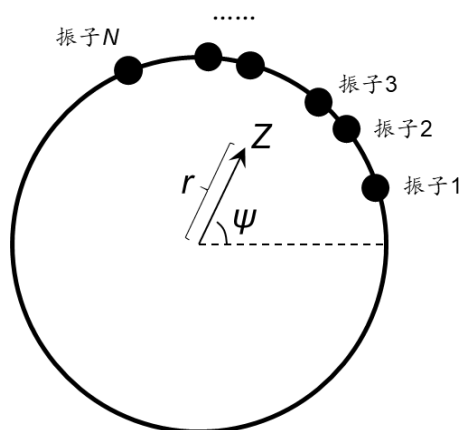
复序参量、序参量和平均相位

下面两节将介绍藏本模型及其变式中的重要概念。为了更清晰地描述振子的动力学行为，引入下式：

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = r e^{i\psi}$$

Z 定义为系统内各振子 $e^{i\theta}$ 的算数平均值， i 代表虚单位。由上式可知 Z 为复数，可能包含虚部，称 Z 为耦合振子系统的**复序参量** (Complex Order Parameter)。对于复数 Z ，可以表示成 $r e^{i\psi}$ 的形式，其中 r 为复数 Z 的**模** (Modulus)，也称为系统的**序参量** (Order Parameter)； ψ 为复数 Z 的**幅角** (Argument)，也称为系统的**平均相位** (Average Phase)。

图表3：耦合振子系统的复序参量、序参量和平均相位



资料来源：华泰证券研究所

下面我们从几何角度形象化地理解上述概念。首先需要明确，**相位 θ** 是针对单个振子而言，属于**微观量**；**复序参量 Z 、序参量 r 和平均相位 ψ** 是针对整个系统而言，属于**宏观量**。如上图所示，假设系统内各振子都位于单位圆上，每个振子都可以视作一个单位向量，将这些向量相加并求平均，即得到描述整个系统的向量 Z ，即复序参量。

Z 相当于各个振子产生“合力”的均值， Z 的长度对应模长 r ，即序参量； Z 与极轴的夹角对应幅角 ψ ，即平均相位。模长 r 应小于 1，由于各振子“发力”方向不同，与 Z 垂直方向的分量相互抵消，只保留 Z 方向的分量，因此“合力”小于每个分力的均值。**当且仅当所有振子完全同步时，序参量 r 为 1**，此时所有振子“劲往一处使”。如果所有振子均匀分布在单位圆上，序参量 r 为 0。一般而言，序参量 r 介于 0 和 1 之间，越接近 1 代表系统的同步效果越好。

原始藏本模型中，振子的相位改变量由 1) 该振子本身自然频率，2) 振子耦合强度，3) 该振子和其它所有振子的相位差决定。引入序参量 r 和平均相位 ψ 的概念后，可以将藏本模型进行恒等变换，得到如下形式：

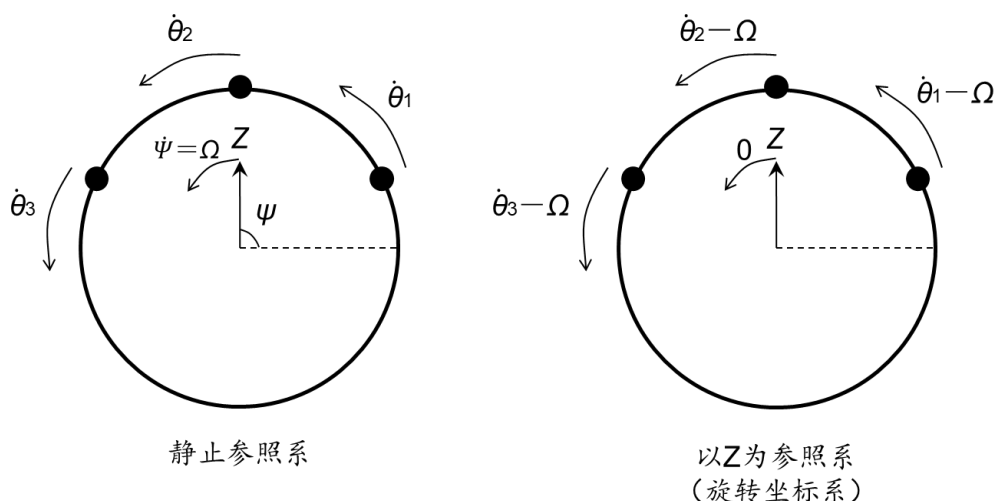
$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\Psi - \theta_i)$$

此时，振子的相位改变量由 1) 该振子本身自然频率，2) 振子耦合强度，3) 耦合振子系统的序参量和平均相位决定。换言之，**振子受到其它振子的吸引而趋于同步，等价于振子受到“平均场”的吸引而趋于同步**。恒等变换的推导过程请参见附录。

平均场频率、旋转坐标系和有效频率

复序参量 Z 的本质是将各个振子取平均，用以描述整个系统的状态。由于各个振子在极坐标系下沿圆周做周期运动，那么其“均值” Z （即整个系统）也在做周期运动。定义 Z 的幅角 ψ （即系统的平均相位）的一阶导数为系统的**平均场频率 Ω** ，即系统振动的角频率，反映系统的运动速度。

图表4：耦合振子系统的平均场频率和旋转坐标系



资料来源：华泰证券研究所

接下来我们将进行参照系的转换。不妨以体育场内的长跑比赛为例，说明参照系转换：

1. 以观众为参照系：所有运动员都在绕跑道向前运动，领先的运动员速度最快（角频率最高），落后的运动员速度最慢（角频率最低）；此时参照系为静止坐标系。
2. 以最后一位运动员为参照系：除该运动员以外的运动员都在绕跑道向前运动，速度为其它运动员和自身的速度差；该运动员自身处于静止状态；此时参照系处于运动状态，运动速度等于最后一位运动员的速度，可视作旋转坐标系。
3. 以所有运动员的平均运动速度为参照系：速度靠前的运动员在向前运动，速度靠后的运动员反而向后运动；注意此时参照系也处于运动状态，仍可视作旋转坐标系。

仿照上面的第3种情况，我们将耦合振子系统的静止坐标转换为旋转坐标系。如上图所示，以复序参量 Z 作为参照系： Z 的绝对运动速度为平均场频率 Ω ，以自身作为参照系后， Z 的相对运动速度为 0；振子 i 的绝对运动速度为 $\dot{\theta}_i$ ，以 Z 作为参照系后，振子 i 的相对运动速度为 $\dot{\theta}_i - \Omega$ 。

由上节知，静止坐标系下，原始藏本模型可以写成序参量 r 和平均相位 ψ 的形式：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\Psi - \theta_i)$$

其中，平均相位 ψ 以平均场频率 Ω 旋转。改为旋转坐标系后，原始藏本模型就可以写成如下形式，其中，相位 θ 和频率 ω 均为旋转坐标系下的取值（详细推导过程请参见附录）：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i)$$

为什么要做参照系转换？我们希望更便捷地判断系统是否同步。当全部振子实现同步时，各振子的相位相同，并且相位的一阶导数也相同，都等于系统的平均场频率。如果以 Z 作为参照系，各振子的相对运动速度就等于 0，即相位的一阶导数等于 0。记振子 i 在一段时间内旋转坐标系下相位 θ_i 一阶导数的均值为该振子的有效频率 ω_{eff} ：

$$\omega_{\text{eff}} = \left\langle \frac{d\theta_i}{dt} \right\rangle_t$$

其中， $\langle \rangle_t$ 表示在一段时间内取均值。若系统完全同步，则各振子的有效频率应为 0。

总的来看，我们得到判断系统是否完全同步的三种方式：

1. 绘制各振子运动相位，观察相位是否重合。
2. 从宏观角度看，整个系统的序参量 r 是否等于 1。
3. 从微观角度看，每个振子的有效频率 ω_{eff} 是否等于 0。

藏本模型模拟

本章我们将对藏本模型进行模拟，观察耦合振子同步现象，并考察模型各项参数对同步的影响。回顾上一章介绍的原始藏本模型， N 个振子构成的耦合振子系统中，任意振子 i 的动力学方程为：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

若振子 i 的自然频率 ω_i 服从洛伦兹分布，概率密度函数 $g(\omega)$ 表示为：

$$\omega_i \sim g(\omega) = \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$

振子数量 N 、耦合强度 K 、自然频率 ω 服从洛伦兹分布的半高宽 γ 是最重要的三项参数。我们分别测试各项参数对同步的影响，本章核心结论如下图。

图表5：藏本模型模拟结论——模型参数对同步的影响

$$\text{藏本模型: } \dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

$$\omega_i \sim g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\omega^2 + \gamma^2)}$$

振子数量 N ($N \geq 3$) 对同步速度影响不大

耦合强度 K 小于某个定值时，无法同步；
大于某个定值时， K 越大同步越快

自然频率 ω 服从洛伦兹分布的半高宽 γ 越大，越难同步

资料来源：华泰证券研究所

本章模拟所采用的具体参数如下表。需要说明的是：

1. 前 2 组测试假设各振子自然频率均为 ω ，即常量；第 3 组测试假设各振子自然频率服从半高宽为 γ 的洛伦兹分布，即随机变量。
2. 各组测试中，假设振子的初始相位等距分布在 0 至 2π 的圆周上，第 $i-1$ 个振子的初始相位为 $2i\pi/N$ 。
3. 前 2 组模拟采用静止坐标系，模拟时间间隔 Δt 为 0.01 ；第 3 组模拟采用旋转坐标系，模拟时间间隔 Δt 为 0.1 ，根据最后 2000 步模拟的振子运动速度计算有效频率。

图表6：藏本模型模拟参数

测试参数	振子数量 N	耦合强度 K	自然频率 ω	自然频率洛伦兹分布半高宽 γ	初始相位 θ_0	模拟时间间隔 Δt	模拟时长 t	模拟有效频率	坐标系
测试 1: N 的影响	2, 3, 4, ..., 20	1	0.1	/	$2i\pi/N$	0.01	500	/	静止
测试 2: K 的影响	5	0, 0.05, 0.1, ..., 1	0.1	/	$2i\pi/N$	0.01	500	/	静止
测试 3: γ 的影响	100	0.8	半高宽 γ 的洛伦兹分布	0.05, 0.1, 0.15, ..., 0.5	$2i\pi/N$	0.1	500	后 2000	旋转

资料来源：华泰证券研究所

振子数量 N 的影响

本节考察振子数量 N 对同步的影响。这里坐标系采用静止坐标系。

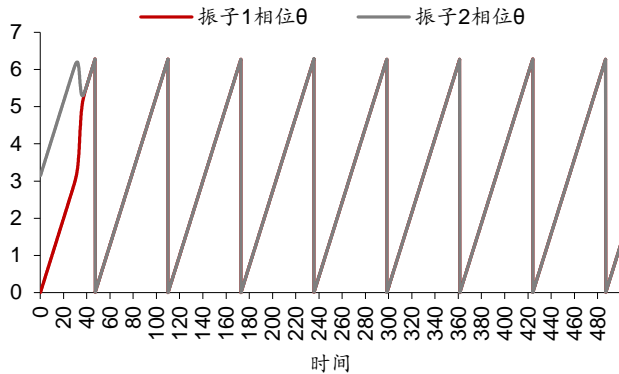
双振子情形 ($N=2$)

首先考察最简单的情形，假设系统内仅有 2 个振子，初始相位分别为 0 和 π ，即位于圆周上对称的两点，耦合强度 K 为 1，即相互吸引关系，各振子自然频率 ω 均为 0.1。

左下图为两个振子相位 θ 随时间变化情况。模拟开始阶段，相位相差 π ，当时间在 20~40 之间时，两个振子相位开始趋同，最终相位保持完全一致，实现同步。

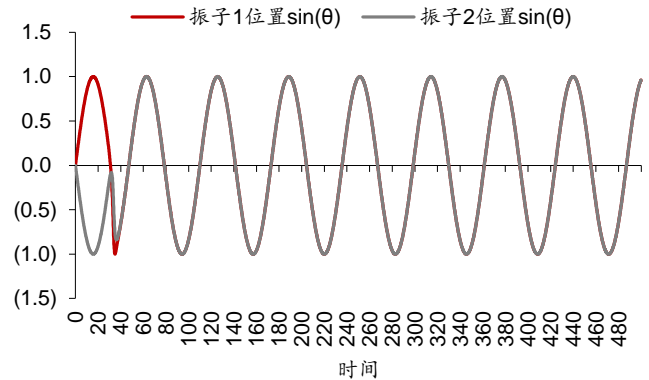
为了更形象地展示振子的运动情况，对相位取正弦值 $\sin(\theta)$ ，右下图为正弦值随时间变化情况。由图可知，两个振子在开始阶段各完整地走完了半个正弦波，随后振子 2 受振子 1 影响拐头向下，实现同步。同步后整个系统的周期运动频率等于各振子的自然频率 ($\omega=0.1$)。

图表7：双振子相位 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=[0, \pi]$)



资料来源：华泰证券研究所

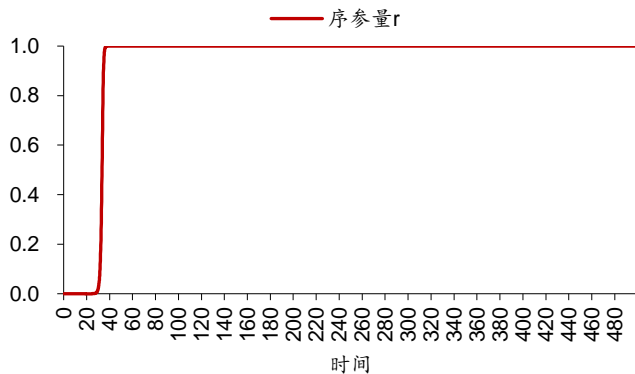
图表8：双振子相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=[0, \pi]$)



资料来源：华泰证券研究所

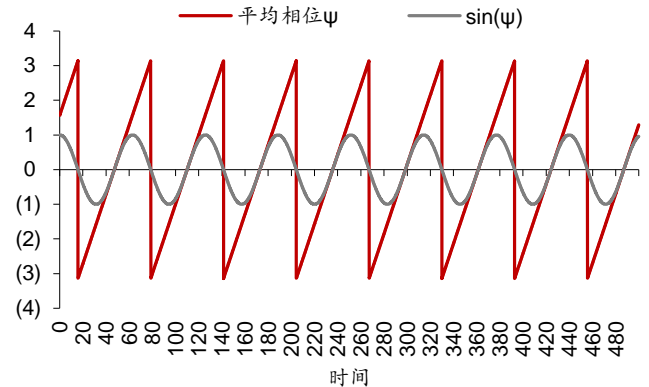
双振子系统序参量如左下图所示，平均相位和平均相位正弦值如右下图所示。开始阶段，序参量 r 为 0，系统处于不同步状态，随后迅速上升，达到 1。系统序参量等于 1 是完全同步的标志。

图表9：双振子系统序参量 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=[0, \pi]$)



资料来源：华泰证券研究所

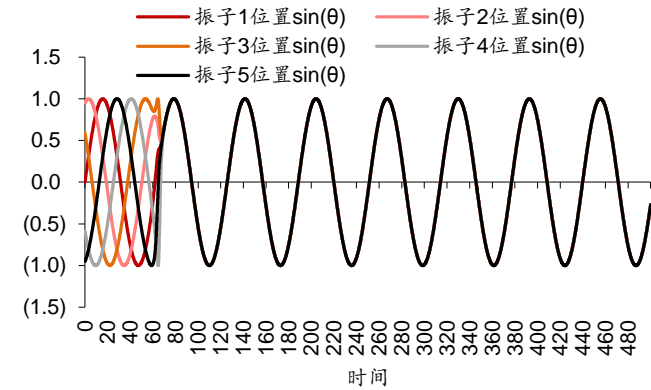
图表10：双振子系统平均相位和平均相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1$)



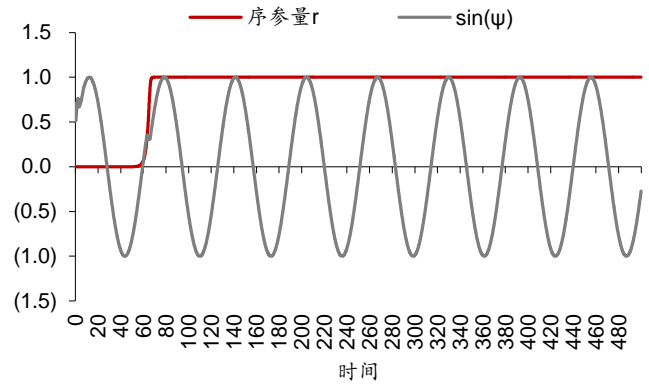
资料来源：华泰证券研究所

五振子情形 ($N=5$)

下面考察五振子的情形。各振子相位正弦值如左下图所示，开始阶段振子按各自相位运动，在时间为 60 左右趋于同步，最终相位正弦值完全重合。系统序参量和平均相位正弦值如右下图所示，序参量 r 开始为 0，在时间为 60 左右开始迅速上升，达到 1，实现同步。

图表11: 五振子系统相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

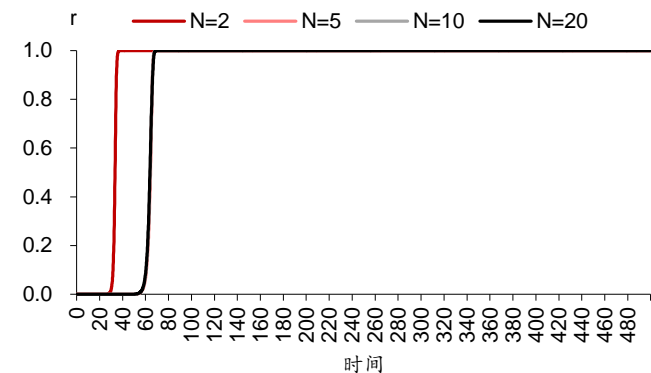
资料来源: 华泰证券研究所

图表12: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

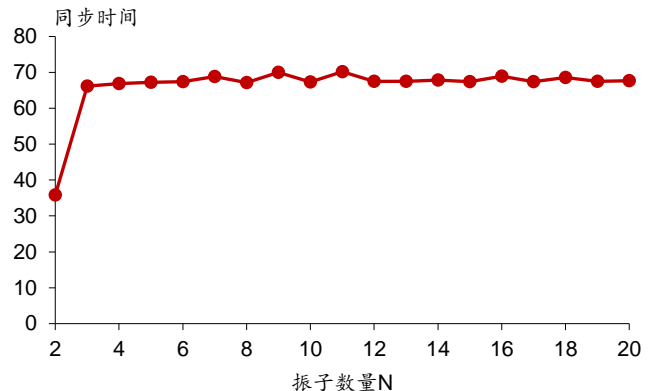
资料来源: 华泰证券研究所

不同振子数量 N 比较

测试不同振子数量 N 对同步的影响。左下图展示 $N=2, 5, 10, 20$ 四种情形的序参量随时间变化情况, 除 N 以外的模拟参数均保持一致。由图可知, $N=2$ 时同步相对最快, $N=5, 10, 20$ 三条线几乎重合。右下图展示 $N=2 \sim 20$ 时系统同步所需时间, 定义序参量 r 超过 0.99 即完成同步。由图可知, $N=2$ 时同步时间在 30~40 之间, $N \geq 3$ 时同步时间均在 65~71 之间, 变化不大。由此得出结论: 当振子数量 $N \geq 3$ 时, 振子数量对同步速度影响不大。

图表13: 不同振子数量系统序参量 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/N$)

资料来源: 华泰证券研究所

图表14: 不同振子数量系统同步时间 ($K=1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/N$)

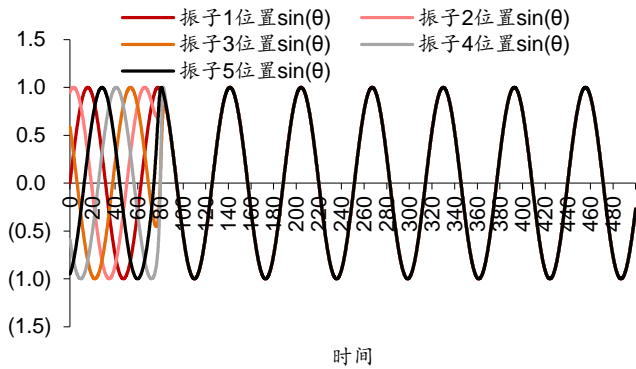
资料来源: 华泰证券研究所

耦合强度 K 的影响

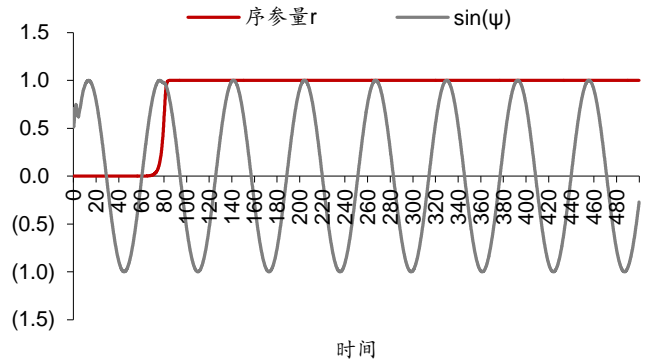
本节考察耦合强度 K 对同步的影响。这里坐标系采用静止坐标系。

强耦合情形 ($K=0.8$)

首先考察强耦合的情形, 假设系统包含 5 个振子, 初始相位等距分布在圆周上, 耦合强度 K 为 0.8。系统各振子相位正弦值如左下图所示, 序参量和平均相位正弦值如右下图所示。观察可知同步的发生时间点大约在 80 左右, 稍慢于上节 $K=1$ 的情形。

图表15: 五振子系统相位正弦值 ($K=0.8$, $\omega=0.1$, $\theta_0=2i\pi/5$)

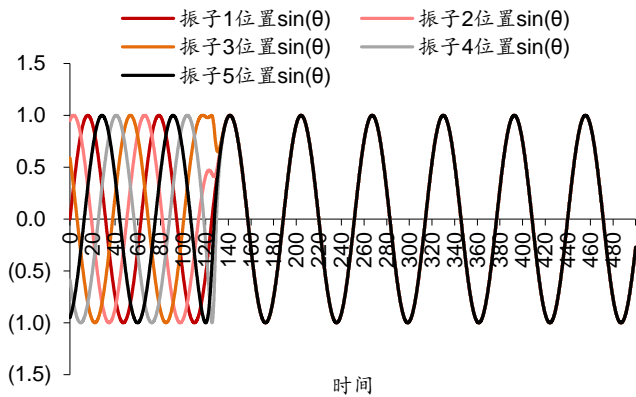
资料来源: 华泰证券研究所

图表16: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=0.8$, $\omega=0.1$)

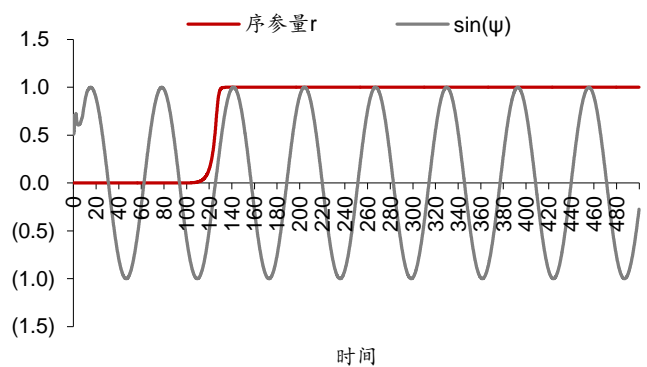
资料来源: 华泰证券研究所

中等耦合情形 ($K=0.5$)

其次考察中等耦合的情形, 耦合强度 K 为 0.5, 其余参数保持不变。系统各振子相位正弦值如左下图所示, 序参量和平均相位正弦值如右下图所示。观察可知同步的发生时间点在 110~130 区间内, 慢于此此前 $K=0.8$ 的情形。

图表17: 五振子系统相位正弦值 ($K=0.5$, $\omega=0.1$, $\theta_0=2i\pi/5$)

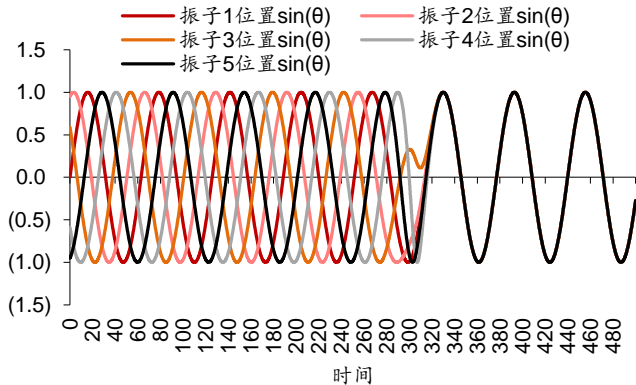
资料来源: 华泰证券研究所

图表18: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=0.5$, $\omega=0.1$)

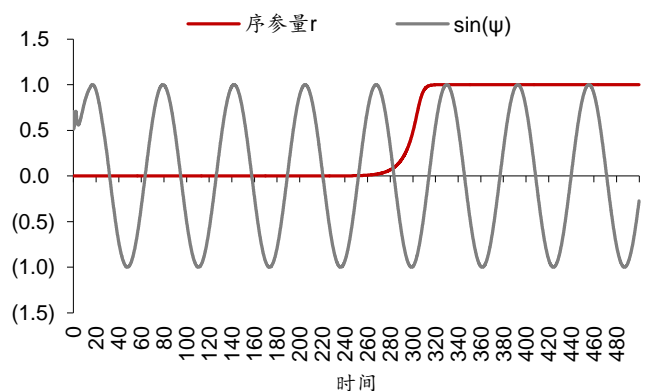
资料来源: 华泰证券研究所

弱耦合情形 ($K=0.2$)

再次考察弱耦合的情形, 耦合强度 K 为 0.2, 其余参数保持不变。观察可知同步的发生时间点在 270~310 区间内, 慢于此此前 $K=0.5$ 的情形。

图表19: 五振子系统相位正弦值 ($K=0.2$, $\omega=0.1$, $\theta_0=2i\pi/5$)

资料来源: 华泰证券研究所

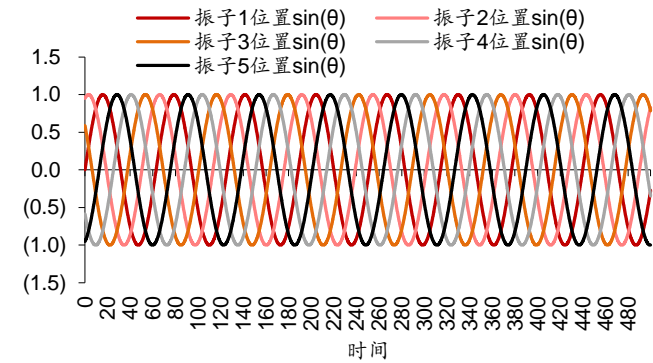
图表20: 五振子系统序参量和平均相位正弦值 ($K=0.2$, $\omega=0.1$)

资料来源: 华泰证券研究所

不耦合情形 ($K \leq 0$)

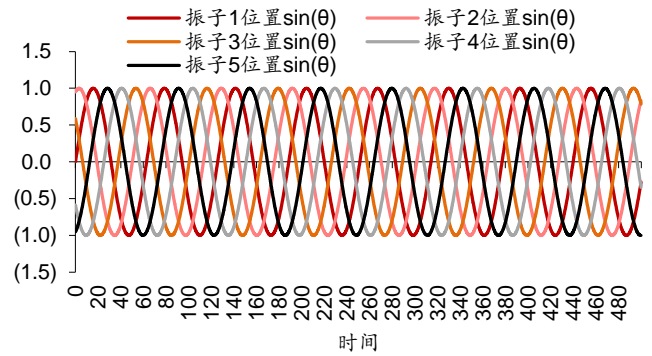
当耦合强度 K 为 0 时，振子间不存在互相影响；当耦合强度 K 为负数时，振子间为相互排斥关系。左下图和右下图分别展示 K 为 0 和 -1 情形下各振子相位正弦值。此时振子按各自相位运动，不发生同步。

图表21：五振子系统相位正弦值 ($K=0, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)



资料来源：华泰证券研究所

图表22：五振子系统相位正弦值 ($K=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)



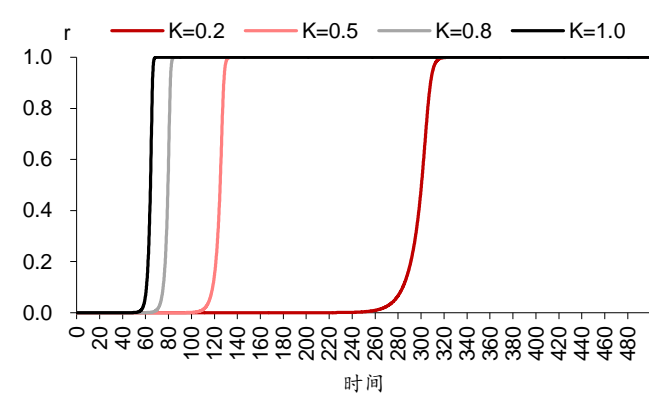
资料来源：华泰证券研究所

不同耦合强度 K 比较

测试不同耦合强度 K 对同步的影响。左下图展示 $K=0.2, 0.5, 0.8, 1.0$ 四种情形的序参量随时间变化情况，除 K 以外的模拟参数均保持一致。由图可知，这四种情况下，耦合强度越大，同步速度越快。

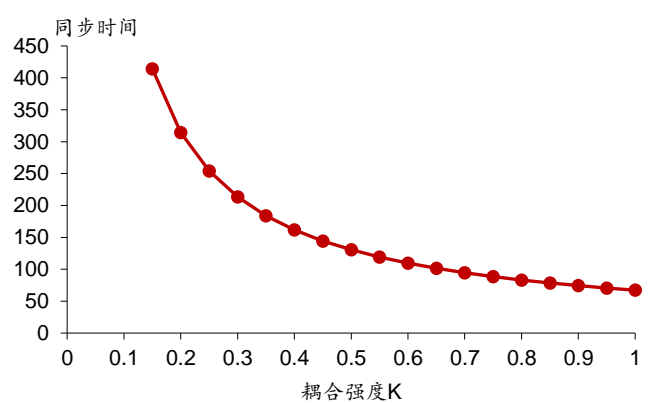
右下图展示 $K=0 \sim 1$ 时系统同步所需时间。由图可知，当 $K < 0.15$ 时，耦合强度过小，无法同步；当 $K \geq 0.15$ 时，同步所需时间随 K 的增加而降低。由此得出结论：**耦合强度 K 小于某个定值时，无法同步；大于某个定值时， K 越大同步越快。**该定值的取值和其它参数有关，我们将在本章的最后讨论。

图表23：不同耦合强度系统序参量 ($N=5, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)



资料来源：华泰证券研究所

图表24：不同振子数量系统同步时间 ($N=5, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)



资料来源：华泰证券研究所

自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 的影响

本节考察自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 对同步的影响。本节和前两节测试相比，关键的不同点在于，振子数量 N 从 5 扩展到 100，并且采用旋转坐标系，即以整个系统的平均场作为参照系。

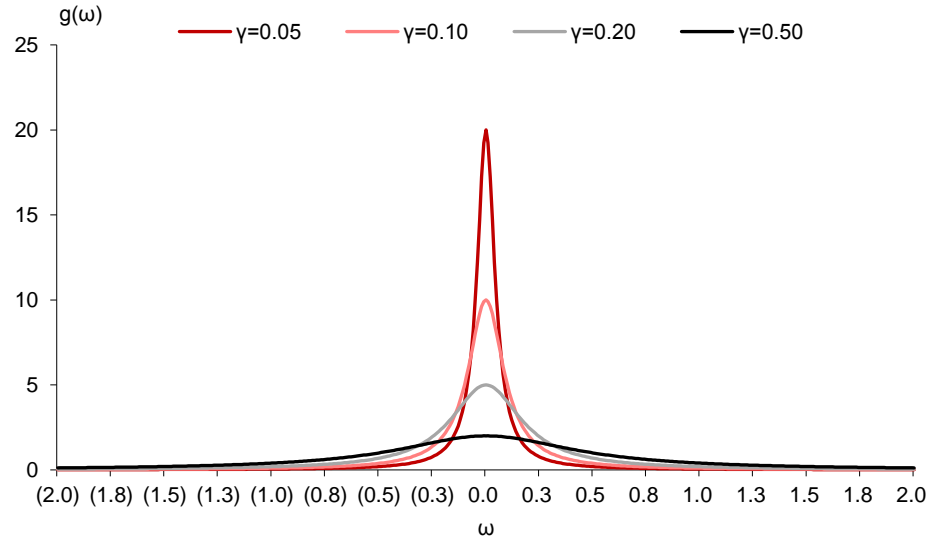
由于振子数量大幅提升，考虑到运算时间开销，我们将模拟时间间隔 Δt 从 0.01 改为 0.1。同样由于振子数量大幅提升，观察每个振子相位正弦值随时间变化以确定是否同步较困难，我们计算每个振子最后 2000 步模拟的相对运动速度均值作为有效频率。若有效频率等于 0，说明振子相对于平均场的运动速度为 0，即振子和平均场同步。

洛伦兹分布也称为柯西分布，是一种典型的肥尾分布。其概率密度函数可以写作：

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$

不同半高宽 γ 下的洛伦兹分布概率密度函数图像如下所示。本节测试中，振子的自然频率将从该分布随机采样。为了避免极端值的影响，我们采用截断洛伦兹分布，确保采样得到的 ω 在 ± 2 之间。也有文献采用高斯分布，分布的选择不影响最终结论。

图表25：不同半高宽 γ 洛伦兹分布的概率密度函数

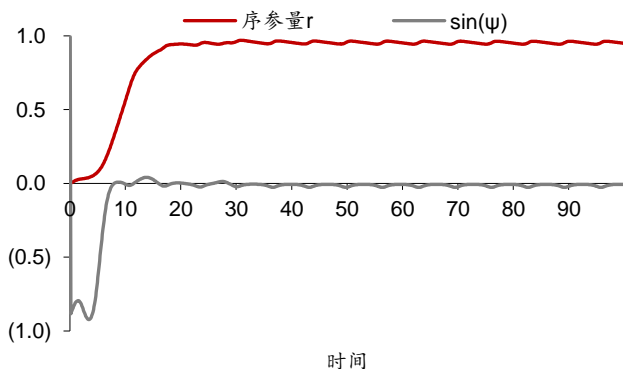


资料来源：华泰证券研究所

$\gamma=0.05$ 情形

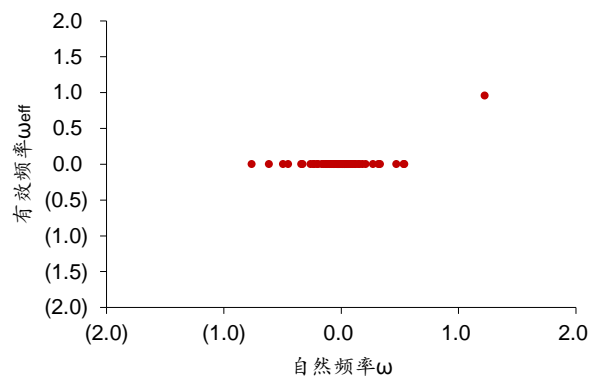
当 γ 为 0.05，即自然频率取自较窄的分布时，各振子的自然频率接近 0。系统序参量和平均相位正弦值随时间变化情况如左下图所示，这里展示时间 0~100 区间内的结果。由图可知，序参量接近 1，平均相位接近 0，说明系统接近完全同步。但由于少数离群振子的存在，系统未能达到完全同步。

图表26：系统序参量和平均相位正弦值 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.05$)



资料来源：华泰证券研究所

图表27：系统各振子自然频率和有效频率 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.05$)



资料来源：华泰证券研究所

系统内 100 个振子自然频率和有效频率如右上图所示。图中每个点代表一个振子，横轴为自然频率，纵轴为有效频率，即最后 2000 步模拟的平均速度。自然频率是振子固有的运动速度，相当于振子的“本性”；有效频率是振子在系统中受平均场持续影响，最终表现出的运动速度，相当于振子在集体中的行为。

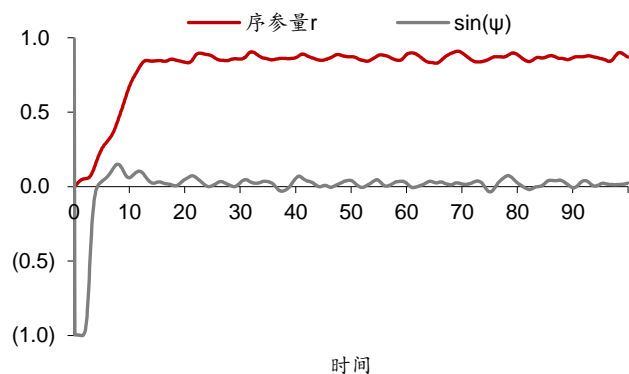
由右上图可知，100 个振子中 99 个振子的有效频率为 0，即和平均场同步。但存在 1 个离群振子，该振子的自然频率为 1.22，其绝对值高于其它全部振子，其有效频率为 0.96。换言之，该振子本性“桀骜不驯”，最终未被平均场同化，没有和其它振子同步，但仍然一定程度上受到平均场的影响。

$\gamma=0.1$ 情形

当 γ 为 0.1 时，系统序参量和平均相位正弦值随时间变化情况如左下图所示，系统内 100 个振子自然频率和有效频率如右下图所示。序参量 r 接近 0.9，平均相位正弦值仍接近 0，说明大多数振子实现同步。但右下图可以观察到 7 个振子的有效频率不为 0，离群振子数量较 $\gamma=0.05$ 时更多。

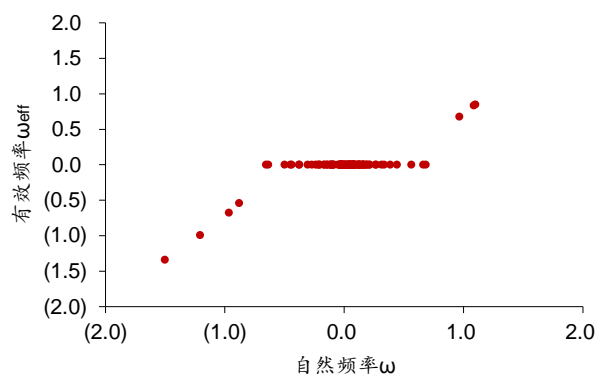
我们推测，当振子自然频率超过一定临界值时，该振子不再和平均场同步。当 γ 为 0.1 时，能够同步的振子最大自然频率绝对值为 0.68，无法同步的振子最小自然频率绝对值为 0.88，推测此时临界值的绝对值在 0.68 和 0.88 之间。

图表28：系统序参量和平均相位正弦值（ $N=100$, $K=0.8$, $\gamma=0.1$ ）



资料来源：华泰证券研究所

图表29：系统各振子自然频率和有效频率（ $N=100$, $K=0.8$, $\gamma=0.1$ ）



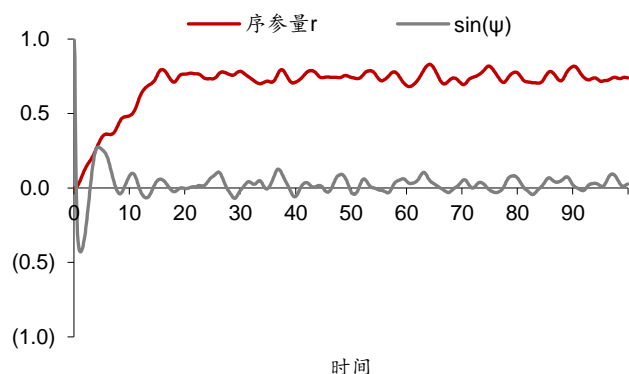
资料来源：华泰证券研究所

$\gamma=0.2$ 情形

当 γ 为 0.2 时，系统序参量和平均相位正弦值随时间变化情况如左下图所示，系统内 100 个振子自然频率和有效频率如右下图所示。序参量 r 在 0.7 附近波动，平均相位正弦值接近 0，说明多数振子实现同步。但右下图可以观察到不少振子的有效频率不为 0，离群振子数量较 $\gamma=0.1$ 时更多。

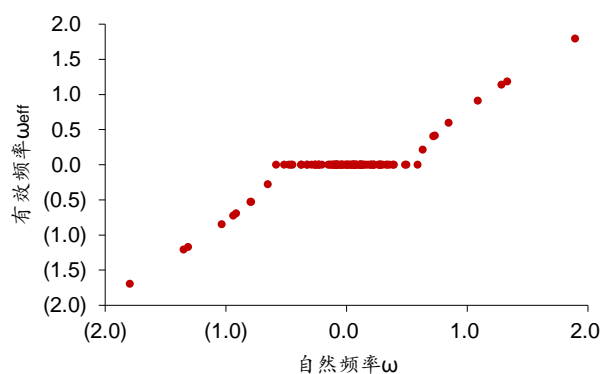
当 γ 为 0.2 时，能够同步的振子最大自然频率绝对值为 0.59，无法同步的振子最小自然频率绝对值为 0.63，推测此时振子同步自然频率临界值的绝对值在 0.59 和 0.63 之间。

图表30：系统序参量和平均相位正弦值（ $N=100$, $K=0.8$, $\gamma=0.2$ ）



资料来源：华泰证券研究所

图表31：系统各振子自然频率和有效频率（ $N=100$, $K=0.8$, $\gamma=0.2$ ）

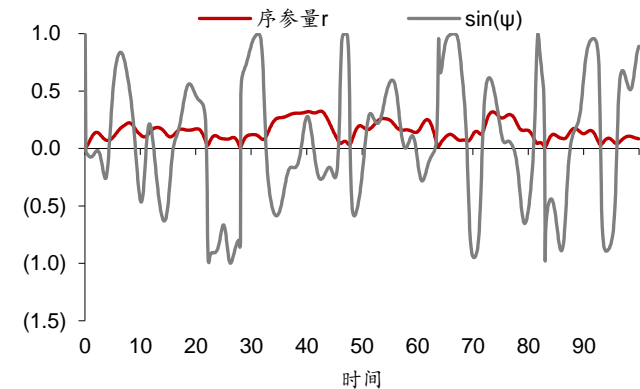


资料来源：华泰证券研究所

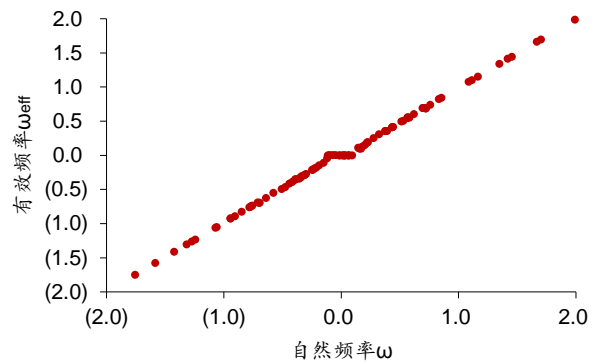
$\gamma=0.5$ 情形

当 γ 为 0.5，即自然频率取自较宽的分布时，系统序参量和平均相位正弦值随时间变化情况如左下图所示，系统内 100 个振子自然频率和有效频率如右下图所示。序参量 r 接近 0，平均相位正弦值波动较大，说明大多数振子不同步。右下图可以观察到仅有少数振子的有效频率为 0。

当 γ 为 0.5 时，能够同步的振子最大自然频率绝对值为 0.11，无法同步的振子最小自然频率绝对值为 0.12，推测此时振子同步自然频率临界值的绝对值在 0.11 和 0.12 之间。

图表32：系统序参量和平均相位正弦值 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.5$)

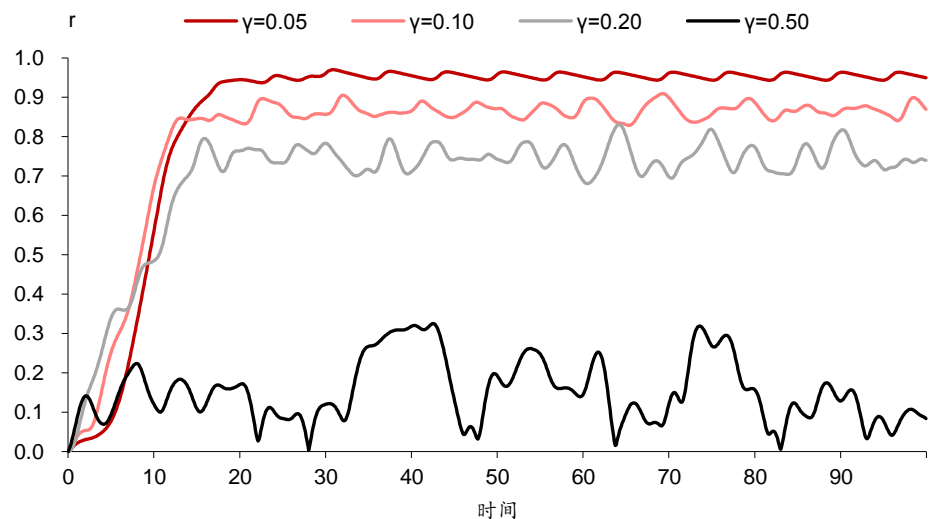
资料来源：华泰证券研究所

图表33：系统各振子自然频率和有效频率 ($N=100, K=0.8, \gamma=0.5$)

资料来源：华泰证券研究所

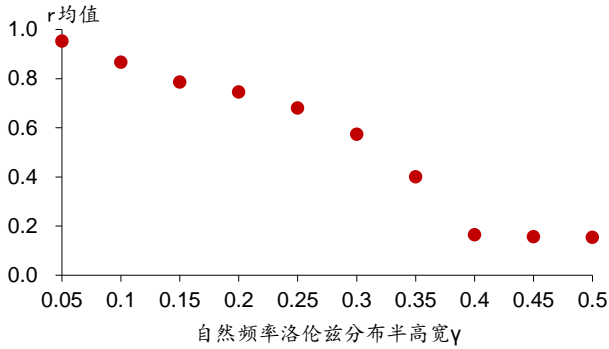
不同自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 比较

测试不同自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 对同步的影响。下图展示 $\gamma=0.05$ 、0.1、0.2、0.5 四种情形的序参量随时间变化情况，除 γ 以外的模拟参数均保持一致。由图可知， γ 越大，系统序参量越小，越难同步。

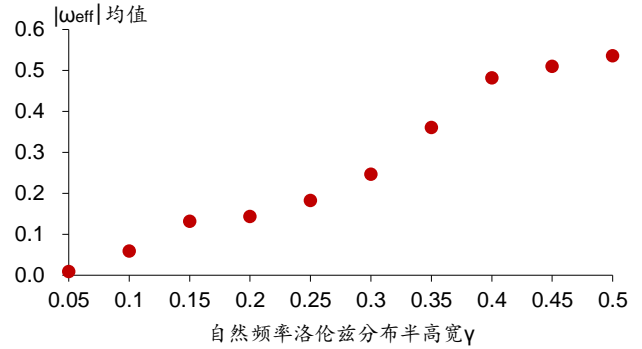
图表34：不同自然频率 ω 服从洛伦兹分布半高宽 γ 下系统序参量 ($N=100, K=0.8, \theta_0=2i\pi/100$)

资料来源：华泰证券研究所

左下图展示 $\gamma=0.05\sim 0.5$ 时，系统最后 2000 步模拟的序参量均值。 γ 越大，系统序参量越小，越难同步。右下图展示 $\gamma=0.05\sim 0.5$ 时，系统内各振子有效频率绝对值的均值。 γ 越大，振子有效频率越大，越难同步。总的来看，振子自然频率服从洛伦兹分布的半高宽 γ 越大，系统越难同步。

图表35：不同半高宽系统序参量均值（ $N=100$, $K=0.8$, $\theta_0=2i\pi/100$ ）

资料来源：华泰证券研究所

图表36：不同半高宽振子有效频率绝对值均值（ $N=100$, $K=0.8$ ）

资料来源：华泰证券研究所

临界频率的确定

通过以上测试，我们发现振子能否与平均场同步，取决于其自然频率，若自然频率在一定范围内，则能够同步，否则无法同步。而该临界频率又与系统有关，确切地说与全部振子自然频率服从分布的参数有关，当洛伦兹分布的半高宽 γ 较小时，临界频率较大。那么，能否定量计算该临界频率？

实际上，上述问题的答案就在藏本模型的动力学方程中。旋转坐标系下，藏本模型可以写成如下形式：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin(\theta_i)$$

若振子和平均场同步，则振子相对于平均场的运动速度为 0，即相对于平均场的相位 θ 的变化量为 0，即等号左侧为 0：

$$\dot{\theta}_i = 0$$

那么等号右侧也应为 0，即：

$$\omega_i = Kr \sin(\theta_i)$$

1. 若振子 i 的自然频率满足 $|\omega_i| \leq Kr$ ，由于 $\sin(\theta_i)$ 的取值范围为 -1 到 1，一定存在某个 θ_i 的取值使得 $\omega_i = Kr \sin(\theta_i)$ ，此时 $\dot{\theta}_i = 0$ ，振子实现同步。
2. 若振子 i 的自然频率满足 $|\omega_i| > Kr$ ，由于 $\sin(\theta_i)$ 的取值范围为 -1 到 1，不存在任何 θ_i 的取值使得 $\omega_i = Kr \sin(\theta_i)$ ，此时 $\dot{\theta}_i \neq 0$ ，振子无法同步。

由此可得，临界频率应为耦合强度 K 和系统序参量 r 的乘积。当振子的自然频率介于 $-Kr$ 和 Kr 之间时，振子能够和平均场同步；当振子的自然频率超出该范围时，振子无法同步。我们将临界频率的理论值 Kr 和本节实验观察得到的临界频率（即同步振子自然频率绝对值最大值 $\max|\omega|$ ）相比较，如下表所示，最右侧两列基本匹配。

图表37：系统 Kr 和同步振子 $\max|\omega|$ 的关系（ $N=100$, $\theta_0=2i\pi/100$ ）

γ	K	r	Kr	同步振子 $\max \omega $
0.05	0.8	0.95	0.76	0.76
0.1	0.8	0.87	0.69	0.68
0.2	0.8	0.75	0.60	0.59
0.5	0.8	0.15	0.12	0.11

资料来源：华泰证券研究所

小结

本章探讨原始藏本模型参数对同步的影响，核心结论如下：

1. 当振子数量 $N \geq 3$ 时，振子数量对同步速度影响不大。
2. 耦合强度 K 小于某个定值时，无法同步；大于某个定值时， K 越大同步越快。
3. 振子自然频率服从洛伦兹分布的半高宽 γ 越大，系统越难同步。
4. 当振子的自然频率介于 $-Kr$ 和 Kr 之间时，振子能够和平均场同步；当振子的自然频率超出该范围时，振子无法同步。

Sakaguchi—Kuramoto 模型模拟

原始藏本模型包含两项重要假设：1) 所有振子不存在相位延迟；2) 所有振子耦合强度一致。Sakaguchi—Kuramoto 模型和 Hong—Strogatz 模型分别针对以上两点做出改进，引入相位延迟 β 以及每个振子的耦合强度 K_i 。当振子的耦合强度为负时，相当于引入相位延迟 $\beta=\pi$ 。因此，Hong—Strogatz 模型可以视作 Sakaguchi—Kuramoto 模型的特例。

本章我们将对 Sakaguchi—Kuramoto 模型进行模拟，关注以下问题：当系统中存在两类振子，一类为数量占比 p 的合作振子（受平均场吸引），另一类为数量占比 $(1-p)$ 的排斥/孤立/延迟振子时，系统将呈现何种状态？合作振子的占比 p 如何影响系统最终状态？本章核心结论如下图所示。

图表38： Sakaguchi—Kuramoto 模型模拟结论

$$\text{Sakaguchi—Kuramoto模型: } \dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K_i}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i - \beta)$$

$K_i > 0$, 合作振子
 $K_i < 0$, 叛逆振子
 $K_i = 0$, 孤立振子

合作振子和叛逆振子系统内，
 合作振子占比 p 影响系统最终
 状态：非相干态/ π 态/行波态

资料来源：华泰证券研究所

本章模拟所采用的具体参数如下表所示。

图表39： Sakaguchi—Kuramoto 模型模拟参数

测试内容	振子数 量 N	I类振子耦 合强度 K_1	II类振子耦 合强度 K_2	I类振子占 比 p	II类振子相 位延迟 β_2	自然频率 ω	自然频率分 布半高宽 γ	初始相 位 θ_0	模拟时间 间隔 Δt	模拟 时长 t	有效频率 采样数	坐标系
1.1 合作振子和叛逆振子	5	1	-1	0.6, 0.4	0	0.1	/	$2i\pi/N$	0.01	500	/	静止
1.2 合作振子和孤立振子	5	1	0	0.6, 0.4	0	0.1	/	$2i\pi/N$	0.01	500	/	静止
1.3 合作振子和延迟振子	5	1	0.5	0.6, 0.4	$\pi/2$	0.1	/	$2i\pi/N$	0.01	500	/	静止
2 合作振子占比 p 的影响	100	1	-0.5	0, 0.02, 0.04, ..., 1	0	半高宽 γ 的 洛伦兹分布	0.05	$2i\pi/N$	0.1	500	后 2000	静止

资料来源：华泰证券研究所

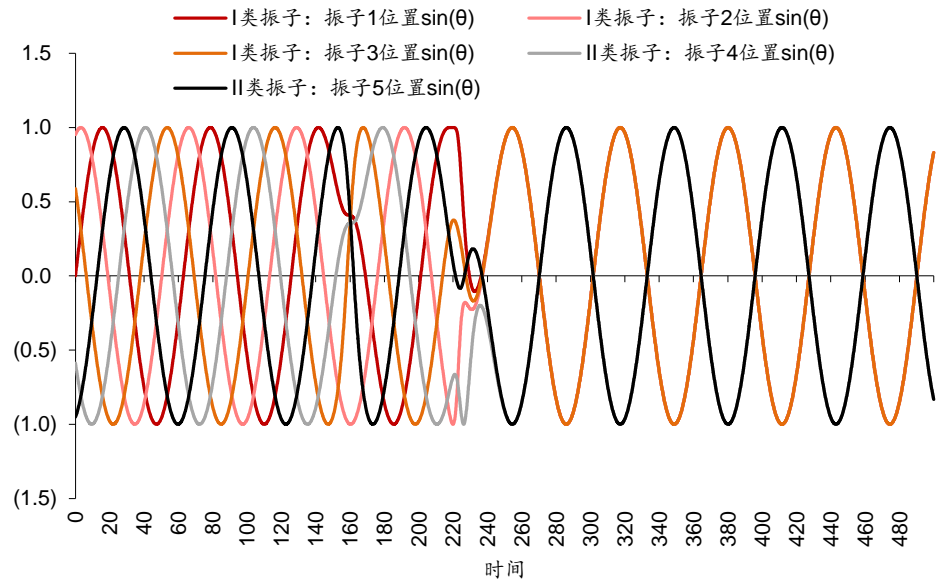
两类振子组成的 Sakaguchi—Kuramoto 模型

本节测试两类振子组成的 Sakaguchi—Kuramoto 模型。假设系统包含 5 个振子，其中第一类振子为合作振子，耦合强度 K 为 1，行为表现为受平均场吸引，数量占比为 p ；第二类振子耦合强度 $K < 1$ ，数量占比为 $1-p$ 。第二类振子的耦合强度 K 取不同值时，可能表现出叛逆、孤立、延迟等不同行为。

合作振子和叛逆振子

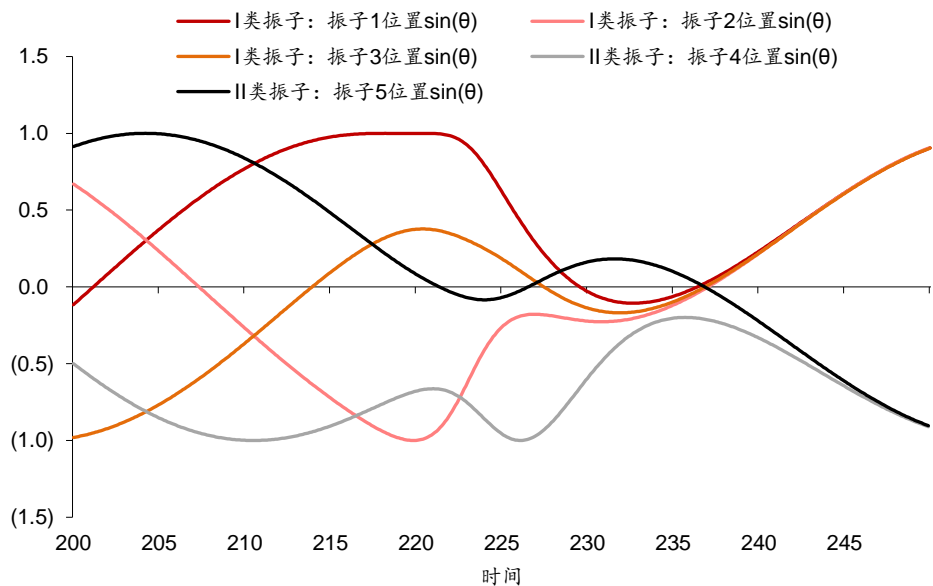
当第二类振子耦合强度 $K < 0$ 时，振子行为表现为与平均场相排斥，不妨称为叛逆振子。首先我们测试合作振子和叛逆振子组成的系统，当合作振子数量占优时的系统状态。假设第一类合作振子的数量占比 p 为 0.6，即包含 3 个振子，第二类叛逆振子耦合强度 K 为 -1，数量占比为 0.4，即包含 2 个振子。

各振子相位正弦值随时间变化情况如下图所示。开始阶段，各振子按各自的相位做周期运动，随后振子间的相互吸引或排斥作用逐渐体现，在时间 220~240 区间内发生了关键转变，最终 3 个第一类合作振子聚集成团簇（Cluster）从而实现同步，2 个第二类叛逆振子聚集成另一个团簇从而也实现同步，两个团簇间的相位差为 π ，即相位相反。换言之，系统最终状态为“物以类聚，人以群分”，合作振子和叛逆振子分别形成各自的“阵营”。

图表40：合作振子和叛逆振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.6, K_1=1, K_2=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

资料来源：华泰证券研究所

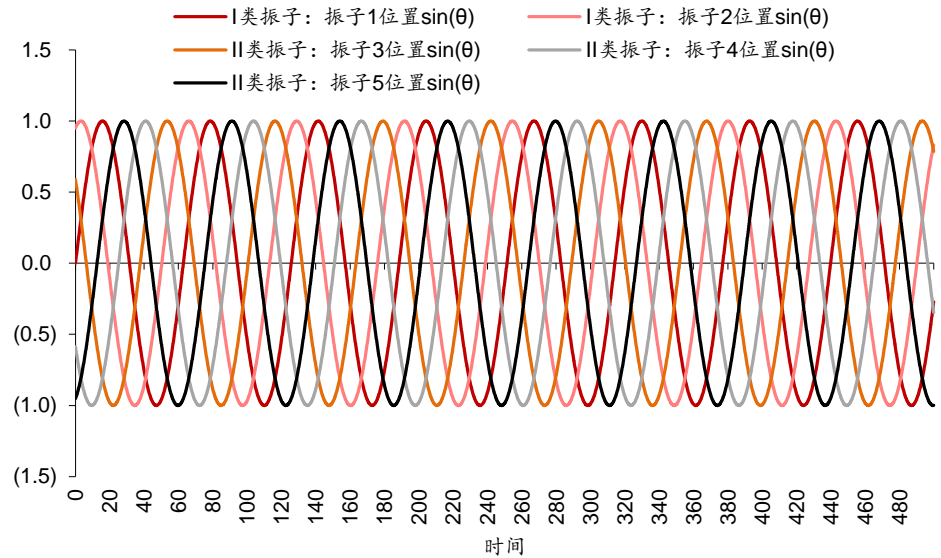
为了更清晰地观察同步发生的细节,我们展示时间 200~250 区间内各振子的相位正弦值,如下图所示。可知 3 个第一类合作振子形成同步,2 个第二类叛逆振子形成同步。

图表41：合作振子和叛逆振子系统各振子相位正弦值细节 ($p=0.6, K_1=1, K_2=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

资料来源：华泰证券研究所

下面我们测试合作振子和叛逆振子组成的系统,当叛逆振子数量占优时的系统状态。假设第一类合作振子的数量占比 p 为 0.4,即包含 2 个振子,第二类叛逆振子耦合强度 K 为 -1,数量占比为 0.6,即包含 3 个振子。

各振子相位正弦值随时间变化情况如下图所示。观察到各振子始终按各自的相位做周期运动,无法实现同步。当系统内叛逆振子占优时,即使是合作振子内部也无法聚集成团簇而实现同步。通俗地理解,当社会中破坏团结的个体过多,那么维护团结的个体也很难形成合力。

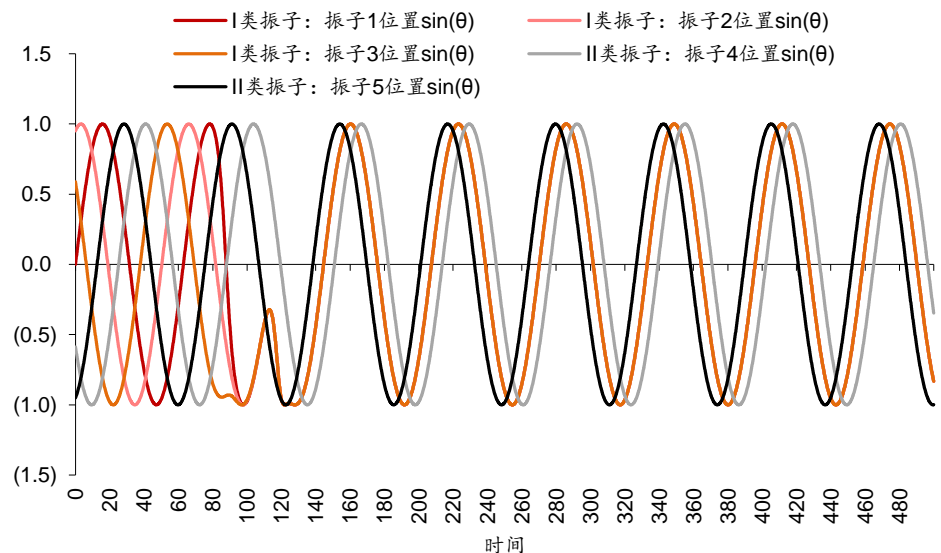
图表42：合作振子和叛逆振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.4, K_1=1, K_2=-1, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

资料来源：华泰证券研究所

合作振子和孤立振子

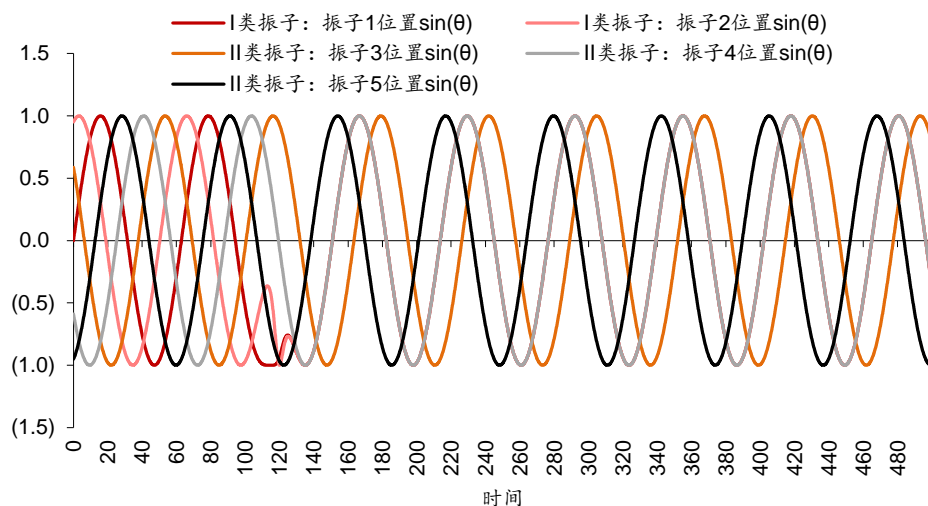
下面我们测试合作振子和孤立振子组成的系统。孤立振子的耦合强度 K 为 0，既不受平均场吸引，也不与平均场排斥。

首先测试合作振子占优的情形。假设第一类合作振子数量占比 p 为 0.6，即包含 3 个振子，第二类孤立振子耦合强度 K 为 0，数量占比为 0.4，即包含 2 个振子。各振子相位正弦值随时间变化情况如下图所示。观察到 3 个第一类合作振子实现同步，而 2 个第二类孤立振子自始至终按自身相位做周期运动。

图表43：合作振子和孤立振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.6, K_1=1, K_2=0, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

资料来源：华泰证券研究所

其次测试孤立振子占优的情形。假设第一类合作振子数量占比 p 为 0.4，即包含 2 个振子，第二类孤立振子数量占比为 0.6，即包含 3 个振子。各振子相位正弦值随时间变化情况如下图所示。观察到 3 个第二类孤立振子自始至终按自身相位做周期运动，而 2 个第一类合作振子和孤立振子 4 同步。换言之，孤立振子的表现始终“我自岿然不动”，而合作振子此时“选择和某个孤立振子合作”。

图表44：合作振子和孤立振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.4, K_1=1, K_2=0, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

资料来源：华泰证券研究所

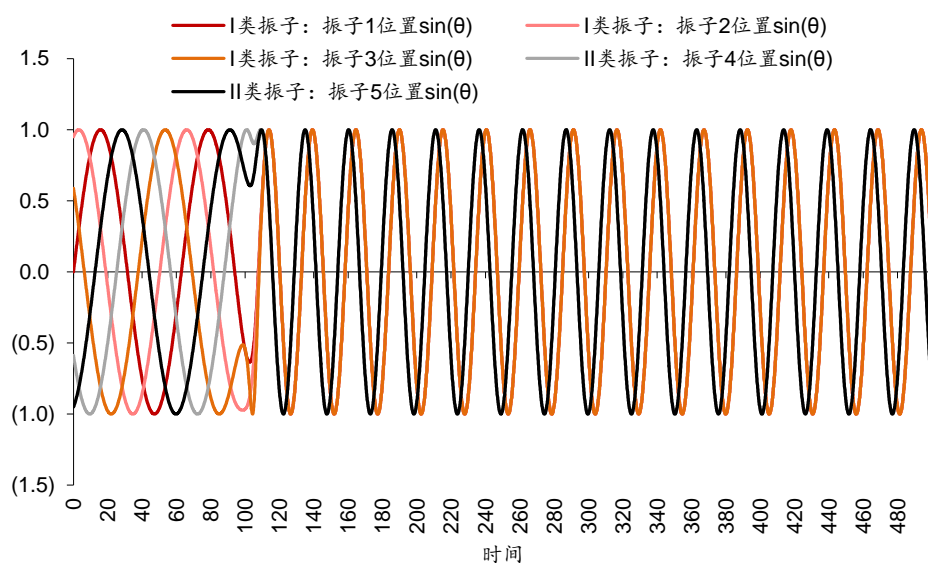
总的来看，当系统由合作振子和孤立振子组成时，孤立振子不受平均场影响，始终按自身相位运动，合作振子之间形成同步。合作振子可能以单独的相位运动，也可能和某个孤立振子同步运动，具体为何种方式取决于振子的初始相位，这里不作展开讨论。

合作振子和延迟振子

下面我们测试合作振子和延迟振子组成的系统。延迟振子的耦合强度 K 为正数，受平均场吸引，但是和平均场存在 β 的相位延迟。

首先测试合作振子占优的情形。假设第一类合作振子的数量占比 p 为 0.6，即包含 3 个振子，不存在相位延迟， $\beta_1=0$ ；第二类延迟振子耦合强度 K 为 0.5，数量占比为 0.4，即包含 2 个振子，相位延迟 $\beta_2=\pi/2$ 。

各振子相位正弦值随时间变化情况如下图所示。观察到 3 个第一类合作振子聚集成团簇，从而实现同步，而 2 个第二类延迟振子聚集成另一个团簇，也实现同步。两个团簇的相位差为相位延迟 $\beta_2=\pi/2$ 。

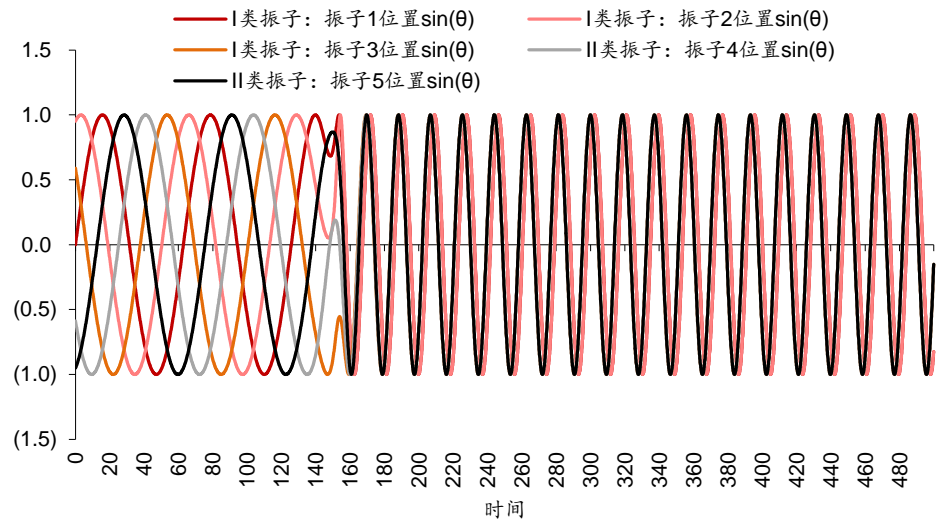
图表45：合作振子和延迟振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.6, K_1=1, K_2=0.5, \beta_2=\pi/2, \omega=0.1, \theta_0=2i\pi/5$)

资料来源：华泰证券研究所

其次测试延迟振子占优的情形。假设第一类合作振子的数量占比 p 为 0.4，即包含 2 个振子，不存在相位延迟， $\beta_1=0$ ；第二类延迟振子耦合强度 K 为 0.5，数量占比为 0.6，即包含 3 个振子，相位延迟 $\beta_2=\pi/2$ 。

各振子相位正弦值随时间变化如下图所示。观察到系统最终状态与合作振子占优的情形一致，即合作振子和延迟振子分别形成团簇而实现同步，团簇的相位差为相位延迟 β_2 。和上一种情形略有差异之处在于，由于合作振子数量更少，同步的速度相对更慢。

图表46：合作振子和延迟振子系统各振子相位正弦值 ($p=0.4$, $K_1=1$, $K_2=0.5$, $\beta_2=\pi/2$, $\omega=0.1$, $\theta_0=2i\pi/5$)



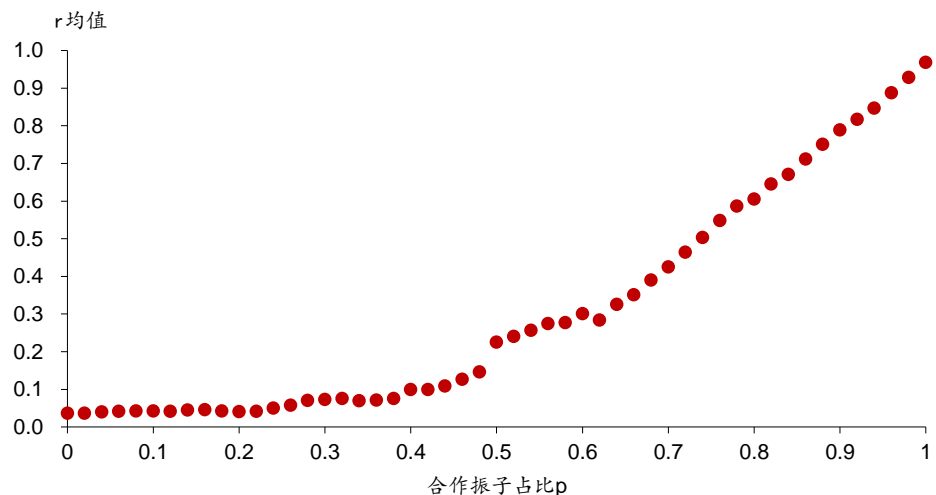
资料来源：华泰证券研究所

合作振子占比 p 的影响

通过上述测试，我们发现当系统由合作振子和叛逆振子组成时，系统最终状态和合作振子占比 p 密切相关。本节我们将进一步讨论合作振子占比 p 的影响。本节模拟振子数量 N 从 5 扩展到 100，第二类叛逆振子的耦合强度 K 为 -0.5，全部振子的自然频率取自半高宽 γ 为 0.05 的洛伦兹分布。

我们对合作振子占比 p 进行遍历，计算每种情况系统最后 2000 步模拟序参量的均值。如下图所示，序参量 r 均值随着 p 的增大而提升，即合作振子占比越高，系统越倾向于同步。

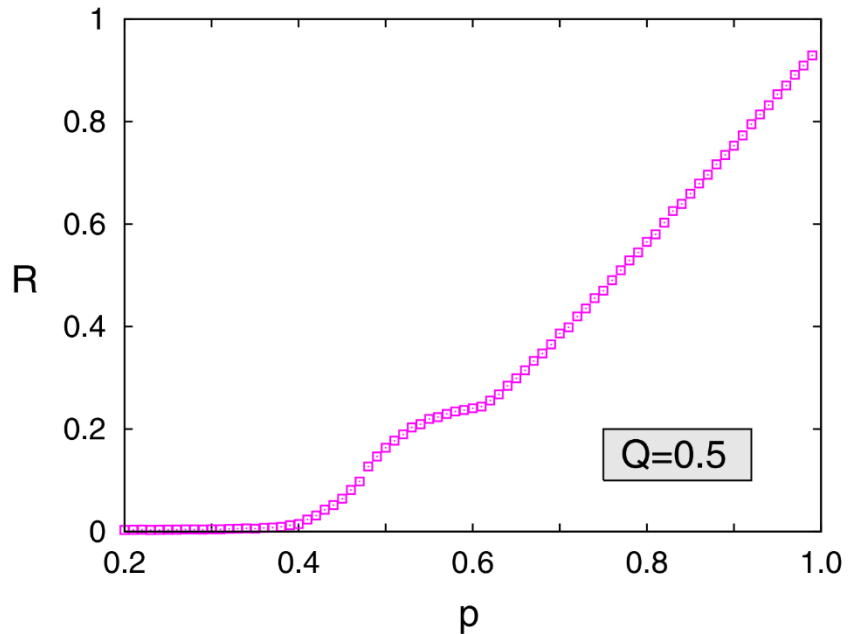
图表47：不同合作振子占比系统序参量均值 ($N=100$, $K_1=1$, $K_2=-0.5$, $\gamma=0.05$, $\theta_0=2i\pi/N$)



资料来源：华泰证券研究所

从上图还能观察到一个现象：序参量均值并非平滑地提升，而是在 $p=0.4\sim 0.6$ 之间存在一处“突起”。这一现象在 Hong-Strogatz 模型的原始文献 *Kuramoto Model of Coupled Oscillators with Positive and Negative Coupling Parameters* 中也有体现。该文献中，Hong 和 Strogatz (2011) 模拟了由 25600 个振子构成的系统，包含合作和叛逆两类振子，其它参数和我们模拟所使用的参数一致。该研究得到的不同合作振子占比下系统序参量均值如下图所示，同样能够观察到 $p=0.4\sim 0.6$ 之间的“突起”。

图表48：不同合作振子占比系统序参量均值 ($N=25600$, $K_1=1$, $K_2=-0.5$, $\gamma=0.05$)



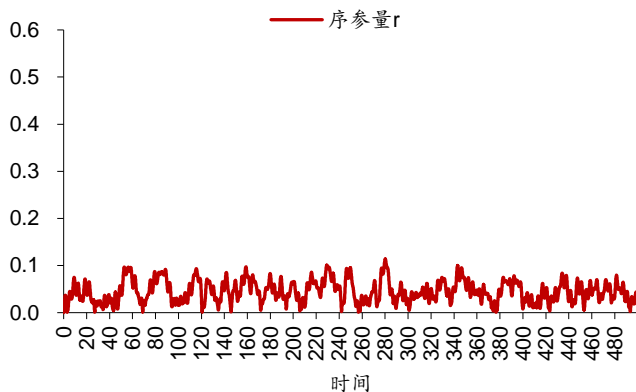
资料来源：Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters, 华泰证券研究所

“突起”背后有何含义？实际上代表了一种特殊的系统状态——行波态。在合作振子和叛逆振子组成的系统中，根据不同的合作振子占比 p 值，存在三种不同的系统状态：非相干态 (Incoherent State)、 π 态 (π -state) 和行波态 (Traveling Wave State)。下面我们分别举例说明。

非相干态

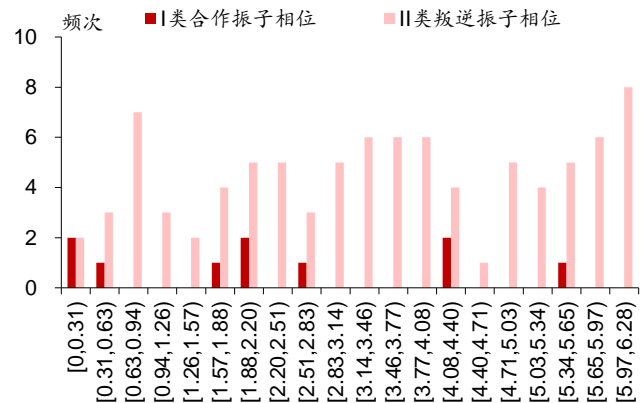
当合作振子占比 p 为 0.1 时，系统序参量随时间变化情况如左下图，序参量 r 接近 0，即接近完全不同步的状态。之所以称“接近”是因为 r 不完全等于 0。

图表49：合作振子和叛逆振子系统序参量 ($N=100$, $p=0.1$)



资料来源：华泰证券研究所

图表50：合作振子和叛逆振子最终相位频次分布 ($N=100$, $p=0.1$)



资料来源：华泰证券研究所

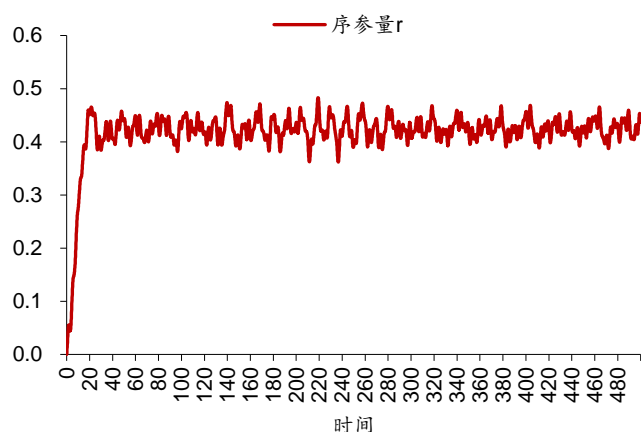
我们分别取两类振子的最终相位，绘制其频次分布图，如右上图所示。两类振子的最终相位均匀分布在 $[0, 2\pi]$ 的区间内，说明振子没有出现同步现象，即使是合作振子也未同步。这种状态称为非相干态。

π 态

当合作振子占比 p 为 0.7 时，系统序参量随时间变化情况如左下图，序参量 r 在 0.4 附近波动，表现出部分同步。两类振子最终相位频次分布如右下图所示。两类振子各自聚集成团簇，如同此前提到的“物以类聚，人以群分”。

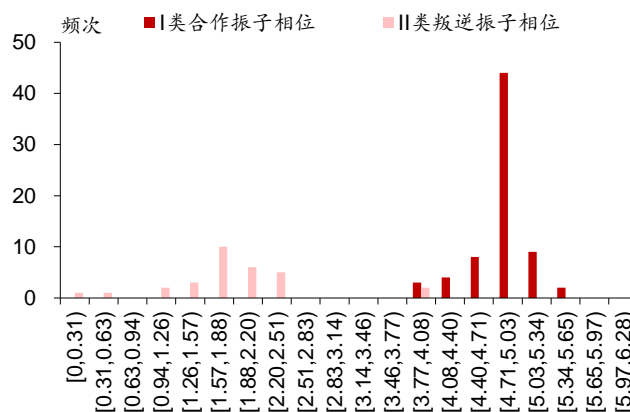
此时，合作振子相位均值为 4.81，叛逆振子相位中位数为 1.88，两类振子相位差为 2.9，接近 $\pi \approx 3.14$ 。考虑到自然频率洛伦兹分布采样的随机性，以及数值模拟带来的误差，该相位差理论上应等于 π ，即两个团簇相位恰好相反。这种状态称为 π 态，是一种相对稳定的状态。

图表51：合作振子和叛逆振子系统序参量 ($N=100, p=0.7$)



资料来源：华泰证券研究所

图表52：合作振子和叛逆振子最终相位频次分布 ($N=100, p=0.7$)

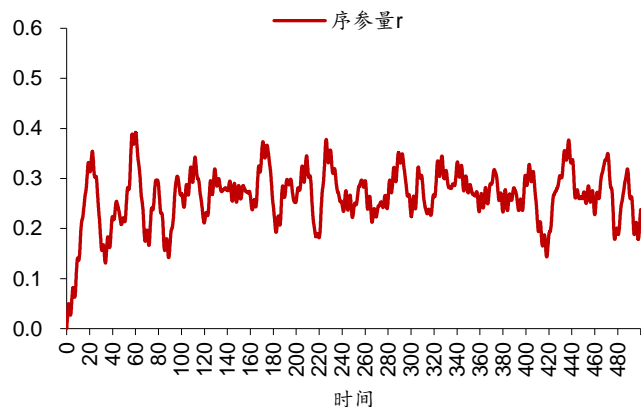


资料来源：华泰证券研究所

行波态

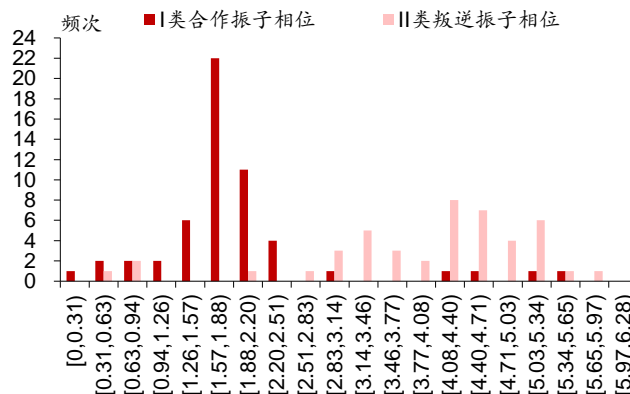
当合作振子占比 p 为 0.55 时，系统序参量随时间变化情况如左下图，序参量 r 在 0.1~0.4 的范围内波动，表现出部分同步。两类振子最终相位频次分布如右下图所示。两类振子各自聚集成团簇，其中合作振子的团簇更紧密，分布更窄，而叛逆振子的团簇较松散，分布更宽。

图表53：合作振子和叛逆振子系统序参量 ($N=100, p=0.55$)



资料来源：华泰证券研究所

图表54：合作振子和叛逆振子最终相位频次分布 ($N=100, p=0.55$)



资料来源：华泰证券研究所

此时，合作振子相位均值为 2.34，叛逆振子相位中位数为 4.08，两类振子相位差绝对值为 1.7，接近 $\pi/2$ 的水平，离 π 较远。这种状态称为行波态。行波态和 π 态的区别在于，在旋转坐标系下， π 态系统平均相位不随时间变化，而行波态系统平均相位以固定的速度运动，故称之为“行波”。关于藏本模型 π 态和行波态的判断涉及更为复杂的理论推导，本文不作更深入的展开。

小结

本章我们对 Sakaguchi-Kuramoto 模型进行模拟，探讨振子合作、叛逆、孤立、延迟等行为以及合作振子数量占比，对系统最终状态的影响，核心结论如下：

1. 当系统由合作振子和叛逆振子组成时：若合作振子占优，则两类振子分别形成团簇而实现同步，团簇间相位差等于 π ，即处于反相位状态；若叛逆振子占优，则系统无法实现同步。
2. 当系统由合作振子和孤立振子组成时，孤立振子不受平均场影响，始终按自身相位运动，合作振子间形成同步。
3. 当系统由合作振子和延迟振子组成时，两类振子分别形成团簇而实现同步，团簇间相位差等于相位延迟。
4. 合作振子占比越高，系统越倾向于同步；根据不同的合作振子占比 p 值，存在非相干态、 π 态和行波态三种不同的系统状态。

总结

人们常说生命是奇迹。动物心脏的大量起搏细胞以同一种节律放电，合奏出生命的不朽乐章。鸟鸣蝉噪，鱼贯雁行，流萤闪烁，落英缤纷，大自然并不存在一位全知全能的指挥者，而万物却自发地以相同的频率鸣唱，以相同的步调行进，以相同的节奏经历着成熟和衰亡。人们也常说文明是奇迹。中国工人和北美农民远隔重洋素不相识，却共同用劳动书写经济的高度繁荣，也在危机来临之际环球共此冷暖。

当我们探索奇迹背后的奥秘，我们发现奇迹并不是造物主提前设计好的剧本，而是参与其中的每一个细胞、个体、企业自发地同步所产生的合力。系统的每个微观个体都具备一定周期性，众多个体通过相互间的耦合，最终形成步调一致的宏观周期。这种现象在物理学中称为耦合振子同步。而藏本模型是刻画耦合振子同步现象的经典模型。

藏本模型的基本形式是描述系统中每个振子相位的一维动力学方程。模型中振子相位的变化量（即运动速度）由 1）该振子本身自然频率 ω ，2）耦合强度 K ，3）该振子和其它振子的相位差决定。耦合强度 $K > 0$ 使得振子间相互吸引。引入系统序参量 r 和平均相位 ψ 和平均场的概念后，振子受到其它振子的吸引而趋于同步，等价于振子受到平均场的吸引而趋于同步。

藏本模型中振子数量 N 、耦合强度 K 、自然频率洛伦兹分布半高宽 γ 这三项关键参数对同步的影响不尽相同。当振子数量 $N \geq 3$ 时，振子数量对同步速度影响不大。耦合强度 K 小于某个定值时，无法同步；大于某个定值时， K 越大同步越快。振子自然频率服从洛伦兹分布的半高宽 γ 越大，系统越难同步。当振子的自然频率介于 $-Kr$ 和 Kr 之间时，振子能与平均场同步；当振子的自然频率超出该范围时，振子无法同步。

Sakaguchi—Kuramoto 模型是藏本模型的变式，可借助该模型研究振子合作、叛逆等行对系统终态的影响。当系统由合作和叛逆振子组成时：若合作振子占优，则两类振子分别形成团簇而同步，团簇间相位差为 π ，即处于反相位；若叛逆振子占优，则系统无法同步。当系统由合作和孤立振子组成时，孤立振子始终按自身相位运动，合作振子形成同步。当系统由合作和延迟振子组成时，两类振子分别形成团簇而同步，团簇间存在相位延迟。合作振子占比越高，系统越倾向于同步；根据不同的合作振子占比 p 值，存在非相干态、 π 态和行波态三种不同的系统状态。

藏本模型目前主要运用在自然科学领域。事实上，在人类的经济活动和金融系统中也存在类似的耦合振子同步现象。例如多数企业的库存具有周期性，这是企业应对外部不确定性时的缓冲机制；商品、货币和信息的流通使得企业与企业之间相互影响和制约；微观企业相互耦合逐渐同步，最终形成宏观级别的周期。藏本模型如何应用于经济周期的刻画，是否可能有助于我们理解金融经济系统周期的起源，这些问题值得进一步探索。

参考文献

鞠萍. (2016). 耦合振子系统中的动力学行为. (Doctoral dissertation).

Hong, H. , & Strogatz, S. H. . (2011). Kuramoto model of coupled oscillators with positive and negative coupling parameters: an example of conformist and contrarian oscillators. *Physical Review Letters*, 106(5), p.054102.1-054102.4.

Neda, Z. , Ravasz, E. , Brechet, Y. , Vicsek, T. , & Barabasi, A. L. . (2000). Physics of the rhythmic applause. *Physical Review E Statistical Physics Plasmas Fluids & Related Interdisciplinary Topics*, 61(6).

Neda, Z. , Ravasz, E. , Brechet, Y. , Vicsek, T. , & Barabasi, A. L. . (2000). The sound of many hands clapping - tumultuous applause can transform itself into waves of synchronized clapping. *Nature*, 403(6772), 849-850.

风险提示

包括藏本模型在内的动力学系统模型是对真实世界的简单刻画，存在过度简化的可能；周期规律基于历史数据总结，历史规律可能失效；周期规律对市场长期规律进行研究，无法判断短期的市场情绪与政策冲击带来的影响；市场在某些极端情形下可能出现规律以外的交易风险。

附录

藏本模型两种形式恒等变换的推导

本节展示藏本模型两种形式恒等变换的具体推导过程。

原始藏本模型的第一种形式是将振子的相位改变量表示为与其它所有振子相位差的函数：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

定义系统的序参量 r 和平均相位 ψ ：

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$$

上式两边同时乘以 $e^{i\theta_i}$ ：

$$r e^{i(\psi - \theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j - \theta_i)}$$

根据欧拉公式，将上式转换为三角函数形式：

$$r \cos(\psi - \theta_i) + i r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\theta_j - \theta_i) + i \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

等式两边的虚部应相等，可得：

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i)$$

代入藏本模型的第一种形式，可得藏本模型的第二种形式，将振子的相位改变量表示为与平均相位之相位差的形式：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\psi - \theta_i)$$

藏本模型静止坐标系转换至旋转坐标系的推导

本节展示藏本模型静止坐标系转换至旋转坐标系的具体推导过程。

静止坐标系下，原始藏本模型可以写成序参量 r 和平均相位 ψ 的形式：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\psi - \theta_i)$$

其中平均相位 ψ 以平均场频率 Ω 进行旋转。

以系统的复序参量（平均场）为参照系，即采用旋转坐标系时，平均场本身以及各振子的相位和角频率都应减去参照系的相位和角频率：

$$\theta_{i,rot} = \theta_i - \psi$$

$$\dot{\theta}_{i,rot} = \dot{\theta}_i - \Omega$$

$$\omega_{i,rot} = \omega_i - \Omega$$

$$\psi_{rot} = \psi - \psi = 0$$

其中下标 **rot** 代表旋转坐标系下的度量。 ψ_{rot} 为 0，表明旋转坐标系下平均场自身的相位恒为 0。

将上述四个式子代入静止坐标系下的藏本模型：

$$\dot{\theta}_{i,rot} + \Omega = \omega_{i,rot} + \Omega + K r \sin(\psi - \theta_{i,rot} - \psi)$$

化简可得旋转坐标系下的藏本模型：

$$\dot{\theta}_{i,rot} = \omega_{i,rot} - K r \sin(\theta_{i,rot})$$

免责声明

分析师声明

本人，林晓明、陈辉、李子钰，兹证明本报告所表达的观点准确地反映了分析师对标的证券或发行人的个人意见；彼以往、现在或未来并无就其研究报告所提供的具体建议或所表达的意见直接或间接收取任何报酬。

一般声明

本报告由华泰证券股份有限公司（已具备中国证监会批准的证券投资咨询业务资格，以下简称“本公司”）制作。本报告仅供本公司客户使用。本公司不因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、评估及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。同时，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可能会波动。以往表现并不能指引未来，未来回报并不能得到保证，并存在损失本金的可能。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司研究报告以中文撰写，英文报告为翻译版本，如出现中英文版本内容差异或不一致，请以中文报告为主。英文翻译报告可能存在一定时间延迟。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，不构成所述证券的买卖出价或征价。该等观点、建议并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对客户私人投资建议。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

除非另行说明，本报告中所引用的关于业绩的数据代表过往表现，过往的业绩表现不应作为日后回报的预示。本公司不承诺也不保证任何预示的回报会得以实现，分析中所做的预测可能是基于相应的假设，任何假设的变化可能会显著影响所预测的回报。

本公司及作者在自身所知情的范围内，与本报告所指的证券或投资标的不存在法律禁止的利害关系。在法律许可的情况下，本公司及其所属关联机构可能会持有报告中提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为之提供或者争取提供投资银行、财务顾问或者金融产品等相关服务。本公司的销售人员、交易人员或其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。投资者应当考虑到本公司及/或其相关人员可能存在影响本报告观点客观性的潜在利益冲突。投资者请勿将本报告视为投资或其他决定的唯一信赖依据。有关该方面的具体披露请参照本报告尾部。

本研究报告并非意图发送、发布给在当地法律或监管规则下不允许向其发送、发布的机构或人员，也并非意图发送、发布给因可得到、使用本报告的行为而使本公司及关联子公司违反或受制于当地法律或监管规则的机构或人员。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰证券研究所”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权利。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

针对美国司法管辖区的声明

美国法律法规要求之一般披露

本研究报告由华泰证券股份有限公司编制，在美国由华泰证券（美国）有限公司（以下简称华泰证券（美国））向符合美国监管规定的机构投资者进行发表与分发。华泰证券（美国）有限公司是美国注册经纪商和美国金融业监管局（FINRA）的注册会员。对于其在美国分发的研究报告，华泰证券（美国）有限公司对其非美国联营公司编写的每一份研究报告内容负责。华泰证券（美国）有限公司联营公司的分析师不具有美国金融监管（FINRA）分析师的注册资格，可能不属于华泰证券（美国）有限公司的关联人员，因此可能不受 FINRA 关于分析师与标的公司沟通、公开露面和所持交易证券的限制。任何直接从华泰证券（美国）有限公司收到此报告并希望就本报告所述任何证券进行交易的人士，应通过华泰证券（美国）有限公司进行交易。

所有权及重大利益冲突

分析师林晓明、陈辉、李子钰本人及相关人士并不担任本研究报告所提及的标的证券或发行人的高级人员、董事或顾问。分析师及相关人士与本研究报告所提及的标的证券或发行人并无任何相关财务利益。声明中所提及的“相关人士”包括 FINRA 定义下分析师的家庭成员。分析师根据华泰证券的整体收入和盈利能力获得薪酬，包括源自公司投资银行业务的收入。

重要披露信息

- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司在本报告所署日期前的 12 个月内未担任标的证券公开发行或 144A 条款发行的经办人或联席经办人。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司在研究报告发布之日前 12 个月未曾向标的公司提供投资银行服务并收取报酬。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司预计在本报告发布之日后 3 个月内将不会向标的公司收取或寻求投资银行服务报酬。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司并未实益持有标的公司某一类普通股证券的 1%或以上。此头寸基于报告前一个工作日可得的信息，适用法律禁止向我们公布信息的情况除外。在此情况下，总头寸中的适用部分反映截至最近一次发布的可得信息。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司在本报告撰写之日并未担任标的公司股票证券做市商。

评级说明

行业评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

增持行业股票指数超越基准

中性行业股票指数基本与基准持平

减持行业股票指数明显弱于基准

公司评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

买入股价超越基准 20%以上

增持股价超越基准 5%-20%

中性股价相对基准波动在-5%~5%之间

减持股价弱于基准 5%-20%

卖出股价弱于基准 20%以上

华泰证券研究

南京

南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码：210019

电话：86 25 83389999/传真：86 25 83387521

电子邮件：ht-rd@htsc.com

深圳

深圳市福田区益田路 5999 号基金大厦 10 楼/邮政编码：518017

电话：86 755 82493932/传真：86 755 82492062

电子邮件：ht-rd@htsc.com

北京

北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层

邮政编码：100032

电话：86 10 63211166/传真：86 10 63211275

电子邮件：ht-rd@htsc.com

上海

上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码：200120

电话：86 21 28972098/传真：86 21 28972068

电子邮件：ht-rd@htsc.com

法律实体披露

本公司具有中国证监会核准的“证券投资咨询”业务资格，经营许可证编号为：91320000704041011J。

华泰证券全资子公司华泰证券(美国)有限公司为美国金融业监管局(FINRA)成员，具有在美国开展经纪交易商业业务的资格，经营业务许可编号为：CRD#298809。

电话：212-763-8160

电子邮件：huatai@htsc-us.com

传真：917-725-9702

http://www.htsc-us.com

©版权所有 2020 年华泰证券股份有限公司