Problemas Capítulo 2. Movimento a uma dimensão

Problemas Teóricos

1. Um carro A segue numa estrada à velocidade constante de 70 km/h onde o limite de velocidade é de 40 km/h. Ao passar por um carro patrulha, este último parte imediatamente em sua perseguição à aceleração constante de 2,0 m/s^2.
Em que instante e qual a distância percorrida pelo carro patrulha alcança o carro em infração?

2. A lei da velocidade de um objeto de massa 0.1 kg é $v_x(t)$= 10 cos ωt m/s, e no instante inicial estava na posição x = 2 m, em que ω = 5 rad/s é uma constante.
a) Calcule a lei da aceleração $a_x(t)$.
b) Calcule a lei do movimento $x(t)$.

3. Uma bola é lançada verticalmente para cima com a velocidade 10 m/s.
a) Encontre analiticamente a lei do movimento $y = y(t)$, se não considerar a resistência do ar.
b) Qual a altura máxima e o instante em que ocorre?
c) Em que instante volta a passar pela posição inicial?

4. O método de Euler integra as equações diferenciais do movimento

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$$

ao fazer a aproximação:

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \times \delta t,$$

e se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{x0}$.

a) Calcule o erro de truncatura local do método de Euler.

b) Calcule o erro de truncatura global do método de Euler.

5. O método de Euler de integração numérica de uma equação diferencial de 1ª ordem apresenta um erro global inversamente proporcional ao número de passos N, em que se dividiu o tempo final total, t_f, em pequenos intervalos de tempo $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$, sendo t_0 o instante inicial. Este método, integra as equações, $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$, como

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

$$v_x(t + \delta t) = x(t) \times \delta t$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{0x}$.

O método de Feynman-Newton integra as mesmas equações diferenciais do movimento $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$, fazendo a aproximação:

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) \times \delta t$$

$$v_x\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = v_x\left(t - \frac{\delta t}{2}\right) + a_x(t) \times \delta t,$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{x0}$.

a) Calcule o erro de truncatura local do método de Feynman-Newton.

b) Calcule o erro de truncatura global do método de Feynman-Newton.

c) Para iniciar o cálculo das velocidades tem de conhecer $v_x\left(\frac{\delta t}{2}\right)$. Encontre uma expressão que permita calcular esta última quantidade. Considere $t_0 = 0$.

Problemas Numéricos

6. Um volante de badmington foi largado de uma altura considerável. A lei do movimento é

$$y(t) = \frac{v_T^2}{g} \log\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_\mathrm{T}}\right)\right],$$

em que a terminal do volante v_T é 6.80 m/s.

a) Faça o gráfico da lei do movimento $y(t)$ de 0 a 4.0 s.

b) Determine a velocidade instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

c) Determine a aceleração instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. faça o gráfico da aceleração em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

d) Mostre que a aceleração $a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2}\left|v_y\right|v_y$ é equivalente à calculada na alínea anterior.

e) Se o volante for largado de uma altura de 20 m, quanto tempo demora a atingir o solo? Compare com o tempo que demoraria se não houvesse resistência do ar.

f) Nas condições da alínea anterior, qual o valor da velocidade e da aceleração quando o volante chega ao solo?

Nota:

- Para cálculo simbólico: para derivar pode usar as funções diff do pacote sympy
- Para cálculo numérico: Pode usar a função arccosh do pacote numpy.

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$; $\tanh(\mathrm{x}) = \sinh(\mathrm{x}) / \cosh(\mathrm{x})$

7. a) Resolva o problema apresentado em 3., agora considerando a resistência do ar. Resolva usando o método de Euler. A velocidade terminal da bola no ar é de 100 km/h.

b) Qual a altura máxima e o instante em que ocorre?

c) Em que instante volta a passar pela posição inicial?

Deve encontrara uma maneira numérica de estimar os instantes da altura máxima e do retorno ao posição inicial.

8. Um objeto pequeno é largado de uma altura elevada. Considere a queda livre, sem resistência do ar. Considere $g = 9.80\ \mathrm{m/s}$

a) Qual a relação entre a velocidade e a aceleração instantânea?

b) Construa um programa que determine a velocidade do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0,\ 4\ \mathrm{s}]$. Qual a velocidade em 3s?

c) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

d) Compare o resultado obtido em b) e c) com o resultado exato. Que conclui?

e) Construa um programa que determine a posição do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0,\ 4\ \mathrm{s}]$. Qual a posição no instante 2 s, se o objeto partiu da posição 0 m? (Usa o passo de tempo usado em alínea b) .)

f) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.

g) Compare o resultado obtido em e) e f) com o resultado exato. Que conclui?

h) Calcule novamente a posição no instante 2s, com o passo 10 vezes menor do que em alínea f). Faça o gráfico do desvio do valor aproximado com o valor exato em função do passo. Como varia o erro com o passo?

9. Uma bola de ténis, de massa 58 g, e um volante de badmington, de massa igual 58 g, são largados do cimo de um prédio de 5m de altura. Qual deles chega primeiro ao solo? Calcule o instante em que cada objeto chega ao solo. A velocidade terminal é de 6,80 m/s e 100 km/h para o volante de badmington e a bola de ténis, respetivamente.

10. Um volante de badmington foi disparado para baixo na vertical, a uma velocidade de 200 km/h, de uma altura considerável. Considere o valor medido da velocidade terminal $v_T = 6{,}80$ m/s.

a) Qual a aceleração a que está sujeito o volante durante o movimento? Faça o gráfico da aceleração em função do tempo.

b) Determine a velocidade instantânea, usando o método de Euler. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo. Qual a velocidade do volante (em km/h) ao fim de 1 s?

c) Em quanto tempo tem o volante reduzida a sua velocidade em 50%?

d) Determine a lei do movimento $y(t)$, usando o método de Euler. Faça o gráfico da posição em função do tempo. Em quanto tempo percorre 4 m?

Note: Teste o programa para o caso $v_y(0) = 0$, em que se conhece a solução exata.

11. Um volante de badmington foi largado de uma altura considerável. Considere a aceleração $a_y(t) = g - Cv_y$, em que a resistência do ar ao movimento é linear na velocidade. Considere o valor medido da velocidade terminal $v_T = 6{,}80$ m/s.

a) Calcule a expressão da velocidade terminal em função de C.

b) Determine a velocidade instantânea, usando o método de Euler. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo.

c) Determine a lei do movimento $y(t)$, usando o método de Euler. Faça o gráfico da posição em função do tempo.

d) Compare a posição instantânea obtida com os valores medidos, registados no ficheiro: data_cap2_queda_volante.txt.

12. Queda de um paraquedista

Um paraquedista salta de um avião, a uma altitude de 1 km. As velocidades terminais típicas são 60.0 e 5.0 m/s para o salto livre e para o paraquedas aberto, respetivamente. Estas velocidades terminais correspondem à massa volúmica do ar à superfície do solo $\rho = 1.225$ kg/m^3.

a) Quanto tempo demoraria a chegar ao solo com o paraquedas fechado? E a que velocidade?

b) Quanto tempo demora a chegar ao solo com o paraquedas aberto, considerando numa aproximação pouco fiel, que o para-quedas é aberto imediatamente quando o paraquedista salta do avião?

c) Considere a alínea anterior, considerando que o paraquedas fica aberto 20 s depois do salto do avião.

d) Resolva novamente a questão anterior tendo em consideração que a densidade do ar varia de acordo com

$$\rho(h) = 1.225\, e^{-0.1378\, h} \text{ kg/m}^3$$

para alturas h até 90 km, sendo a altura medida em quilómetros. Considere que o coeficiente de resistência do ar é proporcional à densidade do ar.

Soluções Problemas Cap. 2
1. 19 s, 378 m.

2. a) $a_x(t) = .10\omega \ \sin\omega t;$ b) $x(t) = 2 + \frac{10}{\omega}\sin\omega t$

3. a) $y(t) = +10\,t - \frac{1}{2}gt^{\,2}$; b) $t_m = 1.02$ s, $y_m = 5.10$ m;

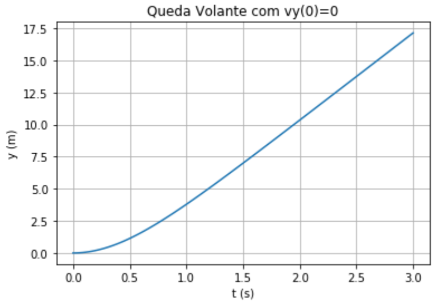
c) $t_{solo} = 2.04$ s; $v_{solo,y} = -10.0$ m/s

4. a) $\mathcal{O}(\delta t^2)$; b) $\mathcal{O}(\delta t)$

5. a) $\mathcal{O}(\delta t^3)$; b) $\mathcal{O}(\delta t^2)$;

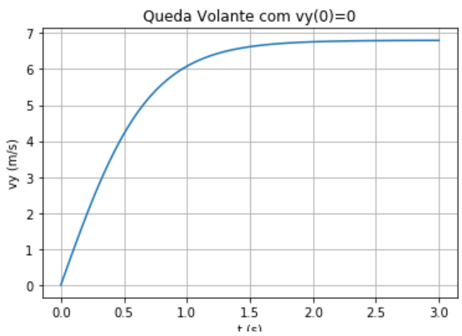
c) $v_x(\delta t/2) = v_x(0) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_{t=0}\delta t/2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_{t=0}\delta t^2/4 + \mathcal{O}(\delta t^3)$

6. a)

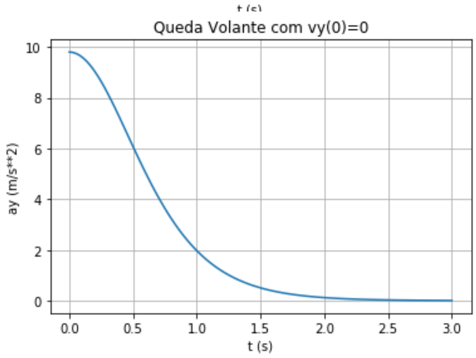


b) $v_x(t) = v_\mathrm{T}\tanh\frac{gt}{v_\mathrm{T}}$

;

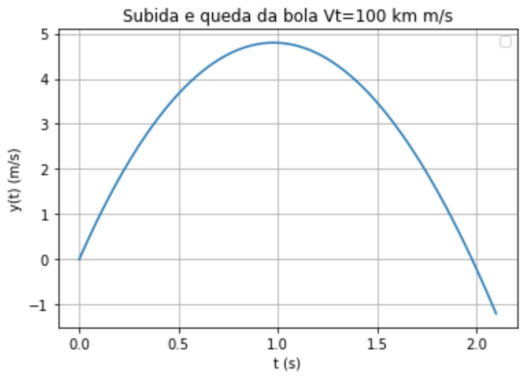


c) $a_x(t) = \frac{g}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_\mathrm{T}}\right)}$



e) com resistência do ar 3.4 s; sem resistência 2,0 s; f) 6.8 m/s e 0.002 m/s^2.

7. a)



b) $t_m = 0.979$ s, $y_m = 4.798$ m ; c) $t_{solo} = 1.979$ s, $v_{solo,y} = -9.41$ m/s

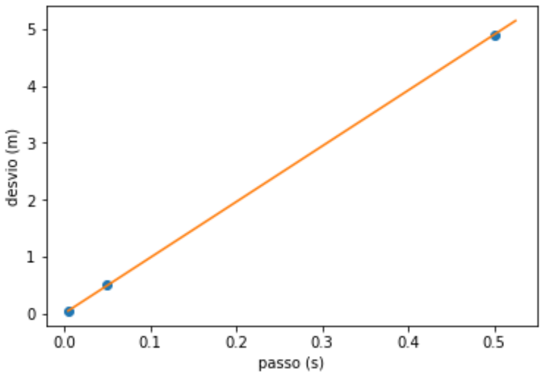
8. a) $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$; b) 29.4 s; c) 29.4 s (neste caso não altera);

d) todas os valores são iguais; e) passo=0.5s, $x(2s) = 14.7$ m;

f) passo=0.05s, $x(2s) = 19.1$ m;

g) $x_{exato}(2s) = 19.6$ m, passo diminui o valor aproximado aproxima-se do valor exato;

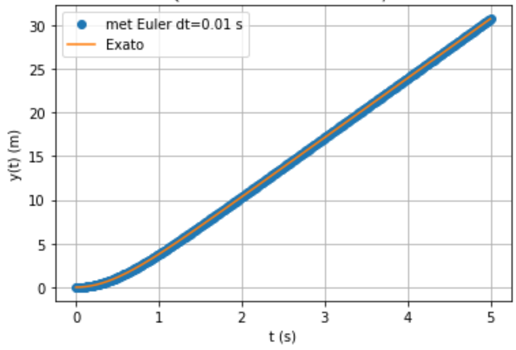
h)



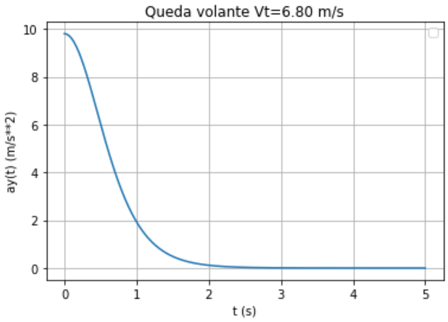
desvio é proporcional ao passo

9. A bola ténis chega ao solo em 1.02 s e o volante badmington 1.19 s. Chega 1º a bola de ténis

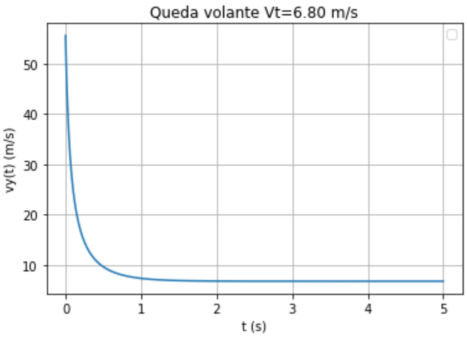
10. Teste



a)



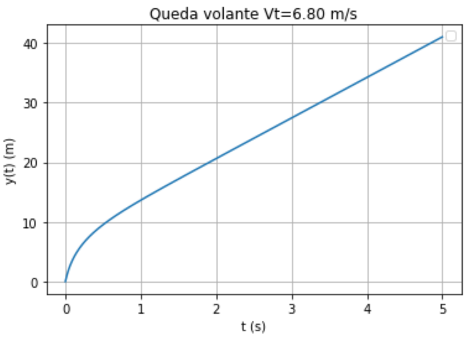
b)



26.5 km/h;

c) 0.089 s;

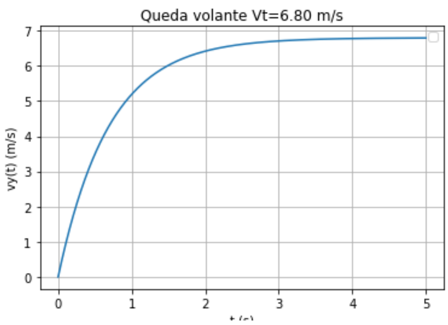
d)



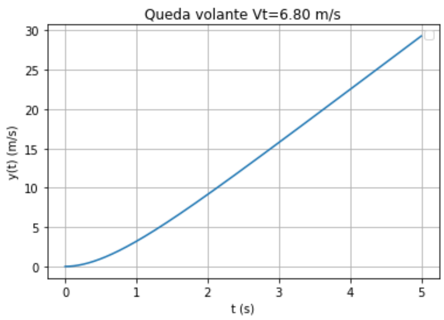
0.11 s

11. a) $v_T = g/C$;

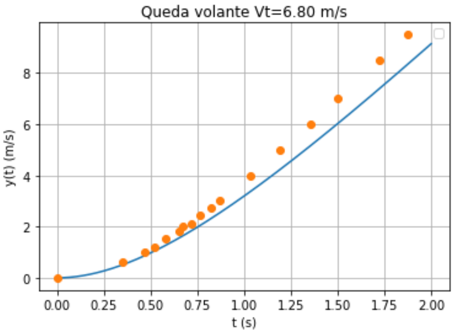
b)



c)



d)



Não há acordo com os dados experimentais. Logo a hipótese da aceleração devida à resistência do ar ser linear e oposta à velocidade está errada.

12. a) 20.9 s; 215 km/h; b) 3.3 minutos; 18 km/h; c) 29.9 s; 18 km/h; d) 3.5 minutos; 17 km/h