

周期是不确定性条件下的稳态

华泰周期起源系列研究之三

林晓明 执业证书编号：S0570516010001
研究员 0755-82080134
linxiaoming@htsc.com

陈烨 执业证书编号：S0570518080004
研究员 010-56793942
chenye@htsc.com

刘志成 执业证书编号：S0570518080005
研究员 010-56793940
liuzhicheng@htsc.com

李子钰 执业证书编号：S0570519110003
研究员 0755-23987436
liziyu@htsc.com

何康 021-28972039
联系人 hekang@htsc.com

源洁莹 0755-82366825
联系人 yuanjieying@htsc.com

王晨宇
联系人 wangchenyu@htsc.com

相关研究

- 1 《金工：确立研究对象：行业拆分与聚类》
2020.03
- 2 《金工：风险预算模型的预算分配方式研究》
2020.02
- 3 《金工：基于量价的人工智能选股体系概览》
2020.02

周期是动态的、不确定性条件下的稳态

本文关注一维、二维和高维动力学系统的稳态。动力学系统的意义是刻画事物状态在时空下的变化规律。动力学系统的基本要素包含微分方程、平衡点和稳定性、相图、分岔图、势函数。通过对不同类型动力学系统各要素的分析，得出结论：一维动力学系统的稳态是定点；二维动力学系统的稳态若非定点，便是周期；高维动力学系统的稳态可能是定点、周期或准周期，同时存在特殊的不稳定状态——混沌。对我们来说更有研究价值的是周期，周期代表了动态的、不确定性条件下的稳态。

一维动力学系统的稳态是定点

一维动力学系统的稳态是定点。定性角度看，一维动力学系统的核心是正负反馈。系统局部由负反馈主导时，系统最终趋于静止和稳定；系统局部由正反馈主导时，系统总体趋于发散和不稳定。定量角度看，一维动力学系统的稳定性取决于微分方程在平衡点处的导数。导数小于0时，系统最终归于平衡点；导数大于0时，系统最终趋于发散，或归于另一个平衡点。

二维动力学系统的稳态若非定点，便是周期

二维动力学系统的稳态若非定点，便是周期。定性角度看，当状态变量相互之间的正负反馈占据主导时，系统趋于周期运动。如果只存在负反馈，系统将归于定点，最终寂灭；如果只存在正反馈，系统将走向发散，最终湮灭。正负反馈的综合才能造就周期。定量角度看，二维动力学系统的稳定性取决于平衡点处微分方程组雅可比矩阵的迹、行列式和判别式，当且仅当判别式小于0并且迹等于0时，系统展现出稳定的周期性。

正负反馈的综合可能蕴藏着世界周而复始运转的本质

二维动力学系统被认为是理解世间万象的“众妙之门”，正负反馈的综合可能蕴藏着世界周而复始运转的本质。定点的稳态不常见，因为定点往往意味着寂灭。发散的不稳定状态也不常见，因为发散终归会走向湮灭。我们能观察到的长期维持的稳态，往往都以周期或者类周期的形式存在。即使是简单的二维系统，也能模糊地刻画部分周期现象，核心是从系统内拆分出两个对立的变量，捕捉变量之间的正负反馈。自然界种群数量的动态平衡可由捕食者和猎物的二元系统刻画，中国古代的治乱周期可由官僚和民众的二元系统刻画，产业生命周期可由利润率和参与者的二元系统刻画。

高维动力学系统的稳态可能是定点、周期或准周期

高维动力学系统的稳态可能是定点、周期或准周期，同时存在特殊的不稳定状态——混沌。定性角度看，混沌具有“无法预测的确定性”，初始条件的微小扰动会造成系统长期的巨大改变。定量角度看，高维动力学系统通过计算李雅普诺夫指数实现稳定性的判断。李雅普诺夫指数只要存在一个正值，系统即为混沌。经济系统是否为混沌存在争议，我们认为，承认经济系统在一定条件下是混沌，等同于承认经济系统在另一些条件下可能出现定点或周期。对我们来说更有研究价值的是周期，周期代表了动态的、不确定性条件下的稳态。

风险提示：动力学系统模型是对真实世界的简单刻画，存在过度简化的可能；周期规律基于历史数据总结，历史规律可能失效；周期规律对市场长期规律进行研究，无法判断短期的市场情绪与政策冲击带来的影响；市场在某些极端情形下可能出现规律以外的交易风险。

正文目录

动力学系统的基本要素	4
微分方程	4
平衡点和稳定性	5
相图	6
分岔图	7
势函数	7
一维动力学系统与定点	9
逻辑斯蒂方程	9
一维动力学系统和正负反馈	12
二维动力学系统与周期	14
二维线性动力学系统	14
判别式为正	15
判别式为 0	16
判别式为负	17
二维线性动力学系统相图分类	18
弹簧振子的简谐振动和阻尼振动	19
简谐振动	20
阻尼振动	20
二维非线性动力学系统	22
一维动力学系统回顾	22
二维动力学系统推广	23
实例：同宿轨道	24
庞加莱—本迪克松定理	25
二维动力学系统产生周期的条件	25
微分方程解的解释	25
系数矩阵的解释	26
正负反馈与周期	27
高维动力学系统与混沌	28
洛伦兹系统、混沌和蝴蝶效应	28
洛伦兹系统的稳态	30
高维动力学系统如何判断稳定性	31
经济系统是混沌吗	33
总结	34
参考文献	34
风险提示	34

图表目录

图表 1： 本文框架	4
图表 2： 一维线性动力学系统不同 λ 取值对 x 的影响	5
图表 3： 一维线性动力学系统的相图 ($\lambda < 0$)	6
图表 4： 一维线性动力学系统的相图 ($\lambda > 0$)	6

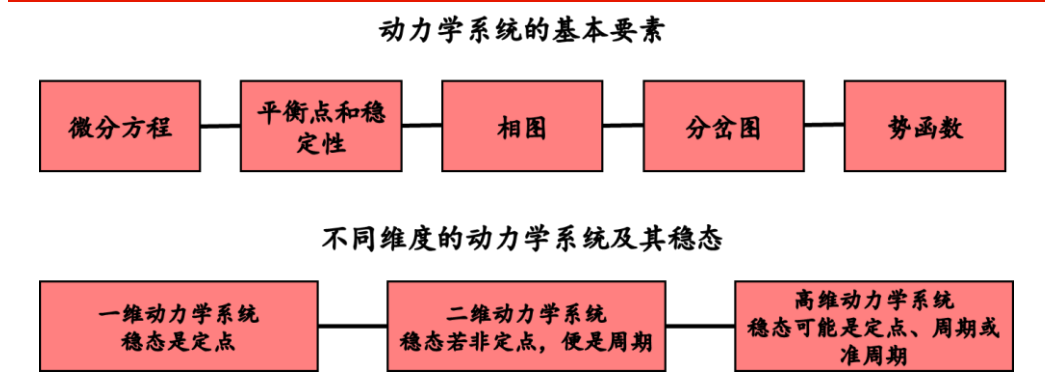
图表 5: 一维线性动力学系统分岔图	7
图表 6: 一维线性动力学系统的势函数图 ($\lambda < 0$)	8
图表 7: 一维线性动力学系统的势函数图 ($\lambda > 0$)	8
图表 8: 逻辑斯蒂增长	9
图表 9: 逻辑斯蒂方程的平衡点和稳定性	10
图表 10: 逻辑斯蒂方程的相图 ($\lambda < 0$)	10
图表 11: 逻辑斯蒂方程的相图 ($\lambda > 0$)	10
图表 12: 逻辑斯蒂方程的分岔图	11
图表 13: 逻辑斯蒂方程的势函数图 ($\lambda < 0$)	11
图表 14: 逻辑斯蒂方程的势函数图 ($\lambda > 0$)	11
图表 15: 一维动力学系统和正负反馈	12
图表 16: 二维线性动力学系统的相图之汇点	15
图表 17: 二维线性动力学系统的相图之源点	15
图表 18: 二维线性动力学系统的相图之鞍点	15
图表 19: 二维线性动力学系统的相图之稳定平衡点组成的直线	16
图表 20: 二维线性动力学系统的相图之不稳定平衡点组成的直线	16
图表 21: 二维线性动力学系统的相图之退化汇点	17
图表 22: 二维线性动力学系统的相图之退化源点	17
图表 23: 二维线性动力学系统的相图之中心	17
图表 24: 二维线性动力学系统的相图之螺旋汇点	18
图表 25: 二维线性动力学系统的相图之螺旋源点	18
图表 26: 二维线性动力学系统的相图分类	18
图表 27: 弹簧振子示意图	19
图表 28: 弹簧振子的简谐振动	20
图表 29: 弹簧振子的指数衰减	21
图表 30: 弹簧振子的阻尼衰减	22
图表 31: 二维非线性动力学系统同宿轨道的相图	24
图表 32: 洛伦兹系统在给定参数和初始条件下状态变量随时间变化	28
图表 33: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=28$, 三维视角)	29
图表 34: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=28$, xz 平面视角)	29
图表 35: 初始值对洛伦兹系统的影响 ($r=28$, $t=0\sim 10$)	29
图表 36: 初始值对洛伦兹系统的影响 ($r=28$, $t=990\sim 1000$)	29
图表 37: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=80$, 三维视角)	30
图表 38: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=80$, xz 平面视角)	30
图表 39: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=20$, 三维视角)	30
图表 40: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=20$, xz 平面视角)	30
图表 41: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=160$, 三维视角)	31
图表 42: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=160$, xz 平面视角)	31
图表 43: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=240$, 三维视角)	31
图表 44: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 ($r=240$, xz 平面视角)	31
图表 45: 不同参数取值下洛伦兹系统的李雅普诺夫指数和稳定性状态	32
图表 46: 三维动力学系统的李雅普诺夫指数符号和稳定性状态	32
图表 47: 周期和准周期示意图	33

动力学系统的基本要素

在华泰金工《从微观同步到宏观周期》(20191225)和《周期趋同现象的动力学系统模型》(20200102)两项研究中,我们以自然界中的周期趋同现象为例,借助动力学系统模型,论证微观个体形成系统级别周期同步的四个必要条件:1)微观个体有类周期行为;2)微观个体之间会相互影响;3)系统存在随机性;4)有能量注入来维持系统运转。我们认为,动力学系统是理解经济活动和金融市场中众多周期现象来源的起点。

本文尝试从理论角度,系统性地梳理动力学系统的基础概念,后续的研究都将围绕这些概念进行展开。首先我们将回顾动力学系统的基本要素:微分方程、平衡点和稳定性、相图、分岔图、势函数。随后我们将分别针对一维、二维和高维动力学系统进行研究,重点关注稳定性及分析方法。本文的核心结论是:周期是不确定性条件下的稳态。

图表1: 本文框架



资料来源:华泰证券研究所

微分方程

动力学系统的意义是刻画事物状态在时空下的变化规律。事物的状态可以是具象的,如粒子位置,也可以是抽象的,如资产价格。刻画规律最常用的方式是微分方程。下式为最简单的动力学系统:

$$\dot{x} = \lambda x$$

其中 x 称为**状态变量** (state variable); 等式左侧代表 x 的一阶导数,即 x 在当前时刻的改变量,相当于 x 的变化速度;等式右侧 λ 称为**控制参数** (control parameter)。整个式子的解读是:状态 x 的改变量与其当前状态成正比。由于上式仅包含一个状态变量 x ,且仅包含 x 的一阶导数,上式属于**一维动力学系统** (one-dimensional dynamical system)。由于等号右侧仅包含 x 的一次项,上式也称为**一维线性动力学系统** (one-dimensional linear dynamical system)。

自然界中,理想条件下的种群数量增长模型就可以用上述一维线性动力学系统刻画。当外部资源无限,不存在内部竞争,出生率不变且远高于死亡率时,种群新增数量等于种群现有数量的常数 λ 倍。例如,假设某种细菌初始数量 $x_0=1$,每个单位时刻进行一次二分裂,相应控制参数 $\lambda=1$,那么 Δt 时刻细菌新增数量 $\lambda x_0=1$,细菌数量为 $x_{\Delta t}=1+1=2$; $2\Delta t$ 时刻细菌新增数量 $\lambda x_{\Delta t}=2$,细菌数量为 $x_{2\Delta t}=2+2=4$ 。

上述细菌分裂的例子中,根据当前时刻的状态,我们可以得到下一时刻状态的改变量,进而得到下一时刻的状态。通过递推的方式,可以推算任意 t 时刻的细菌数量。动力学系统的微分方程正是以这种“走一步看一步”的“蚂蚁视角”刻画事物的变化规律。

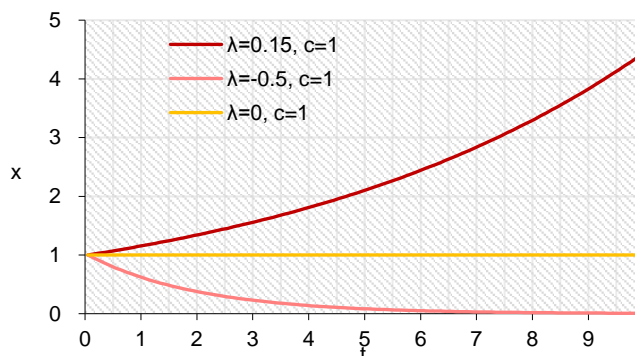
除了递推之外,上例中还可以如何计算任意 t 时刻的细菌数量呢?我们对原始一阶微分方程进行求解。求解思路依次为:移项,两边积分,两边以 e 为底求幂。具体推导如下:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lambda x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \lambda dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \lambda dt \Rightarrow \ln x = \lambda t + c_0 \Rightarrow x(t) = ce^{\lambda t}$$

其中 c_0 和 c 为常数，由 x 的初始状态决定。上述细菌分裂的例子中， $c=1$ 。在 $t=1$ 时刻，细菌数量为 $x=e$ ；在任意 t 时刻，细菌数量为 $x=e^t$ 。当 $\lambda=1$ 时，一维线性动力学系统表现为典型的指数增长。微分方程的解是刻画事物变化规律的“上帝视角”。

当控制参数 λ 为其它取值时，一维线性动力学系统将呈现何种特性？在上述细菌分裂的例子中，当 λ 为正数时， λ 越大，单位时间内细菌新增数量越多，即指数增长速度越快。而当 λ 为负数时，单位时间内细菌减少数量与当前细菌数量成正比，动力学系统表现为指数衰减。当 λ 为 0 时，单位时间内细菌数量的改变量为 0，细菌数量保持恒定。下图展示了不同 λ 取值下，状态变量 x 随时间 t 呈现指数增长、指数衰减和恒定不变的三种情形。

图表2：一维线性动力学系统不同 λ 取值对 x 的影响



资料来源：华泰证券研究所

并非所有微分方程都可以轻松求解。“上帝视角”的解不常有，“蚂蚁视角”微分方程是动力学系统更常用的描述形式。

平衡点和稳定性

当动力学系统的状态变量 x 不随时间发生变化，即 x 的一阶导数为 0 时，我们称系统处于平衡点（equilibrium points），也称为系统的不动点（fixed points）或稳态解（stationary solutions），记作：

$$\tilde{x} \text{ s.t. } \dot{x} = 0$$

理解一个动力学系统最重要的途径，是研究每个平衡点的稳定性（stability）。我们以上述一维线性动力学系统为例，讨论其平衡点和稳定性。

为了求出 $\dot{x} = \lambda x$ 的平衡点，根据平衡点的定义，我们令等式左边 $\dot{x} = 0$ 。当 $\lambda \neq 0$ 时，解得 $x = 0$ ，即系统的平衡点 $\tilde{x} = 0$ 。当 $\lambda = 0$ 时，解得 x 为任意实数，即系统的平衡点 $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ 。

当 $\lambda < 0$ 时，系统表现为指数衰减。随着时间演进，当时间 t 趋向于无穷大时， x 逐渐趋近于平衡点 0，我们称这样的平衡点为吸引子（attractor）。当 x 取任意初始条件（initial condition）， x 最终都趋近于吸引子，此时称该平衡点的稳定性为稳定（stable）。

当 $\lambda > 0$ 时，系统表现为指数增长。随着时间演进，当时间 t 趋向于无穷大时， x 逐渐远离平衡点 0，我们称这样的平衡点为排斥子（repeller）。当 x 取任意初始条件， x 最终都远离排斥子，此时称该平衡点的稳定性为不稳定（unstable）。

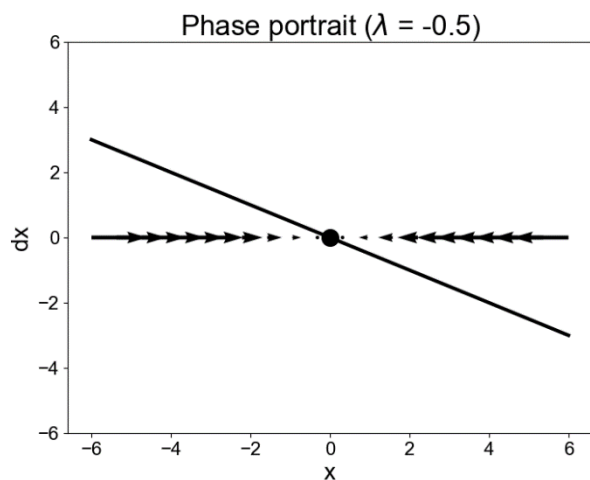
当 $\lambda = 0$ 时，系统表现为恒定不变，平衡点为任意实数。每一种初始条件对应唯一的平衡点，这样的平衡点既不是吸引子，也不是排斥子，此时称该平衡点的稳定性为中性稳定（neutrally stable）。

特别地，对于某些动力学系统，存在某种平衡点兼具吸引子和排斥子的属性，我们称这样的平衡点为鞍点（saddle），此时称该平衡点的稳定性为半稳定（half-stable）。后续章节我们会接触到鞍点。

相图

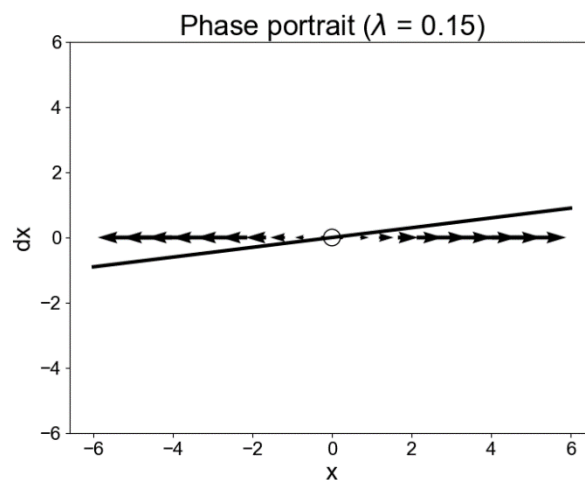
相图 (phase portrait 或 phase space plot) 是动力学系统最重要的图像表征。我们定义状态变量与其导数张成的空间为相空间 (phase space)，状态变量在相空间中的轨迹称为相图。对于一维动力学系统，相图的横轴是状态变量，纵轴是状态变量的一阶导数。我们以一维线性动力学系统为例，展示相图的画法。

图表3：一维线性动力学系统的相图 ($\lambda < 0$)



资料来源：华泰证券研究所

图表4：一维线性动力学系统的相图 ($\lambda > 0$)



资料来源：华泰证券研究所

左上图展示 $\lambda < 0$ 的情形。相图中包含三个重要元素：

1. 斜方向的直线表示微分方程 $\dot{x} = -0.5x$ 。
2. 原点处的圆圈表示平衡点 0，实心表示该平衡点是吸引子。
3. 横轴带箭头的直线称为轨迹 (trajectory)，表示 x 的变化方向和速度；无论 x 位于横轴何处，其变化方向均指向吸引子；离吸引子越远，箭头的长度越长，代表其变化速度越快，即以更快的速度趋近于吸引子。

右上图展示 $\lambda > 0$ 的情形：

1. 斜方向的直线表示微分方程 $\dot{x} = 0.15x$ 。
2. 原点处的圆圈表示平衡点 0，空心表示该平衡点是排斥子。
3. 横轴带箭头的直线表示 x 的变化方向和速度；无论 x 位于横轴何处，其变化方向均远离排斥子；离排斥子越远，箭头的长度越长，代表其变化速度越快，即以更快的速度远离排斥子。

这里补充一个判断平衡点是吸引子还是排斥子的技巧。观察相图中微分方程对应的直线：如果从左上方方向右下方穿过平衡点，那么微分方程在平衡点附近的导数为负数，平衡点周围的点将更靠近平衡点，因此平衡点为吸引子；反之，如果从左下方方向右上方穿过平衡点，那么微分方程在平衡点附近的导数为正数，平衡点周围的点将更远离平衡点，因此平衡点为排斥子。

上述判断吸引子或排斥子的法则对于一维非线性动力学系统同样适用，此时微分方程在相图中表示为曲线。若微分方程对应的曲线在平衡点附近的导数为负，则平衡点为吸引子；若微分方程对应的曲线在平衡点附近的导数为正，则平衡点为排斥子；若微分方程对应的曲线和 x 轴在平衡点处相切，即导数为 0，则平衡点为鞍点。

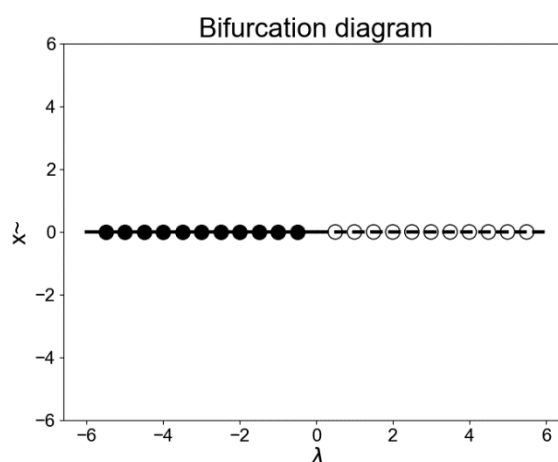
可以看出，动力学系统的微分方程、平衡点及其稳定性均体现在相图上。一般而言，分析任何动力学系统都离不开绘制相图这一步。

分岔图

由上述一维线性动力学系统的稳定性分析可知，对于不同的参数 λ 取值，系统的平衡点及其稳定性会随之改变。例如随着参数 λ 由负转正，系统的平衡点从吸引子变成排斥子，稳定性从稳定变成不稳定。这种现象称为**分岔**（bifurcation）。对于一维动力学系统，我们以参数 λ 为横轴，以平衡点 \bar{x} 为纵轴，绘制平衡点随参数的变化情况，其图像称为**分岔图**（bifurcation diagram）。分岔图也是重要的动力学系统图像表征。

一维线性动力学系统的分岔图如下图所示。实心点和实线代表吸引子，稳定性为稳定；空心点和虚线代表排斥子，稳定性为不稳定。全部点和线都位于横轴，表明无论参数 λ 是正数还是负数，系统的平衡点始终为 0。需要说明的是，当参数 $\lambda=0$ 时，事实上平衡点为任意实数，简单起见没有绘制在分岔图上。

图表5：一维线性动力学系统分岔图



资料来源：华泰证券研究所

上图一维线性动力学系统的分岔图较为简单。对于非线性系统而言，会出现形形色色的分岔现象，这也是非线性动力学的重要研究方向。

势函数

势函数（potential function）类似物理中势能的概念。水往低处流，是因为水在高处的重力势能大，在低处的重力势能小，水从势能高的地方流向势能低的地方。动力学系统的状态变量随时间变化，是因为状态变量从势能高的地方移动到势能低的地方。

如何定义动力学系统的势函数？对于一维动力学系统，状态变量 x 总是朝着势函数更低的方向变化，那么其改变量应等于势函数 V 的负梯度：

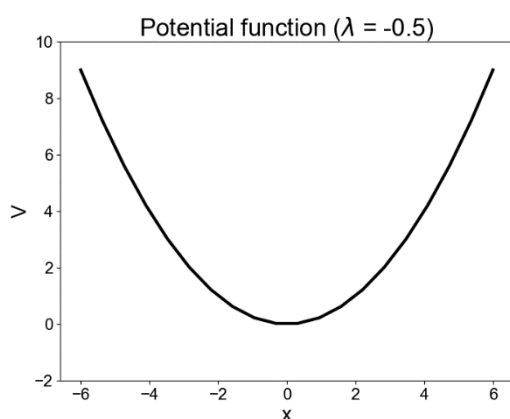
$$\dot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

特别地，当系统处于平衡点时，状态变量 x 不再改变， x 的一阶导数为 0，等式左侧等于 0；此时势函数取极小值或极大值， V 关于 x 的一阶导数为 0，等式右侧也等于 0。

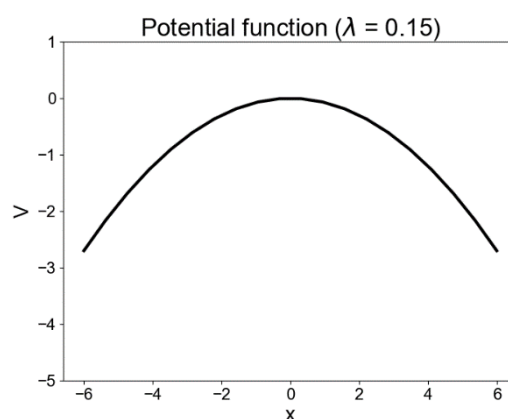
下面我们推导一维线性动力学系统的势函数：

$$\dot{x} = \lambda x = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V = -\int \lambda x dx = -\frac{1}{2}\lambda x^2 + \underset{=0}{C}$$

分别绘制 $\lambda < 0$ 和 $\lambda > 0$ 时系统的势函数，如下图所示。

图表6：一维线性动力学系统的势函数图 ($\lambda < 0$)

资料来源：华泰证券研究所

图表7：一维线性动力学系统的势函数图 ($\lambda > 0$)

资料来源：华泰证券研究所

左上图展示 $\lambda < 0$ 的情形。势函数为开口向上的抛物线，当 $x=0$ 时势函数取极小值。无论 x 取何种初始值，最终都会落到势函数最小的位置， $x=0$ 是系统的吸引子。

右上图展示 $\lambda > 0$ 的情形。势函数为开口向下的抛物线，当 $x=0$ 时势函数取极大值。只要 x 取任意非 0 初始值，最终都会朝正无穷大或负无穷大方向坠落， $x=0$ 是系统的排斥子。

从势函数中，我们也能观察到系统的稳定解和稳定性。需要说明的是，所有一维动力学系统都有对应的势函数，然而大部分二维或高维动力学系统都不具有势函数。因此，势函数的讨论一般只在一维动力学系统展开。

一维动力学系统与定点

上一章我们以最简单的一维线性动力学系统为例，理解了动力学系统的基本要素：微分方程、平衡点和稳定性、相图、分岔图、势函数。接下来，我们将从其它一维动力学系统入手，重温上述基本要素，重点探讨一维动力学系统的平衡点和稳定性。本章的核心结论是：**一维动力学系统的稳态只可能是定点；当系统由负反馈主导时，系统趋于稳定。**

逻辑斯谛方程

一维动力学系统的一般形式为：

$$\dot{x} = f(x)$$

当等式右侧的 $f(x)$ 仅包含 x 的一次项时，该系统即为上一章介绍的一维线性动力学系统。当 $f(x)$ 包含 x 的更高次项时，该系统称为一维非线性动力学系统。一维线性动力学系统的性质我们已经较为熟悉，下面我们讨论一维非线性动力学系统。

考虑最简单的一维非线性动力学系统，仅包含 x 的一次和二次项，微分方程为：

$$\dot{x} = \lambda x - x^2$$

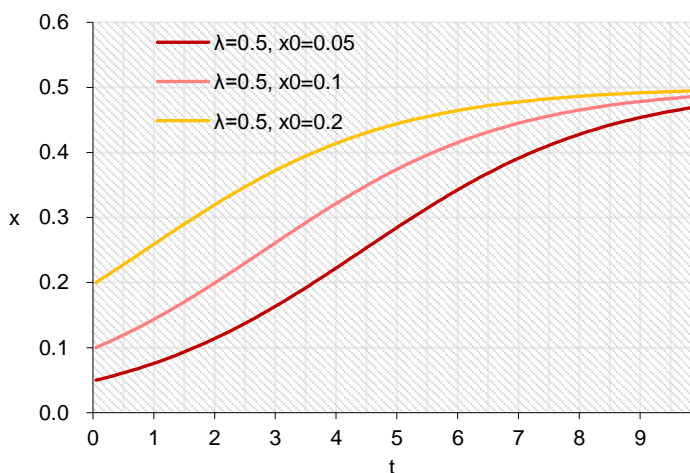
上述方程也称为**逻辑斯谛方程** (logistic equation)，广泛应用于生物学、社会科学研究中。例如生物学中种群在有限环境资源条件下的增长模型，经济学中的利润与广告支出关系模型等，都可以用逻辑斯谛方程刻画。

逻辑斯谛方程的解为：

$$x(t) = \frac{\lambda e^{\lambda t}}{1 + C e^{\lambda t}}$$

其中 C 为常数，由参数 λ 和初始条件 x_0 决定。不妨设 λ 为 0.5，取不同初始条件 x_0 ，绘制状态变量 x 随时间 t 的变化情况，如下图所示。如果 x 代表有限环境资源下的种群数量，开始阶段 x 以较快速度增长，随着 x 接近环境资源条件所能允许的最大种群量 λ ， x 的增长速度逐渐放缓，最终稳定在 λ 。

图表8：逻辑斯谛增长



资料来源：华泰证券研究所

下面我们分析该动力学系统的各项基本要素。首先计算其平衡点，令等式左侧 x 的一阶导数为 0：

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \lambda x - x^2 = 0 \Rightarrow x(\lambda - x) = 0 \Rightarrow \tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = \lambda$$

当 λ 不为 0 时，系统包含两个平衡点 0 和 λ ；当 λ 为 0 时，系统包含一个平衡点 0。

如何判断每个平衡点的稳定性，平衡点属于吸引子、排斥子还是鞍点？我们可以通过微分方程在平衡点处的导数判断：

$$f'(x) = (\lambda x - x^2)' = \lambda - 2x$$

1. 当 $\lambda < 0$ 时, $f'(\tilde{x}_1) = f'(0) = \lambda < 0$, 导数小于 0, 平衡点 \tilde{x}_1 为吸引子, 稳定性为稳定; $f'(\tilde{x}_2) = f'(\lambda) = -\lambda > 0$, 导数大于 0, 平衡点 \tilde{x}_2 为排斥子, 稳定性为不稳定。
2. 当 $\lambda > 0$ 时, $f'(\tilde{x}_1) = f'(0) = \lambda > 0$, 导数大于 0, 平衡点 \tilde{x}_1 为排斥子, 稳定性为不稳定; $f'(\tilde{x}_2) = f'(\lambda) = -\lambda < 0$, 导数小于 0, 平衡点 \tilde{x}_2 为吸引子, 稳定性为稳定。
3. 当 $\lambda = 0$ 时, $f'(\tilde{x}_1) = f'(\tilde{x}_2) = f'(0) = \lambda = 0$, 导数等于 0, 平衡点为鞍点, 稳定性为半稳定。

图表9: 逻辑斯蒂方程的平衡点和稳定性

参数取值	平衡点 $\tilde{x}_1 = 0$	平衡点 $\tilde{x}_2 = \lambda$
$\lambda < 0$	$f'(\tilde{x}_1) < 0$, 吸引子, 稳定	$f'(\tilde{x}_2) > 0$, 排斥子, 不稳定
$\lambda > 0$	$f'(\tilde{x}_1) > 0$, 排斥子, 不稳定	$f'(\tilde{x}_2) < 0$, 吸引子, 稳定
$\lambda = 0$	$f'(\tilde{x}_1) = f'(\tilde{x}_2) = 0$, 鞍点, 半稳定	

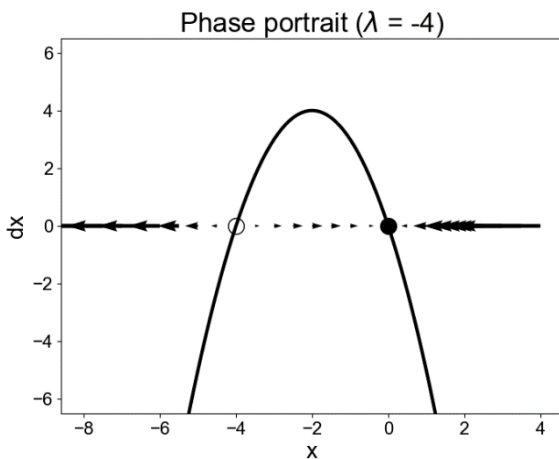
资料来源: 华泰证券研究所

逻辑斯蒂方程的相图如下。左下图展示 $\lambda < 0$ 的情形:

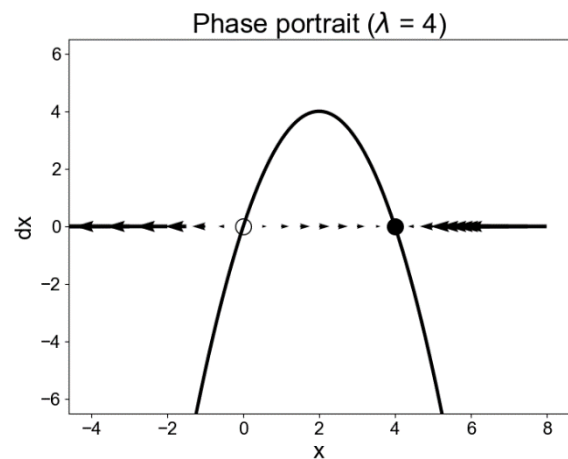
1. 开口向下的抛物线表示微分方程 $\dot{x} = -4x - x^2$ 。
2. 左侧的空心圆圈表示排斥子 $\tilde{x}_2 = -4$, 原点处的实心圆圈表示吸引子 $\tilde{x}_1 = 0$ 。
3. 横轴带箭头的直线表示 x 的变化方向和速度; 排斥子邻域的点远离排斥子, 吸引子邻域的点向吸引子靠近。

右下图展示 $\lambda > 0$ 的情形:

1. 开口向下的抛物线表示微分方程 $\dot{x} = 4x - x^2$ 。
2. 左侧的空心圆圈表示排斥子 $\tilde{x}_1 = 0$, 原点处的实心圆圈表示吸引子 $\tilde{x}_2 = 4$ 。
3. 横轴带箭头的直线表示 x 的变化方向和速度; 排斥子邻域的点远离排斥子, 吸引子邻域的点向吸引子靠近。

图表10: 逻辑斯蒂方程的相图 ($\lambda < 0$)

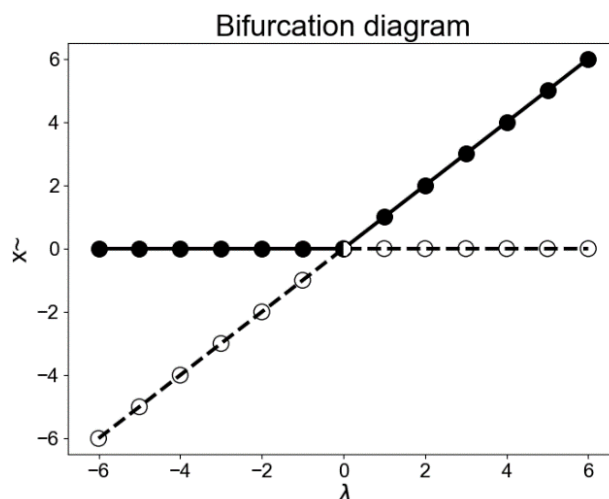
资料来源: 华泰证券研究所

图表11: 逻辑斯蒂方程的相图 ($\lambda > 0$)

资料来源: 华泰证券研究所

逻辑斯蒂方程的分岔图如下。可以看出, 当参数 λ 取非零值时, 系统始终有两个平衡点, 其中相对较大的平衡点为吸引子, 相对较小的平衡点为排斥子。当参数 λ 取 0 时, 系统仅有一个平衡点, 该平衡点为鞍点。当 λ 从负值变为正值时, 原先的吸引子变成排斥子, 原先的排斥子变成吸引子。这种分岔形式称为跨临界分岔 (transcritical bifurcation)。一维动力学系统还存在另外三种分岔形式, 分别为鞍结分岔 (saddle-node bifurcation)、超临界叉式分岔 (supercritical pitchfork bifurcation) 和亚临界分岔 (subcritical pitchfork bifurcation), 本文暂不作介绍。

图表12: 逻辑斯蒂方程的分岔图



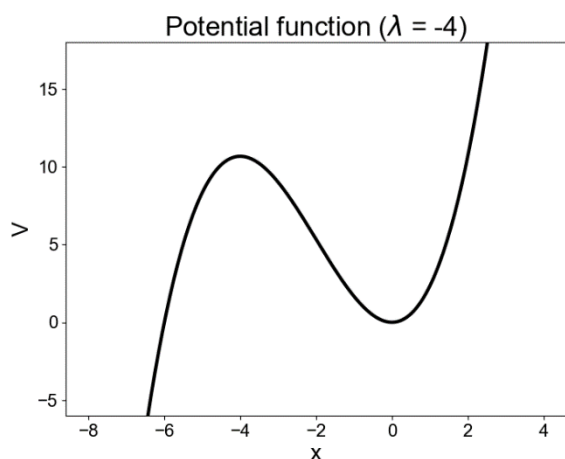
资料来源: 华泰证券研究所

逻辑斯蒂方程的势函数为:

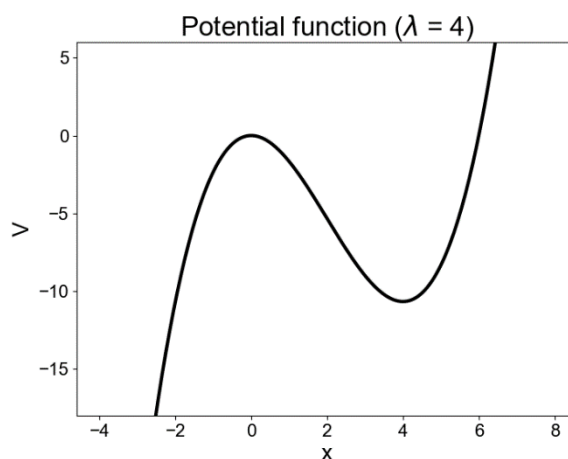
$$\dot{x} = \lambda x - x^2 = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V = -\int (\lambda x - x^2) dx = -\frac{1}{2}\lambda x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underbrace{c}_{=0}$$

左下图为 $\lambda < 0$ 时的势函数图。势函数为三次曲线: 当 x 为负无穷大时, 势函数取全局最小值; 当 x 为正无穷大时, 势函数取全局最大值; 当 $x=0$ 时, 势函数取局部极小值, 此时该平衡点为吸引子; 当 $x=\lambda$ 时, 势函数取局部极大值, 此时该平衡点为排斥子。当 x 的初始值位于排斥子右侧 ($x > \lambda$) 时, 经过足够长时间, 系统最终将落到吸引子的位置。

右下图为 $\lambda > 0$ 时的势函数图。势函数为三次曲线: 当 $x=0$ 时, 势函数取局部极大值, 此时该平衡点为排斥子; 当 $x=\lambda$ 时, 势函数取局部极小值, 此时该平衡点为吸引子。当 x 的初始值位于排斥子右侧 ($x > 0$) 时, 经过足够长时间, 系统最终将落到吸引子的位置。

图表13: 逻辑斯蒂方程的势函数图 ($\lambda < 0$)

资料来源: 华泰证券研究所

图表14: 逻辑斯蒂方程的势函数图 ($\lambda > 0$)

资料来源: 华泰证券研究所

至此, 我们完成了对逻辑斯蒂方程的微分方程、平衡点和稳定性、相图、分岔图、势函数这几项基本要素的研究。分析任何动力学系统通常遵照以上步骤。对于二维或高维动力学系统, 一般不分析势函数, 并且相图和分岔图的形式相较于一维动力学系统略有差异。

一维动力学系统和正负反馈

暂且抛开相对复杂的数学概念和论证，下面我们试着以通俗的视角思考如下问题：为什么一维动力学系统可能表现为稳定或不稳定？为什么一维动力学系统的平衡点可能表现为吸引子或排斥子？

首先回到第一章讨论的一维线性动力学系统：

$$\dot{x} = \lambda x$$

通过分析我们知道该系统唯一的平衡点为 0，稳定性与参数 λ 有关。当 λ 小于 0 时，平衡点为吸引子，稳定性表现为稳定，微分方程的解表现为指数衰减。当 λ 大于 0 时，平衡点为排斥子，稳定性表现为不稳定，微分方程的解表现为指数增长。

让我们换一种方式表述：

1. 当 λ 小于 0 时，整个系统只存在负反馈，即“逆势而为”。此时若 x 为正数，则 x 的导数为负，下一刻 x 将减小；若 x 为负数，则 x 的导数为正，下一刻 x 将增大。无论 x 取何值，负反馈使得系统总是将 x 朝 0 的方向吸引。经过足够长的时间， x 将归于 0，系统趋于静止和稳定。
2. 当 λ 大于 0 时，整个系统只存在正反馈，即“顺势而为”。此时若 x 为正数，则 x 的导数为正，下一刻 x 将增大；若 x 为负数，则 x 的导数为负，下一刻 x 将减小。无论 x 取何值，正反馈使得系统总是将 x 向 0 的反方向排斥。经过足够长的时间， x 将归于正负无穷，系统趋于发散和不稳定。

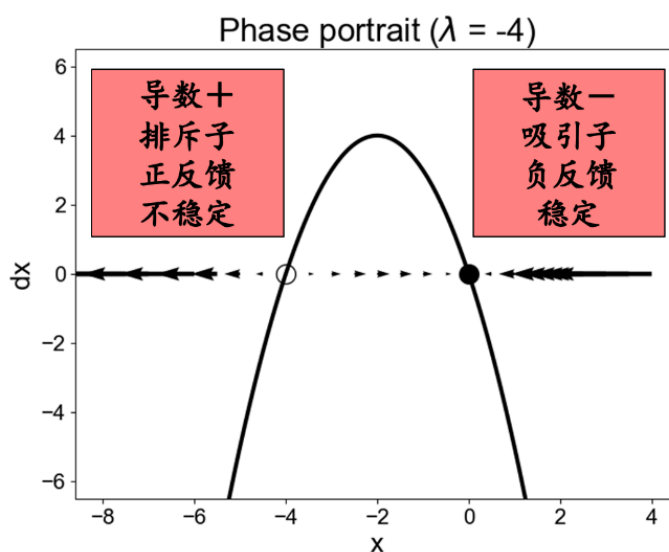
总结：一维线性动力学系统的最终状态与初始条件无关，仅与参数 λ 有关。当 λ 小于 0 时，系统只存在负反馈，系统最终趋于静止和稳定。当 λ 大于 0 时，系统只存在正反馈，系统最终趋于发散和不稳定。

接下来我们考察一维动力学系统的一般形式：

$$\dot{x} = f(x)$$

为了求系统的平衡点，令 $\dot{x} = 0$ ，求解方程 $f(x) = 0$ ，得到一系列实根 \tilde{x} 。系统平衡点的个数就等于不重合的实根个数，也等于相图中 $\dot{x} = f(x)$ 图像和横轴的交点个数。对于每个平衡点，计算 $\dot{x} = f(x)$ 在平衡点处的导数 $f'(\tilde{x})$ ， $f'(\tilde{x}) < 0$ 代表该平衡点为吸引子， $f'(\tilde{x}) > 0$ 代表该平衡点为排斥子。

图表15：一维动力学系统和正负反馈



资料来源：华泰证券研究所

对照上图，让我们换一种方式表述：

1. 对于某个平衡点，当该点处的导数 $f'(x)$ 为负时，该点为吸引子，在该点局部只存在负反馈，即“逆势而为”。此时若 x 在该点右侧，则导数为负，下一刻 x 将减小，向左侧移动；若 x 在该点左侧，则导数为正，下一刻 x 将增大，向右侧移动。在该点附近的区域，无论 x 取何值，负反馈使得系统总是将 x 朝该点的方向吸引。经过足够长的时间， x 将归于该平衡点，系统趋于静止和稳定。
2. 对于某个平衡点，当该点处的导数 $f'(x)$ 为正时，该点为排斥子，在该点局部只存在正反馈，即“顺势而为”。此时若 x 在该点右侧，则导数为正，下一刻 x 将增大，向右侧移动；若 x 在该点左侧，则导数为负，下一刻 x 将减小，向左侧移动。在该点附近的区域，无论 x 取何值，正反馈使得系统总是将 x 向该点的反方向排斥。经过足够长的时间， x 可能归于正负无穷，系统趋于发散和不稳定，也可能归于另一个吸引子。

总结：一维动力学系统的最终状态取决于初始条件，也取决于系统微分方程的具体形式。对于任意给定的初始条件，一维动力学系统的最终状态取决于微分方程在邻近平衡点处的导数。当导数小于 0 时，系统局部只存在负反馈，系统最终归于该平衡点，系统趋于静止和稳定。当导数大于 0 时，系统局部只存在正反馈，系统最终趋于发散和不稳定，或者归于另一个导数为负的平衡点。

通过对一维线性动力学系统和更一般的一维动力学系统的分析，我们可以得到如下结论：一维动力学系统的核心是正负反馈。系统局部由负反馈主导时，系统最终趋于静止和稳定；系统局部由正反馈主导时，系统总体趋于发散和不稳定。

负反馈在生活中无处不在。空调、冰箱的温度控制系统就是基于负反馈原理设计，人体的体温调节也遵循负反馈控制，它们的控制目标都是使温度趋于稳定。如果体温调节为正反馈系统，体温趋于发散，生命系统将无法维持。金融市场中，套利者、做市商的存在也是市场的负反馈机制，使得资产定价维持在相对合理范围。

正反馈在生活中同样存在。血液凝固、排尿反射都是人体正常的正反馈调节。金融市场中，牛市里投资者的追涨、加杠杆等行为也属于正反馈，使得最初的趋势不可避免地走向发散和泡沫破裂。

本章最后，我们回顾一维动力学系统的最终状态，仅存在 1) 稳定于吸引子和 2) 发散于无穷两种状态。换言之，一维动力学系统的稳态只可能是定点（吸引子）。

二维动力学系统与周期

相比于一维动力学系统，二维动力学系统尽管只增加了一个维度，但是其蕴含的变化和展现出的复杂性却远超一维系统，能够刻画更纷繁的自然和社会现象，被很多人称为理解世间万象的“众妙之门”。

本章首先从最简单的二维动力学系统——二维线性动力学系统开始，理解二维系统的多种稳定点及其稳定性，其次介绍特殊的二维系统——弹簧振子，随后拓展到二维非线性动力学系统。本章的核心结论是：**二维动力学系统的稳态如果不是定点，那么便是周期（庞加莱一本迪克松定理）**；当状态变量相互之间的正负反馈占据主导时，系统趋于周期运动。

二维线性动力学系统

回忆一维线性动力学系统的微分方程：

$$\dot{x} = \lambda x$$

二维线性动力学系统增加一个新的状态变量 y ， x 和 y 的改变量同时受彼此影响，其微分方程的一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

写成矩阵乘法的形式：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

相比于一维线性动力学系统仅包含 1 个参数 λ ，二维线性动力学系统包含 4 个参数，而这 4 个参数可以统一表示成矩阵 L ，称为**系数矩阵（coefficient matrix）**。

再次回忆一维线性动力学系统的平衡点和稳定性：平衡点为 $\tilde{x} = 0$ ，稳定性取决于参数的正负。当 λ 为负数时，平衡点为吸引子，系统稳定，表现为指数衰减；当 λ 为正数时，平衡点为排斥子，系统不稳定，表现为指数增长。

类似地，我们考察二维线性动力学系统的平衡点和稳定性。易知，当 \dot{x} 和 \dot{y} 均等于 0 时， x 和 y 均等于 0，即系统的平衡点为 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ 。类比一维线性动力学系统，我们猜测系统的稳定性应与系数矩阵 L 的特征有关。

事实上，二维线性动力学系统的稳定性取决于系数矩阵 L 的两个重要特征：**迹 tr (trace)** 和 **行列式 det (determinant)**。更确切地说，取决于系数矩阵 L 的特征值 1) 是否包含虚部，以及 2) 实部的正负。 L 的迹为主对角线元素之和（即 $a+d$ ），二阶方阵 L 的行列式为主对角线元素之积减去副对角线元素之积（即 $ad-bc$ ）。

下面我们求解 L 的特征值 λ ：

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a+d)}_{tr} + \underbrace{ad-bc}_{det} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}] = \frac{1}{2} (tr \pm \sqrt{tr^2 - 4det})$$

一元二次方程的判别式：

$$\Delta = tr^2 - 4det$$

一元二次方程的韦达定理：

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + d = tr \\ \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc = det \end{cases}$$

1. 当判别式 $tr^2 - 4det > 0$ 时，方程有两个不相等的实根， λ_1 和 λ_2 均为实数，不包含虚部。
2. 当判别式 $tr^2 - 4det = 0$ 时，方程有两个相等的实根， λ_1 和 λ_2 均为实数，不包含虚部。
3. 当判别式 $tr^2 - 4det < 0$ 时，方程无实根，有两个共轭的虚根， λ_1 和 λ_2 均为虚数，包含虚部。

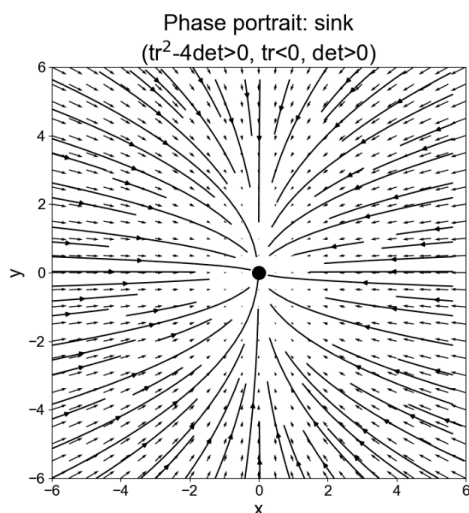
求解特征值的同时，还可以根据方程 $Lv = \lambda v$ ，解出两个特征值对应的特征向量 v_1 和 v_2 ，求解过程暂不展开。下面我们分别对判别式的符号以及实部的正负进行探讨，共 10 种可能的相图形态。

判别式为正

当判别式为正值时，系数矩阵 L 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 为两个不相等的实数。我们进而讨论两个特征值的正负号，判断平衡点的稳定性。

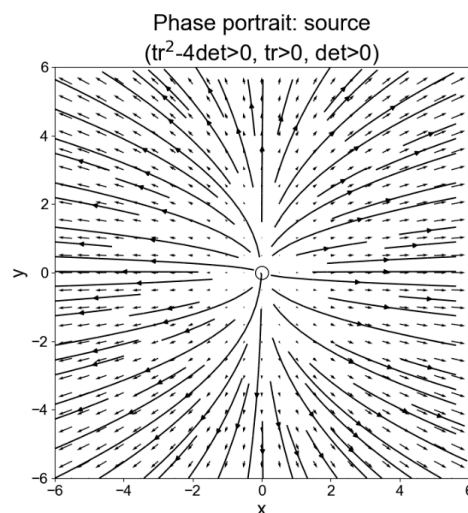
1. **汇点 (sink)**。当两个特征值均为负数，即两根之和 $\text{tr} < 0$ ，两根之积 $\text{det} > 0$ 时，动力学系统的相图如左下图所示。横轴为状态变量 x ，纵轴为状态变量 y ，箭头的方向和长度代表该点导数的正负和大小。所有轨迹沿两个特征向量方向汇聚到平衡点，称该平衡点为汇点，汇点的稳定性为稳定。
2. **源点 (source)**。当两个特征值均为正数，即两根之和 $\text{tr} > 0$ ，两根之积 $\text{det} > 0$ 时，动力学系统的相图如右下图所示。所有轨迹从平衡点沿两个特征向量方向发散，称该平衡点为源点，源点的稳定性为不稳定。

图表16： 二维线性动力学系统的相图之汇点



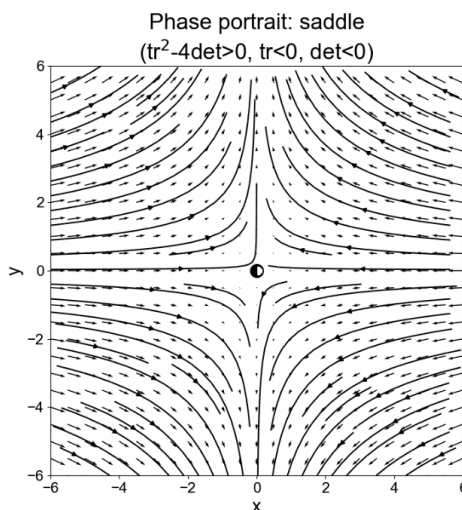
资料来源：华泰证券研究所

图表17： 二维线性动力学系统的相图之源点



资料来源：华泰证券研究所

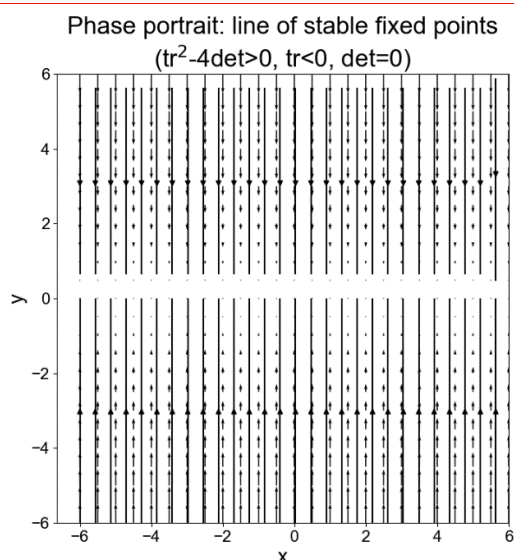
图表18： 二维线性动力学系统的相图之鞍点



资料来源：华泰证券研究所

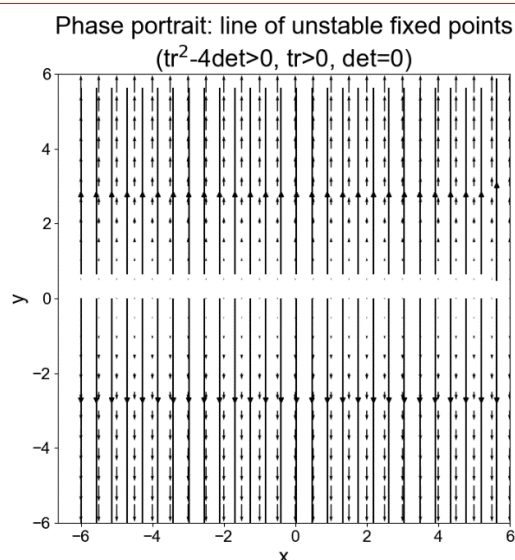
3. **鞍点 (saddle)**。当两个特征值为一正一负，即两根之积 $\det < 0$ 时，动力学系统的相图如上图所示。轨迹首先沿 x 方向，向平衡点附近汇聚，随后从平衡点附近出发，沿 y 方向发散。当系数矩阵取 L 其它值，更一般的情形为，轨迹首先沿着负的特征值对应的特征向量方向，向平衡点汇聚，随后从平衡点附近出发，沿正的特征值对应的特征向量方向发散。称该平衡点为鞍点，鞍点的稳定性为半稳定。
4. **稳定平衡点组成的直线 (line of stable fixed points)**。当两个特征值为一负一 0，即两根之和 $\text{tr} < 0$ ，两根之积 $\det = 0$ 时，动力学系统的相图如左下图所示。此时所有轨迹平行于 y 轴，最终汇聚到 x 轴上的平衡点。当系数矩阵 L 取其它值，更一般的情形为，所有轨迹为平行线，最终汇聚到与轨迹垂直方向的平衡点。
5. **不稳定平衡点组成的直线 (line of unstable fixed points)**。当两个特征值为一正一 0，即两根之和 $\text{tr} > 0$ ，两根之积 $\det = 0$ 时，动力学系统的相图如右下图所示。此时所有轨迹平行于 y 轴，从 x 轴上的平衡点沿 y 方向发散。当系数矩阵 L 取其它值，更一般的情形为，所有轨迹为平行线，从与轨迹垂直方向的平衡点沿平行线方向发散。

图表19：二维线性动力学系统的相图之稳定平衡点组成的直线



资料来源：华泰证券研究所

图表20：二维线性动力学系统的相图之不稳定平衡点组成的直线



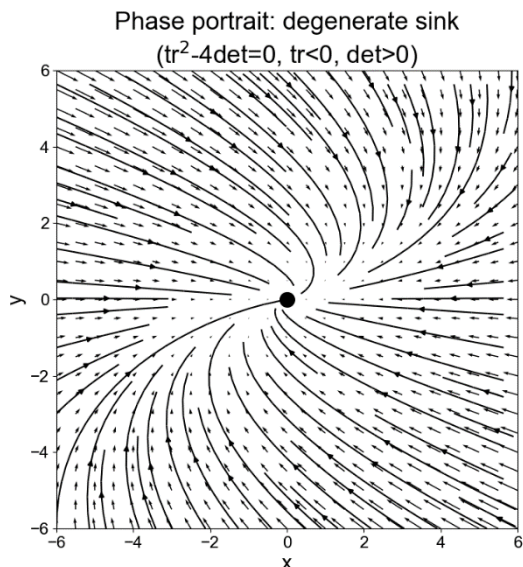
资料来源：华泰证券研究所

判别式为 0

当判别式为 0 时，系数矩阵 L 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 为两个相等的实数。我们同样讨论两个特征值的正负号，判断平衡点的稳定性。

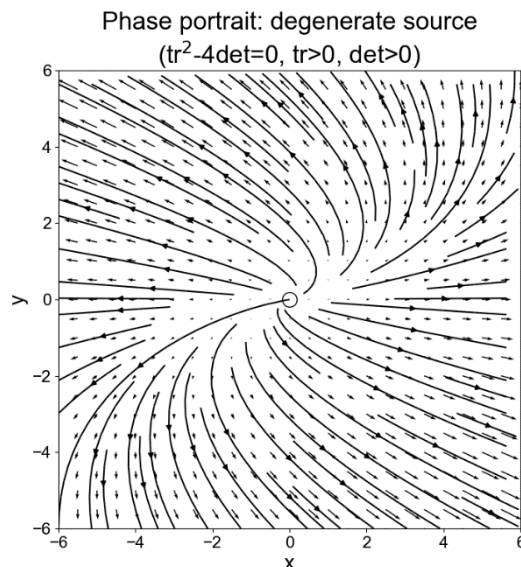
6. **退化汇点 (degenerate sink)**。当两个特征值均为负数，即两根之和 $\text{tr} < 0$ ，两根之积 $\det > 0$ 时，动力学系统的相图如左下图所示。此时两个特征向量中至少有一个为零向量，所有轨迹沿非零的特征向量方向汇聚到平衡点，称该平衡点为退化汇点，退化汇点的稳定性为稳定。特别地，当两个特征向量均为零向量时，平衡点为稳定星结点 (stable star node)，可以视作退化汇点的特例，该情况较为特殊，本文暂不展开。
7. **退化源点 (degenerate source)**。当两个特征值均为正数，即两根之和 $\text{tr} > 0$ ，两根之积 $\det > 0$ 时，动力学系统的相图如右下图所示。此时两个特征向量中至少有一个为零向量，所有轨迹从平衡点沿非零的那个特征向量方向发散，称该平衡点为退化源点，退化源点的稳定性为不稳定。特别地，当两个特征向量均为零向量时，平衡点为不稳定星结点 (unstable star node)，可以视作退化源点的特例，该情况较为特殊，本文暂不展开。

图表21： 二维线性动力学系统的相图之退化汇点



资料来源：华泰证券研究所

图表22： 二维线性动力学系统的相图之退化源点



资料来源：华泰证券研究所

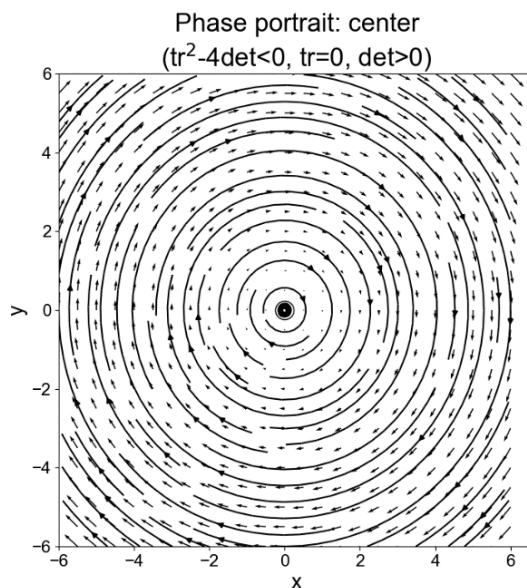
当两个特征值均为 0，即两根之和 $\text{tr}=0$ ，两根之积 $\det=0$ 时， x 的导数和 y 的导数恒为由初始条件决定的常数，即速度方向和大小不变的匀速运动（uniform motion），轨迹不存在汇聚或发散现象。该情况极为特殊，一般不作讨论。

判别式为负

当判别式为负时，系数矩阵 L 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 为两个共轭的虚数，其实部相等。我们讨论两个特征值实部的正负号，判断平衡点的稳定性。

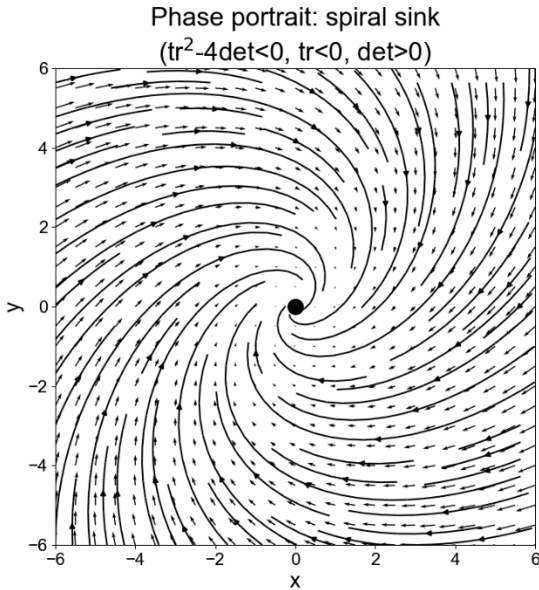
8. **中心 (center)**。当两个特征值的实部为 0，即两根之和 $\text{tr}=0$ ，两根之积 $\det > 0$ 时，动力学系统的相图如下图所示。所有轨迹为同心圆或同心椭圆，以平衡点为圆心，称该点为中心。中心的稳定性为中性稳定。在二维线性动力学系统相图的 10 种形态中，只有中心这种情况，相图的轨迹为闭合轨道。这一结论很重要，后续我们还会提到。

图表23： 二维线性动力学系统的相图之中心



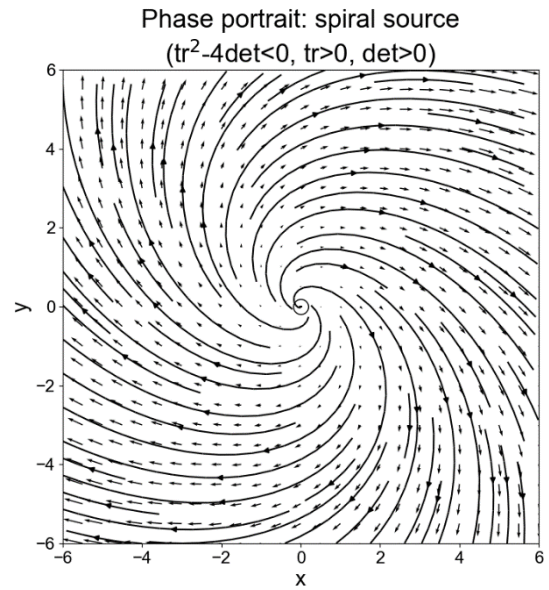
资料来源：华泰证券研究所

图表24： 二维线性动力学系统的相图之螺旋汇点



资料来源：华泰证券研究所

图表25： 二维线性动力学系统的相图之螺旋源点

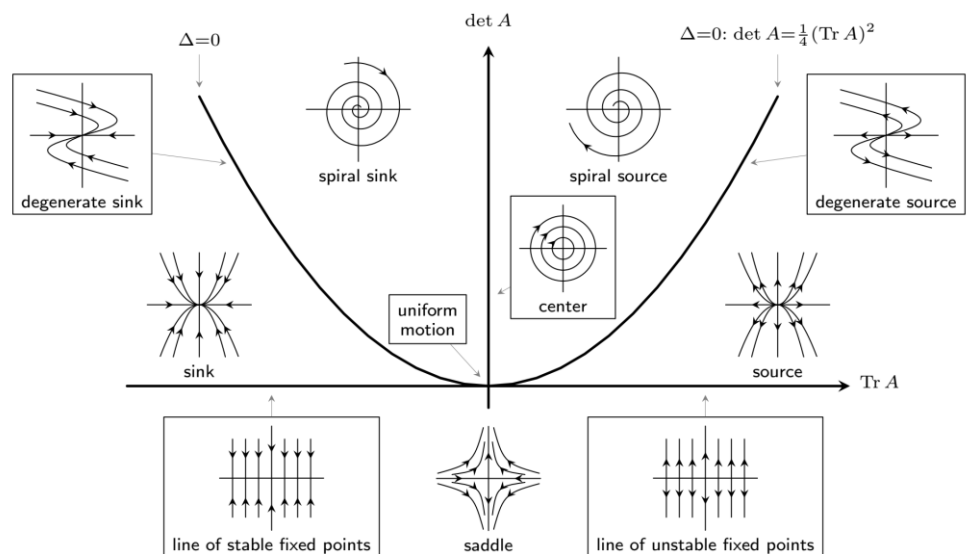


资料来源：华泰证券研究所

9. **螺旋汇点 (spiral sink)**。当两个特征值的实部为负，即两根之和 $\text{tr} < 0$ ，两根之积 $\det > 0$ 时，动力学系统的相图如左上图所示。所有轨迹以螺旋方式汇聚到平衡点，称该点为螺旋汇点，螺旋汇点的稳定性为稳定。
10. **螺旋源点 (spiral source)**。当两个特征值的实部为正，即两根之和 $\text{tr} > 0$ ，两根之积 $\det > 0$ 时，动力学系统的相图如右上图所示。所有轨迹以螺旋方式从平衡点向外发散，称该点为螺旋源点，螺旋源点的稳定性为不稳定。

二维线性动力学系统相图分类

图表26： 二维线性动力学系统的相图分类

Poincaré Diagram: Classification of Phase Portraits in the $(\det A, \text{Tr } A)$ -plane

资料来源：texample.net, 华泰证券研究所

回顾上述二维线性动力学系统相图的 10 种形态。我们首先根据判别式 $\text{tr}^2 - 4\det$ 进行分类：

1. 当判别式大于 0 时，相图的轨迹沿两个特征向量方向运动；
2. 当判别式等于 0 时，相图的轨迹是非零特征向量方向的平行线；
3. 当判别式小于 0 时，相图展现出周期运动的特性，轨迹为圆周或螺旋线。

其次根据特征值实部的正负号进行分类：

1. 当两个特征值的实部均为负数，或为一负一 0 时，相图的轨迹最终汇聚到平衡点，平衡点的稳定性为稳定；
2. 当两个特征值的实部均为正数，或为一正一 0 时，相图的轨迹从平衡点发散，平衡点的稳定性为不稳定；
3. 当两个特征值的实部为一正一负时，相图的轨迹沿负特征值对应的特征向量方向汇聚到鞍点附近，随后沿正特征值对应的特征向量方向发散，鞍点的稳定性为半稳定。

总的看，负特征值类似负反馈，对应稳定；正特征值类似正反馈，对应不稳定。这与一维动力学系统有相似之处。判断特征值正负号的过程，可借助一元二次方程的韦达定理，转化为判断系数矩阵迹 tr 和行列式 \det 的正负号。

根据判别式、迹和行列式判断相图形态的过程，可以概括为上图。该图由 Gernot Salzer 制作并上传至开源素材网站 texample.net。其中抛物线代表判别式，抛物线上方代表判别式小于 0，抛物线下方代表判别式大于 0；横轴和纵轴分别代表迹和行列式，第一象限对应两个正的特征值，第二象限对应两个负的特征值，第三和第四象限对应一正一负的情况。二维线性动力学系统相图的 10 种分类均体现在图中。

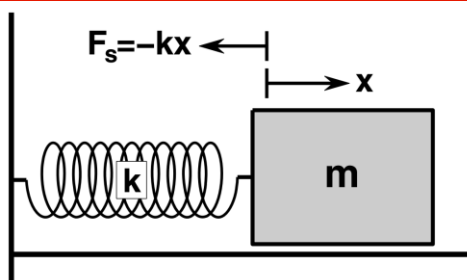
还有两点需要说明：

1. 当判别式小于 0 时，动力学系统展现出周期运动的特性。这一现象并不是偶然，后续我们将做论证和说明。
2. 关于上述相图分类的理解和记忆，推荐康奈尔大学应用数学系教授斯托加茨（Steven Strogatz）编写的经典教材 *Nonlinear Dynamics and Chaos*，以罗密欧与朱丽叶之间的爱情为例，分析二维线性动力学系统的相图和稳定性，饶有趣味。

弹簧振子的简谐振动和阻尼振动

弹簧振子可以视作特殊的二维线性动力学系统，本节以弹簧振子的简谐振动和阻尼振动为例，重温二维线性动力学系统的基本要素。

图表 27： 弹簧振子示意图



资料来源：Nonlinear Dynamics in Complex Systems，华泰证券研究所

如上图所示，弹簧振子的劲度系数为 k ，质量为 m ，振子同时受到与速度大小成正比、方向相反的阻力，比例系数为 γ 。当振子运动到某个位置 x 时，结合牛顿第二定律 $F=ma$ 、胡克定律 $F_s = -kx$ 以及阻尼计算公式：

$$m\ddot{x} = F = F_s + F_f = -\gamma\dot{x} - kx$$

整理可得描述振子运动的二阶动力学系统微分方程：

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\gamma/m=2\beta$, $k/m=\omega^2$, 得到:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = 0$$

其中 β 为阻尼因子, ω 为振子的固有频率。令:

$$y = \dot{x}$$

将二阶动力学系统改写成二维线性动力学系统的标准形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2x - 2\beta y \end{cases}$$

其中系数矩阵 L :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\beta \end{pmatrix}$$

易知系统的稳定点为 $(x,y)=(0,0)$ 。当不考虑阻尼项, 即 $\beta=0$ 时, 称系统为简谐振动。当考虑阻尼项, 即 $\beta>0$ 时, 称系统为阻尼振动。这两种情况分别对应不同的稳定性及相图分类, 下面我们将予以讨论。

简谐振动

当阻尼因子 $\beta=0$ 时, 系数矩阵 L 为:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的迹 tr 、行列式 det 和判别式 Δ 分别为:

$$tr = 0, det = \omega^2 > 0, \Delta = tr^2 - 4det = -4\omega^2 < 0$$

对应第 8 种相图形态——中心。振子的位置 x 和速度 y 做循环往复的周期运动。

事实上, 直接求解简谐振动微分方程, 可得“上帝视角”的解:

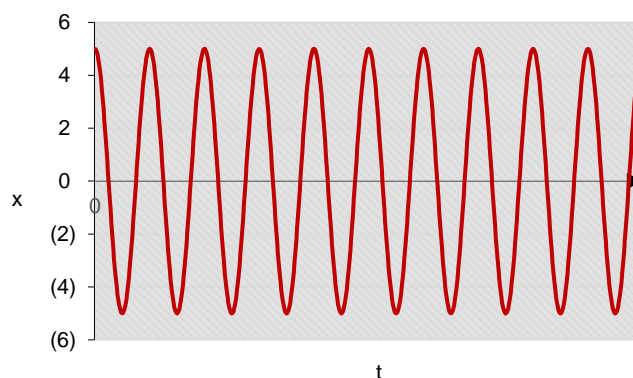
$$x(t) = ce^{\lambda_1 t} + c^*e^{\lambda_2 t}$$

求解过程从略。其中 λ_1 和 λ_2 为 L 的两个特征值, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ 。将特征值代入, 得到:

$$x(t) = ce^{i\omega t} + c^*e^{-i\omega t} = 2c \cos \omega t$$

其中第二个等号根据欧拉公式推得。上式中 c 为由初始条件决定的常数。振子位置 x 的运动方程为周期振动的余弦波, 位置随时间变化的图像如下。

图表28: 弹簧振子的简谐振动



资料来源: 华泰证券研究所

阻尼振动

当阻尼因子 $\beta>0$ 时, 系数矩阵 L 为:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\beta \end{pmatrix}$$

矩阵的迹 tr 、行列式 det 和判别式 Δ 分别为:

$$tr = -2\beta < 0, det = \omega^2 > 0, \Delta = tr^2 - 4det = 4\beta^2 - 4\omega^2$$

判别式的正负号取决于阻尼因子 β 和固有频率 ω 的大小关系, 下面进行讨论。

1. 当 $\beta > \omega$ 时，判别式为正，特征值为两个不相等的实数。结合 $\text{tr} < 0$ 、 $\text{det} > 0$ ，可知两个特征值均为负，对应第 1 种相图形态——汇点。振子的位置 x 和速度 y 沿特征向量方向汇聚到平衡点。

此时，直接求解简谐振动微分方程，可得“上帝视角”的解：

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

求解过程从略。其中 c_1 和 c_2 是由初始条件决定的常数， λ_1 和 λ_2 为 L 的两个特征值：

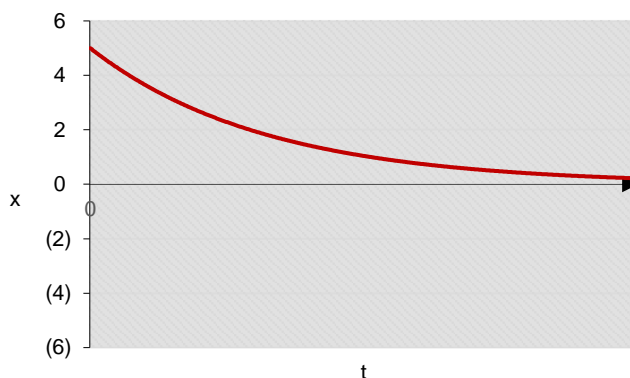
$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

将特征值代入，得到：

$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t})$$

振子位置 x 的运动方程为指数衰减，位置随时间变化的图像如下。

图表29： 弹簧振子的指数衰减



资料来源：华泰证券研究所

2. 当 $\beta = \omega$ 时，判别式为 0，特征值为两个相等的实数。结合 $\text{tr} < 0$ 、 $\text{det} > 0$ ，可知两个特征值均为负，对应第 4 种相图形态——退化汇点。振子的位置 x 和速度 y 沿非零特征向量方向汇聚到平衡点。

这种情况是第 1 种情况在 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时的特例，易得：

$$x(t) = c e^{-\beta t}$$

其中 c 是由初始条件决定的常数。振子位置 x 的运动方程同样为指数衰减。

3. 当 $\beta < \omega$ 时，判别式为负，特征值为两个共轭的虚数。结合 $\text{tr} < 0$ ，可知两个特征值的实部为负，对应第 9 种相图形态——螺旋汇点。振子的位置 x 和速度 y 以螺旋方式汇聚到平衡点。

微分方程的解和第 1 种情况相同，我们仍从该“上帝视角”的解出发：

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

此时 L 的两个特征值 λ_1 和 λ_2 为：

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$

将特征值代入，根据欧拉公式，得到：

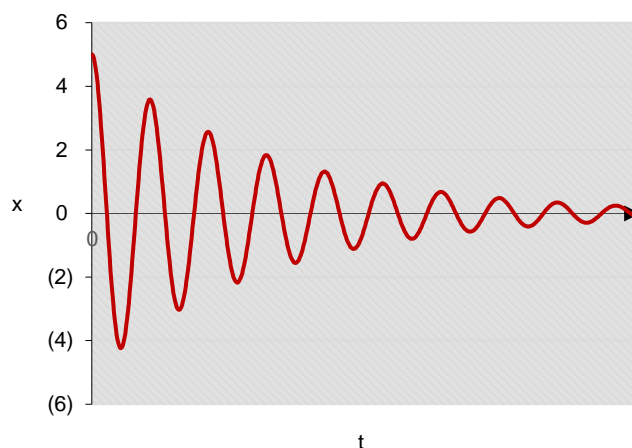
$$x(t) = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t}) = c e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t + \varphi)$$

其中 c_1 、 c_2 、 c 是由初始条件决定的常数， c_1 和 c_2 为共轭的虚数， φ 为初始相位：

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\beta}{\omega}\right)$$

上述运动方程包含两部分， $e^{-\beta t}$ 代表振幅随指数衰减，余弦函数 \cos 代表周期运动，称这种运动形式为阻尼振动，振子位置 x 位置随时间变化的图像如下。

图表30： 弹簧振子的阻尼衰减



资料来源：华泰证券研究所

综合以上对弹簧振子的分析，我们发现阻尼因子 β 决定了该二维动力学系统的最终状态， $\beta \geq \omega$ 时系统表现为指数衰减， $0 < \beta < \omega$ 时系统表现为阻尼振动， $\beta = 0$ 时系统表现为简谐振动。当 $\beta < \omega$ 时，振子展现出周期运动的特性。系统稳定性随参数变化而发生变化的现象称为分岔，系统在参数临界位置下稳定性的改变称为相变（phase transition）。

至此我们对二维线性动力学系统的探索将告一段落。接下来我们考察更为复杂的二维非线性动力学系统。

二维非线性动力学系统

二维非线性动力学系统的一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

如何研究二维非线性动力学系统？我们首先回忆从一维线性动力学系统扩展到一维非线性动力学系统的研究思路，随后尝试类比到二维动力学系统。

一维动力学系统回顾

任意一维动力学系统均可以表示成如下形式：

$$\dot{x} = f(x)$$

对于一维线性动力学系统， $f(x)$ 仅包含 x 的一次项：

$$\dot{x} = f(x) = \lambda x$$

令 $\dot{x} = 0$ ，解得平衡点为 $\tilde{x} = 0$ ，平衡点的稳定性取决于参数 λ 的正负号。注意到 λ 实际上等价于 $f(x)$ 在平衡点 0 处的导数：

$$\lambda = f'(\tilde{x} = 0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\tilde{x}}$$

我们不妨换一种表述方式，一维线性动力学系统平衡点的稳定性取决于 $f'(0)$ 的正负号：

1. 当 $f'(0)$ 为负时，平衡点为吸引子，稳定性为稳定，系统表现为指数衰减；
2. 当 $f'(0)$ 为正时，平衡点为排斥子，稳定性为不稳定，系统表现为指数增长；
3. 当 $f'(0)$ 为 0 时，稳定性为中性稳定，系统表现为恒定不变。

对于一维非线性动力学系统， $f(x)$ 可以为任意形式：

$$\dot{x} = f(x)$$

令 $\dot{x} = 0$ ，解得若干平衡点。对于每个平衡点 \tilde{x} ，稳定性取决于 $f(x)$ 在平衡点处的导数，即：

$$f'(\tilde{x}) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=\tilde{x}}$$

1. 当 $f'(\tilde{x})$ 为负时，该平衡点为吸引子，稳定性为稳定，系统表现为指数衰减，最终状态为归于该平衡点；
2. 当 $f'(\tilde{x})$ 为正时，该平衡点为排斥子，稳定性为不稳定，系统表现为指数增长，最终状态为发散或归于另一个平衡点；
3. 当 $f'(\tilde{x})$ 为 0 时，该平衡点为鞍点，稳定性为半稳定，最终状态取决于初始条件。

由此可见，一维线性动力学系统和非线性系统的研究方法是相似的，首先求平衡点，其次判断 $f'(x)$ 在平衡点处的导数，根据导数的正负号确定平衡点的稳定性。

二维动力学系统推广

实际上，二维线性动力学系统和非线性系统的研究方法也是相似的。任意二维动力学系统均可以表示成如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

对于二维线性动力学系统， $f(x)$ 和 $g(x)$ 仅包含 x 和 y 的一次项：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = ax + by \\ \dot{y} = g(x, y) = cx + dy \end{cases}$$

或表示成系数矩阵 L 的形式：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

令 $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ ，解得平衡点 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ 。平衡点的稳定性取决于系数矩阵 L 的判别式 $\text{tr}^2 - 4\det$ 、迹 tr 和行列式 \det 。根据判别式的正负（即 L 特征值是否包含虚部）判断相图轨迹是否存在周期性，根据迹和行列式的正负（即 L 特征值实部的正负）判断平衡点是汇聚（稳定）、发散（不稳定）还是鞍点（半稳定）。

接下来介绍本节最重要的推导。参数矩阵 L 实际上等价于在平衡点处微分方程组的雅可比矩阵（Jacobi matrix）：

$$L = J(\tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{x=\tilde{x}, y=\tilde{y}}$$

雅可比矩阵是多变量函数的一阶偏导数以固定方式排列成的矩阵，其中第 i 行第 j 列元素为第 i 个函数关于第 j 个变量的一阶偏导数，雅可比矩阵通常以字母 J 表示。

引入雅可比矩阵的概念后，我们可以这样表述：**二维线性动力学系统的稳定性取决于平衡点处微分方程组雅可比矩阵 $J(0,0)$ 的判别式 $\text{tr}^2 - 4\det$ 、迹 tr 和行列式 \det 。**

对于二维非线性动力学系统， $f(x)$ 和 $g(x)$ 可以为任意形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

令 $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ ，解得若干平衡点 (\tilde{x}, \tilde{y}) 。每个平衡点的稳定性取决于该平衡点处雅可比矩阵 $J(\tilde{x}, \tilde{y})$ 的判别式 $\text{tr}^2 - 4\det$ 、迹 tr 和行列式 \det 。根据判别式的正负判断该平衡点附近的轨迹是否存在周期性，根据迹和行列式的正负判断该平衡点的汇聚（稳定）、发散（不稳定）还是鞍点（半稳定）。

总的来看，二维线性动力学系统和非线性系统的研究方法也是相似的，首先求平衡点，其次判断平衡点处雅可比矩阵的判别式、迹和行列式。根据判别式的正负判断平衡点附近轨迹是否存在周期性，根据迹和行列式的正负判断平衡点是汇聚（稳定）、发散（不稳定）还是鞍点（半稳定）。

实例：同宿轨道

接下来我们试举一例，考察下面的二维非线性动力学系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = y - y^2 \\ \dot{y} = g(x, y) = x \end{cases}$$

首先求解平衡点，令 $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ ，解下列二元方程组：

$$\begin{cases} y - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

解得两个平衡点 $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (0, 0)$ 和 $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (0, 1)$ 。

其次求解雅可比矩阵：

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

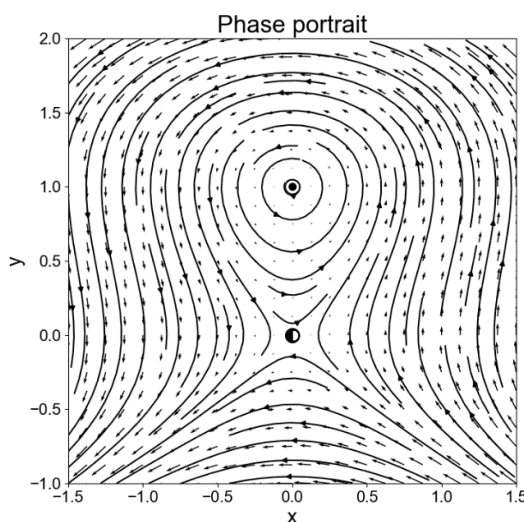
计算两个平衡点处的雅可比矩阵：

$$J(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对于第 1 个平衡点 $(0, 0)$ ，迹 $\text{tr}=0$ ，行列式 $\det=-1<0$ ，判别式 $\text{tr}^2-4\det=4>0$ 。判别式为正，两个特征值之积小于 0，表明两个特征值为一正一负的两个实数，该平衡点为鞍点，稳定性为半稳定。

对于第 2 个平衡点 $(0, 1)$ ，迹 $\text{tr}=0$ ，行列式 $\det=1>0$ ，判别式 $\text{tr}^2-4\det=-4<0$ 。判别式为负，两个特征值之和等于 0，表明两个特征值为实部为 0 的共轭虚数，该平衡点为中心，稳定性为中性稳定，该平衡点附近的轨迹为闭合圆环。

图表31： 二维非线性动力学系统同宿轨道的相图



资料来源：华泰证券研究所

我们绘制该二维非线性动力学系统的相图，相图表明上述分析是正确的。相图中包含两个平衡点。靠下的平衡点为鞍点，其周围的轨迹沿左上-右下方向汇聚到鞍点附近，随后从鞍点附近沿右上-左下方向发散。靠上的平衡点为中心，其周围的轨迹以逆时针方向绕中心做周期运动。系统最终状态取决于初始状态，即点在相图的初始位置，可能发散，可能落在鞍点，也可能绕中心做周期运动。实际上，该相图是同宿轨道（homoclinic orbit）的一种，关于同宿轨道本文暂不展开。

庞加莱-本迪克松定理

在考察多种二维动力学系统之后，我们观察到系统的最终状态只存在有限种可能：发散，汇聚到定点，绕中心做周期运动。其中前者为不稳定状态，后两者为稳定状态。二维动力学系统是否存在其它可能的稳态？事实上，答案是否定的，这一问题可以由著名的**庞加莱-本迪克松定理**（Poincaré-Bendixon theorem）回答。

庞加莱-本迪克松定理的一种通俗表述为：在无限长的时间内，二维动力学系统相图在有限区域内的轨迹若非归于定点，那么轨迹便是闭合圆环或者收敛至闭合圆环。更通俗的表述是：**二维动力学系统的稳态如果不是定点，那么便是周期。**

二维动力学系统产生周期的条件

本章的最后，我们试着以通俗的视角思考如下问题：何种条件下，二维动力学系统展现出周期性？我们从微分方程解和系数矩阵两个视角尝试解释。**第二种系数矩阵的解释以及引申出的探讨是全文最重要的论述。**

微分方程解的解释

第一种解释从二维线性动力学系统微分方程“上帝视角”的解出发。对于如下系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

写成矩阵乘法的形式：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

求解上述二元一阶齐次常微分方程组，可得通解：

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

其中 c_1 和 c_2 是由初始条件决定的常数， λ_1 和 λ_2 是系数矩阵 L 的特征值， v_1 和 v_2 是其对应的特征向量， v_1 和 v_2 均为长度为 2 的列向量。

如何才能使上面的通解产生周期？我们采用排除法来推测：

1. 对于常数 c 和特征向量 v ，不可能产生周期。因此周期产生的关键应该在 $e^{\lambda t}$ 这一项。
2. 如果特征值 λ 是实数，那么 $e^{\lambda t}$ 随 λ 的正负表现为指数增长或指数衰减，也不可能产生周期。因此周期产生的关键在于 λ 必须包含虚部，即表示成 $\lambda = a + bi$ 的形式，且 $b \neq 0$ 。
3. 此时， $e^{\lambda t}$ 可以写成 $e^{at}e^{ibt}$ 的形式。当 $a > 0$ 时，系统仍包含指数增长项 e^{at} ，最终仍会趋向于发散；当 $a < 0$ 时，系统仍包含指数衰减项 e^{at} ，最终仍会趋向于定点。因此周期产生的关键在于 λ 的实部 a 必须等于 0。
4. 当 $a = 0$ 时， $e^{\lambda t}$ 可以写成 e^{ibt} 。根据欧拉公式：

$$e^{ibt} = \cos bt + i \sin bt$$

此时，微分方程的解必然包含余弦函数和正弦函数项，存在稳定的周期。

由此可知，**稳定周期产生的条件是 L 的特征值必须为纯虚数**，其充要条件为判别式 $\text{tr}^2 - 4\det < 0$ 并且迹 $\text{tr} = 0$ 。

系数矩阵的解释

第二种解释从二维线性动力学系统的系数矩阵出发。对于如下系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

写成矩阵乘法的形式：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

当平衡点为中心，即轨迹为闭合圆环的条件是系数矩阵 L 满足下列条件：

1. 判别式 $\text{tr}^2 - 4\det < 0$;
2. 矩阵的迹 $\text{tr} = a + d = 0$ 。

可以推知：

1. a 和 d 互为相反数， $ad \leq 0$;
2. 矩阵的行列式 $\det = ad - bc > 0$ ，即 $ad > bc$ 。

进而推知：

1. $bc < 0$ ， b 和 c 异号；
2. 由于 ad 和 bc 均为非正数， $|ad| < |bc|$ 。

关于四个参数，可以作如下解读： a 代表 x 对 x 的影响， b 代表 y 对 x 的影响， c 代表 x 对 y 的影响， d 代表 y 对 y 的影响。参数的符号代表影响方向，正数代表正反馈，负数代表负反馈。参数的绝对值代表影响程度，绝对值越大代表影响越强。那么，上面的两个结论可以“翻译”为：

1. b 和 c 异号，意味着“ y 对 x 的影响”和“ x 对 y 的影响”方向相反。两个状态变量中， y 对 x 为正反馈（或负反馈），反过来 x 对 y 为负反馈（或正反馈）。换言之，状态变量相互之间同时存在正反馈和负反馈。
2. $|ad| < |bc|$ ，意味着“自己对自己的影响”小于“别人对自己的影响”。换言之，以 bc 为代表的“状态变量相互之间的正负反馈”应占据主导作用。

对以上两点还可以做进一步思考：

1. 变量相互之间的正负反馈是合理的。如果只存在负反馈，系统将归于定点，最终寂灭；如果只存在正反馈，系统将走向发散，最终湮灭。正负反馈的综合才能造就周期。
2. “自己对自己的影响”小于“别人对自己的影响”也是合理的。如果每个变量受自身影响占据主导，那么其本质仍是一维动力学系统，而一维动力学系统不存在周期性。

一句话概括：当状态变量相互之间的正负反馈占据主导时，二维动力学系统趋于周期运动。

正负反馈与周期

很多人认为二维动力学系统是理解世间万象的“众妙之门”，一个重要的原因是，上面这句话很有可能道出了世界周而复始运转的本质。世界唯一不变的是变化本身。定点的稳态不常见，因为定点往往意味着寂灭。发散的不稳定状态也不常见，因为发散终归会走向湮灭。日升月落，寒来暑往，潮汐有信，聚散有时。我们能观察到的长期维持的稳态，往往都以周期或者类周期的形式存在。

天体的周期运行可以用简单的物理学定律刻画，然而自然界和人类社会更多的周期现象，是由无数微观个体相互作用而形成的系统系列的周期，我们认为理解系统的周期需要借助动力学系统。实际上，即使是简单的二维动力学系统，也能够模糊地刻画一部分周期现象，核心都是从系统内拆分出两个对立的变量，捕捉两个变量相互之间的正负反馈：

- 1) 自然界中捕食者和猎物数量的动态平衡可以由经典的 Lotka-Volterra 模型刻画。在这个二维动力学系统模型中，捕食者数量和猎物数量是两个对立的变量。猎物越多，捕食者就越多，这是正反馈部分。捕食者越多，猎物的生存空间受限，猎物反而会越少，这是负反馈部分。变量相互间的正负反馈使得两者数量都呈现周期性的波动。
- 2) 中国古代每隔两三百年的治乱周期可以由二维动力学系统刻画。将封建社会看成官—民两个对立变量构成的系统。纳税的民众数量越多，能够供养的官僚机构越庞大，这是正反馈部分。官僚机构越庞大，对民众的剥削越严重，民众的生存越艰难，民众数量越少，这是负反馈部分。变量相互间的正负反馈使得封建社会逃不开治与乱的轮回。
- 3) 经济活动中的产业生命周期也可以由利润率—参与者构成的二维动力学系统刻画。行业初期市场参与者较少，利润率较高。利润率越高，市场参与者数量增多，这是正反馈部分。市场参与者数量越多，竞争加剧，行业产能过剩，利润率降低，这是负反馈部分。变量相互间的正负反馈使得每个产业都经历着从成长到衰退的循环。

有别于天体运行，自然界和人类社会是充斥着不确定性的高度复杂的系统，系统中无数微观个体之间的正负反馈，造就了历史的兴衰成败，造就了世间的一切神奇。二维动力学系统向我们揭示，不确定性条件下的稳态正是周期。

高维动力学系统与混沌

从一维动力学系统到二维动力学系统，系统的复杂度大幅提升，平衡点的类型从 3 种跃升至 10 种，稳态从定点拓展到周期。如果继续提升维度，三维动力学系统以及更高维的动力学系统将展现出何种变化？

事实上，上述问题可以用《道德经》回应：“道生一，一生二，二生三，三生万物”。三维及以上动力学系统的稳态在一定条件下可能为定点或周期，在另一些条件下表现出更奇妙的特性：系统的状态是确定性的，但由于对初始条件极为敏感，本质上又是无法准确预测的。这种“无法预测的确定性”称为**混沌**（chaos）。

万物的本质可能是混沌。例如天气系统，理论上遵循确定性的物理学定律，但是由于系统过于复杂，**初始条件的微小扰动造成系统长期的巨大改变**。“巴西亚马逊雨林的蝴蝶扇动翅膀，可能引起美国得克萨斯州的龙卷风”，人们热衷于谈论的“蝴蝶效应”，正是由气象学家洛伦兹（Edward Lorenz）在 1963 年研究混沌现象时所提出，洛伦兹系统也是最早的混沌系统之一。

下面我们将沿着洛伦兹当时的研究轨迹，探索高维动力学系统与混沌的奥妙。

洛伦兹系统、混沌和蝴蝶效应

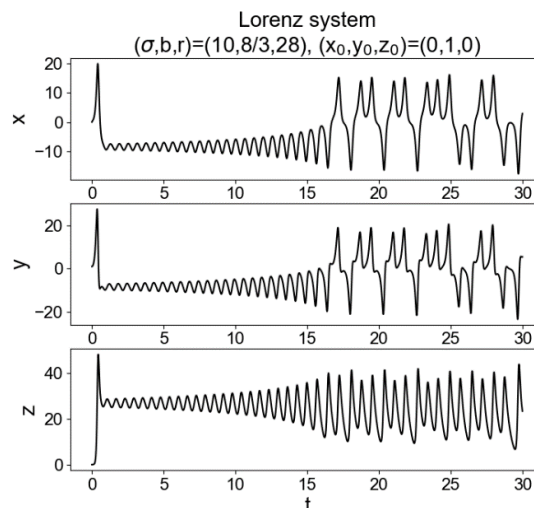
经典的三维动力学系统——洛伦兹系统如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

系统包含三个状态变量， x 代表大气对流运动强度， y 和 z 分别代表气流在水平方向和垂直方向上的温度变化。由于等式右侧包含 xy 和 xz 这两个二次项，洛伦兹系统为三维非线性动力学系统。系统包含 σ 、 r 和 b 三个控制参数，分别称为普朗特数（Prandtl number）、瑞利数（Rayleigh number）和宽高比（aspect ratio），各有其对应的物理学含义，这里暂不展开。一般情况下 σ 取 10， b 取 $8/3$ ， r 取 28。下面我们将固定 σ 和 b ，考察 r 的取值对系统的影响。

在进行理论探讨之前，我们首先通过数值模拟，对洛伦兹系统做直观了解。在给定的参数 $(\sigma, b, r) = (10, 8/3, 28)$ 和给定的初始条件 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ 下，状态变量 x 、 y 、 z 随时间 t 的变化如下图，我们展示 $t=0\sim 30$ 范围内的模拟结果。

图表32：洛伦兹系统在给定参数和初始条件下状态变量随时间变化

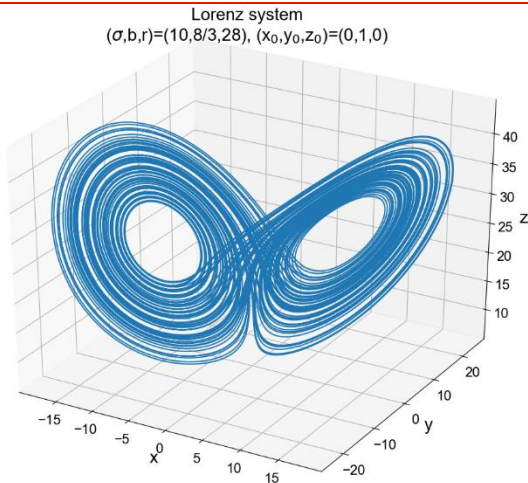


资料来源：华泰证券研究所

观察上图发现， x 、 y 、 z 的变化并非指数衰减或发散，也不是阻尼振动式的衰减或发散，更不是标准的周期运动，而是呈现出一种“非周期式”（aperiodic）的运动。这与我们之前了解的一维和二维动力学系统的稳态不同。

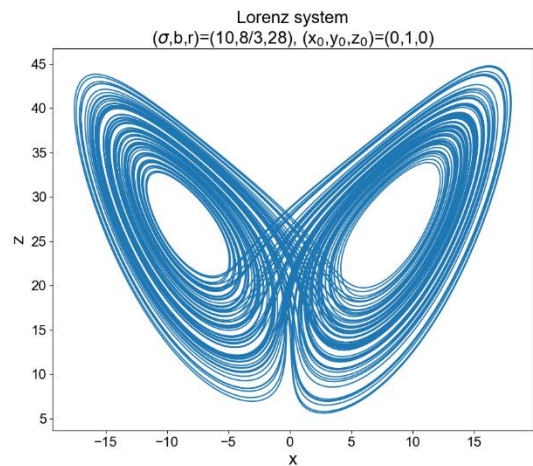
我们不妨以另一种视角观察刚才的数值模拟结果，将 x 、 y 、 z 随时间 t 变化的轨迹绘制在同一张图中，展示 $t=1000\sim 2000$ 范围内的模拟结果。左下图为三维视角，右下图为 xz 平面视角。经历足够长的时间，系统没有发散，也没有衰减至定点或者归于周期，其轨迹呈现出一种“蝴蝶式”的奇妙结构，这种结构称为**奇异吸引子**（strange attractor），系统的状态称为混沌。洛伦兹系统的奇异吸引子称为**洛伦兹吸引子**（Lorenz attractor）。洛伦兹吸引子也是混沌科学、非线性动力学等领域最为经典的标志之一。

图表33：洛伦兹系统状态变量变化轨迹（ $r=28$ ，三维视角）



资料来源：华泰证券研究所

图表34：洛伦兹系统状态变量变化轨迹（ $r=28$ ， xz 平面视角）

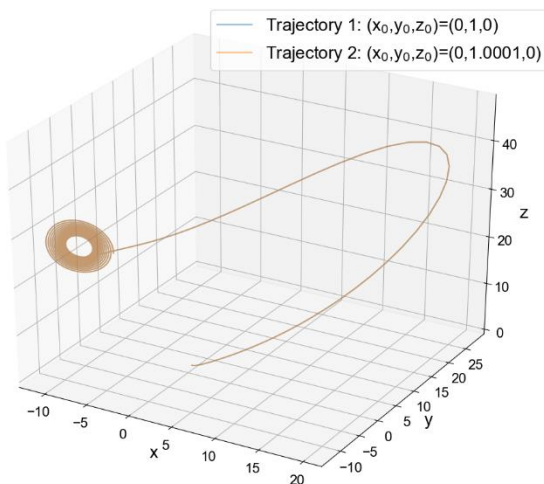


资料来源：华泰证券研究所

混沌最重要的性质是对初始条件极为敏感。下面两张图展示洛伦兹系统的两条模拟轨迹，分别以蓝色和橙色表示。系统参数不变， x 和 z 的初始值相同， y 的初始值分别为 1 和 1.0001，仅相差万分之一。

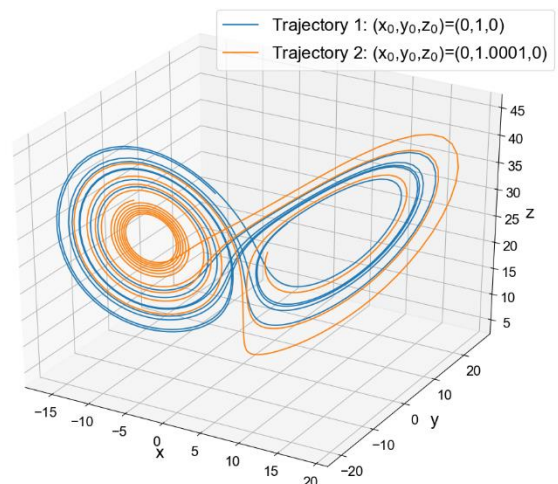
左下图为开始阶段 $t=0\sim 10$ 的轨迹，由于初始值较为接近，两条轨迹几乎重合（图中呈现为蓝色和橙色的混合色）。右下图为很长一段时间后 $t=990\sim 1000$ 的轨迹，尽管两条轨迹均在洛伦兹吸引子的区域内运动，但是运动路径完全不同。初值差之毫厘，终值谬以千里。

图表35：初始值对洛伦兹系统的影响（ $r=28$ ， $t=0\sim 10$ ）



资料来源：华泰证券研究所

图表36：初始值对洛伦兹系统的影响（ $r=28$ ， $t=990\sim 1000$ ）



资料来源：华泰证券研究所

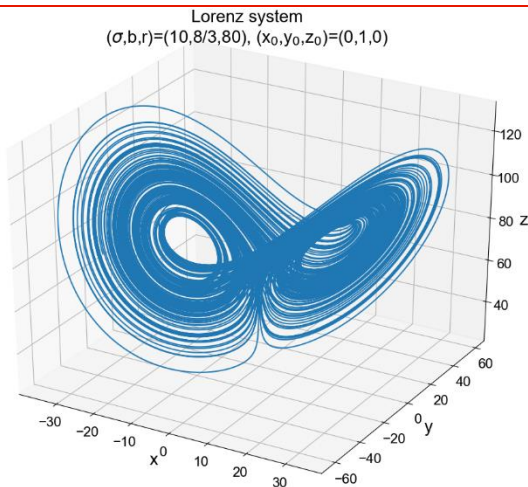
混沌系统“无法预测的确定性”也体现在上面的例子中。洛伦兹系统的方程组和参数均为定值，当 $t=0$ 时刻的初值已知，任意 t 时刻的状态变量 x 、 y 、 z 都应为确定性的结果。问题在于，实践中对初值的测量总存在误差，初值的微小误差经过足够长的时间均会被放大，使得 t 时刻的结果实际上无法预测。这也是长期天气预报难以准确的根本原因。人们熟知的“蝴蝶效应”正是来自于洛伦兹吸引子这只翩翩起舞的蝴蝶。

洛伦兹系统的稳态

上节我们讨论了当参数 $r=28$ 时洛伦兹系统的状态——混沌，或称奇异吸引子，这是一种不稳定状态。当参数 r 取其它值时，系统的状态是否会发生变化，是否可能出现稳态？

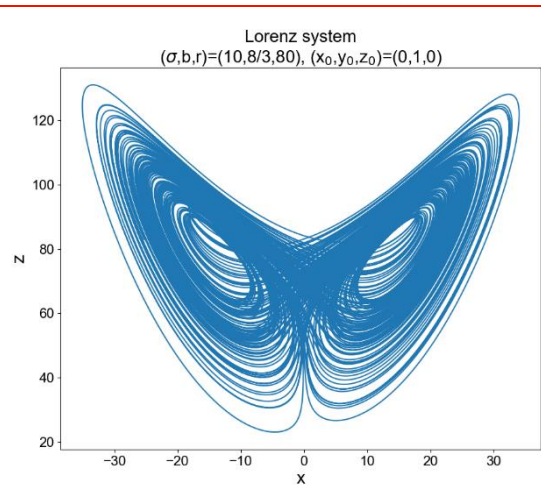
下面两张图展示 $r=80$ 的情况，此时系统状态仍为奇异吸引子，“蝴蝶”形态虽有一定差异，但无本质不同。

图表37：洛伦兹系统状态变量变化轨迹（ $r=80$ ，三维视角）



资料来源：华泰证券研究所

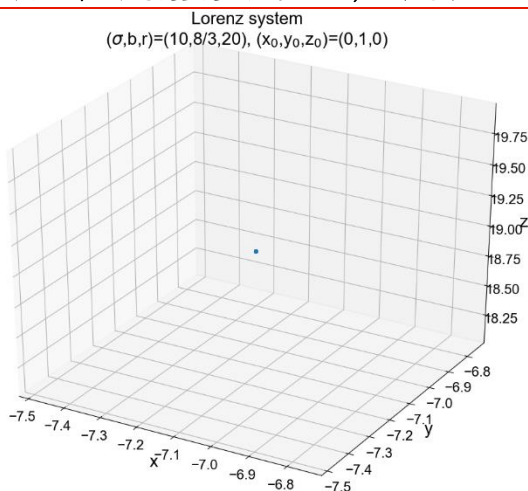
图表38：洛伦兹系统状态变量变化轨迹（ $r=80$ ，xz 平面视角）



资料来源：华泰证券研究所

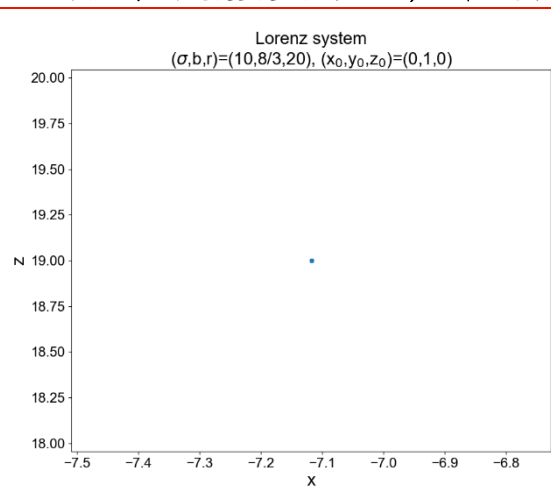
缩小 r ，如取 $r=20$ ，变化轨迹如下面两张图所示，此时系统收敛至平衡点，稳态为定点。

图表39：洛伦兹系统状态变量变化轨迹（ $r=20$ ，三维视角）



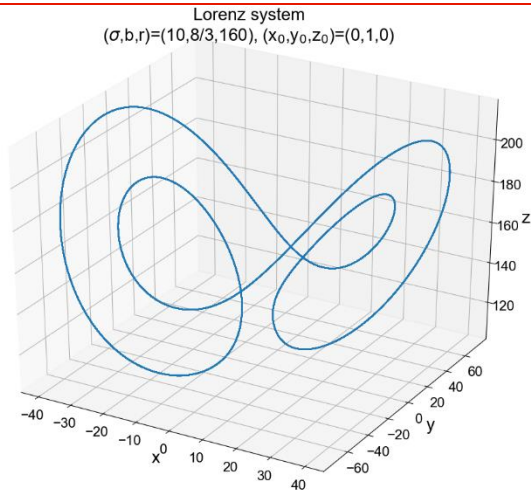
资料来源：华泰证券研究所

图表40：洛伦兹系统状态变量变化轨迹（ $r=20$ ，xz 平面视角）



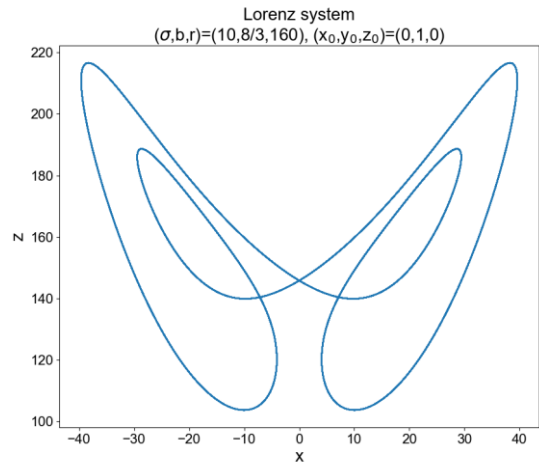
资料来源：华泰证券研究所

图表41: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 (r=160, 三维视角)



资料来源: 华泰证券研究所

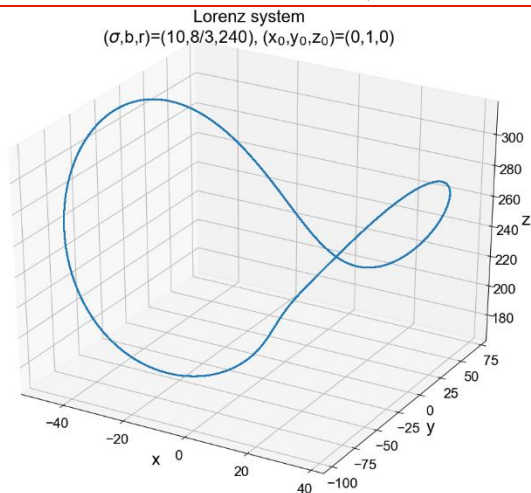
图表42: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 (r=160, xz 平面视角)



资料来源: 华泰证券研究所

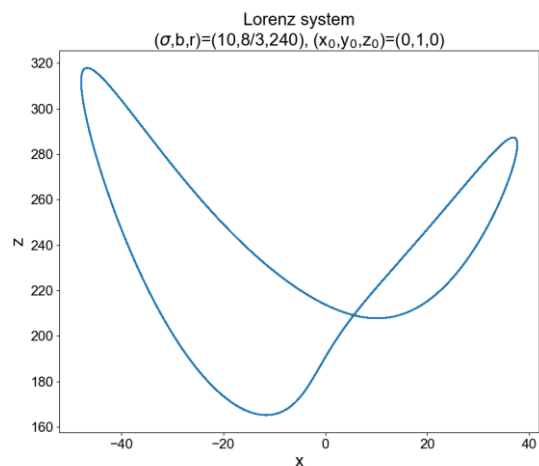
增大 r , 如取 $r=160$, 变化轨迹如下面两张图所示, 此时系统的稳态为双周期, 在三维空间中表现为一大一小两个嵌套的环。继续增大 r , 如取 $r=240$, 变化轨迹如下面两张图所示, 此时系统的稳态为单周期, 在三维空间中表现为单个环。以上两种情况的轨迹也称为极限环 (limit cycle)。

图表43: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 (r=240, 三维视角)



资料来源: 华泰证券研究所

图表44: 洛伦兹系统状态变量变化轨迹 (r=240, xz 平面视角)



资料来源: 华泰证券研究所

通过尝试, 我们定性观察到洛伦兹系统的状态可能存在定点、周期和奇异吸引子 (混沌) 三种形式, 其中定点和周期属于稳态。如何定量判断三维及以上动力学系统的稳定性?

高维动力学系统如何判断稳定性

对于一维动力学系统, 我们通过微分方程在平衡点处导数的正负号判断稳定性。对于二维动力学系统, 我们通过微分方程组雅可比矩阵在平衡点处的行列式、迹和判别式判断稳定性。对于高维动力学系统, 判断稳定性的方式有别于一维、二维系统。高维动力学系统通过计算李雅普诺夫指数 (Lyapunov exponents) 实现稳定性的判断。

回顾上节, 我们知道混沌的重要性质是对初始条件敏感。初始条件的微小改变, 经过很长一段时间后, 将造成系统的巨大改变。李雅普诺夫指数从数学的角度刻画这一特性, 核心计算公式如下:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t)}{\delta_0}$$

其中， δ_0 代表两条相邻轨迹初始条件之差，相邻意味着初始条件之差非常小， $\delta(t)$ 代表经过较短的时间 t 后两条路径之差。

1. 如果两条相邻轨迹之差随时间增大，那么两条轨迹表现为发散状态，此时 $\lambda > 0$ 。
 2. 如果两条相邻轨迹之差随时间减小，那么两条轨迹表现为收敛状态，此时 $\lambda < 0$ 。
 3. 如果两条相邻轨迹之差不随时间变化，那么两条轨迹表现为平行状态，此时 $\lambda = 0$ 。
- 因此， λ 可以表征轨迹在局部的发散或收敛特性。

对系统中轨迹在任意局部区域的 λ 求和，得到衡量全局发散或收敛特定的指标，即李雅普诺夫指数 λ ：

1. 当李雅普诺夫指数 $\lambda > 0$ 时，对于任意两条相邻轨迹，经过足够长的时间，轨迹将趋于发散而无法预测，系统状态为混沌（或称奇异吸引子）。
2. 当李雅普诺夫指数 $\lambda < 0$ 时，对于任意两条相邻轨迹，经过足够长的时间，轨迹将收敛至平衡点，系统稳态为定点。
3. 当李雅普诺夫指数 $\lambda = 0$ 时，对于任意两条相邻轨迹，经过足够长的时间，轨迹将保持平行关系，在图像上表现为两条平行的闭合环路，系统稳态为周期（或称极限环）。

在三维动力学系统中，状态变量的轨迹存在三个维度（即三维图像中的 x 、 y 、 z 坐标），相应的李雅普诺夫指数也包含三个维度。三个李雅普诺夫指数中只要存在一个正值，系统即为混沌。因此判断系统是否混沌，只需对李雅普诺夫指数从大到小排序，观察最大李雅普诺夫指数的符号即可。

对于上一节不同参数取值下的洛伦兹系统，计算其李雅普诺夫指数，结果如下表所示。

图表45：不同参数取值下洛伦兹系统的李雅普诺夫指数和稳定性状态

r	李雅普诺夫指数 1	李雅普诺夫指数 2	李雅普诺夫指数 3	稳定性状态
20	-0.1	-0.2	-13.4	定点
28	0.9	0.0	-14.6	混沌/奇异吸引子
80	1.5	0.0	-15.2	混沌/奇异吸引子
160	0.0	-1.2	-12.5	周期/极限环
240	0.0	-1.0	-12.6	周期/极限环

资料来源：华泰证券研究所

1. 当参数 $r=20$ 时，三个李雅普诺夫指数均为负数，轨迹在任意方向上均收敛，最终归于平衡点，系统稳态为定点。
2. 当参数 $r=28$ 或 80 时，三个李雅普诺夫指数分别为正数、0 和负数，轨迹表现为发散，系统不稳定，状态为混沌。
3. 当参数 $r=160$ 或 240 时，三个李雅普诺夫指数分别为 0 和两个负数，轨迹为平行的闭合环路，系统稳态为周期。

对于任意 r 值，都可以计算其李雅普诺夫指数，根据正负号判断稳定性。类似地，任意三维动力学系统均可通过李雅普诺夫指数判断稳定性，符号和状态的对应关系总结如下表。

图表46：三维动力学系统的李雅普诺夫指数符号和稳定性状态

李雅普诺夫指数 1	李雅普诺夫指数 2	李雅普诺夫指数 3	稳定性状态
-	-	-	定点
0	-	-	周期/极限环
0	0	-	准周期/二维环面
+	0	-	混沌/奇异吸引子

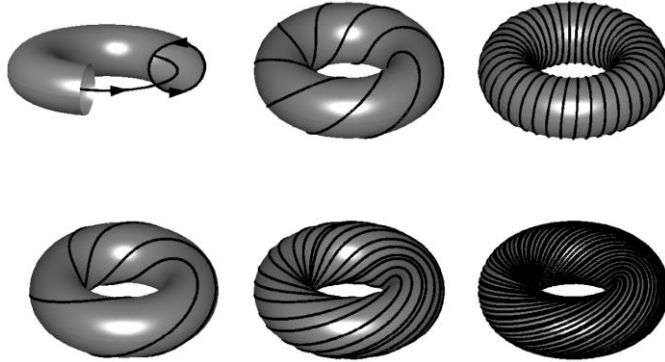
资料来源：华泰证券研究所

定点、周期和混沌三种状态在洛伦兹系统里已做介绍。另一种稳态准周期（quasi-periodic，或称拟周期）较为特别，前两个李雅普诺夫指数为 0，第三个李雅普诺夫指数为负数。洛伦兹系统不可能出现准周期，而在其它三维或更高维动力学系统中可能出现准周期。

我们借用 *Nonlinear Dynamics in Complex Systems* 书中的例子，形象化地理解准周期，如下图所示。想象一个三维的“面包圈”：

1. 如果某条轨迹只沿水平或者竖直方向绕面包圈运动，那么将在某个平面构成闭合环路，此时轨迹为周期，对应左上角子图。
2. 如果轨迹运动在水平和竖直方向上均有分量，且比值为有理数，那么经过若干圈绕行后，轨迹将回到起始点，仍为周期，对应中上和右上子图。
3. 如果轨迹在水平和竖直方向上的运动分量比值为无理数，那么无论经过多少圈绕行，轨迹不可能回到起始点，但是经过足够长的时间，轨迹将包裹住整个面包圈的表面，对应左下、中下和右下三个子图。这种稳态称为准周期，也称为二维环面。

图表47： 周期和准周期示意图



资料来源：Nonlinear Dynamics in Complex Systems，华泰证券研究所

对于高维动力学系统，如果李雅普诺夫指数有一个为正数，那么系统即为混沌状态。四维及以上的动力学系统还可能出现超混沌（hyper-chaotic）的状态，其李雅普诺夫指数有两个以上的正数。超混沌可以看成“比混沌更混沌的混沌”，对初始条件的敏感度更强，不可预测性更强。本文暂不做展开。

经济系统是混沌吗

随着非线性动力学、混沌科学研究的深入，人们意识到混沌所强调的非线性、复杂性、不可预测性，在经济系统中同样具备。混沌经济学（chaotic economics）由此作为一门新兴学科登上历史舞台。1980 年美国经济学家斯塔泽尔（Micheal Stutzer）发表的《一个宏观模型中的混沌动态与分岔》被公认为第一篇混沌经济学论文。混沌经济学的研究主题包括经济周期的波动、金融市场的波动等，核心是应用非线性混沌理论解释现实经济现象。

本文无意介绍混沌经济学的研究，关于经济系统是否为混沌，传统经济学家和混沌经济学家给出的答案可能不尽相同，在学术界仍是有争议的话题。那么对于上面这个问题，我们是如何看待的呢？

我们认为，证明经济系统在一定条件下是混沌这件事并不难。对经济系统各个要素进行非线性动力学建模，或者直接对经济时间序列计算李雅普诺夫指数就可以做到。然而，由于混沌的初值敏感性和不可预测性，即使我们清楚经济系统是混沌，对预知未来并没有多大帮助，我们依然不知道哪只蝴蝶会怎样扇动翅膀。虽能明理，但无以致用。

另一方面，承认经济系统在一定条件下是混沌，等同于承认经济系统在另一些条件下可能出现定点或者周期稳态，无非是参数取值发生变化，系统出现分岔而已。既然经济系统可能存在稳态，那么预测未来也就变得可能。其中定点稳态不多见，因为定点意味着静止，而一个有活力的经济系统时刻在发生改变。对我们来说更有研究价值的是周期稳态，这是一种动态变化的、不确定性条件下的稳态。研究的关键可能在于 1) 周期稳态本身，2) 系统在混沌和周期间发生相变的临界条件。

承认混沌，等同于承认人类的无知；理解周期，则是在开拓人类理性的边界。

总结

本文关注一维、二维和高维动力学系统的稳态。动力学系统的意义是刻画事物状态在时空下的变化规律。动力学系统的基本要素包含微分方程、平衡点和稳定性、相图、分岔图、势函数。通过对不同类型动力学系统各要素的分析，得出结论：一维动力学系统的稳态是定点；二维动力学系统的稳态若非定点，便是周期；高维动力学系统的稳态可能是定点、周期或准周期，同时存在特殊的不稳定状态——混沌。对我们来说更有研究价值的是周期，周期代表了动态的、不确定性下的稳态。

一维动力学系统的稳态是定点。定性角度看，一维动力学系统的核心是正负反馈。系统局部由负反馈主导时，系统最终趋于静止和稳定；系统局部由正反馈主导时，系统总体趋于发散和不稳定。定量角度看，一维动力学系统的稳定性取决于微分方程在平衡点处的导数。导数小于 0 时，系统最终归于平衡点；导数大于 0 时，系统最终趋于发散，或归于另一个平衡点。

二维动力学系统的稳态若非定点，便是周期。定性角度看，当状态变量相互之间的正负反馈占据主导时，系统趋于周期运动。如果只存在负反馈，系统将归于定点，最终寂灭；如果只存在正反馈，系统将走向发散，最终湮灭。正负反馈的综合才能造就周期。定量角度看，二维动力学系统的稳定性取决于平衡点处微分方程组雅可比矩阵的迹、行列式和判别式，当且仅当判别式小于 0 并且迹等于 0 时，系统展现出稳定的周期性。

二维动力学系统被认为是理解世间万象的“众妙之门”，正负反馈的综合可能蕴藏着世界周而复始运转的本质。定点的稳态不常见，因为定点往往意味着寂灭。发散的不稳定状态也不常见，因为发散终归会走向湮灭。我们能观察到的长期维持的稳态，往往都以周期或者类周期的形式存在。即使是简单的二维动力学系统，也能够模糊地刻画一部分周期现象，核心是从系统内拆分出两个对立的变量，捕捉两个变量之间的正负反馈。自然界种群数量的动态平衡可以由捕食者和猎物的二元系统刻画，中国古代的治乱周期可以由官僚和民众的二元系统刻画，经济活动中的产业生命周期可以由利润率和参与者的二元系统刻画。

高维动力学系统的稳态可能是定点、周期或准周期，同时存在特殊的不稳定状态——混沌。定性角度看，混沌具有“无法预测的确定性”，初始条件的微小扰动会造成系统长期的巨大改变。定量角度看，高维动力学系统通过计算李雅普诺夫指数实现稳定性的判断。李雅普诺夫指数只要存在一个正值，系统即为混沌。经济系统是否为混沌存在争议，我们认为，承认经济系统在一定条件下是混沌，等同于承认经济系统在另一些条件下可能出现定点或周期。对我们来说更有研究价值的是周期，周期代表了动态的、不确定性条件下的稳态。

参考文献

- 杜树章, & 李万峰. (2007). 基于系统动力学模型的中国历史周期率研究. *理论探索*(5), 101—108.
- 傅琳. (1992). 分岔与混沌: 逻辑斯蒂方程演化机制研究. *数量经济技术经济研究*(8), 47—53.
- 傅琳. (1992). 探索经济现象的复杂性: 混沌经济学的兴起. *国外社会科学*(3), 50—55.
- 刘洪. (1995). 混沌经济学的发展与展望. *当代经济科学*(5), 98—101.
- Fuchs, A. (2014). *Nonlinear dynamics in complex systems*. Berlin: Springer.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.

风险提示

动力学系统模型是对真实世界的简单刻画，存在过度简化的可能；周期规律基于历史数据总结，历史规律可能失效；周期规律对市场长期规律进行研究，无法判断短期的市场情绪与政策冲击带来的影响；市场在某些极端情形下可能出现规律以外的交易风险。

免责声明

本报告仅供华泰证券股份有限公司（以下简称“本公司”）客户使用。本公司不因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、评估及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。同时，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可能会波动。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，不构成所述证券的买卖出价或征价。该等观点、建议并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对客户私人投资建议。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

本公司及作者在自身所知情的范围内，与本报告所指的证券或投资标的不存在法律禁止的利害关系。在法律许可的情况下，本公司及其所属关联机构可能会持有报告中提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为之提供或者争取提供投资银行、财务顾问或者金融产品等相关服务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰证券研究所”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权力。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

本公司具有中国证监会核准的“证券投资咨询”业务资格，经营许可证编号为：91320000704041011J。

全资子公司华泰金融控股（香港）有限公司具有香港证监会核准的“就证券提供意见”业务资格，经营许可证编号为：A0K809

©版权所有 2020 年华泰证券股份有限公司

评级说明

行业评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

增持行业股票指数超越基准

中性行业股票指数基本与基准持平

减持行业股票指数明显弱于基准

公司评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

买入股价超越基准 20% 以上

增持股价超越基准 5%-20%

中性股价相对基准波动在 -5%~5% 之间

减持股价弱于基准 5%-20%

卖出股价弱于基准 20% 以上

华泰证券研究

南京

南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码：210019

电话：86 25 83389999 / 传真：86 25 83387521

电子邮件：ht-rd@htsc.com

深圳

深圳市福田区益田路 5999 号基金大厦 10 楼/邮政编码：518017

电话：86 755 82493932 / 传真：86 755 82492062

电子邮件：ht-rd@htsc.com

北京

北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层

邮政编码：100032

电话：86 10 63211166 / 传真：86 10 63211275

电子邮件：ht-rd@htsc.com

上海

上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码：200120

电话：86 21 28972098 / 传真：86 21 28972068

电子邮件：ht-rd@htsc.com