

金工研究/深度研究

2020年05月25日

林晓明 执业证书编号：S0570516010001
研究员 0755-82080134
linxiaoming@htsc.com

黄晓彬 执业证书编号：S0570516070001
研究员 0755-23950493
huangxiaobin@htsc.com

张泽 0755-82493656
联系人 zhangze@htsc.com

源洁莹 0755-82366825
联系人 yuanjieying@htsc.com

相关研究

- 1 《金工：资产配置模型对债券趋势项的依赖》2020.05
- 2 《金工：中国养老目标基金初诞全景回顾》2020.05
- 3 《金工：基于多种风险溢价的配置组合构建》2020.05

引入高阶矩改进马科维茨组合表现

解决资产收益率分布尖峰厚尾与假设不符的问题

通过多项式目标优化法引入高阶矩到马科维茨模型中，提升组合夏普率

本篇报告介绍了资产配置中经典的有效前沿理论和马科维茨模型的数学原理和应用方法，并分析马科维茨模型中对收益和风险的假设与实际市场不符的情况，从而考虑引入高阶矩来拓展模型在资产配置中的适用性。通过测试多项式优化方法（PGP）在原模型基础上加入偏度和峰度的影响，我们发现加入三阶中心矩偏度后的模型能够有效地提高组合夏普比率，并且更换底层资产和回测区间后，模型的提升依旧可靠。

马科维茨模型构建出以均值方差为基础的有效前沿，明确了组合投资目标

马科维茨模型固定资产组合的收益率，通过资产组合方差最小化的方式构建了有效前沿。当组合中不含无风险资产时，有效前沿为双曲线的一部分，前沿上的资产组合收益率变化区间在取决于单一资产收益率的上下界。当组合中包含无风险资产时，有效前沿为一条直线。通过效用函数得到的“无差异曲线”与有效前沿的切点即为理论上的效用最大化组合。

马科维茨模型收益与风险的假设过于理想化，可引入高阶矩进行改进

以方差作为风险的衡量指标来自于对效用函数的泰勒展开的二阶形式，该方法的一个基本假设是每种资产的收益率呈正态分布，而实际市场中的资产收益率分布通常会呈现尖峰厚尾的特征，这导致使用均值方差方法进行资产配置时结果与预期会产生一定误差。我们通过引入收益分布的高阶矩来更精准地刻画资产的实际收益分布，这一过程可以使用多项式目标优化的方法来实现。

通过多项式目标优化方法，在模型中考虑偏度可以提升模型的配置表现

多项式目标优化方法可对最大化收益均值、最小化方差、最大化偏度和最小化峰度等多个目标设定不同权重得到目标优化函数，相比于以收益率均值和方差为双目标的基础模型，将收益均值、方差和偏度设定为目标偏度模型的夏普比率有明显提升。这一提升在更换股票和商品等底层资产，以及在不同的时间段内测试都依然有效。但由于峰度在刻画收益分布的极端情况时具有双向性，因此在偏度模型的基础上再加入峰度后的模型提升并不明显。

风险提示：马科维茨模型和改进后的模型都是基于历史经验的总结，如果市场规律改变，存在失效的可能性；报告中的各类指数只是作为常见指数，并不能完全代表 A 股或全球市场，请投资者谨慎、理性地看待。

正文目录

马科维茨模型核心在于明确组合投资目标并提供定量求解方案	4
“有效前沿”是以均值方差作为收益风险度量基础的理论最优资产组合	4
效用函数生成的 “无差异曲线”与 “有效前沿”的切点为效用最大化组合	5
均值、方差、偏度、峰度：低阶到高阶多角度刻画资产收益分布	7
实际资产收益率分布呈尖峰厚尾，仅用均值、方差不足以刻画其完整形态	7
增大偏度和减小峰度对资产收益率有正向影响，虽与低阶同源但影响差异	8
构建包含最大化偏度和最小化峰度的多目标优化，提升组合表现	10
采用“多项式目标优化方法”可同时实现对多个目标的优化求解	10
增加最大化偏度目标，可同时提高资产组合的收益率和夏普比率	11
基础模型和偏度模型对偏好系数等参数不敏感，后续研究可以固定该组参数	11
初步检验：偏度模型对保守、稳健和激进的基础模型夏普比提升 52.42%、	
41.15%、24.62%	13
更换资产与时间窗口的有效性检验：偏度模型整体性优于基础模型	14
增加最小化峰度目标可降低组合极端风险概率，但一般市场提升不明显	19
全文总结	22
风险提示	22
附录	23
不含无风险资产组合有效前沿的双曲线解析式推导	23
含无风险资产组合有效前沿形的推导	24
马科维茨模型的等价效用函数推导	25

图表目录

图表 1: 风险资产组合的有效前沿	4
图表 2: 初始资产收益标准差分布 (1995/12-2019/12)	5
图表 3: 资产组合收益标准差分布及有效前沿 (1995/12-2019/12)	5
图表 4: 无差异曲线示意	5
图表 5: 无差异曲线示例 (1995/12-2019/12)	6
图表 6: 无差异曲线与有效前沿切点即为最优组合 (1995/12-2019/12)	6
图表 7: 上证指数月度收益分布直方图(1995.12-2019.12)	7
图表 8: 标普 500 月度收益率分布直方图 (1995.12-2019.12)	8
图表 9: 欧洲斯托克 50 指数月度收益率分布直方图 (1995.12-2019.12)	8
图表 10: SP500、欧洲斯托克 50、上证指数 ks 检验	8
图表 11: 不同偏度和峰度收益率序列的总收益分布	9
图表 12: 各资产长期表现 (1997.12-2019.12)	11
图表 13: λ_1 和 λ_2 不同的基础模型下收益率的变化	12
图表 14: λ_1 和 λ_2 不同的基础模型下波动率的变化	12
图表 15: λ_1 和 λ_2 不同的基础模型下夏普比率的变化	12
图表 16: 偏度模型收益率随参数 λ_3 变化	12
图表 17: 偏度模型波动率随参数 λ_3 变化	12
图表 18: 偏度模型夏普比率随参数 λ_3 变化	13
图表 19: 偏度模型对于三种基础模型的提升程度	13
图表 20: 基础模型 (稳健型) 和偏度模型 (稳健型) 的净值图	14
图表 21: 基础模型 (稳健型) 的权重分布	14
图表 22: 偏度模型 (稳健型) 的权重分布	14
图表 23: 扩展资产池资产	14
图表 24: 偏度模型 (稳健型) 相对基础模型 (稳健型) 的提升	15
图表 25: 不同资产组合偏度模型 (稳健型) 夏普比率提升百分比	16
图表 26: 不同资产组合偏度模型 (保守型) 夏普比率提升百分比	16
图表 27: 不同资产组合偏度模型 (激进型) 夏普比率提升百分比	17
图表 28: 偏度模型夏普比率随参数 λ_3 变化 (加入商品指数)	17
图表 29: 偏度模型相对基础模型 (稳健型) 的提升百分比 (加入商品指数)	18
图表 30: 扩展资产池资产 (商品指数)	18
图表 31: 偏度模型相对基础模型 (稳健型) 的提升百分比 (加入商品指数)	18
图表 32: 不同滚动时长夏普率提升百分比	19
图表 33: 基础模型 (稳健型) 和偏度模型 (稳健型) 的滚动夏普比率	19
图表 34: 不同 λ_4 取值模型表现	20
图表 35: 不同 λ_3 取值不加峰度与加入峰度夏普比率的变化	20
图表 36: 峰度模型夏普比率随参数 λ_4 变化	21
图表 37: 不同峰度的密度函数图像 (红色为厚峰分布)	21
图表 38: 效用函数	26

马科维茨模型核心在于明确组合投资目标并提供定量求解方案

1952 年马科维茨 (Markowitz) 发表《资产组合理论》，文中首次提出均值-方差资产组合模型，分别用收益均值和方差表示预期收益率与风险，将资产配置问题转化成数学上的二次规划问题。马科维茨模型的目的是寻找给定收益下风险最小化，或给定风险下收益最大化的投资组合，这些组合构成了有效前沿。该模型的提出标志着现代资产组合理论的开端。

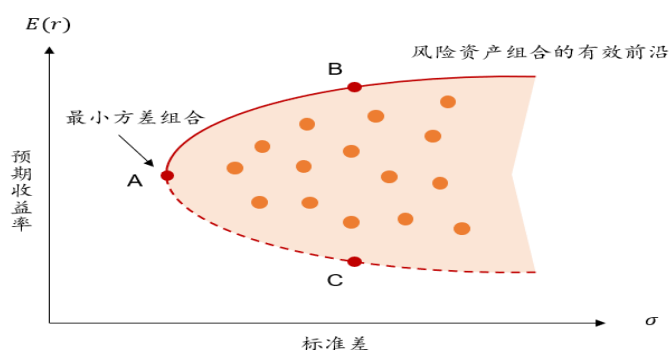
“有效前沿”是以均值方差作为收益风险度量基础的理论最优资产组合

马科维茨在 1952 年首先提出有效前沿 (Efficient Frontier) 的概念，并通过马科维茨模型找出有效前沿。在 1964 年，其学生夏普 (Sharpe) 正式发表资本资产定价模型 (CAPM)，该模型以《资产组合理论》为基础，成为了现代金融学的奠基石。

有效前沿亦称为有效边界，它存在的前提假设是投资者都是理性的，他们在厌恶风险的同时追求财富最大化，即在相同的风险下力求获得最大的收益，或在相同的收益下希望承担最小的风险。满足这些条件的有效投资组合构成有效前沿。马科维茨模型可以通过求解二次规划问题得到有效前沿。

在马科维茨的资产组合理论中，以不同的权重将风险资产进行组合，将得到一系列具有不同期望收益和标准差的风险资产组合。在以资产组合标准差为横坐标、预期收益率为纵坐标的二维平面中把这些风险资产组合描绘出来，可以得到风险资产的最小方差边界，如图中的曲线 BAC。其中，A 点为这条曲线上标准差最小的一点，称之为最小方差组合 (Minimum-Variance Portfolio, MVP)。这一最小方差点 A 将曲线分为两个部分，曲线在 A 点以上的部分就是投资组合的有效前沿。这是因为在标准差相同的情况下，投资者会选择更高的期望收益。例如，上边沿的 B 点与下边沿的 C 点具有相同的标准差，但 B 点对应的预期收益率高于 C 点，故投资者会选择 B 点。

图表1： 风险资产组合的有效前沿

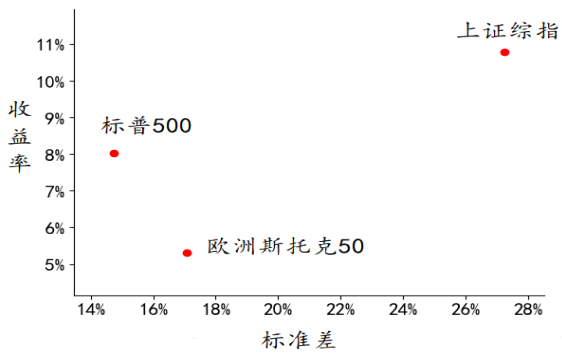


资料来源：华泰证券研究所

我们以标普 500 指数、欧洲斯托克 50 指数和上证指数为例，更加清楚地展示如何求解有效前沿。下图中的三个红点是这三个资产在 1995 年 12 月-2019 年 12 月期间的年化收益率和标准差，我们以一百组随机权重得到这三个资产的不同组合，并用蓝点把组合的收益率-标准差标记出来。可以看到，这些资产组合都分布于一条曲线的内部，曲线的上半部边界就是这些资产组合的有效前沿。

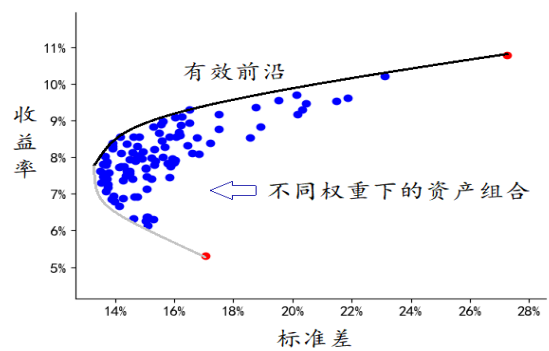
如果所投资资产中不包含无风险资产，那么资产组合有效前沿为双曲线的一部分，而包含了无风险资产的资产组合有效前沿是一条直线。有效前沿既可以通过上述随机生成组合的方式来绘制，也可以直接将参数代入解析式进行求解。详细的推导过程可见附录。

图表2： 初始资产收益标准差分布（1995/12-2019/12）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表3： 资产组合收益标准差分布及有效前沿（1995/12-2019/12）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

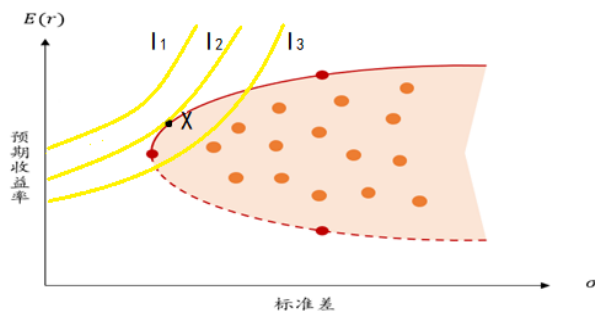
效用函数生成的“无差异曲线”与“有效前沿”的切点为效用最大化组合

在得到有效前沿后，如果投资者有明确的收益或者风险的要求，那么符合自己要求的最优资产组合可以在有效前沿上直接找到。但也可以用效用函数来刻画投资者的不同的投资偏好。

效用函数描述的是投资者在投资中所获得的效用与所选择的资产组合之间的数量关系。在马克维茨模型中，资产组合的特征被简化为预期收益 $E(r)$ 和方差 σ^2 两项，因此对投资者而言，效用函数可表示为 $U(E(r), \sigma^2)$ 。这时有有效前沿或者资本市场线上的每个点（即每个投资组合）都会对应于一个效用值，投资者则可以选择一个使得效用值最大的投资组合。

为了更直观地表示投资者的选择过程，我们引入“无差异曲线”的概念。如果固定效用函数 $U(E(r), \sigma^2) = U_0$ ，那么满足这个方程的预期收益率和标准差会构成一条曲线，曲线上的每一个点（投资组合）给投资者带来的效用是相同的，这条曲线就是无差异曲线。随着资产波动增加，风险厌恶的投资者往往需要更高的预期收益来补偿风险增加带来的效用减少，这就使得风险厌恶投资者的无差异曲线的形状是向下凸的。如下图所示， I_1 、 I_2 、 I_3 为特定风险厌恶水平的投资者的无差异曲线，其中 I_2 与有效前沿相切于点X。事实上， I_2 线上所有组合都优于 I_3 ， I_1 线上所有组合优于 I_2 ，但是市场上没有位于 I_1 线上的投资组合。因此，投资者会选择 I_2 线上的组合X以达到期望效用最大化，这是该类投资者的最优组合。

图表4： 无差异曲线示意



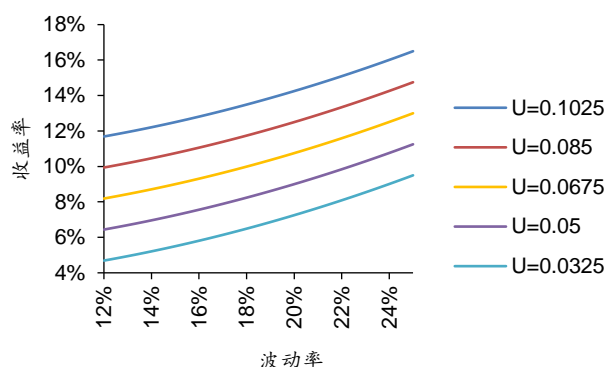
资料来源：华泰证券研究所

同样我们也用实例来说明投资者如何通过效用函数来选择最优的投资组合。假定一名风险厌恶投资者的效用函数可以表示为

$$U = E(r) - \sigma^2$$

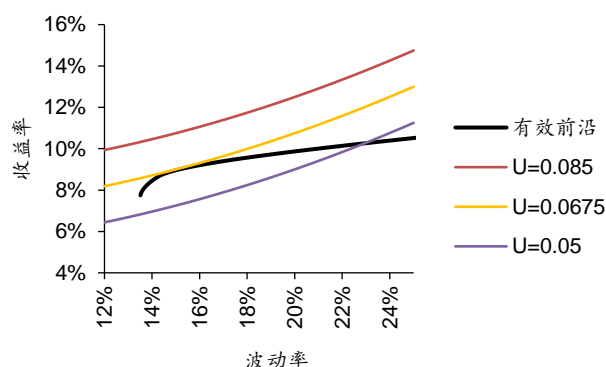
这里 $E(r)$ 和 σ^2 分别表示资产组合预期收益和方差， U 表示投资者的效用。下图左给出了部分上述效用函数的无差异曲线，其中位于上方的无差异曲线的效用高于下方。把资产组合的有效前沿与无差异曲线绘制在同一图中可以得到如下右图。我们希望在有效前沿上找到一点使其得到的效用值最大。从图中不难看出，对于效用值高于 0.0675 的无差异曲线与有效前沿均无交点，而效用值为 0.0675 的无差异曲线恰与有效前沿相切，因此切点处的资产组合产生的效用值为 0.0675，高于有效前沿上的其他资产组合。可计算出最优组合的资产权重为标普 500: 上证综指: 欧洲斯托克指数=66%: 34%: 0，组合收益率为 9.01%，标准差为 15.03%，效用值为 0.0675。

图表5： 无差异曲线示例（1995/12-2019/12）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表6： 无差异曲线与有效前沿切点即为最优组合（1995/12-2019/12）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

均值、方差、偏度、峰度：低阶到高阶多角度刻画资产收益分布

上一章介绍了马科维茨模型的基本原理，由该模型能够计算出资产组合的有效前沿，并根据效用函数得到最优资产组合。但马科维茨模型的推导基于很多严格的假设，主要包括：投资者在进行投资选择时，仅依赖于之前某一段时间内的资产收益的概率分布；资产收益率的分布由预期收益率及其方差确定，即资产收益率服从正态分布；投资者对资产风险的衡量完全取决于方差等。

其中的部分假设过于理想化，与实际情况相差较大，导致使用传统马科维茨模型时可能会存在以下几点问题：

- 1、资产的收益率难以预测，根据历史数据得到的资产收益率分布往往不是正态分布；
- 2、最优化过程对收益率较为敏感，根据 Chopra 和 Ziemba(1993)的研究，资产收益率的估计误差带来的效用损失远远高于协方差；
- 3、方差对风险进行刻画时存在无法区分上行和下行风险，容易低估尾部风险的问题，投资者可能会考虑除了方差外的其他指标作为风险的衡量，包括下半方差和 VaR 等（关于风险度量可参考华泰金工 2019 年 11 月研报《风险预算模型如何度量风险更有效》）等；
- 4、仅以预期收益 $E(r)$ 和方差 σ^2 两项刻画的效用函数并不能完全反映投资者的投资偏好；
- 5、部分资产组合需要进行卖空或者加杠杆操作才可实现，而实际投资中会对这类操作有所限制。

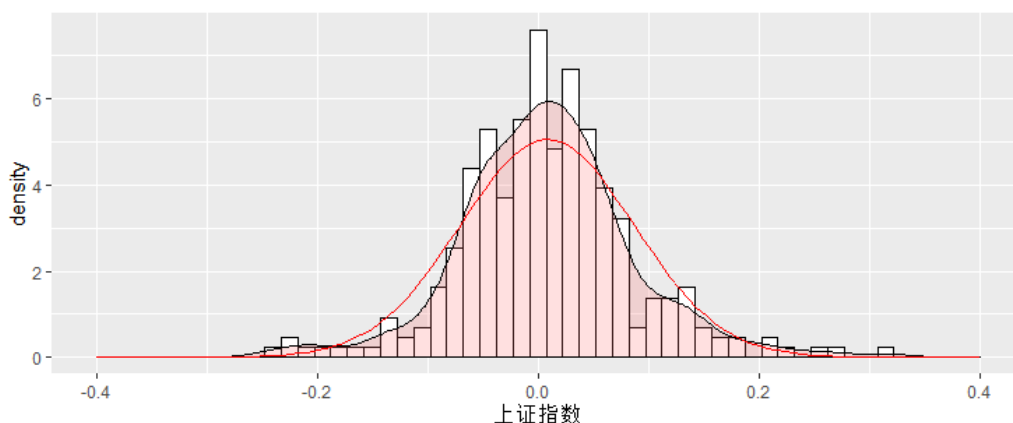
本章将重点分析马科维茨模型中收益率分布假设在实际应用过程的存在不足，并引入偏度、峰度等更高阶的角度对资产收益进行更全面的定量刻画。

实际资产收益率分布呈尖峰厚尾，仅用均值、方差不足以刻画其完整形态

马科维茨模型中一个基本假设是每种资产的收益率呈正态分布，因为当资产收益率服从正态分布时，均值和方差两个参数就可以完全刻画资产收益率的分布。但实际市场中的资产收益率分布通常会呈现“尖峰厚尾”的特征，也就是相比于正态分布来说，资产集中在平均收益率上的次数更多，极端收益或损失出现的概率也更大。

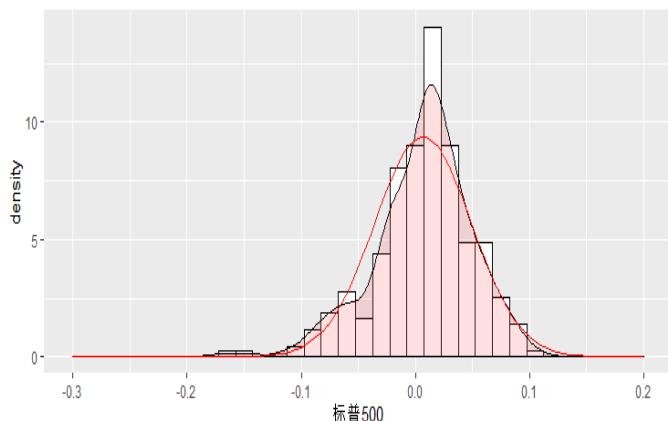
下图分别展示了上证综指、标普 500 和欧洲斯托克 50 指数 1995 年 12 月到 2019 年 12 月之间的月度收益率组成的直方图，红色区域包络线为根据收益率数据拟合出来的核密度曲线，红色曲线为同均值同方差下的正态分布密度曲线。可以看出，红色区域在均值处（横轴的 0 附近）较红色曲线更突出，同时在边缘处（横轴 0.1 的右侧以及 -0.1 的左侧，）也高于红色曲线，也就是说实际收益率的分布较正态分布有着更高的峰部，更宽的尾部，即尖峰厚尾的特征。

图表7： 上证指数月度收益分布直方图(1995.12-2019.12)



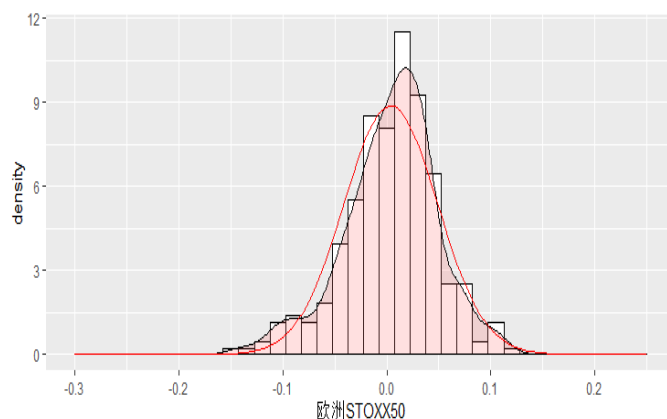
资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表8：标普 500 月度收益率分布直方图（1995.12-2019.12）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表9：欧洲斯托克 50 指数月度收益率分布直方图（1995.12-2019.12）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

直观上看，上面三个指数的收益率分布与正态分布存在差异，我们进一步进行 KS 检验（即通过检验序列的偏度和峰度与正态分布的偏离来验证是否服从正态分布），发现 p 值远小于 0.0001，说明了资产收益率服从正态分布的这种假设不成立。

图表10：SP500、欧洲斯托克 50、上证指数 ks 检验

指数	ks 检验统计量	P 值
标普 500	0.45801	2.2e-16
欧洲斯托克 50	0.45376	2.2e-16
上证指数	0.41875	2.2e-16

资料来源：华泰证券研究所

正是因为资产收益率通常不服从正态分布，使用历史时间窗口期的平均收益率和波动率来代替优化函数中的预期收益率和预期波动率未必能优化出理想的投资组合。因此仅靠均值和方差来量化每一组资产会使我们失去部分有效信息。一个较为有效的拓展角度是考虑资产收益率的偏度和峰度，进而更好地描述收益率的分布。

增大偏度和减小峰度对资产收益率有正向影响，虽与低阶同源但影响差异

实际上如果把资产收益率作为随机变量，那么它的均值、方差、偏度和峰度分别对应其一、二、三、四阶中心矩，四个指标都是用来刻画收益率这一随机变量的分布特征，只不过观察的角度存在差异。简单来说，收益率均值越大，意味着这个资产的收益大概率越高；收益率的方差越小，意味着该资产的收益越稳定；收益率的偏度越大，说明该资产出现大幅增长的概率增加；收益率的峰度越小，则表明出现显著低于平均收益的概率较小。

峰度和偏度分别是用标准差进行齐次化后的三阶中心矩和四阶中心矩，对于一个收益率为 r 的资产，它的偏度定义为：

$$S = \frac{E(r - E(r))^3}{\sigma^3}$$

其中 σ 表示资产的标准差；

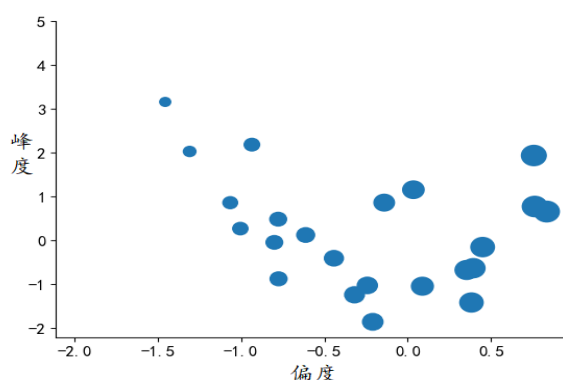
它的峰度定义为

$$K = \frac{E(r - E(r))^4}{\sigma^4}$$

在投资领域，资产的偏度越高，意味着正收益率出现时数值较大，而出现的负收益率时数值较小；资产的峰度则用于衡量收益率中离群值的出现概率，峰度越高表示更有可能出现与平均值相距较远的离群值。

为了更加清楚的了解偏度和峰度对投资收益的影响，我们将把标普 500 指数过去 24 年（1996-2019）的月度收益率按年度划分为 24 个收益率序列，并按照第一年的月平均收益和标准差调整其他收益率序列（把序列标准化后乘上第一年的标准差，再加上第一年的平均收益，这一过程不改变序列的偏度和峰度），这样得到了 24 组均值和方差均相同，但偏度和峰度不同的收益率序列。从下图可以看出随着偏度的增大和峰度的减少，收益率序列的总收益（气泡的大小表示序列的总收益）也会增加，这就反映出高偏度和低峰度资产的优势——大概率能够获取更高的总收益。

图表11：不同偏度和峰度收益率序列的总收益分布



资料来源：Wind，华泰证券研究所

相关研究文献表明（Arditti(1967,1971)、Jean(1971,1973)、Levy and Sarnat(1972)），偏度和峰度同样会影响投资者的判断。投资者通常更倾向于拥有高偏度和低峰度的资产，而这一倾向无法通过传统的马科维茨模型来体现，因此我们可以通过在原模型中加入偏度和峰度的方式更好地反映收益率的实际情况，因此后文我们将尝试考虑收益率偏度和峰度的影响，并构建多目标优化方式，以提升组合表现。

构建包含最大化偏度和最小化峰度的多目标优化, 提升组合表现

上一章分析了仅依赖均值和方差的一二阶矩对收益率的分布进行刻画与实际情形存在明显差距, 一个自然的改进思路便是引入高阶矩, 构建多目标优化模型。为了到达预期目标, 首先我们介绍可以同时容纳多个优化目标的方法: 多项式目标优化方法 (Polynomial Goal Programming)。

采用“多项式目标优化方法”可同时实现对多个目标的优化求解

多项式目标优化方法1988年由Tayi & Leonard提出, 最初是用于管理银行资产负债表中相互冲突的目标实现, 具体方法如下:

假定当前有 n 个指标 I_1, I_2, \dots, I_n , 每个指标最优情形为 $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \dots, \hat{I}_n$, 如果用 I_1, I_2, \dots, I_n 表示当前实际完成情况, 那么当前的绩效可以表示为

$$Z = \sum_{k=1}^n \left| 1 - \frac{I_k}{\hat{I}_k} \right|^{\lambda_k}$$

其中 λ_k 表示指标 k 的权重, $k = 1, 2, \dots, n$, Z 越小表示完成度越高。

下面将 PGP 方法用于马科维茨模型的改进, 我们将均值、方差、偏度和峰度作为四个指标, 那么问题可以转化为:

第一步先计算收益、方差、偏度、峰度的最优数值 R^* 、 V^* 、 S^* 、 K^* , 可由下列四个独立的子问题求得

(1) 最大化收益

$$\begin{aligned} \text{Maximize } R^*(x) &= X^T R \\ X^T I &= 1 \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

(2) 最小化方差

$$\begin{aligned} \text{Minimize } V^*(x) &= X^T V X \\ X^T I &= 1 \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

(3) 最大化偏度

$$\begin{aligned} \text{Maximize } S^*(x) &= E[(X^T(R - \bar{R}))^3] / \sigma_X^3 \\ X^T I &= 1 \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

(4) 最小化峰度

$$\begin{aligned} \text{Minimize } K^*(x) &= E[(X^T(R - \bar{R}))^4] / \sigma_X^4 \\ X^T I &= 1 \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

其中 X 表示资产权重, $I = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times n}$ 。

第二步令 d_1 、 d_2 、 d_3 、 d_4 表示资产组合的收益、方差、偏度、峰度与各自最优值之间的偏差, λ_1 、 λ_2 、 λ_3 、 λ_4 表示投资者对收益、方差、偏度、峰度的偏好, 求解下列问题

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z &= \left| \frac{d_1}{R^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2} + \left| \frac{d_3}{S^*} \right|^{\lambda_3} + \left| \frac{d_4}{K^*} \right|^{\lambda_4} \\ X^T \bar{R} + d_1 &= R^* \\ X^T V X - d_2 &= V^* \\ \frac{E[(X^T(R - \bar{R}))^3]}{\sigma_X^3} + d_3 &= S^* \end{aligned}$$

$$\frac{E[(X^T(R - \bar{R}))^4]}{\sigma_X^4} - d_4 = K^*$$

$$X^T I = 1$$

$$X \geq 0$$

$$d_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$$

基于 PGP 方法，我们设计出下面两个改进模型：

偏度模型：在马科维茨模型基础上加入偏度的影响，优化目标为

$$\text{Minimize } Z = \left| \frac{d_1}{R^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2} + \left| \frac{d_3}{S^*} \right|^{\lambda_3}$$

偏度峰度模型：在马科维茨模型基础上同时加入偏度和峰度的影响，优化目标为

$$\text{Minimize } Z = \left| \frac{d_1}{R^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2} + \left| \frac{d_3}{S^*} \right|^{\lambda_3} + \left| \frac{d_4}{K^*} \right|^{\lambda_4}$$

而与上面两个模型进行对比的基础模型的优化目标为

$$\text{Minimize } Z = \left| \frac{d_1}{R^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2}$$

增加最大化偏度目标，可同时提高资产组合的收益率和夏普比率

我们先来观察加入偏度之后的模型（即偏度模型）对资产配置结果的影响。与前面一样，我们将底层资产定为标普 500、欧洲斯托克 50 和上证综指，并使用其 1995 年 12 月-2019 年 12 月之间的月度收盘价，共计 864 条数据。同时用资产在前 24 个月（即过去两年）的平均收益率和波动率作为下一个月的预期收益率和波动率进行权重估计。因此实际资产配置区间为 1997 年 12 月-2019 年 12 月。

图表12：各资产长期表现（1997.12-2019.12）

	年化收益	年化波动	最大回撤	夏普比率	Calmar 比率
标普 500	6.80%	14.82%	52.56%	0.4585	0.1293
欧洲斯托克 50	3.45%	17.36%	62.50%	0.1987	0.0552
上证综指	8.06%	26.53%	70.97%	0.3037	0.1135

资料来源：Wind，华泰证券研究所

模型需要考虑偏好系数 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ，其中对收益的偏好 λ_1 和对方差的偏好系数 λ_2 属于基础模型中的参数，而 λ_3 和 λ_4 属于改进模型，需要我们来决定取值范围。我们希望能够找到一组改进模型的参数 λ_3 、 λ_4 ，对于任意给定的参数为 λ_1 、 λ_2 的基础模型，通过改进模型进行资产配置的结果要优于基础模型（用夏普比率提升的绝对数值来衡量）。

由于难以得到解析证明，而我们在使用数值方法去证明时受到计算能力的限制，很难对所有正实数对 (λ_1, λ_2) 得到结论，因此需要将目标进行简化，如果下述两点成立，我们就能得到改进模型相对基础模型有显著提升的结论：

- 1、参数 λ_1 、 λ_2 的变化对最终资产配置的影响是稳定的，即 λ_1 、 λ_2 在一个小范围变化时，最终夏普比率的变化也在一个小范围变动；
- 2、在一个相对合理的 λ_3 、 λ_4 的区间，改进模型较基础模型有显著提升（即夏普比率提升的幅度远大于 λ_1 、 λ_2 自身变化的影响）。

基础模型和偏度模型对偏好系数等参数不敏感，后续研究可以固定该组参数

我们先来考察基础模型中对收益率的偏好系数 λ_1 和对方差的偏好系数 λ_2 在什么样的参数空间下是相对合理的。文献（Lai, Yu and Wang (2006)、Hoe, Jaaman and Isa (2013)等）中通常选择参数 λ_1 、 λ_2 为 0, 1, 2, 3（0 表示忽略该参数对应的目标影响），因此在下述实证中我们将 λ_1 和 λ_2 分别取 1, 2, 3, 4, 5 得到 25 个模型：

图表13: λ_1 和 λ_2 不同的基础模型下收益率的变化

	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_1 = 3$	$\lambda_1 = 4$	$\lambda_1 = 5$
$\lambda_2 = 1$	5.12%	4.91%	4.74%	4.57%	4.18%
$\lambda_2 = 2$	5.81%	5.23%	5.07%	4.82%	4.66%
$\lambda_2 = 3$	6.11%	5.64%	5.41%	4.93%	4.95%
$\lambda_2 = 4$	6.33%	6.00%	5.86%	5.56%	4.97%
$\lambda_2 = 5$	6.46%	6.16%	5.81%	5.66%	5.01%

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

图表14: λ_1 和 λ_2 不同的基础模型下波动率的变化

	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_1 = 3$	$\lambda_1 = 4$	$\lambda_1 = 5$
$\lambda_2 = 1$	14.77%	14.87%	14.79%	14.83%	14.76%
$\lambda_2 = 2$	14.62%	14.73%	14.77%	14.67%	14.64%
$\lambda_2 = 3$	14.81%	14.84%	14.74%	14.70%	14.69%
$\lambda_2 = 4$	14.96%	14.95%	14.88%	14.83%	14.73%
$\lambda_2 = 5$	15.08%	15.06%	14.95%	14.90%	14.77%

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

图表15: λ_1 和 λ_2 不同的基础模型下夏普比率的变化

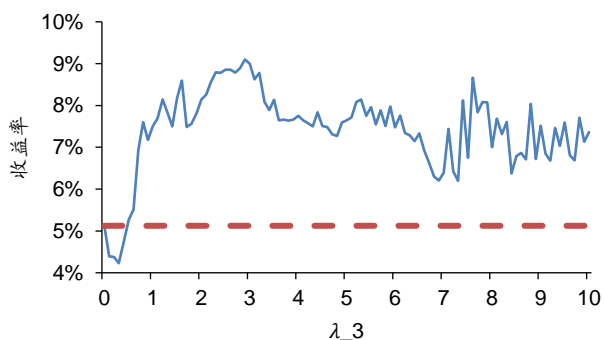
	$\lambda_1 = 1$	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_1 = 3$	$\lambda_1 = 4$	$\lambda_1 = 5$
$\lambda_2 = 1$	0.3469	0.3299	0.3208	0.3080	0.2831
$\lambda_2 = 2$	0.3975	0.3549	0.3435	0.3286	0.3187
$\lambda_2 = 3$	0.4122	0.3803	0.3673	0.3357	0.3369
$\lambda_2 = 4$	0.4231	0.4011	0.3936	0.3747	0.3371
$\lambda_2 = 5$	0.4285	0.4093	0.3889	0.3802	0.3393

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

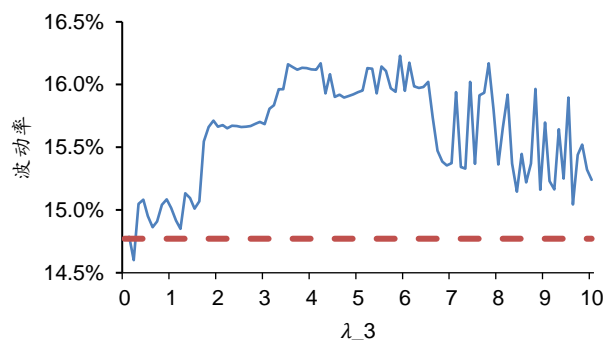
整体来看, 随着 λ_1 的减小和 λ_2 的增大, 收益率和波动率都会增加, 但收益率增加的幅度高于波动率, 这导致夏普比率也随之增大。并且整体变化的幅度相对较小, 我们认为参数调整目标中的第一条要求是满足的。因此在后续研究中我们选择一部分有代表性的基础模型来简化计算量。考虑到收益率和波动率的变化趋势, 我们使用以下三个基础模型:

 $\lambda_1=5, \lambda_2=1$ 保守型 $\lambda_1=1, \lambda_2=1$ 稳健型 $\lambda_1=1, \lambda_2=5$ 激进型

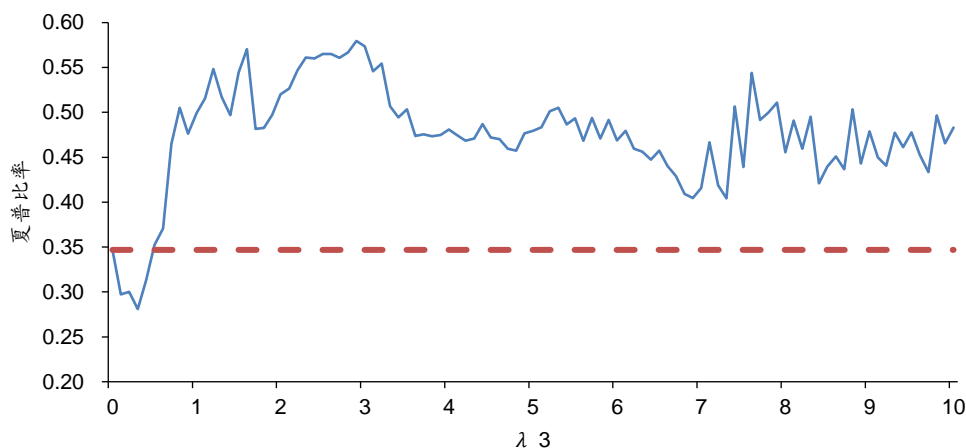
基础模型确定之后, 我们来考察改进模型中的偏度偏好系数 λ_3 取不同值时, 偏度模型相对于基础模型而言是否有提升, 此时基础模型中 $\lambda_1=1, \lambda_2=1$ 。下面的图表是 λ_3 在[0,10]之间取值, 步长为 0.1, 共计 101 个点得到的结果:

图表16: 偏度模型收益率随参数 λ_3 变化

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

图表17: 偏度模型波动率随参数 λ_3 变化

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

图表18: 偏度模型夏普比率随参数 λ_3 变化

资料来源: Wind, 华泰证券研究所

可以看到, 当 $\lambda_3 > 1$ 时, 收益率和波动率相较基础模型均有所上升, 夏普比率也得到提高。而当 λ_3 处于 $[0, 1]$ 这一区间时, 由于该参数位于幂指数项上, 如果小于1可能导致对误差变动方向与其他参数不一致, 因此结果呈现不稳定的情况, 我们在使用该模型时避免选择这一区间的参数值。而在 $\lambda_3 > 1$ 时偏度模型对夏普比率均有提升, 因此我们认为参数调整目标中的第二条要求也满足。

为了防止优化过程中极端情况的发生, 我们下面使用的偏度模型均为 $\lambda_3 = 1, 3, 5, 7, 9$ 共5个模型的平均结果作为模型优化程度的衡量。也可以理解为, 在实际操作中把自身资金均分为5份, 分别按照 $\lambda_3 = 1, 3, 5, 7, 9$ 的偏度模型进行资产配置, 最终将各自收益相加得到总收益并计算每月收益率。

初步检验: 偏度模型对保守、稳健和激进的基础模型夏普比提升 52.42%、41.15%、24.62%
偏度模型与基础模型的资产配置结果对比如下:

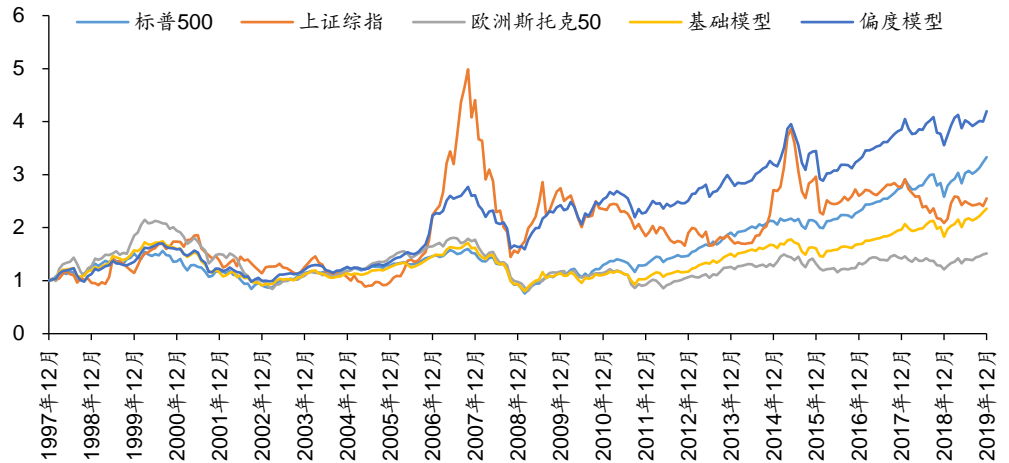
图表19: 偏度模型对于三种基础模型的提升程度

		年化收益	年化波动	最大回撤	夏普比率	Calmar 比率
保守型	基础模型	4.18%	14.76%	49.41%	0.2831	0.0846
	偏度模型	6.82%	15.81%	48.57%	0.4314	0.1404
	变化率				52.42%	66.07%
稳健型	基础模型	5.12%	14.77%	54.23%	0.3469	0.0945
	偏度模型	7.61%	15.54%	45.55%	0.4896	0.1671
	变化率				41.15%	76.82%
激进型	基础模型	6.46%	15.08%	53.08%	0.4285	0.1218
	偏度模型	8.00%	14.99%	43.65%	0.5340	0.1834
	变化率				24.62%	50.60%

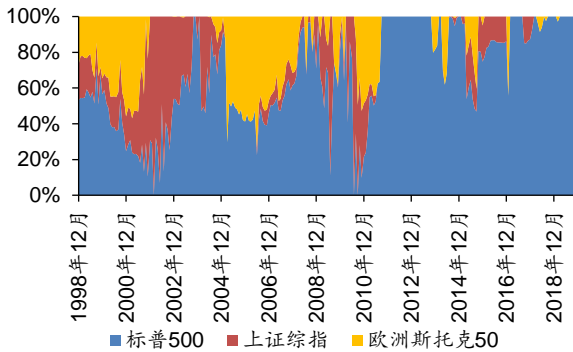
资料来源: 华泰证券研究所

改进后的偏度模型相较于基础模型而言收益率有较大幅度的提升, 波动率略微有所上升, 最终使得夏普比率得到提高。偏度模型对保守型、稳健型和激进型的基础模型夏普比率提升分别为 0.1483、0.1427、0.1055, 提升百分比为 52.42%、41.15%、24.62%。

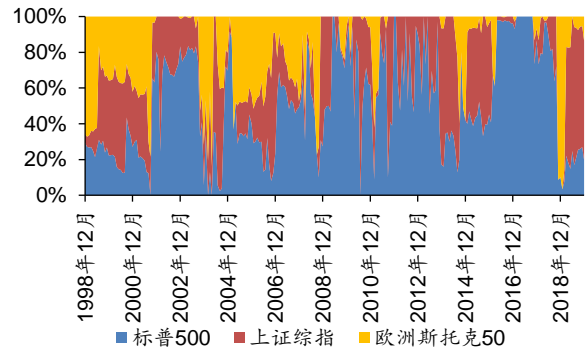
下面给出了部分偏度模型与基础模型的净值图对比和权重分布。

图表20： 基础模型（稳健型）和偏度模型（稳健型）的净值图

资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表21： 基础模型（稳健型）的权重分布

资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表22： 偏度模型（稳健型）的权重分布

资料来源：Wind，华泰证券研究所

更换资产与时间窗口的有效性检验：偏度模型整体性优于基础模型

偏度模型对于标普 500、欧洲斯托克 50 指数和上证综指构成的股指组合的夏普比率上有较大提升，我们接下来研究这一提升在其他资产或在不同时间窗口期是否仍然有效。

偏度模型配置不同的股票组合大多都能提升夏普比率

考虑到底层资产变化时，模型提升性和提升程度都有可能发生变化，我们使用下面的资产池对底层资产进行更换，观察偏度模型相对于基础模型的表现情况。

图表23： 扩展资产池资产

资产池	简称
欧洲斯托克 50	欧
澳洲标普 200	澳
标普 500	美
德国 DAX	德
上证综指	中
日经 225	日

资料来源：华泰证券研究所

我们从上述 6 个资产中任取 3 个资产构成资产组合，分别使用基础模型和偏度模型进行资产配置，最终结果如下：

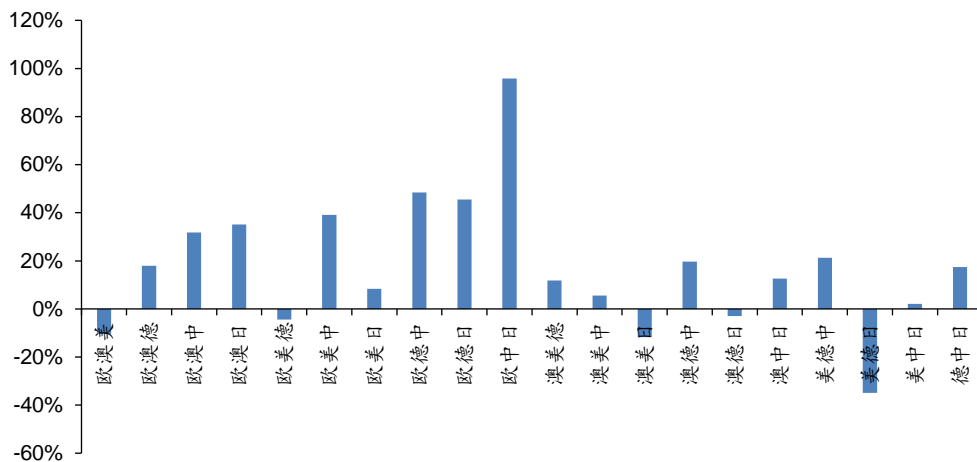
图表24： 偏度模型（稳健型）相对基础模型（稳健型）的提升

		年化收益	年化波动	最大回撤	夏普比率	Calmar 比率
欧澳美	基础模型	6.39%	12.77%	52.33%	0.5002	0.1221
	偏度模型	5.88%	13.14%	51.95%	0.4478	0.1132
	提升率				-10.47%	-7.23%
欧澳德	基础模型	5.71%	13.77%	52.08%	0.4150	0.1097
	偏度模型	7.36%	15.02%	52.38%	0.4897	0.1404
	提升率				18.00%	28.00%
欧澳中	基础模型	3.51%	13.30%	51.32%	0.2636	0.0683
	偏度模型	5.22%	15.02%	49.08%	0.3475	0.1064
	提升率				31.82%	55.67%
欧澳日	基础模型	4.49%	13.35%	51.35%	0.3364	0.0875
	偏度模型	6.40%	14.09%	55.34%	0.4546	0.1157
	提升率				35.11%	32.28%
欧美德	基础模型	5.91%	14.92%	53.76%	0.3962	0.1100
	偏度模型	5.94%	15.67%	53.97%	0.3789	0.1100
	提升率				-4.38%	0.01%
欧美中	基础模型	5.13%	14.77%	54.13%	0.3476	0.0948
	偏度模型	7.47%	15.45%	46.12%	0.4838	0.1620
	提升率				39.17%	70.85%
欧美日	基础模型	4.77%	14.83%	60.78%	0.3217	0.0785
	偏度模型	5.24%	15.04%	60.16%	0.3484	0.0871
	提升率				8.31%	11.03%
欧德中	基础模型	4.65%	17.04%	55.59%	0.2727	0.0836
	偏度模型	7.16%	17.70%	51.81%	0.4047	0.1382
	提升率				48.42%	65.43%
欧德日	基础模型	4.96%	17.35%	62.54%	0.2858	0.0793
	偏度模型	7.44%	17.89%	58.72%	0.4158	0.1267
	提升率				45.48%	59.79%
欧中日	基础模型	2.83%	17.25%	60.50%	0.1640	0.0468
	偏度模型	5.47%	17.04%	52.36%	0.3211	0.1045
	提升率				95.79%	123.47%
澳美德	基础模型	6.92%	13.03%	51.34%	0.5309	0.1347
	偏度模型	8.24%	13.87%	50.83%	0.5938	0.1621
	提升率				11.84%	20.31%
澳美中	基础模型	6.78%	13.22%	50.60%	0.5128	0.1340
	偏度模型	8.14%	15.03%	50.88%	0.5416	0.1599
	提升率				5.62%	19.40%
澳美日	基础模型	6.84%	12.79%	51.38%	0.5348	0.1331
	偏度模型	6.44%	13.64%	56.09%	0.4721	0.1148
	提升率				-11.71%	-13.75%
澳德中	基础模型	5.71%	14.13%	53.33%	0.4043	0.1071
	偏度模型	8.11%	16.77%	55.57%	0.4836	0.1459
	提升率				19.63%	36.26%
澳德日	基础模型	5.63%	13.75%	50.70%	0.4097	0.1111
	偏度模型	5.97%	15.01%	55.93%	0.3976	0.1067
	提升率				-2.96%	-3.96%
澳中日	基础模型	4.57%	13.40%	52.00%	0.3413	0.0879
	偏度模型	5.90%	15.35%	54.15%	0.3842	0.1089
	提升率				12.55%	23.81%
美德中	基础模型	6.64%	15.45%	54.83%	0.4299	0.1211
	偏度模型	8.66%	16.63%	52.55%	0.5210	0.1649
	提升率				21.21%	36.14%
美德日	基础模型	6.42%	15.54%	57.74%	0.4128	0.1111
	偏度模型	4.39%	16.34%	66.55%	0.2687	0.0660
	提升率				-34.92%	-40.64%
美中日	基础模型	6.03%	15.14%	53.98%	0.3987	0.1118
	偏度模型	6.22%	15.26%	53.03%	0.4072	0.1172
	提升率				2.14%	4.85%
德中日	基础模型	5.47%	18.08%	52.41%	0.3023	0.1043
	偏度模型	6.49%	18.28%	56.51%	0.3550	0.1148
	提升率				17.46%	10.14%

资料来源：Wind，华泰证券研究所

更换底层资产后，在上述共 20 个资产组合中，偏度模型在其中 15 个组合中表现更好。可以认为偏度模型相较于基础模型而言，在大多数资产池中会有提升表现，而对于少部分含有特定资产对的资产池表现欠佳。从下图可以较为直观的看出偏度模型在不同资产组上的提升性能。

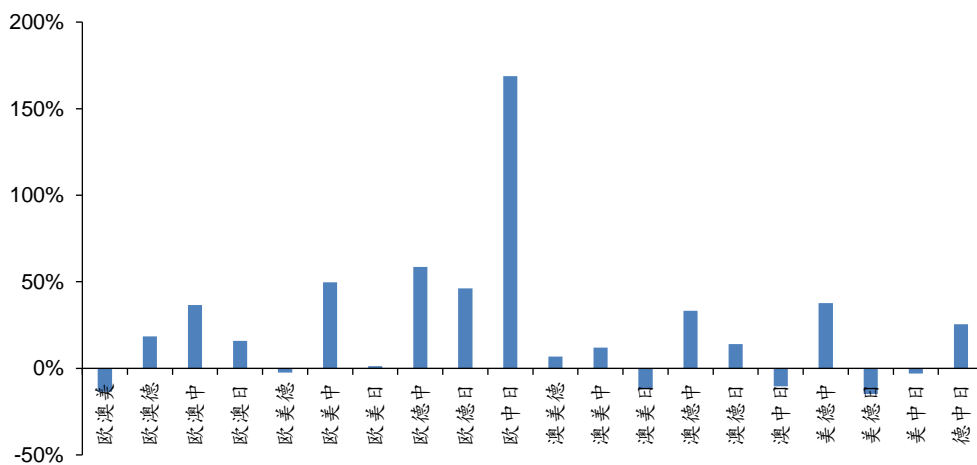
图表25：不同资产组合偏度模型（稳健型）夏普比率提升百分比



资料来源：Wind，华泰证券研究所

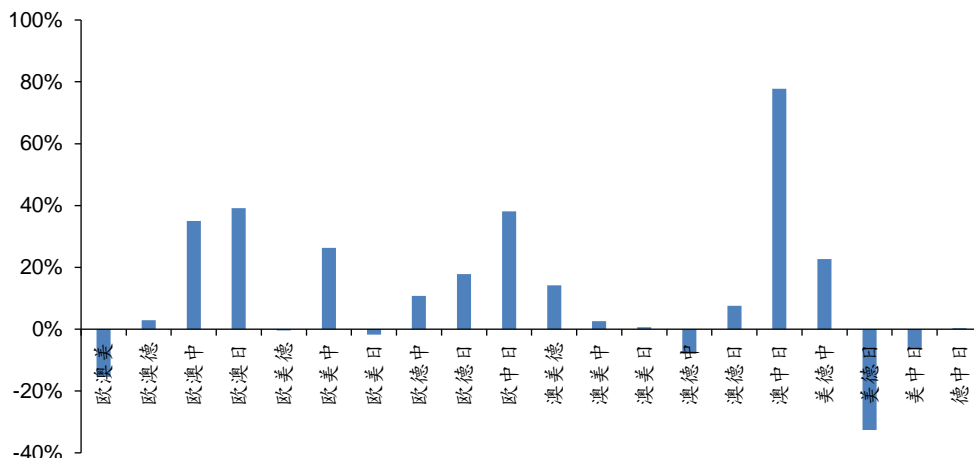
同样，对于保守型和激进型的基础模型，偏度模型的提升情况如下：

图表26：不同资产组合偏度模型（保守型）夏普比率提升百分比



资料来源：Wind，华泰证券研究所

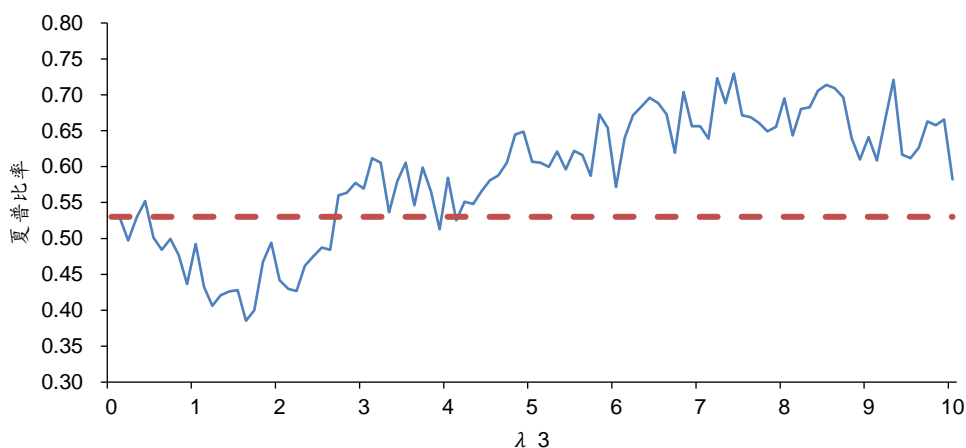
图表27：不同资产组合偏度模型（激进型）夏普比率提升百分比



资料来源：Wind，华泰证券研究所

加入商品资产后的偏度模型同样可以稳定提升组合夏普

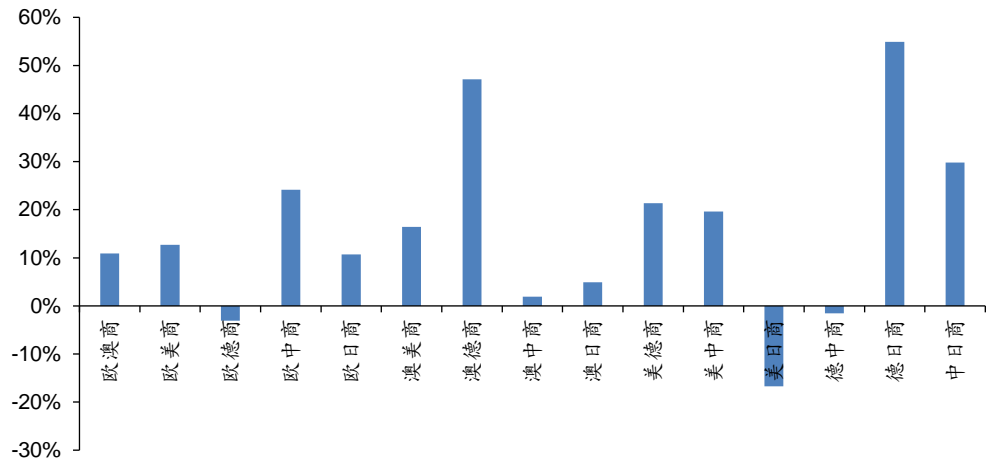
接下来将商品指数（CRB 商品现货指数）加入资产池中。考虑到商品指数的部分属性与股指差异较大，我们首先使用标普 500、上证综指、CRB 商品现货指数调整参数（仍然使用 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的基础模型）。

图表28：偏度模型夏普比率随参数 λ_3 变化（加入商品指数）

资料来源：Wind，华泰证券研究所

此时与纯股指的资产配置不同，模型在 λ_3 较大时才会出现夏普比率的提升，因此我们将偏度模型在 $\lambda_3=5, 6, 7, 8, 9$ 时的平均提升作为衡量标准。

同样我们对资产池中的五只股指任意取两只与商品指数构成新的资产组合（使用“商”表示商品指数），最终用基础模型和偏度模型得到的结果如下：

图表29： 偏度模型相对基础模型（稳健型）的提升百分比（加入商品指数）

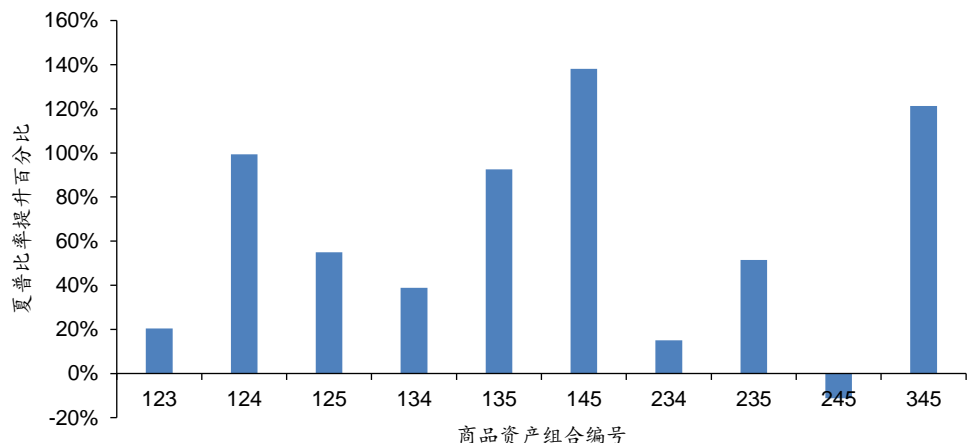
资料来源：Wind，华泰证券研究所

最后我们使用 CRB 的五只商品指数中任选三只作为底层资产来验证模型的有效性，这五只指数分别是 CRB 食品现货指数、CRB 食物油现货指数、CRB 金属现货指数、CRB 工业现货指数、CRB 纺织现货指数，从 1997 年 12 月到 2019 年 12 月的月度数据，滚动时长仍为 12 个月（这里做出调整是由于商品指数跟股指本身的差异导致原先使用 24 个月来计算效果不佳），结果如下：

图表30： 扩展资产池资产（商品指数）

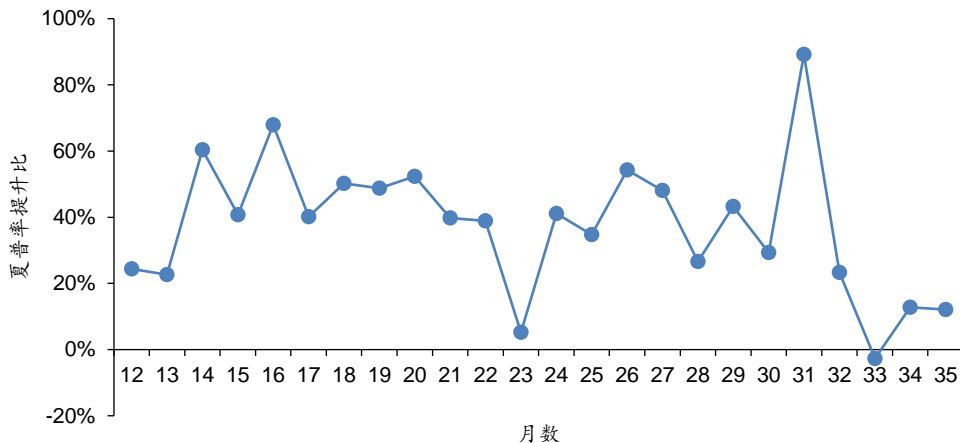
资产池	编号
CRB 食品现货指数	1
CRB 食物油现货指数	2
CRB 金属现货指数	3
CRB 工业现货指数	4
CRB 纺织现货指数	5

资料来源：华泰证券研究所

图表31： 偏度模型相对基础模型（稳健型）的提升百分比（加入商品指数）

资料来源：Wind，华泰证券研究所

可以看到对于大部分商品指数构成的资产组合，偏度模型的提升效果仍非常显著。此外，在之前的优化过程中，我们使用了前 24 个月的历史数据来计算预期收益率和方差，这一数值发生变化最终结果也会有所影响，下图是以标普 500、欧洲斯托克 50 和上证综指为资产池，使用稳健型模型得到的随滚动月份变化的夏普率提升情况。可以发现变动滚动时长后提升性仍然较为显著。

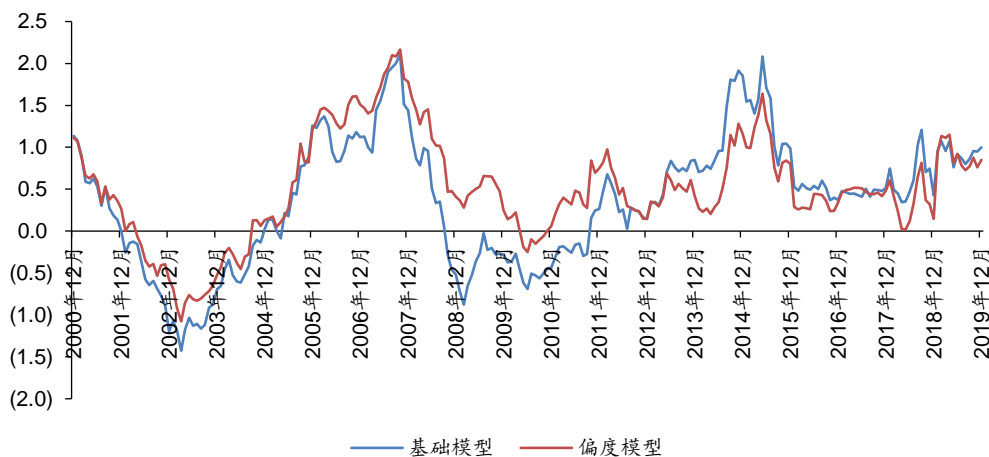
图表32： 不同滚动时长夏普率提升百分比

资料来源：Wind，华泰证券研究所

需要注意的是，我们尝试在底层资产中加入债券指数，由于债券的夏普比通常远大于股指和商品指数，此时大部分权重集中在债券指数上，因此偏度模型对此的提升效果有限。我们认为该模型更适用于在以股指和商品指数为代表的风险资产之间进行权重分配。

偏度模型在大多时间里优于基础模型

除了底层资产的变动外，不同时期可能模型的提升情况也会发生变化，我们仍然使用标普500、欧洲斯托克50和上证综指作为底层资产，按照24个月为一个阶段滚动向后计算不同模型下的夏普比率，结果如下：

图表33： 基础模型（稳健型）和偏度模型（稳健型）的滚动夏普比率

资料来源：Wind，华泰证券研究所

在2000年12月到2019年12月共计228个月的统计区间中，有152个月偏度模型得到的夏普比率要高于基础模型，提升概率为66.38%，平均提升夏普比率为36.89%。因此我们认为偏度模型对资产配置的提升是系统性的，在大多数资产和时间窗口期内都是适用的。

增加最小化峰度目标可降低组合极端风险概率，但一般市场提升不明显

偏度峰度模型：在马科维茨模型基础上同时加入偏度和峰度优化的影响，优化过程为

$$\text{Minimize } Z = \left| \frac{d_1}{R^*} \right|^{\lambda_1} + \left| \frac{d_2}{V^*} \right|^{\lambda_2} + \left| \frac{d_3}{S^*} \right|^{\lambda_3} + \left| \frac{d_4}{K^*} \right|^{\lambda_4}$$

下表为基础模型上加入偏度， λ_1 、 λ_2 、 λ_3 都取 1，不加峰度（ $\lambda_4=0$ ）与加入峰度（峰度参数 λ_4 取 1, 2, 3, 4, 5）的模型结果展示：

图表34：不同 λ_4 取值模型表现

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	年化收益	年化波动	最大回撤	夏普比率	Calmar 比率
1	1	1	0	5.55%	15.02%	45.42%	0.3694	0.1221
1	1	1	1	5.32%	15.20%	47.78%	0.3498	0.1113
1	1	1	2	4.77%	15.25%	48.02%	0.3131	0.0994
1	1	1	3	3.75%	15.39%	49.00%	0.2437	0.0765
1	1	1	4	3.52%	16.23%	46.59%	0.2172	0.0757
1	1	1	5	2.74%	16.64%	49.83%	0.1649	0.0551

资料来源：Wind，华泰证券研究所

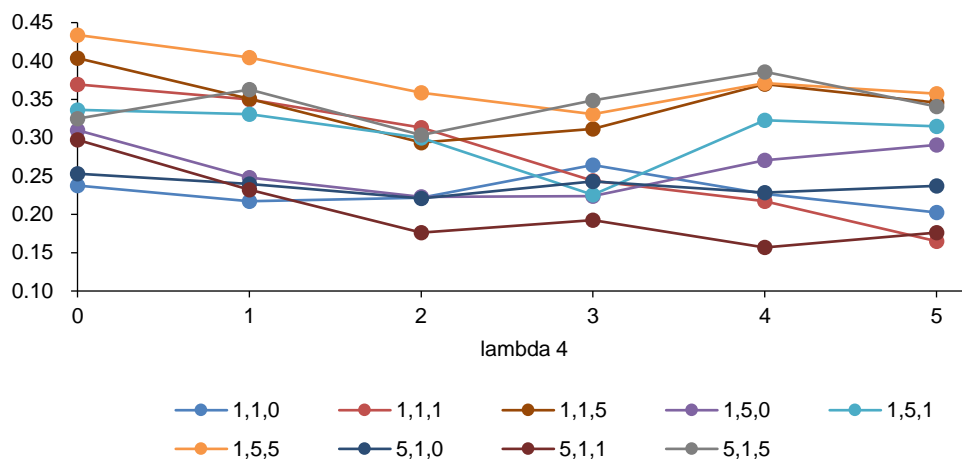
考虑在三个均值方差基础模型上加入偏度，由于前文已测试过模型对 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 参数不敏感，因此分别取合理区间的首尾的 1, 5 进行测试，特别地，再测试 $\lambda_3=0$ 的情况，取 0 即代表不加入偏度仅测试峰度的影响；峰度的参数 λ_4 取值 0, 1, 2, 3, 4, 5 进行广泛测试，比较同时加入偏度和峰度的模型与仅加入偏度的模型夏普比率的表现。此时加入峰度后夏普比率全部下降。

图表35：不同 λ_3 取值不加峰度与加入峰度夏普比率的变化

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	年化收益	年化波动	最大回撤	夏普比率	Calmar 比率
1	1	0	0	3.51%	14.79%	54.24%	0.2375	0.0647
1	1	0	1~5	3.58%	15.84%	49.55%	0.2265	0.0723
1	1	1	0	5.55%	15.02%	45.42%	0.3694	0.1221
1	1	1	1~5	4.02%	15.74%	48.24%	0.2577	0.0836
1	1	5	0	5.48%	15.94%	47.13%	0.3437	0.1162
1	1	5	1~5	5.58%	16.69%	47.11%	0.3343	0.1189
1	5	0	0	4.68%	15.10%	53.08%	0.3098	0.0881
1	5	0	1~5	3.79%	15.09%	48.39%	0.2511	0.0790
1	5	1	0	5.07%	15.07%	47.84%	0.3362	0.1059
1	5	1	1~5	4.73%	15.24%	47.49%	0.3106	0.0998
1	5	5	0	6.51%	15.00%	42.10%	0.4339	0.1546
1	5	5	1~5	5.58%	15.31%	46.21%	0.3644	0.1208
5	1	0	0	2.86%	14.82%	48.83%	0.2430	0.0586
5	1	0	1~5	3.65%	15.63%	49.46%	0.2338	0.0742
5	1	1	0	4.56%	15.35%	52.84%	0.2971	0.0863
5	1	1	1~5	2.91%	15.61%	53.55%	0.1867	0.0542
5	1	5	0	5.24%	16.11%	47.21%	0.3249	0.1109
5	1	5	1~5	5.80%	16.64%	46.78%	0.3483	0.1245

资料来源：Wind，华泰证券研究所

该表中 λ_4 取 0 时且 λ_3 不为 0 时表示仅加入偏度， λ_4 为 1~5 时表示同时加入偏度和峰度时峰度参数 λ_4 为 1, 2, 3, 4, 5 的指标的均值。从下面的图中可以直观看到夏普比率随 λ_4 的变化：

图表36：峰度模型夏普比率随参数 λ_4 变化

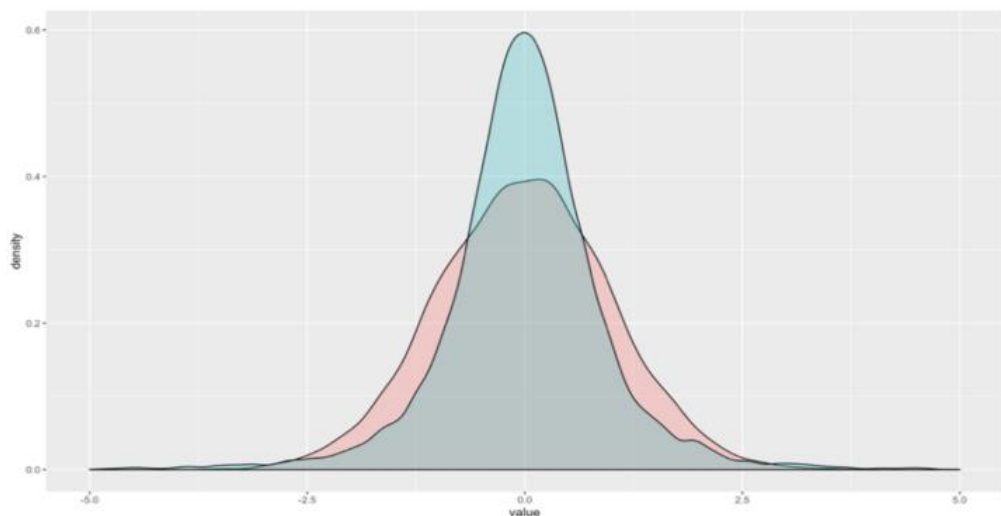
资料来源：Wind，华泰证券研究所

加入峰度后大多数模型资产组合的年化收益率降低，年化波动率增大，Calmar 比率降低，夏普比率降低，其中仅有最后一组的对比加入峰度后夏普比率有略微提升。

多数参数组合中加入峰度优化目标后夏普比率降低，这可能是由于相同均值与标准差下，峰度越小极端值数量越少，分布越平缓，具有较平坦的峰度以及更短更细的尾部，形成厚峰细尾分布（下图红色区域），反之则是尖峰厚尾（下图蓝色区域）。目标函数中加入最小化峰度这一目标后分布趋向于厚峰细尾分布，该分布的右侧尾部区域面积比尖峰厚尾分布小，意味着投资回报得到极大值的概率减少，冒风险得到的平均收益比尖峰分布的少，即投资回报与多冒风险的比率降低，夏普比率降低。

一般来说，投资者通常会厌恶尖峰的投资组合，因此本报告以厚峰为优化目标。但尾部风险具有双向性，厚峰只是更稳健的投资选择，因为熊市时厚峰分布的尾部更细，表示遭遇极端亏损的概率减小，但当牛市时则意味着投资获得极端高收益的概率也减小，也就是峰度在刻画收益分布时，会涵盖左右两端的极端情况，因此在多项式目标优化方法中加入最小化峰度这一目标未必能在不同的市场环境中均获得更有效的配置方案。

图表37：不同峰度的密度函数图像（红色为厚峰分布）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

全文总结

本篇报告首先介绍了资产配置中经典的马科维茨模型，马科维茨模型固定资产组合的收益率，通过资产组合方差最小化的方式构建了有效前沿。投资者根据自己的偏好来选择有效前沿上的资产组合进行投资，为了直观地描述投资者如何在有效前沿上进行资产组合的选择，我们引入了无差异曲线的概念，曲线上的每一个点（投资组合）给投资者带来的效用是相同的，这条曲线就是无差异曲线。随着资产波动增加，风险厌恶的投资者往往需要更高的预期收益来补偿风险增加带来的效用减少，这就使得风险厌恶投资者的无差异曲线的形状是向下凸的。

在使用马科维茨模型进行资产配置时我们发现，这一过程基于一些严格的假设，例如投资者在进行投资选择时，资产收益率的分布由预期收益率及其方差确定，即资产收益率服从正态分布等。为了克服马科维茨模型在收益率分布上的假设不合理问题，我们尝试引入收益三阶和四阶中心矩来更加精准地刻画收益分布，并基于此进行模型优化。

我们使用多项式目标优化在原始模型中加入三阶矩偏度和四阶矩峰度，通过更改参数来改变各阶矩在效用中的占比权重。我们按照对均值和方差的权重分配设定了三个基础模型（保守型：均值和方差在效用函数中的占比为 1: 5；稳健型：均值和方差在效用函数中的占比为 1: 1；激进型：均值和方差在效用函数中的占比为 5: 1），使用基础模型和加入偏度之后的偏度模型对标普 500、欧洲斯托克 50 和上证综指进行资产配置测试，在保守型、稳健型、激进型模型上得到的夏普比率提升分别为 52.42%，41.15%，24.62%。这一提升在这一提升在更换股票和商品等底层资产，以及在不同的时间段内测试都依然有效，因此，我们认为偏度的加入可以提升模型的配置表现。而在偏度模型的基础上再加入峰度后的模型提升并不明显，这可能是峰度所刻画的尾部风险会体现在收益分布上的左右两端所导致。

风险提示

马科维茨模型和改进后的模型都是基于历史经验的总结，如果市场规律改变，存在失效的可能性；报告中的各类指数只是作为常见指数，并不能完全代表 A 股或全球市场，请投资者谨慎、理性地看待。

附录

不含无风险资产组合有效前沿的双曲线解析式推导

若资产组合仅含有风险资产，不含无风险资产，我们来推导有效前沿的解析式。

不含无风险资产的均值-方差模型如下，即给定资产组合的预期收益，最小化资产组合的风险，因此会优化求解出 ω ，形成 ω 和 $E(r_p)$ 的关系式。

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \quad & \frac{1}{2} \omega^T V \omega \\ \text{s.t.} \quad & \omega^T R = E(r_p) \\ & \omega^T I = 1 \end{aligned}$$

其中：

ω 是各资产权重 ($\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N]'$)

V 是资产间的协方差矩阵 ($N \times N$)

R 是各资产的期望收益率 ($R = [R_1, \dots, R_N]'$)

$E(r_p)$ 是投资组合期望收益率

I 是 $N \times 1$ 单位向量

【优化求解 ω 】

用非线性最优化的拉格朗日乘子法求解上述优化式，引入 λ 和 γ 乘子：

$$\min_{\omega} L(\omega, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} \omega^T V \omega + \lambda (E(r_p) - \omega^T R) + \gamma (1 - \omega^T I)$$

分别对 ω 、 λ 、 γ 求一阶偏导，得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \omega} &= V\omega - \lambda R - \gamma I = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= E(r_p) - \omega^T R = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} &= 1 - \omega^T I = 0 \end{aligned}$$

由第一个偏导式得 $\omega = \lambda V^{-1} R + \gamma V^{-1} I$ 。

再因 V 是协方差矩阵(对称阵和正定阵)可知 $(V^{-1})^T = V^{-1}$ ，因此 $\omega^T = \lambda R^T V^{-1} + \gamma I^T V^{-1}$ 。将求解的 ω^T 代入第二和第三个偏导式可得：

$$\begin{aligned} E(r_p) &= \omega^T R = \lambda R^T V^{-1} R + \gamma I^T V^{-1} R \\ 1 &= \omega^T I = \lambda R^T V^{-1} I + \gamma I^T V^{-1} I \end{aligned}$$

令 $\alpha = R^T V^{-1} I = I^T V^{-1} R$ ， $\zeta = R^T V^{-1} R$ ， $\delta = I^T V^{-1} I$ ，上式可表示为：

$$\begin{aligned} E(r_p) &= \lambda \zeta + \gamma \alpha \\ 1 &= \lambda \alpha + \gamma \delta \end{aligned}$$

因此由第 2 式，得 $\lambda = \frac{1-\gamma\delta}{\alpha}$ ，代入第 1 式得， $E(r_p) = \frac{1-\gamma\delta}{\alpha} \zeta + \gamma \alpha = \frac{\zeta - \gamma\delta\zeta + \gamma\alpha^2}{\alpha} = \frac{\zeta - \gamma(\delta\zeta - \alpha^2)}{\alpha}$

所以， $\gamma = \frac{\zeta - \alpha E(r_p)}{\delta\zeta - \alpha^2}$

同理由第 2 式，得 $\gamma = \frac{1-\lambda\alpha}{\delta}$ ，代入第 1 式得， $E(r_p) = \lambda \zeta + \frac{1-\lambda\alpha}{\delta} \alpha = \frac{\lambda\zeta\delta + \alpha - \lambda\alpha^2}{\delta} = \frac{\lambda(\zeta\delta - \alpha^2) + \alpha}{\delta}$

所以， $\lambda = \frac{E(r_p)\delta - \alpha}{\zeta\delta - \alpha^2}$

将 λ 和 γ 再代入第一个偏导式中，可以得到

$$V\omega - \frac{E(r_p)\delta - \alpha}{\zeta\delta - \alpha^2}R - \frac{\zeta - \alpha E(r_p)}{\zeta\delta - \alpha^2}I = 0$$

$$V\omega = \frac{E(r_p)\delta R - \alpha R + \zeta I - \alpha E(r_p)I}{\zeta\delta - \alpha^2} = \frac{-\alpha R + \zeta I}{\zeta\delta - \alpha^2} + \frac{(\delta R - \alpha I)E(r_p)}{\zeta\delta - \alpha^2}$$

所以

$$\omega = \frac{\zeta V^{-1}I - \alpha V^{-1}R}{\zeta\delta - \alpha^2} + \frac{\delta V^{-1}R - \alpha V^{-1}I}{\zeta\delta - \alpha^2}E(r_p)$$

化简的 ω 表达式：

$$\omega = a + bE(r_p)$$

其中 $a = \frac{\zeta V^{-1}I - \alpha V^{-1}R}{\zeta\delta - \alpha^2}$, $b = \frac{\delta V^{-1}R - \alpha V^{-1}I}{\zeta\delta - \alpha^2}$ 都是确定的常向量。

【 σ_p 和 $E(r_p)$ 的关系式】

由于 σ_p , $E(r_p)$, ω 可互为表示, 再得到了上述 $E(r_p)$ 和 ω 的关系式后, 我们可以推导出 σ_p 和 $E(r_p)$ 的关系式。将上述求解出的 ω 代入方差 $\sigma_p^2 = \omega^T V \omega$ 可得到:

$$\frac{\sigma_p^2}{\delta^{-1}} - \frac{(E(r_p)\delta - \alpha)^2}{\zeta\delta - \alpha^2} = 1$$

因为 α , δ , ζ 都是确定的常数, 由此可知, 该资产组合的可行集是一条双曲线。因为在相同标准差的情况下, 投资者会选择更高的收益, 因此双曲线的上边沿为有效边界。

含无风险资产组合有效前沿的推导

若资产组合不仅含有风险资产, 还含有由无风险资产。则资产组合的收益表示会有所不同, 拉格朗日法推导过程会不一样, 求解出的有效前沿解析式也有所区别。

含无风险资产的均值-方差模型为:

$$\min_{\omega} \frac{1}{2} \omega^T V \omega$$

$$\text{s.t. } \omega^T R + (1 - \omega^T I)r_f = E(r_p)$$

其中 r_f 是无风险资产收益率, 资产组合是由 ω^T 权重的风险资产和 $(1 - \omega^T I)$ 权重的无风险资产构成, 两种资产加起来权重为 1。

【优化求解 ω 】

仍然用拉格朗日乘子法求解, 引入 λ 乘子:

$$\min_{\omega} L(\omega, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} \omega^T V \omega + \lambda(E(r_p) - \omega^T R - (1 - \omega^T I)r_f)$$

分别对 ω 、 λ 求一阶偏导, 得:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = V\omega + \lambda(-R + Ir_f) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E(r_p) - \omega^T R - (1 - \omega^T I)r_f = 0$$

可解出 $\omega = \lambda V^{-1}(R - Ir_f)$, $E(r_p) - r_f = (R - Ir_f)^T \omega$

令 $G = (R - Ir_f)^T V^{-1}(R - Ir_f)$, 得到

$$\lambda = \frac{E(r_p) - r_f}{(R - Ir_f)^T V^{-1}(R - Ir_f)} = \frac{E(r_p) - r_f}{G}$$

再将 λ 代回上式:

$$\omega = \frac{E(r_p) - r_f}{G} V^{-1}(R - Ir_f)$$

用最初设定量可表示为：

$$\omega = \frac{E(r_p) - r_f}{(R - I r_f)^T V^{-1} (R - I r_f)} V^{-1} (R - I r_f)$$

【 σ_p 和 $E(r_p)$ 的关系式】

同样把 ω 代入下式可算出资产组合的方差：

$$\sigma_p^2 = \omega^T V \omega = \frac{(E(r_p) - r_f)^2}{G}$$

因此，当 $E(r_p) \geq r_f$ 时， $\sigma_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sqrt{G}}$ ；当 $E(r_p) \leq r_f$ 时， $\sigma_p = -\frac{E(r_p) - r_f}{\sqrt{G}}$ 。

由此可知，该资产组合的可行集为两条直线，但是斜率为负的那条可行集是多余的，因为在相同风险的情况，投资者会选择更高收益率。因此，斜率为正的直线为有效边界，而且该线会与不含风险资产有效前沿的双曲线相切。

需要注意的是，上述推导过程没有考虑权重为负的情形，使用实际数据进行运算时出现权重为负的情形表示需要卖空该资产。对于一个纯多头的资产组合，往往需要加入限制条件

$$\omega_i \geq 0$$

由 r_f 发出的射线与风险资产组合构成的双曲线有效前沿相切，切点为市场组合点，该点是理论上夏普率最大的风险资产组合，组合可表示为：

$$\omega = \frac{1}{\alpha - r_f \delta} V^{-1} (R - e r_f)$$

马科维茨模型的等价效用函数推导

对于一般形式的效用函数

$$U(W)$$

其中 W 表示投资者的财富。该效用函数通常满足下面两个条件：

- (1) $U'(W) > 0$ ，即 $U(W)$ 关于 W 递增，财富增多对投资者的效用显然是增加的；
- (2) $U''(W) < 0$ ，即 $U(W)$ 是凹函数，随着财富的增加，每一单位的财富带给投资者的效用会减少。这一点是很好理解的，当你只有一百元的财富时，多给你一百元无疑是“雪中送炭”，带来的价值是相对较大的，而当你有一百万元的财富时，额外的一百元相对价值变小了，仅仅是“锦上添花”。

上述性质可以解释为何投资者是风险厌恶的，假定当前投资者财富为 1，他考虑进行 A、B 两项投资，投资 A 下一期带来稳定回报 10%，而投资 B 则有 0.5 的概率带来 30% 的回报，0.5 的概率产生 10% 的损失。两项投资带来的平均收益都是 10%，但投资者选择投资

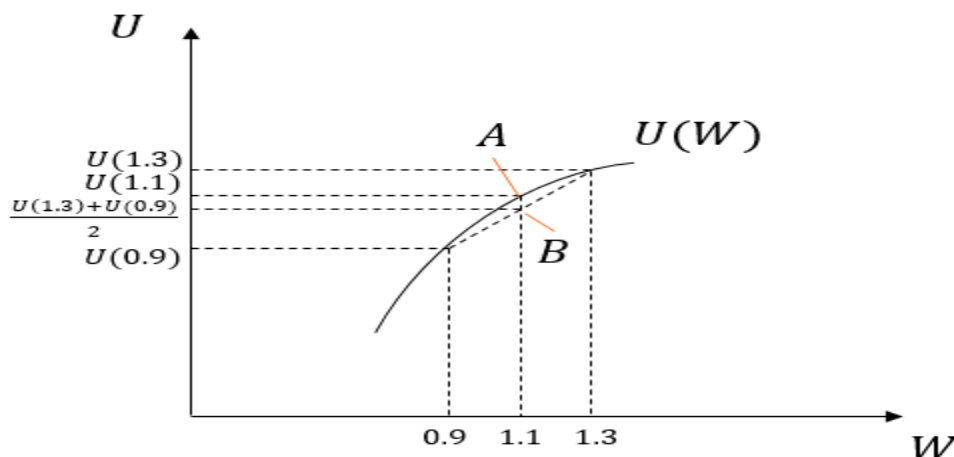
A 的预期效用为 $U(1.1)$ ，而投资 B 的预期效用为 $\frac{U(1.3) + U(0.9)}{2}$ ，由于 $U(W)$ 的二阶导小于 0，

我们得到

$$\frac{U(1.3) + U(0.9)}{2} < U\left(\frac{1.3 + 0.9}{2}\right) = U(1.1)$$

因此尽管二者的平均收益是一样的，投资者仍然会选择不确定性更低的投资，即投资 A。

图表38：效用函数



资料来源：华泰证券研究所

在计算中通常我们采用 CARA (Constant absolute risk aversion 常绝对风险厌恶) 效用函数

$$U(W) = -\exp(-\lambda W)$$

这里 λ 是风险厌恶系数。此时

$$U'(W) = \lambda \exp(-\lambda W) > 0$$

$$U''(W) = -\lambda^2 \exp(-\lambda W) < 0$$

满足我们对于一般效用函数的限制。

下面我们根据 CARA 效用函数来推导用于马科维茨模型资产配置的优化函数：

假定当前有 n 个风险资产，收益率为 $R = (R_1, \dots, R_n)'$ ，投资者期初财富为 1，那么期末财富可表示为

$$W = 1 + \alpha' R$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$ 为投资于风险资产 R 的权重， $\alpha_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ 。

因此投资者的目标是

$$\max_{\alpha} E[U(W)] = E[U(1 + \alpha' R)] = \int \dots \int U(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i) dF(R_1, \dots, R_n)$$

在实际资产配置中，如果效用函数无法表示为收益率的多项式形式， $\int \dots \int U(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i) dF(R_1, \dots, R_n)$ 的计算求解会很复杂。为了解决这一问题，我们通过泰勒展开公式将效用函数 $U(W)$ 用 W 的多项式表示出来，进而 $E[U(W)]$ 可以由收益率的部分统计量来近似估计。

由泰勒展开公式

$$U(W) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U^{(j)}(\bar{W})(W - \bar{W})^j}{j!}$$

$\bar{W} = E[W] = 1 + \alpha' E[R]$ 表示期末的财富期望值

因此

$$E[U(W)] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U^{(j)}(\bar{W})}{j!} E[(W - \bar{W})^j]$$

使用二阶形式近似

$$E[U(W)] \approx U(\mu) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\mu)\sigma^2$$

其中 $\mu = \bar{W}$, $\sigma^2 = E[(W - \bar{W})^2]$ 分别表示资产组合的均值和方差。

把 CARA 效用函数代入二阶形式得到

$$E[U(W)] \approx -\exp(-\lambda\mu)[1 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2]$$

做变换

$$E[U(W)] \approx -\exp[-\lambda\mu + \ln\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right)]$$

注意到 $\ln\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right) \sim \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2$

$$E[U(W)] \approx -\exp\left[-\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right] = -\exp\left[-\lambda\left(\mu - \frac{\lambda}{2}\sigma^2\right)\right]$$

因此投资者的目标可以转换为求上式中小括号部分的最大值，这也就是前面所述的最常见的优化函数

$$U = \mu - \frac{\lambda}{2}\sigma^2$$

其中 μ 表示资产组合的收益, σ^2 表示资产组合的方差, λ 为风险厌恶系数。由马科维茨模型, 我们推导出有效前沿, 再根据效用函数的定义计算出有效前沿上每个点的效用值, 效用值最大的一点就是我们最终选择的资产组合。

免责声明

分析师声明

本人，林晓明、黄晓彬，兹证明本报告所表达的观点准确地反映了分析师对标的证券或发行人的个人意见；彼以往、现在或未来并无就其研究报告所提供的具体建议或所表达的意见直接或间接收取任何报酬。

一般声明

本报告由华泰证券股份有限公司（已具备中国证监会批准的证券投资咨询业务资格，以下简称“本公司”）制作。本报告仅供本公司客户使用。本公司不因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、评估及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。同时，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可能会波动。以往表现并不能指引未来，未来回报并不能得到保证，并存在损失本金的可能。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司研究报告以中文撰写，英文报告为翻译版本，如出现中英文版本内容差异或不一致，请以中文报告为主。英文翻译报告可能存在一定时间延迟。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，不构成所述证券的买卖出价或征价。该等观点、建议并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对客户私人投资建议。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

除非另行说明，本报告中所引用的关于业绩的数据代表过往表现，过往的业绩表现不应作为日后回报的预示。本公司不承诺也不保证任何预示的回报会得以实现，分析中所做的预测可能是基于相应的假设，任何假设的变化可能会显著影响所预测的回报。

本公司及作者在自身所知情的范围内，与本报告所指的证券或投资标的不存在法律禁止的利害关系。在法律许可的情况下，本公司及其所属关联机构可能会持有报告中提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为之提供或者争取提供投资银行、财务顾问或者金融产品等相关服务。本公司的销售人员、交易人员或其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。投资者应当考虑到本公司及/或其相关人员可能存在影响本报告观点客观性的潜在利益冲突。投资者请勿将本报告视为投资或其他决定的唯一信赖依据。有关该方面的具体披露请参照本报告尾部。

本研究报告并非意图发送、发布给在当地法律或监管规则下不允许向其发送、发布的机构或人员，也并非意图发送、发布给因可得到、使用本报告的行为而使本公司及关联子公司违反或受制于当地法律或监管规则的机构或人员。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰证券研究所”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权利。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

针对美国司法管辖区的声明

美国法律法规要求之一般披露

本研究报告由华泰证券股份有限公司编制，在美国由华泰证券（美国）有限公司（以下简称华泰证券（美国））向符合美国监管规定的机构投资者进行发表与分发。华泰证券（美国）有限公司是美国注册经纪商和美国金融业监管局（FINRA）的注册会员。对于其在美国分发的研究报告，华泰证券（美国）有限公司对其非美国联营公司编写的每一份研究报告内容负责。华泰证券（美国）有限公司联营公司的分析师不具有美国金融监管（FINRA）分析师的注册资格，可能不属于华泰证券（美国）有限公司的关联人员，因此可能不受 FINRA 关于分析师与标的公司沟通、公开露面和所持交易证券的限制。任何直接从华泰证券（美国）有限公司收到此报告并希望就本报告所述任何证券进行交易的人士，应通过华泰证券（美国）有限公司进行交易。

所有权及重大利益冲突

分析师林晓明、黄晓彬本人及相关人士并不担任本研究报告所提及的标的证券或发行人的高级人员、董事或顾问。分析师及相关人士与本研究报告所提及的标的证券或发行人并无任何相关财务利益。声明中所提及的“相关人士”包括 FINRA 定义下分析师的家庭成员。分析师根据华泰证券的整体收入和盈利能力获得薪酬，包括源自公司投资银行业务的收入。

重要披露信息

- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司在本报告所署日期前的 12 个月内未担任标的证券公开发行或 144A 条款发行的经办人或联席经办人。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司在研究报告发布之日前 12 个月未曾向标的公司提供投资银行服务并收取报酬。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司预计在本报告发布之日后 3 个月内将不会向标的公司收取或寻求投资银行服务报酬。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司并未实益持有标的公司某一类普通股证券的 1%或以上。此头寸基于报告前一个工作日可得的信息，适用法律禁止向我们公布信息的情况除外。在此情况下，总头寸中的适用部分反映截至最近一次发布的可得信息。
- 华泰证券股份有限公司和/或其联营公司在本报告撰写之日并未担任标的公司股票证券做市商。

评级说明

行业评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

增持行业股票指数超越基准

中性行业股票指数基本与基准持平

减持行业股票指数明显弱于基准

公司评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

买入股价超越基准 20%以上

增持股价超越基准 5%-20%

中性股价相对基准波动在-5%~5%之间

减持股价弱于基准 5%-20%

卖出股价弱于基准 20%以上

华泰证券研究

南京

南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码：210019

电话：86 25 83389999/传真：86 25 83387521

电子邮件：ht-rd@htsc.com

深圳

深圳市福田区益田路 5999 号基金大厦 10 楼/邮政编码：518017

电话：86 755 82493932/传真：86 755 82492062

电子邮件：ht-rd@htsc.com

北京

北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层

邮政编码：100032

电话：86 10 63211166/传真：86 10 63211275

电子邮件：ht-rd@htsc.com

上海

上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码：200120

电话：86 21 28972098/传真：86 21 28972068

电子邮件：ht-rd@htsc.com

法律实体披露

本公司具有中国证监会核准的“证券投资咨询”业务资格，经营许可证编号为：91320000704041011J。

华泰证券全资子公司华泰证券(美国)有限公司为美国金融业监管局(FINRA)成员，具有在美国开展经纪交易商业业务的资格，经营业务许可编号为：CRD#298809。

电话：212-763-8160

电子邮件：huatai@htsc-us.com

传真：917-725-9702

http://www.htsc-us.com

©版权所有2020年华泰证券股份有限公司