

林晓明 执业证书编号：S0570516010001
研究员 0755-82080134
linxiaoming@htsc.com

黄晓彬 执业证书编号：S0570516070001
研究员 0755-23950493
huangxiaobin@htsc.com

张泽 0755-82493656
联系人 zhangze@htsc.com

韩哲 0755-82493656
联系人 hanxi@htsc.com

相关研究

- 1 《金工：不同协方差估计方法对比分析》2019.11
- 2 《金工：国之利器，锋芒初现》2019.10
- 3 《金工：周期双底存不确定性宜防守待趋势》2019.10

风险预算模型如何度量风险更有效

改进风险度量方式稳定提升风险模型表现的方法

全文摘要

风险预算模型使得投资者可以依据资产自身风险收益属性与对任意单一资产风险暴露水平与组合总风险控制的要求，预先为不同资产分配不同的风险预算，然后以风险的跟踪误差最小化为目标，通过配置风险来求解出各资产的权重分配。风险预算模型中常用的协方差风险度量方式存在提升改进空间，我们尝试使用 EWMA 协方差、下半方差、VaR 等风险度量方式，发现能够更加有效地度量资产风险，还能够稳定提升风险预算模型在各类市场环境以及风险预算比例下的表现。

风险预算模型通过风险预算分配来实现目标风险水平的资产优化配置

风险预算模型通过管理和分配每类资产的风险暴露，从而实现预期风险水平的组合资产权重配置，这一理念使资产管理实现了从组合优化向风险配置的一次重大突破。实际操作中需要设置合理的时间窗口以训练模型，并采用合适算法来求解模型，通过对股债月频价格序列的相关系数估计误差进行检验，本文选择 40 个月为模型训练窗宽，并采用循环坐标下降算法来求解风险预算模型。

方差系、VaR 系和回撤系指标是产学研界常用的三类风险度量指标

风险预算模型常用协方差度量风险，通过梳理学界和业界常用的度量指标，我们将其分为方差系、VaR 系和回撤系三大类。方差系指标自 1952 年提出以来现已发展为包含方差、半方差、下偏距及广义下偏距等多类指标。在险价值 VaR 体现了对资产安全性的追求，其将概率分布引入到了风险度量之中。最大回撤则能直观观测已经发生的风险损失。三类风险度量方式各有优劣，部分指标可以作为风险预算模型中的风险度量方式。

尝试其他类别风险度量方法替换风险预算模型中的协方差

本文尝试将风险预算模型中的协方差的风险度量方式分别替换为半衰指数加权平均(EWMA)协方差、下半方差和在险价值(VaR)。其中，EWMA 协方差能为近期收益数据赋予更大的权重，这一度量下的模型会降低一定组合收益以加强风险控制。下半方差聚焦资产组合的下行风险，其对应的风险预算模型可以在一定程度上提高组合收益。VaR 指标则主要关注组合收益的极端风险暴露，相应的风险预算模型可以显著降低组合的最大回撤，提升组合的 Calmar 比。

VaR 风险度量方式能稳定有效地提升风险预算模型表现

我们探究在不同风险预算下，以及不同回测区间内，三类风险度量方式的模型提升效果是否能稳定存在。在保守型、稳健型和激进型的风险预算之下，三类风险度量的改进风险预算模型均优于协方差下的基准模型；但在不同的回测时间区间里，三类风险度量下模型的表现存在差异，VaR 能长期保持最小的回撤，而 EWMA 方式下模型的波动率可能会大于基准的协方差模型。综合来看，基于 EWMA 下半方差的风险预算模型能较为稳定地提升资产的组合收益率并一定程度上改善夏普比，而基于 VaR 的风险预算模型则能很好地控制组合的最大回撤，并显著提升组合的夏普和 Calmar。

风险提示：模型是历史经验的总结，如果市场规律改变，存在风险预测滞后、甚至模型彻底失效的可能；报告中的各类指数只是作为常见指数，并不能完全代表 A 股或全球市场全部指数的情况，请投资者谨慎、理性看待。

正文目录

风险预算模型与风险度量指标简介.....	3
风险预算模型通过分配风险贡献进行资产配置.....	3
风险预算模型根据风险配置的理念进行资产管理	3
风险预算模型中计算协方差的时间窗口选为 40 个月.....	4
选择合适的优化算法可提升模型的求解速度及稳定性	5
风险可由方差、VaR 和回撤等指标进行定量刻画.....	6
Markowitz 最早以方差度量证券投资风险	6
在险价值 VaR 将概率分布引入风险度量之中	7
最大回撤能直观观测已发生的风险损失.....	8
风险预算模型可采用多种风险度量方式，以改善协方差的不足.....	9
以 EWMA 协方差作为模型的风险度量，能小幅提升组合夏普.....	9
EWMA 协方差估计算法能赋予近期数据更大的权重	9
不同半衰期下的 EWMA 协方差度量均能降低组合回撤.....	10
下半方差能刻画资产组合的实际下行风险.....	11
经 EWMA 调整后的下半方差也可融入风险预算模型	11
下半方差度量可以在提高组合收益的同时降低波动率.....	12
关注极端风险的 VaR 度量方式可明显控制组合回撤.....	13
采用方差-协方差法估计资产组合的 VaR	13
VaR 度量可显著降低组合回撤，略微降低组合收益	14
风险度量的优化能稳定有效地提升风险预算模型的配置效果.....	15
预算敏感性分析：各改进模型表现均优于基准模型	15
时间敏感性分析：VaR 风险控制仍明显占优.....	16
EWMA 下半方差能提升组合收益，VaR 风险度量方式风控优势明显	18
风险提示.....	18
附录.....	19
各类风险度量指标的定义	19
CCD 算法原理.....	20

风险预算模型与风险度量指标简介

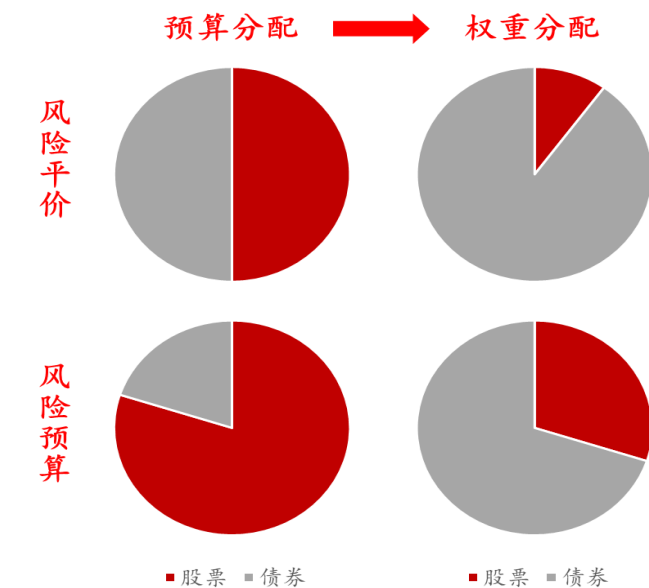
风险预算模型通过分配风险贡献进行资产配置

风险预算模型根据风险配置的理念进行资产管理

在大类资产配置当中，马克维茨的资产组合选择理论（均值方差模型）是最为经典的分析框架。然而，实践中均值方差模型却有着很高的参数敏感性，常常表现为权重配置过于集中，风险也相应集中到特定资产，模型的稳定性因此难以保证。

与均值方差模型需要输入各资产预期收益不同，风险预算模型是将风险分配给每个资产，这一理念使资产管理实现了从组合优化向风险配置的一次重大突破，近年来，风险预算模型在资产管理领域受到广泛关注。

图表1：风险平价与风险预算模型示意图



资料来源：华泰证券研究所

图表2：预算分配示意图



资料来源：华泰证券研究所

风险预算模型原理框架如下：假设一个资产组合中包含 n 个资产，权重为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，由此确定的组合风险记作 $R(x)$ ，此时第 i 个资产的风险贡献 RC_i 可唯一定义为：

$$RC_i = x_i \frac{\partial R(x)}{\partial x_i}$$

数学推导表明，在资产收益率服从正态分布的假设下，标准差等风险度量指标都能满足：

$$R(x) = \sum_{i=1}^n RC_i$$

这一关系式被称为欧拉配置原则，是定义风险预算组合的基础。

进一步定义 $b_i (0 \leq b_i \leq 1)$ 为第 i 个资产的风险贡献 RC_i 在组合风险 $R(x)$ 中所占的百分比，则在不考虑借贷和做空的假设下，一个标准的风险预算组合可由如下形式给出：

$$RC_i = b_i R(x)$$

$$s. t. \begin{cases} b_i \geq 0 \\ 1 \geq x_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n b_i = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases}$$

其中，第一个等式是风险预算组合的核心，它决定了整个组合风险的分配比例，而 b_i 则常常被称为目标风险预算。在计算机求解权重时，上述问题通常转化为如下优化问题，即各资产风险贡献的误差平方和最小化：

$$\min_x f(x; b) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} - b_i R(x) \right)^2$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \end{cases}$$

可见，风险预算组合与马克维茨最优组合之间存在两个主要的区别：第一，风险预算组合并非基于效用函数最大化；第二，风险预算组合不明显依赖于资产的预期收益。这就意味着风险预算模型聚焦于风险的分配，通过合理分配风险来尽可能提高资产配置的稳定性，以及资产组合的整体收益。

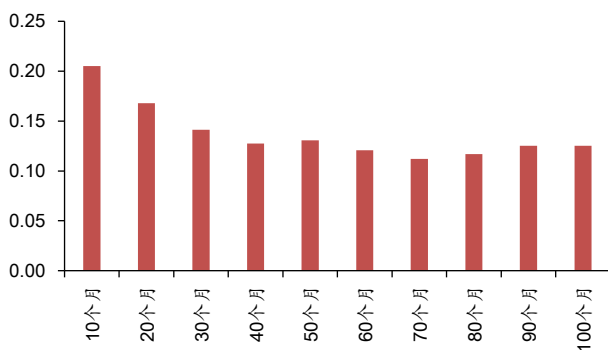
风险预算模型中计算协方差的时间窗口选为 40 个月

在风险预算模型的权重求解时，需要选择合适的时间窗口长度以计算资产间的协方差矩阵。由于协方差及相关性的估计可以作为求解下一期资产权重的输入，因此我们可以根据下一期实际相关系数与输入相关系数之间的差异大小来挑选合适的时间窗宽。

我们以沪深 300 与中债-新综合财富(总值)指数代表中国股市与债市的走势，提取两者自 2002 年 1 月以来的月度收盘价，并计算两者收益率之间的相关系数作为协方差的直观替代。相关系数的估计分为两种思路，一是固定时间窗口，以每个时间点之前固定长度的数据作为输入量计算该时点下两类资产的相关系数；二是固定时间起点，以每个时刻到起点的所有数据作为输入量计算相关系数。另一方面，两类资产的实际相关系数选为每个时点未来 12 个月内股债收益率之间相关系数。然后根据实际相关系数与估计相关系数之间的差作为时间窗宽的评判标准，误差值越小说明该时间窗宽下计算得到的估计相关系数越能贴近实际相关系数。

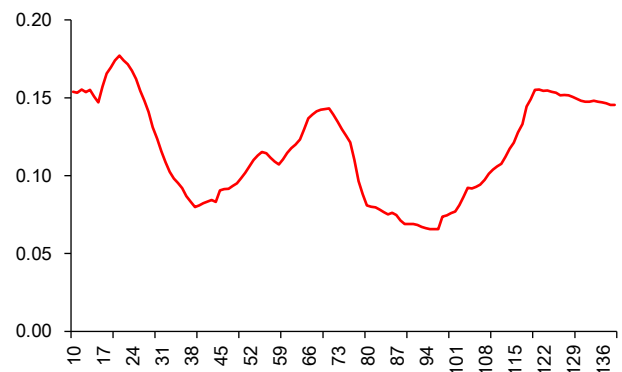
在固定时间窗口的分析中，可以看到随着时间窗口的延长，相关系数的误差先迅速减小，后逐渐达到稳定，当时间窗口达到 40 个月时，估算的相关系数最为贴近实际相关系数。在固定时间起点的分析中，为了避免单一起点带来的误差，我们变动了一系列起点并以这些序列的误差的均值作为结果。可以看到，随着时间窗口的增加，相关系数误差并非单调下降，但却可以清晰地看到相关系数误差出现两个明显的低谷，第一个低谷就出现在 40 个月左右。综合以上两种思路下的结果，本文在风险预算模型的月频实证研究中，都采用 40 个月作为计算时间窗口。

图表3： 固定时间窗口所得相关系数估计误差



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表4： 固定时间起点改变窗口长度所得相关系数估计误差



资料来源：Wind，华泰证券研究所

选择合适的优化算法可提升模型的求解速度及稳定性

风险预算模型对各资产的风险暴露进行分配后，还需要通过最优化问题获取各资产的权重分配。求解风险预算问题的非线性方程组有几类不同的等价实现方式，在这些等价问题下，均有对应的实现算法。第一类优化形式即前文非线性规划模型：

$$\min_w f(w; b) = \min \sum_{i=1}^n \left(w_i \frac{\partial R(w)}{\partial w_i} - b_i R(w) \right)^2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ 0 \leq w_i \leq 1 \end{cases}$$

对该非线性规划问题，主要有两个算法可以进行求解：一是序列二次规划算法（SQP），SQP 算法将求解上述非线性规划问题转化成循环求解一个二次规划问题，直至误差趋近于 0。二是内点法（IPM），内点法构造定义在可行域空间内的惩罚函数，进一步遍历可行域来搜索最优解。具体原理详见附录。

对于非线性规划问题，这两种方法可以进行求解，但存在两个问题：（1）求解依赖初值，收敛不稳定。两种算法均为局部搜索算法，寻找最优解是从初值开始逐步进行的，导致求解过程对初值敏感，求解结果可能为局部最优而非全局最优。使用时需随机生成初始值进行求解，再计算实际风险预算是否与给定风险预算相符，这在增大资产数目时会消耗过多的检验时间。（2）求解速度慢。SQP 在每一步都要求解一个二次规划问题，需要较长的运算时间。且对特定的非凸优化问题，这两个不具针对性的非线性优化算法运算效率往往较低。

第二类等价优化形式由 Roncalli 于 2013 年提出，形式如下：

$$y = \operatorname{argmin} R(y)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n b_i \ln y_i \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

其中 $R(y)$ 表示风险测度方式， c 为满足 $c < \sum_{i=1}^n b_i \ln b_i$ 的任意常数。当以波动率等指标作为风险测度手段时，该规划问题的目标函数变为了二次函数，等价转换后的规划问题是一个凸优化问题，局部最优解就是全局最优解，所以理论上不存在初值依赖的问题。

在新的等价问题下，有两种解决方案：一是 Spinu（2013）提出的牛顿-涅斯捷罗夫算法（Newton-Nesterov, NN 算法），NN 算法是基于牛顿法提出的，牛顿法是一种求解非线性方程组零点值的算法，其核心原理在于利用目标函数的切线信息和截距信息，通过不断迭代来逼近方程组的零点。但牛顿法只适用于无目标约束，NN 算法在牛顿法的基础上加以改进，使其方便加入约束条件。二是 Richard, Roncalli（2013）提出的循环坐标下降法（Cyclic Coordinate Descent, CCD 算法）。循环坐标下降法（CCD）是一种非梯度优化的方法，它在每步迭代中沿一个特定坐标方向进行搜索，然后通过循环搜索不同的坐标方向来达到目标函数的局部极小值。具体原理详见附录。

相比之下，牛顿法与循环坐标下降法克服了前两种算法的缺点，解决了初值依赖的同时又大大提高了求解速度。在 Feng&Palomar(2015)中，作者对各算法的求解速度做了对比，在计算两个资产长达 5 年的投资权重时，各算法的 CPU 运算时间如下，可以发现，CCD 算法与 NN 算法的运算效率远高于 SQP 算法与 IPM 算法。因此本文在优化求解时采用 CCD 算法。

图表5：CPU 运算时间对比

算法	SQP	IPM	CCD	NN
CPU 时间/秒	11.68	4.82	0.07	0.23

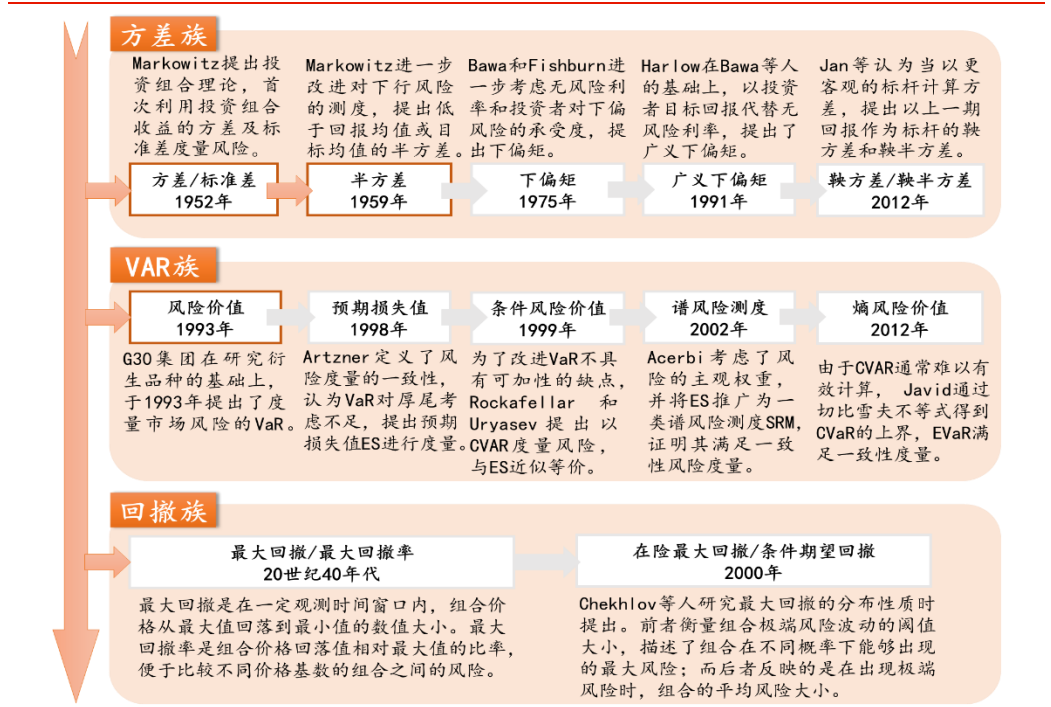
资料来源：Feng&Palomar(2015)、华泰证券研究所

风险可由方差、VaR 和回撤等指标进行定量刻画

在投资过程中，无论是对标的进行选取，还是对资产进行配置，在考虑收益的同时也需要考虑风险的影响。后文将主要聚焦风险预算模型中风险的量化测度，研究在不同风险度量方式下资产配置的实际效果，以指导投资实践。

通过梳理学术界与投资界有关风险度量的各个指标，我们大致将风险度量指标分为三类：方差系、VaR 系和回撤系，本文将主要围绕方差系和 VaR 展开讨论。

图表6： 风险度量指标发展脉络



资料来源：华泰证券研究所

Markowitz 最早以方差度量证券投资风险

风险度量系统性的讨论最早来源于1952年哈里·马科维茨的《Portfolio Selection》。他提出使用方差衡量组合波动风险，主要是因为方差计算了组合价格偏离平均值的程度。但是方差作为风险指标在实际应用中并不合理，因为方差包含了组合价格向上波动的情况，而价格上行并不被投资者视为需要承担的风险。针对此，马科维茨于1959年在原有方差基础上提出半方差，用来度量组合下行的波动风险，它是通过计算价格序列中所有低于期望收益（或者目标收益）部分的方差得到的。半方差相对于方差更能切合投资者对于损失较为敏感的特性。

另一方面，Bawa[1975-1979]和Fishburn[1977]注意到不同的投资者对于相同的风险具有不同的承受程度，考虑在半方差的基础上加入投资者风险偏好，提出新的风险指标——下偏矩。它是利用和半方差类似的方法，忽略价格序列中高于目标收益（一般为无风险利率）的部分，计算剩余部分的一阶或高阶矩得到的。下偏矩作为半方差的延伸更具灵活性，可以通过调整矩的阶的大小适应不同投资者的风险厌恶程度，阶数越大，风险厌恶程度越高。

但是值得注意的是，在下偏矩的计算中目标收益率一般选用无风险利率，这并不符合实际生活中投资者期望收益率大于无风险利率的现实。因此，Halow[1991]在对下偏矩的研究做了系统性的总结后，提出广义下偏矩，将目标收益率选为股市平均收益率，并用实证分析得出投资者倾向于将风险视为基于股市平均收益率的下行风险的结论，印证了广义下偏矩的合理性。

在险价值 VaR 将概率分布引入风险度量之中

在马科维茨提出均值方差组合模型的同一年，Roy[1952]提出了“安全第一组合法则”，对于一个投资组合而言，首先追求的是安全性而不是高收益。为了达到安全第一的目标，要使得资产组合的“破产概率”最小化，即资产组合的净值跌破可接受水平的概率尽可能小。该法则开创性地使用概率值对风险进行度量，同时也关注极端情况下的损失。

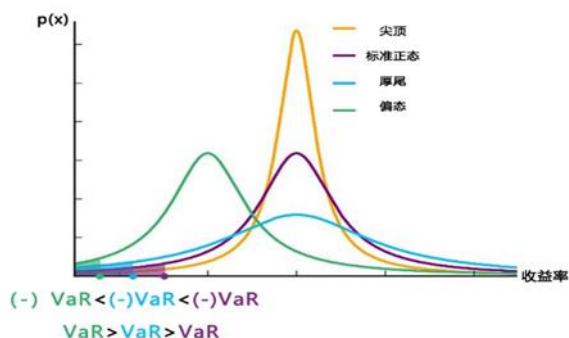
随着使用概率值度量风险方法的引入，以在险价值 VaR (Value at Risk) 为代表的风险测度相关研究蓬勃发展。1993 年 G30 研究小组提出的 VaR 方法已成为金融界测量市场风险的主流方法之一。VaR 是指在一定概率水平下，投资组合在某段时间内可能产生的最大损失，其刻画了在偶发的小概率情况下资产组合的损失情况。

Artzner[1998]提出的一致性风险测度 (Coherent risk measure) 为众多的风险测度方法提供了一个合理的标准。一致性风险测度需要同时满足次可加性、单调性、正齐次性和平移不变性。满足次可加性意味着能通过分散化投资降低风险，单调性使得较小风险水平的资产必有更小的可能损失，正齐次性意味着风险水平与资产规模成正比，而平移不变性意味着如果损失能得到弥补，资产的风险水平也会对应地下降相同的幅度。

除了 VaR，Rockafellar [1999]等学者对条件在险价值 CVaR (Conditional Value at Risk) 也进行了探索和研究。CVaR 刻画了当资产组合发生的损失高于 VaR 时的期望损失，同时 Georg Ch. Pflug[2000]证明了在收益分布连续时 CVaR 是一致性风险测度。由于 VaR 不满足次可加性，可能会不鼓励分散化投资，同时还忽略了重尾风险，使投资者容易低估极端情况下的风险，所以 CVaR 的提出有效解决了 VaR 的局限性带来的问题。

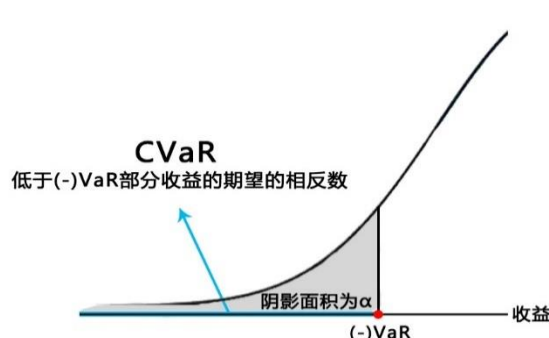
与 CVaR 相似，期望亏损 ES (Expected Shortfall) 由 Carlo Acerbi 和 Claudio Nardio[2001]提出，定义为置信度从零到某个值相对应的 VaR 值的期望。经证明，当收益分布连续时，ES 与 CVaR 等价，现在普遍将两者视为同一概念。在 ES 的基础上，Carlo Acerbi[2002]提出谱风险测度 SRM (Spectral Risk Measure)，优点是能通过参数的变化反映投资者的风险厌恶程度，克服了 CVaR 计算过程中风险权重单一的缺陷。

图表7：不同收益率分布下的 VaR



资料来源：华泰证券研究所

图表8：ES (CVaR) 与 VaR 的联系



资料来源：华泰证券研究所

另外，Ahmadi-Javid[2011]提出了熵在险价值 EVaR (Entropic Value at Risk)，有效解决了 CVaR 计算复杂问题。经证明，EVaR 满足一致性风险度量的定义，同时是 VaR 和 CVaR 的上界。从多年 VaR 系风险测度的发展来看，VaR 系风险测度的分支众多，但基本上都是以 VaR 为基础扩展和改进后得到的方法。

最大回撤能直观观测已发生的风险损失

最大回撤（MDD）是股票市场投资中应用广泛的一个风险指标，最早提出于 20 世纪 40 年代。它是指在一定观测时间窗口内，组合价格从最大值回落到最小值的数值大小，因此它衡量的是观测时间内价格下行的最大风险。由于不同组合的价格基数不同，无法直接进行组合之间的风险比较，在实际应用中大多使用**最大回撤率**，也即组合价格回落值相对最大值的比率。

单个最大回撤值所反馈给投资者的信息并不完整，因为其中包含了相当大成分的随机性。为了获得更完整的风险信息，可以通过长时间观测价格序列，增加所得到的最大回撤的数量而实现。但是一组数据直接给予投资者的风险信息不直观，考虑分析最大回撤序列的统计学性质，使用统计指标描述组合的风险。据此，Chekhlov et al.[2000]在研究最大回撤分布性质的前提下，定义了一个新的风险评估指标——**条件期望回撤（CDaR）**，它是指在超过一定回撤风险的条件下，回撤序列的期望值。而上述的一定回撤风险也称为**在险最大回撤（MDaR）**。在险最大回撤衡量的是组合极端风险波动的阈值大小，描述了组合在不同概率下能够出现的最大风险，而条件期望回撤反映的是在出现极端风险时，组合的平均风险大小。这两个指标从不同方面描述了组合的风险波动情况，为投资者的投资提供多角度的数据支持。由于回撤系指标难以应用到风险预算模型之中，本篇不做过多讨论。

风险预算模型可采用多种风险度量方式，以改善协方差的不足

以 EWMA 协方差作为模型的风险度量，能小幅提升组合夏普

EWMA 协方差估计算法能赋予近期数据更大的权重

协方差是在风险预算模型中较为常用的风险度量方法，一般而言，基于过去 h 个时点的历史数据，两种资产间的协方差计算公式为：

$$\text{cov}(r_k, r_l)_t = \frac{1}{h-1} \sum_{s=t-h+1}^t (r_{k,s} - \bar{r}_k)(r_{l,s} - \bar{r}_l)$$

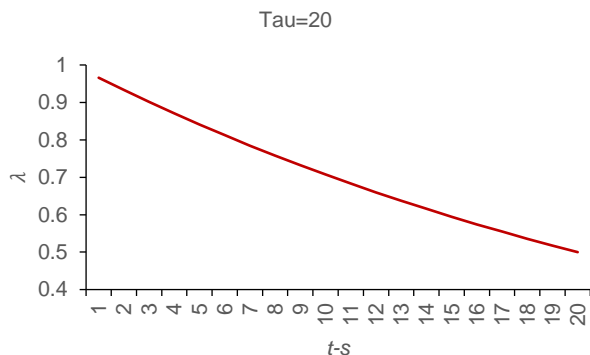
该方法为所有历史数据赋予了相同权重，认为 h 个时点的所有历史数据同等重要。然而在实际中，离当前时点越近的数据对实际波动风险的影响往往越大。因此可以在普通协方差的基础之上加入权重的变化，得到了半衰指数加权平均(EWMA)协方差：

$$\sigma^{\text{ewma}} = \text{cov}(r_k, r_l)_t = \frac{\sum_{s=t-h+1}^t \lambda^{t-s} (r_{k,s} - \bar{r}_k)(r_{l,s} - \bar{r}_l)}{\sum_{s=t-h+1}^t \lambda^{t-s}}$$

$$\lambda = 0.5^{\frac{1}{\tau}}$$

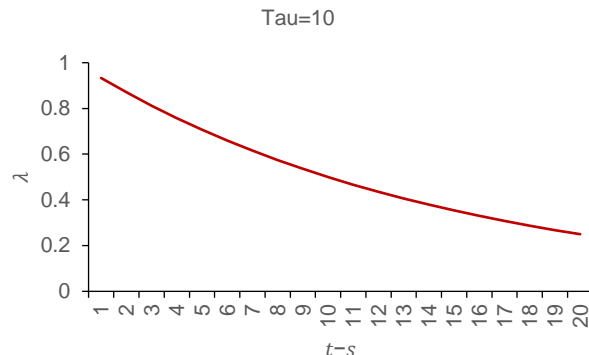
其中， τ 为半衰期长度，一般大于 1，因而 λ 就成为了一个小于 1 的正数。随着时间的推移， $t-s$ 不断减小， λ^{t-s} 逐渐增大，这就为近期的历史数据赋予了更高的权重。而之所以称 τ 为半衰期是因为任意两个相距 τ 时间点的数据，远期数据的权重总是近期数据权重的一半。半衰期并非一个固定的数字，可以自行调整，对于不同特点的数据而言，合适的半衰期也不同。

图表9：Tau=20 时不同数据时点下的 λ 取值



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表10：Tau=10 时不同数据时点下的 λ 取值



资料来源：Wind，华泰证券研究所

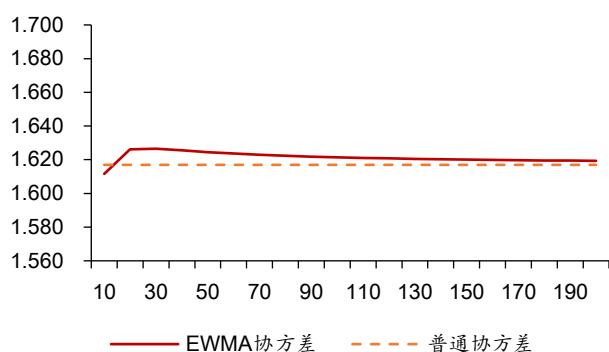
另一方面，EWMA 协方差的计算是建立在因子收益时序不相关的假设之上的。然而在实际情况中，该假设往往难以成立，因子收益存在自相关性，因此 EWMA 协方差并不是因子收益协方差矩阵真实值的相合估计，即此估计值并不能随着样本数的增大而逼近真值。为了得到相合估计，可以在 EWMA 协方差基础之上再进行 Newey-west 调整，引入因子收益的自相关性的影响。但我们在实际操作中发现，使用 Newey-west 协方差矩阵有可能造成风险预算模型无解的情况，即无法得到合理的权重使各资产的风险贡献与预算值相符，故本文 EWMA 协方差计算时暂不进行 Newey-west 调整，只将 EWMA 协方差作为风险度量指标代入风险预算模型。

不同半衰期下的 EWMA 协方差度量均能降低组合回撤

使用中国、美国、日本三国股指（沪深 300、标普 500、日经 225），CRB 综合现货及中债-新综合财富(总值)指数五类资产作为标的，各类资产的风险预算均为 20%，即以风险平价模型作为基准。所选用的数据为 2002 年 1 月-2019 年 8 月的月末收盘价，模型训练窗宽为 40 个月。统计基于普通协方差与不同半衰期之下的 EWMA 协方差的风险预算组合表现，回测结果总结如下所示。由于不同半衰期下风险收益指标数值差异较小，因此我们适度保留小数点后 3-4 位以示区别，后文下半方差与 VaR 结果展示时保留的有效数字同理。

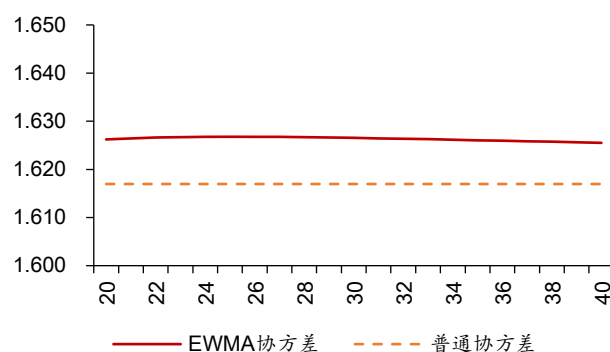
从结果中我们可以看到，当半衰期超过 20 个月时，基于 EWMA 协方差的投资组合的夏普比率要稳定高于基于普通协方差组合的夏普比率。细致观察 20 至 40 个月的半衰期区间，可以看到当半衰期为 25 个月时，基于 EWMA 协方差的投资组合的夏普比率达到最大值。总体来看，在不同半衰期下，基于 EWMA 协方差的组合夏普比变化不大。

图表11： 基于不同半衰期下 EWMA 协方差的组合夏普比（1-200）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表12： 基于不同半衰期下 EWMA 协方差的组合夏普比（20-40）



资料来源：Wind，华泰证券研究所

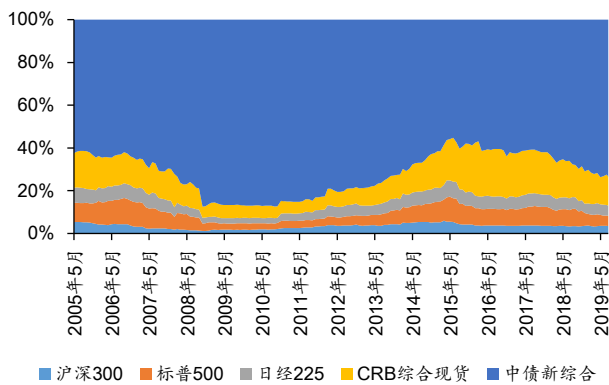
统计基于普通协方差与半衰期在 24 至 29 个月之间的 EWMA 协方差的组合表现可以看到，EWMA 协方差在收益上不如普通协方差，但 EWMA 协方差的波动率与回撤更小，资产组合的夏普比和 Calmar 比因此略有提升。

图表13： 基于半衰期在 24-29 个月之内的 EWMA 协方差的投资组合与基于普通协方差的投资组合对比

	普通协方差	半衰期:24	半衰期:25	半衰期:26	半衰期:27	半衰期:28	半衰期:29
年化收益率	4.597%	4.569%	4.571%	4.572%	4.573%	4.574%	4.575%
年化波动率	2.843%	2.809%	2.810%	2.810%	2.811%	2.812%	2.813%
最大回撤	4.509%	3.783%	3.769%	3.756%	3.744%	3.762%	3.784%
夏普比率	1.6170	1.6268	1.6268	1.6268	1.6267	1.6267	1.6266
Calmar 比率	1.0194	1.2079	1.2127	1.2172	1.2215	1.2159	1.2093

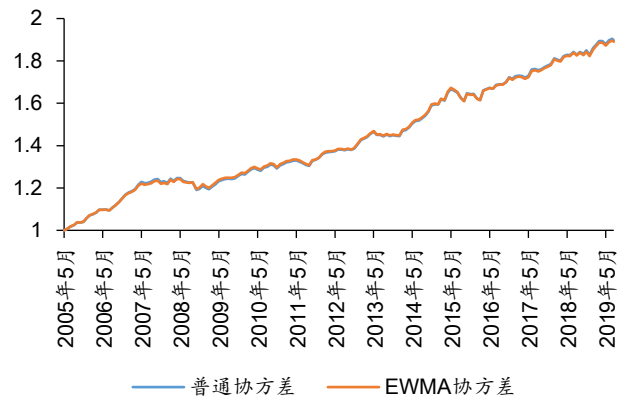
资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表14： 半衰期为 25 个月时投资组合的资产权重



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表15： 基于 EWMA 协方差与普通协方差的组合净值



资料来源：Wind，华泰证券研究所

下半方差能刻画资产组合的实际下行风险

经 EWMA 调整后的下半方差也可融入风险预算模型

1959 年，马科维茨在其著作《Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments》中提到了用半方差来度量风险，改善了原有直接用方差度量风险的方法。方差难以区分上行和下行波动，而半方差是在方差计算基础上忽略收益序列中高于期望收益或者目标收益的数值，通过计算剩余部分的方差而得到的。这也就是说，半方差仅计算了组合下行的方差，并不考虑组合上行的波动情况。因此在实际计算中，半方差相对于方差更能反映实际生活中投资者所真正需要面对的组合下行的风险。首先，明确下半方差（Semi-variance）的定义：

$$\text{Semivariance} = \frac{1}{n} \times \sum_{r_t < \bar{r}} (\bar{r} - r_t)^2$$

其中， r_t 为样本观察值， \bar{r} 为样本均值， n 为样本数量。

相应地，下半偏差（Semi-deviation）的定义为：

$$\text{Semideviation} = \sqrt{\text{Semivariance}}$$

资产组合的下半偏差记为 $R(x)$ ，则下半方差为 $R(x)^2$ 。根据下半方差定义

$$R(x)^2 = E[(r_p - \bar{r}_p)^2 (r_p < \bar{r}_p)] = E\left\{\left[\sum_{i=1}^n x_i (r_i - \bar{r}_i)\right]^2 (r_p < \bar{r}_p)\right\}$$

$$\text{其中 } (r_p < \bar{r}_p) = \begin{cases} 1, r_p < \bar{r}_p \\ 0, r_p \geq \bar{r}_p \end{cases}$$

$$\text{则 } R(x) = \sqrt{R(x)^2}$$

经数学推导，

$$R(x)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j) (r_p < \bar{r}_p)]$$

定义“下半协方差”矩阵 $\bar{\Sigma}$ ，满足 $\bar{\Sigma}_{ij} = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j) (r_p < \bar{r}_p)]$ 。此时，资产组合的下半方差 $R(x)^2 = x^T \bar{\Sigma} x$ 。

则任一资产的风险贡献（这里认为 $\frac{\partial (r_p < \bar{r}_p)}{\partial x_i} = 0$ ）

$$RC_i = x_i \frac{\partial R(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{2R(x)} \frac{\partial R(x)^2}{\partial x_i} = \frac{x_i (\bar{\Sigma} x)_i}{R(x)}$$

容易验证， $\sum_{i=1}^n RC_i = R(x)$ 。

此时，若已知不同资产给定时间段内的收益率 $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ，则这一模型下的优化问题为

$$\min_x f(x; b) = \sum_{i=1}^n (RC_i - b_i R(x))^2$$

$$s. t. \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0$$

其中 $R(x)$ 和 RC_i 分别由上述两式给出。

当给定风险预算后，运用 CDD 算法求解上述优化问题，即可给出此模型下的最优资产配置比例。不同点在于，基于下半方差的风险预算模型求解中，每次迭代结束更新 $\bar{\Sigma}x$ 和 $R(x)$ 的值之前，需要先用新的权重更新“下半协方差”矩阵 $\bar{\Sigma}$ 。此外，在下半方差风险计算的过程中，可以参照 EWMA 协方差的方法，对下半方差进行半衰指数加权平均 (EWMA)，得到 EWMA 下半方差，即

$$\bar{\Sigma}_{ij} = cov(r_i, r_j)_t = \frac{\sum_{s=t-h+1}^t \lambda^{t-s} (r_{i,s} - \bar{r}_i)(r_{j,s} - \bar{r}_j) (r_{p,s} < \bar{r}_p)}{\sum_{s=t-h+1}^t \lambda^{t-s}}$$

$$\lambda = 0.5^{\frac{1}{\tau}}$$

其中 τ 为加权平均指数的半衰期。

下半方差度量可以在提高组合收益的同时降低波动率

同样使用中国、美国、日本三国股指（沪深 300、标普 500、日经 225），CRB 综合现货及中债-新综合财富(总值)指数五类资产作为标的，各类资产的风险预算均为 20%，即以风险平价模型作为基准。所选用的数据为 2002 年 1 月-2019 年 8 月的月末收盘价，模型训练窗宽为 40 个月。回测结果总结如下表所示。

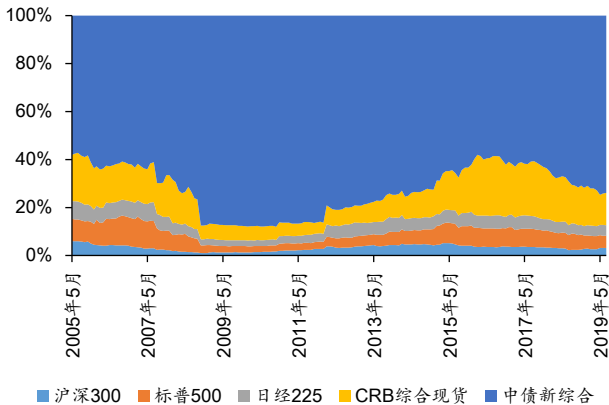
从结果可见，基于下半方差的风险预算模型取得了相对较高的年化收益率和较低的年化波动率及最大回撤，因而有更大的夏普比率及 Calmar 比率，其在各方面都要优于普通协方差下的风险预算模型。而在借鉴 EWMA 协方差的研究思路对下半方差进行加权改进后，在一定的半衰期范围内，模型表现进一步提升，其中较为明显的提升在于最大回撤进一步下降，使得 Calmar 比有所提升。

图表16：基于普通方差与下半方差的风险预算模型回测结果对比（括号内为半衰期月数）

	普通协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差(20)	EWMA 下半方差(21)	EWMA 下半方差(22)	EWMA 下半方差(23)	EWMA 下半方差(24)	EWMA 下半方差(25)
年化收益率	4.597%	4.673%	4.697%	4.696%	4.695%	4.694%	4.693%	4.692%
年化波动率	2.843%	2.759%	2.750%	2.749%	2.748%	2.747%	2.747%	2.746%
最大回撤	4.509%	4.498%	3.786%	3.813%	3.839%	3.863%	3.885%	3.906%
夏普比率	1.6170	1.6941	1.7083	1.7085	1.7085	1.7085	1.7085	1.7084
Calmar 比率	1.0194	1.0390	1.2409	1.2315	1.2229	1.2150	1.2078	1.2011

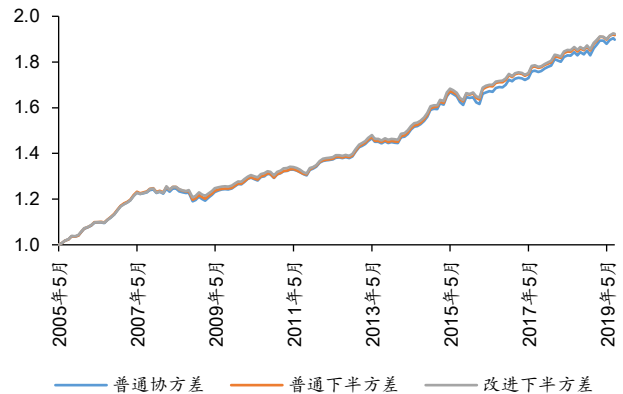
资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表17：基于下半方差的风险预算模型计算所得各资产权重变化



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表18：不同风险度量下风险预算模型的回测表现



资料来源：Wind，华泰证券研究所

关注极端风险的 VaR 度量方式可明显控制组合回撤

采用方差-协方差法估计资产组合的 VaR

1993 年 G30 集团在研究衍生品种的基础上发表了题为《衍生产品的实践和规则》的报告，提出了度量市场风险的 VaR(Value at Risk: 风险价值)方法。自那之后，VaR 逐渐成为金融界测量市场风险的主流方法，国外一些大型金融机构已将其所持资产的 VaR 作为其定期公布的会计报表的一项重要内容加以列示。VaR 与其他风险指标的差别在于 VaR 仅衡量极端风险，即当资产表现最糟糕的情况下的预期损失。

从定义上讲，VaR 是指在一定的置信水平下，某一金融资产（或证券组合）在未来特定的一段时间内的最大可能损失。用公式表达为：

$$P(V < -VaR_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

其中，V 为资产未来的收益， α 为置信水平，一般为 95%、99% 等，置信水平的选取反映了投资主体的风险厌恶程度，置信水平越高，风险厌恶程度越高。举例来讲， $VaR_{95\%} = 50$ 万即指在 95% 的置信水平下，资产的最大损失不会超过 50 万，或是说资产损失超过 50 万的概率为 5%。

常用 VaR 的计算方法有三种：历史模拟法，蒙特卡洛模拟法与方差-协方差法。历史模拟法把资产的历史收益分布作为未来的损益分布，而无需给出具体的分布函数表达式，这就使得包含权重 w 的资产组合的 VaR 难以有准确数学表达，也就无法输入进风险预算模型中进行权重的优化求解。蒙特卡洛模拟则需要对各个资产建立起适当的随机模型以模拟其价格的未来变化路径，步骤相对复杂。方差-协方差法是假定风险因素收益的变化服从特定的分布（通常假定为正态分布），然后通过历史数据分析和估计该风险因素收益分布的方差、均值、相关系数等参数，并带入公式以计算出组合的 VaR。在正态分布的假设下，投资组合的 VaR 可以表示为：

$$VaR_{\alpha} = -\mu^T w + Z_{\alpha} \sqrt{w^T \Sigma w}$$

其中， μ 为组合内各资产的收益率，w 为各资产权重， Z_{α} 为标准正态分布 α 分位数， Σ 为各资产的协方差矩阵。

在确定风险度量方式后，可以得到资产 i 对投资组合的风险贡献为：

$$RC_i = w_i \frac{\partial VaR_{1-\alpha}}{\partial w_i} = -\mu_i w_i + Z_{\alpha} \frac{w_i (\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

在确定上式之后，运用 CCD 算法便可以得到目标风险预算下各资产的最优配置比例：

$$w_i^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

其中假设 $w_j (j \neq i)$ 与 w 不变，且令

$$a = Z_\alpha \sigma_i^2, b = Z_\alpha \sum_{j \neq i} w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j - \mu_i \sqrt{w^T \Sigma w}, c = -b_i \sqrt{w^T \Sigma w}$$

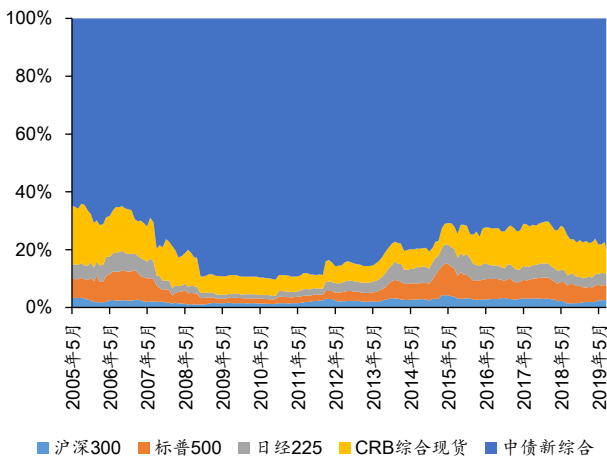
由此，我们便得到了规划问题关于某个特定坐标方向 w_i 的最优解析式。当循环次数足够，结果就会收敛到最优解上。

VaR 度量可显著降低组合回撤，略微降低组合收益

同样使用中国、美国、日本三国股指（沪深 300、标普 500、日经 225），CRB 综合现货及中债-新综合财富(总值)指数五类资产作为标的，各类资产的风险预算均为 20%，即以风险平价模型作为基准。所选用的数据为 2002 年 1 月-2019 年 8 月的月末收盘价，模型训练窗宽为 40 个月。分别以 99%、95% 与 90% 置信水平下的 VaR 作为风险度量进行回测，回测结果如下所示。

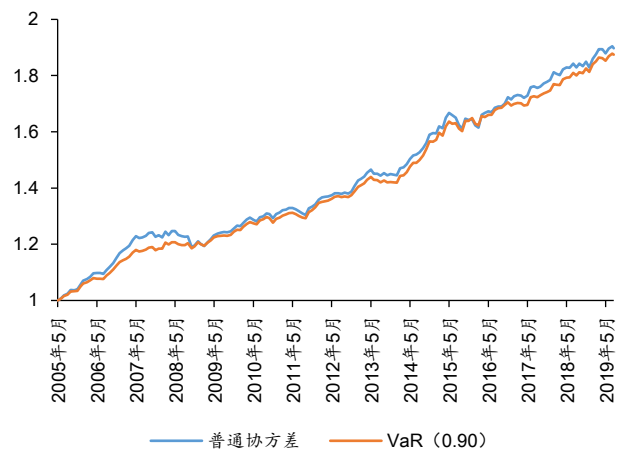
可以看到，基于 VaR 的风险预算模型在风险控制上要明显好于基于普通协方差的风险预算模型，而 VaR 组合的收益仅略小于普通协方差组合。两者共同作用之下，VaR 模型的夏普比率与 Calmar 比率要明显高于普通协方差模型。并且随着置信水平的降低，VaR 模型的这种低收益低风险高夏普比率特性越来越明显。这主要是由于 VaR 关注尾部风险，随着置信水平的降低，越来越多的情况被视作风险，作为高风险资产的股票的风险贡献增加，导致在相同风险预算条件下股票类资产的权重降低，债券类资产比例增加，组合风险与收益降低，夏普提高。

图表19：基于 90%VaR 的风险预算模型计算所得各资产权重变化



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表20：两种风险度量下风险预算模型的回测表现



资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表21：基于普通标准差与 VaR 的风险预算模型回测结果对比（括号内为置信水平）

	普通协方差	VaR(0.99)	VaR(0.95)	VaR(0.9)
年化收益率	4.597%	4.555%	4.533%	4.510%
年化波动率	2.843%	2.566%	2.459%	2.362%
最大回撤	4.509%	3.103%	2.490%	2.096%
夏普比率	1.6170	1.7751	1.8433	1.9095
Calmar 比率	1.0194	1.4678	1.8204	2.1516

资料来源：Wind，华泰证券研究所

风险度量的优化能稳定有效地提升风险预算模型的配置效果

将上述三种风险度量方式的投资组合表现进行比较，其中 EWMA 协方差部分选取了半衰期为 25 的组合，EWMA 下半方差部分选取了半衰期为 23 的组合，VaR 选取了 90%置信水平的组合。

可以看到，以 VaR 为风险度量指标虽然收益率表现略有不足，但在其余风险收益指标上明显优于其他的风险度量方式。相较于基于普通协方差的风险预算模型，EWMA 协方差并不能提升组合收益，但在控制回撤方面具备一定优势，而普通下半方差则正好相反，并且能一定程度上降低组合的波动。因此结合了 EWMA 的下半方差既能提升组合收益，又能降低组合波动和最大回撤，因此夏普比和 Calmar 比均能有所改善。但值得注意的是，VaR 风险度量方式的风控效果更为明显，其不仅能极大地降低组合最大回撤，也能控制住组合的波动，因此能在略微降低组合收益的同时，录得最高的夏普比率与 Calmar 比率。

图表22：四种风险度量方法下风险预算模型的回测结果对比

	普通协方差	EWMA 协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差	VaR
年化收益率	4.597%	4.571%	4.673%	4.694%	4.510%
年化波动率	2.843%	2.810%	2.759%	2.747%	2.362%
最大回撤	4.509%	3.769%	4.498%	3.863%	2.096%
夏普比率	1.6170	1.6268	1.6941	1.7085	1.9095
Calmar 比率	1.0194	1.2127	1.0390	1.2150	2.1516

资料来源：Wind，华泰证券研究所

本章将基于上述几个改进模型，进一步比较 EWMA 协方差、普通下半方差、EWMA 下半方差以及 VaR 的风险度量效果提升是否能稳定有效地改进风险预算模型。

预算敏感性分析：各改进模型表现均优于基准模型

本节测试在三种不同的风险预算下，各种风险度量下的风险预算模型表现的稳定性。同样使用中国、美国、日本三国股指（沪深 300、标普 500、日经 225），CRB 综合现货及中债-新综合财富(总值)指数五类资产作为标的，所选用的数据为 2002 年 1 月-2019 年 8 月的月末收盘价，模型训练窗宽为 40 个月。三种风险预算分别设置为保守型（各资产风险预算比例 1:1:1:1:1）、稳健型（各资产风险预算比例 4:4:4:4:1）和激进型（各资产风险预算比例 10:10:10:10:1）。其中 EWMA 协方差与 EWMA 下半方差的半衰期分别为 25 个月和 23 个月，VaR 的置信度为 0.9。回测结果如下各表所示。

图表23：保守型(1:1:1:1:1)风险预算下基于不同风险度量的风险预算模型回测结果对比

	普通协方差	EWMA 协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差	VaR
年化收益	4.597%	4.571%	4.673%	4.694%	4.510%
年化波动	2.843%	2.810%	2.759%	2.747%	2.362%
最大回撤	4.509%	3.769%	4.498%	3.863%	2.096%
夏普比率	1.6170	1.6268	1.6941	1.7085	1.9095
Calmar 比率	1.0194	1.2127	1.039	1.215	2.1516

资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表24：稳健型(4:4:4:4:1)风险预算下基于不同风险度量的风险预算模型回测结果对比

	普通协方差	EWMA 协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差	VaR
年化收益	4.914%	4.832%	5.019%	4.961%	4.667%
年化波动	3.765%	3.682%	3.490%	3.453%	2.574%
最大回撤	8.575%	7.195%	7.879%	7.202%	2.752%
夏普比率	1.3053	1.3125	1.4381	1.4367	1.8129
Calmar 比率	0.5731	0.6716	0.637	0.6889	1.6959

资料来源：Wind，华泰证券研究所

图表25： 激进型(10:10:10:1)风险预算下基于不同风险度量的风险预算模型回测结果对比

	普通协方差	EWMA 协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差	VaR
年化收益	5.138%	5.008%	5.234%	5.107%	4.732%
年化波动	4.353%	4.238%	3.924%	3.878%	2.657%
最大回撤	11.071%	9.508%	9.884%	9.230%	2.962%
夏普比率	1.1804	1.1818	1.3339	1.3168	1.7812
Calmar 比率	0.4641	0.5267	0.5296	0.5533	1.5977

资料来源：Wind，华泰证券研究所

从结果来看，总体而言各模型在不同的风险预算之下都能相对普通协方差模型有所优化，且优化结果与前文结论保持一致：在不同的风险预算配比下，EWMA 协方差能一定程度上降低波动率和最大回撤，普通下半方差能略微提升收益率和夏普比，EWMA 下半方差基本是二者的折中表现，但在预算保守时的提升效果会大过预算激进时。各预算比例下，VaR 风险度量方式的风险控制优势均最为显著。

时间敏感性分析：VaR 风险控制仍明显占优

本节测试不同的回测区间里，三种风险度量指标的模型改进效果是否能保持稳定。从 2002 年 1 月起，每隔 10 个月作为一个新回测起点，回测往前的 100 个月的历史数据，并计算回测区间的年化收益率，夏普比率与最大回撤。对于每个指标，一共可以得到 12 组数据，结果如下：

图表26： 各时段内基于不同风险度量的风险预算模型年化收益率对比

时段	普通协方差	EWMA 协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差	VaR
2002 年 01 月-2010 年 04 月	5.167%	5.260%	5.227%	5.378%	4.972%
2002 年 11 月-2011 年 02 月	4.075%	4.141%	4.070%	4.222%	4.037%
2003 年 09 月-2011 年 12 月	2.881%	2.958%	2.900%	3.030%	3.324%
2004 年 07 月-2012 年 10 月	2.485%	2.642%	2.472%	2.612%	3.115%
2005 年 05 月-2013 年 08 月	3.427%	3.465%	3.372%	3.409%	3.456%
2006 年 03 月-2014 年 06 月	4.118%	4.079%	4.156%	4.127%	3.905%
2007 年 01 月-2015 年 04 月	5.324%	5.304%	5.343%	5.323%	5.122%
2007 年 11 月-2016 年 02 月	4.638%	4.535%	4.865%	4.784%	4.860%
2008 年 09 月-2016 年 12 月	4.906%	4.816%	5.079%	5.067%	4.765%
2009 年 07 月-2017 年 10 月	5.101%	5.015%	5.206%	5.179%	4.848%
2010 年 05 月-2018 年 08 月	4.869%	4.799%	4.969%	4.937%	4.889%
2011 年 03 月-2019 年 06 月	4.625%	4.475%	4.732%	4.636%	4.740%
平均	4.301%	4.291%	4.366%	4.392%	4.336%

资料来源：Wind，华泰证券研究所

平均来看，相较于普通协方差，除了 EWMA 协方差以外的其余几种风险度量方法均使得投资组合在收益率上得到了改善。改善程度由高到低依次为 EWMA 下半方差、普通下半方差与 VaR，其中普通下半方差与 EWMA 下半方差对收益率的改善较为稳定，在多数时间段内，基于两种下半方差的风险预算模型组合收益高于普通协方差组合的收益。与之相比 VaR 对收益的改善却并不稳定，在统计的 12 个时段内，基于 VaR 的投资组合在基于普通协方差的投资组合基础上提高与降低收益率的情况各占一半。

图表27： 各时段内基于不同风险度量的风险预算模型夏普比率对比

时段	普通协方差	EWMA 协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差	VaR
2002 年 01 月-2010 年 04 月	1.7369	1.8684	1.7500	1.8447	2.2677
2002 年 11 月-2011 年 02 月	1.3542	1.4511	1.3547	1.4325	1.7704
2003 年 09 月-2011 年 12 月	0.9691	1.0368	0.9792	1.0225	1.4368
2004 年 07 月-2012 年 10 月	0.9003	0.9918	0.9012	0.9605	1.4299
2005 年 05 月-2013 年 08 月	1.2625	1.3170	1.2602	1.3043	1.6196
2006 年 03 月-2014 年 06 月	1.8267	1.7788	1.8723	1.8021	1.9141
2007 年 01 月-2015 年 04 月	2.0866	2.0272	2.1205	2.0462	2.1159
2007 年 11 月-2016 年 02 月	1.4955	1.4331	1.6450	1.5989	1.7492
2008 年 09 月-2016 年 12 月	1.6432	1.5932	1.7935	1.7983	1.7811
2009 年 07 月-2017 年 10 月	1.6660	1.6223	1.7865	1.7831	1.7651
2010 年 05 月-2018 年 08 月	1.6093	1.5714	1.7429	1.7355	1.7941
2011 年 03 月-2019 年 06 月	1.4848	1.4213	1.6353	1.6099	1.7501
平均	1.5029	1.5094	1.5701	1.5782	1.7828

资料来源：Wind，华泰证券研究所

在夏普比率方面，VaR 相较于普通协方差的改善则十分稳定且显著，在大多数时候，VaR 组合的夏普比率都是最高的。除此之外，EWMA 下半方差在夏普比率方面的改善也是较为稳定的，除了 2006 年 3 月起与 2007 年 1 月起的两个时段外，EWMA 下半方差均提高了组合的夏普比率。而普通下半方差与 EWMA 协方差对夏普比率的提升则不甚明显且不稳定。

图表28： 各时段内基于不同风险度量的风险预算模型最大回撤对比

时段	普通协方差	EWMA 协方差	普通下半方差	EWMA 下半方差	VaR
2002 年 01 月-2010 年 04 月	4.509%	3.689%	4.498%	3.863%	1.868%
2002 年 11 月-2011 年 02 月	4.509%	3.689%	4.498%	3.863%	1.868%
2003 年 09 月-2011 年 12 月	4.509%	3.689%	4.498%	3.863%	1.868%
2004 年 07 月-2012 年 10 月	4.509%	3.689%	4.498%	3.863%	1.868%
2005 年 05 月-2013 年 08 月	1.880%	2.059%	1.786%	2.181%	1.644%
2006 年 03 月-2014 年 06 月	1.880%	2.059%	1.786%	2.181%	1.644%
2007 年 01 月-2015 年 04 月	1.880%	2.059%	1.786%	2.181%	1.644%
2007 年 11 月-2016 年 02 月	3.370%	3.769%	2.738%	3.032%	2.096%
2008 年 09 月-2016 年 12 月	3.370%	3.769%	2.738%	3.032%	2.096%
2009 年 07 月-2017 年 10 月	3.370%	3.769%	2.738%	3.032%	2.096%
2010 年 05 月-2018 年 08 月	3.370%	3.769%	2.738%	3.032%	2.096%
2011 年 03 月-2019 年 06 月	3.370%	3.769%	2.738%	3.032%	2.096%
平均	3.377%	3.315%	3.087%	3.096%	1.907%

资料来源：Wind，华泰证券研究所

控制回撤风险方面，VaR 具有显著优势，在所有时段内基于 VaR 的投资组合均得到了最小的最大回撤幅度。EWMA 协方差在控制回撤风险方面没有明显优势，平均最大回撤与普通协方差下的平均最大回撤相近。普通下半方差与 EWMA 下半方差的平均最大回撤也很接近，但都低于普通协方差的平均最大回撤。分时段来看，EWMA 下半方差在其中几段时间内最大回撤幅度在所有模型中最大，可见 EWMA 下半方差在回撤风险方面的优化并不稳定。

EWMA 下半方差能提升组合收益，VaR 风险度量方式风控优势明显

通过以上分析，我们可以得出的结论如下：

- (1) 风险预算模型中的风险度量可将普通协方差替换为 EWMA 协方差、下半方差和 VaR 等各类风险度量指标。
- (2) EWMA 协方差方式总体提升不明显，能略微降低组合波动率；下半方差的度量方式能在大多数情况下提升组合的收益率。因此结合了 EWMA 的下半方差能较为稳定地提升组合的收益率，并改善夏普比。
- (3) 将风险度量方式替换为 VaR 时可以明显降低组合的年化波动和最大回撤，同时仅略微降低了组合收益，因此整体组合的夏普比和 Calmar 均能在各种风险预算分配下，以及各种市场情况下稳定获得最优表现，综合来看的风控优势明显大于其余的风险度量方式。

风险提示

模型是历史经验的总结，如果市场规律改变，存在风险预测滞后、甚至模型彻底失效的可能；报告中的各类指数只是作为常见指数，并不能完全代表 A 股或全球市场全部指数的情况，请投资者谨慎、理性地看待。

附录

各类风险度量指标的定义

(1) 方差系

方差 (Variance) 是指组合价格与价格均值之差平方的期望, 其算术平方根为标准差 (σ), 公式分别为:

$$\text{Variance} = E[(X - E(X))^2]$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Variance}},$$

半方差是通过计算价格序列中所有低于期望收益 (或者目标收益) 部分的方差得到的, 用来度量组合下行的波动风险。

下偏矩考虑在半方差的基础上加入投资者风险偏好, 以矩的阶数大小体现, 其数学表达式:

$$\text{LPM}_\alpha(\tau, X) = E[(\tau - X)^+{}^\alpha]$$

其中 τ 为目标收益, α 为参数,

$$(\tau - X)^+ = \begin{cases} \tau - X, & X < \tau \\ 0, & X \geq \tau \end{cases}$$

可以发现, 半方差是下偏矩中的一个特例, 当 α 为 2 时, 下偏矩就是半方差。这也就是说半方差衡量的是投资者存在一定风险厌恶的条件下组合下行的风险值。

广义下偏矩 (GLPM, Generalized Lower Partial Moments) 的提出主要是在下偏矩的基础上, 改变了目标收益的取值, 使用投资者的目标收益率替代无风险利率。一般情况, 投资者的目标收益率设定为一定时期内组合的平均收益率。

(2) VaR 系

在险价值 VaR 的数学表达式为:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < \alpha\},$$

where α is the significance level, $F_X(x)$ is the CDF of X .

当收益分布存在尖峰、厚尾或者偏态时, 极端值的概率会发生变化, VaR 因其计算方式容易低估可能损失。为了解决该问题, 条件在险价值 CVaR 刻画了当投资组合未来的可能损失已超过 VaR 时的期望损失值。

从定义上看, CVaR 是 VaR 的上界, 能更好地刻画尾部风险。此外, 当收益分布连续时, 期望亏损 ES 与 CVaR 等价。虽然实际计算中 CVaR 更常用, 但 ES 的数学定义更具一般性, 其数学表达式为:

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_p(X) dp$$

熵在险价值 EVaR 相较于 CVaR 更易于计算和实现, 在实际计算中可以对离散数据集分组, 进而简化矩母函数 $M_X(z)$ 的计算, 同时观察发现当 EVaR 随 Z 增大时趋向于收敛, 由此可以通过设定一个较大的 Z 值得到 EVaR 的近似值。EVaR 的数学表达式为:

$$\text{EVaR}_{1-\alpha} = \inf_{z>0} \left\{ z^{-1} \ln \left(\frac{M_X(z)}{\alpha} \right) \right\},$$

where α is the significance level and $M_X(z)$ is the moment generating function of X .

谱风险测度引入主观风险函数 $\phi(p)$ 作为权重, 对不同的风险水平采取不同的权重进行积分或加和, 可能损失越大权重越高, 数学表达式为:

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp, \text{ where } F_X(p) \text{ is the CDF of } X.$$

在实际计算中计算谱风险测度时，常常面临离散的数据集，此时可以使用离散情况下谱风险测度的近似表达来计算（ $X_{1:N}$ 是 X 的顺序统计量，即从小到大排序后的 X 序列）：

$$M_{\emptyset}^N = - \sum_{i=1}^N X_{1:N} \phi_i,$$

(3) 回撤系

考虑一个资产价格时间序列 $\{S_t, t \geq 0\}$ ，那么以 $t=0$ 为起始点，这个资产截至 $t=T$ 时刻的最大回撤(MDD, maximum drawdown)和最大回撤率(MDDR, maximum drawdown rate)分别为(约定都取正值而非负值)：

$$MDD_T := \max_{t \in [0, T]} \left(\left(\max_{\tau \in [0, t]} S_{\tau} \right) - S_t \right)$$

$$MDDR_T := \max_{t \in [0, T]} \left(\frac{\left(\max_{\tau \in [0, t]} S_{\tau} \right) - S_t}{\max_{\tau \in [0, t]} S_{\tau}} \right)$$

在险最大回撤(MDaR, maximum drawdown at risk α)是在基于最大回撤概率分布研究的基础上提出的。它是指最大回撤在 $(1-\alpha)$ 的概率下所能取到的最大值，也即最大回撤分布的 $(1-\alpha)$ 分位数。数学表达式是：

$$MDaR_{\alpha} := \inf\{m | P(MDDR_T > m) \leq 1 - \alpha\}$$

CCD 算法原理

循环坐标下降法(CCD)是一种非梯度优化的方法，它在每步迭代中沿一个特定坐标方向进行搜索，然后通过循环搜索不同的坐标方向来达到目标函数的局部极小值。将 $R(y) = \sqrt{y^T \Sigma y}$ 代入等价规划问题的拉格朗日函数一阶条件方程，并做和牛顿法相同的处理，不失一般性地将 λ_c 取为1，从而可以得到：

$$\frac{\partial L(y; \lambda_c)}{\partial y_i} = \frac{(\Sigma y)_i}{\sqrt{y^T \Sigma y}} - \frac{b_i}{y_i} = 0$$

将上式第一项分子中的协方差矩阵展开，方程转变为：

$$y_i^2 \sigma_i^2 + y_i \sigma_i \sum_{j \neq i} y_j \rho_{ij} \sigma_j - b_i \sqrt{y^T \Sigma y} = 0$$

这就是规划问题关于 y_i 的最优化条件。在每一步优化中，我们将 y 和 y_j 设为恒定值，只考虑对 y_i 这一个坐标的优化，上式就变为了关于 y_i 的一元二次方程。通过韦达定理很容易看出该方程有一正一负两个实根，要保证求出的权重不为负数，我们只需在这一步优化中取 y_i 的正根：

$$y_i^* = \frac{-\sigma_i \sum_{j \neq i} y_j \rho_{ij} \sigma_j + \sqrt{\sigma_i^2 (\sum_{j \neq i} y_j \rho_{ij} \sigma_j)^2 + 4 b_i \sigma_i^2 \sqrt{y^T \Sigma y}}}{2 \sigma_i^2}$$

由此，我们便得到了规划问题关于某个特定坐标方向 y_i 的最优解析式。CCD 算法的过程就是在每一轮循环中逐个遍历每个坐标方向 y_i ，并按这一解析式给 y_i 赋值。每一步更新了 y_i 的坐标后，上一步的 y_i 就不再满足最优条件，但只要循环的次数足够多，所有坐标都会收敛到最优解上。

具体实证中，这一算法还可以通过一些矩阵运算技巧进一步提升计算速度。例如，将上一解析式改写为：

$$y_i^* = \frac{-(\Sigma y)_i + y_i \sigma_i^2 + \sqrt{((\Sigma y)_i - y_i \sigma_i^2)^2 + 4 \sigma_i^2 b_i \sigma(y)}}{2 \sigma_i^2}$$

在每一步运算后，我们只需更新组合波动率 $\sigma(y)$ 和向量 $(\Sigma y)_i$ ，这两个数值的更新方程可以写为：

$$\Sigma y^* = \Sigma y - \Sigma_i y_i + \Sigma_i y_i^*$$

$$\sigma(y^*) = \sqrt{\sigma(y)^2 - 2y_i \Sigma_i y + y_i^2 \sigma_i^2 + 2y_i^* \Sigma_i y^* - y_i^{*2} \sigma_i^2}$$

Σ_i 和 Σ_i 分别表示 Σ 的第 i 个列向量和行向量。这一变换将矩阵乘法简化为了向量乘法，能够减少大量的运算时间。

基于 VaR 的 CCD 算法原理

投资组合的 VaR 可以表示为：

$$VaR_{1-\alpha} = -\mu^T w + Z_\alpha \sqrt{w^T \Sigma w}$$

当风险度量改为 VaR 时，基于风险预算求各资产权重的优化问题可以等价替换为对下式求解。即得到等价规划问题的拉格朗日函数一阶条件方程：

$$\frac{\partial VaR_{1-\alpha}}{\partial w_i} - \frac{b_i}{w_i} = -\mu_i + Z_\alpha \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}} - \frac{b_i}{w_i} = 0$$

将上式展开后可以得到：

$$Z_\alpha w_i^2 \sigma_i^2 + w_i \left(Z_\alpha \sum_{j \neq i} w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j - \mu_i \sqrt{w^T \Sigma w} \right) - b_i \sqrt{w^T \Sigma w} = 0$$

假设 $w_j (j \neq i)$ 与 w 不变，且令

$$a = Z_\alpha \sigma_i^2, b = Z_\alpha \sum_{j \neq i} w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j - \mu_i \sqrt{w^T \Sigma w}, c = -b_i \sqrt{w^T \Sigma w}$$

则该式有正实根：

$$w_i^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

免责声明

本报告仅供华泰证券股份有限公司（以下简称“本公司”）客户使用。本公司不因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告基于本公司认为可靠的、已公开的信息编制，但本公司对该等信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告所载的意见、评估及预测仅反映报告发布当日的观点和判断。在不同时期，本公司可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。同时，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可能会波动。本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

本公司力求报告内容客观、公正，但本报告所载的观点、结论和建议仅供参考，不构成所述证券的买卖出价或征价。该等观点、建议并未考虑到个别投资者的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对客户私人投资建议。投资者应当充分考虑自身特定状况，并完整理解和使用本报告内容，不应视本报告为做出投资决策的唯一因素。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及作者均不承担任何法律责任。任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

本公司及作者在自身所知情的范围内，与本报告所指的证券或投资标的不存在法律禁止的利害关系。在法律许可的情况下，本公司及其所属关联机构可能会持有报告中提到的公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为之提供或者争取提供投资银行、财务顾问或者金融产品等相关服务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构或个人不得以翻版、复制、发表、引用或再次分发他人等任何形式侵犯本公司版权。如征得本公司同意进行引用、刊发的，需在允许的范围内使用，并注明出处为“华泰证券研究所”，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和修改。本公司保留追究相关责任的权力。所有本报告中使用的商标、服务标记及标记均为本公司的商标、服务标记及标记。

本公司具有中国证监会核准的“证券投资咨询”业务资格，经营许可证编号为：91320000704041011J。

全资子公司华泰金融控股（香港）有限公司具有香港证监会核准的“就证券提供意见”业务资格，经营许可证编号为：A0K809

©版权所有 2019 年华泰证券股份有限公司

评级说明

行业评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的行业涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

增持行业股票指数超越基准

中性行业股票指数基本与基准持平

减持行业股票指数明显弱于基准

公司评级体系

一报告发布日后的 6 个月内的公司涨跌幅相对同期的沪深 300 指数的涨跌幅为基准；

一投资建议的评级标准

买入股价超越基准 20%以上

增持股价超越基准 5%-20%

中性股价相对基准波动在-5%~5%之间

减持股价弱于基准 5%-20%

卖出股价弱于基准 20%以上

华泰证券研究

南京

南京市建邺区江东中路 228 号华泰证券广场 1 号楼/邮政编码：210019

电话：86 25 83389999/传真：86 25 83387521

电子邮件：ht-rd@htsc.com

深圳

深圳市福田区益田路 5999 号基金大厦 10 楼/邮政编码：518017

电话：86 755 82493932/传真：86 755 82492062

电子邮件：ht-rd@htsc.com

北京

北京市西城区太平桥大街丰盛胡同 28 号太平洋保险大厦 A 座 18 层

邮政编码：100032

电话：86 10 63211166/传真：86 10 63211275

电子邮件：ht-rd@htsc.com

上海

上海市浦东新区东方路 18 号保利广场 E 栋 23 楼/邮政编码：200120

电话：86 21 28972098/传真：86 21 28972068

电子邮件：ht-rd@htsc.com