Departamento de Física
Universidade de Aveiro

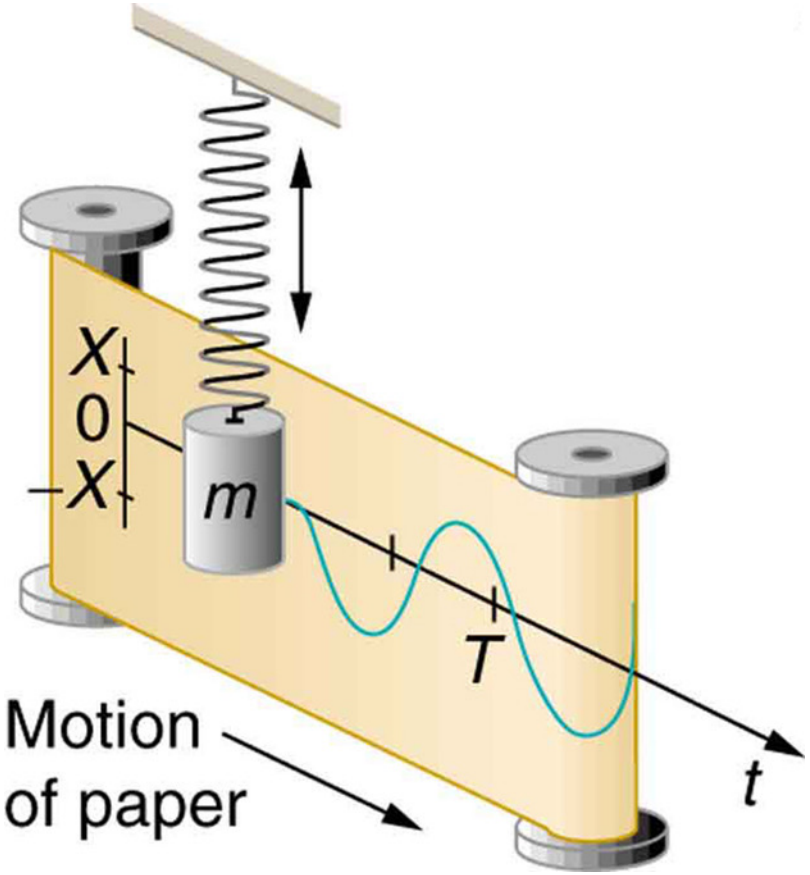
# Modelação de Sistemas Físicos

## 10ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 7 Oscilações
Osciladores Simples e Amortecidos

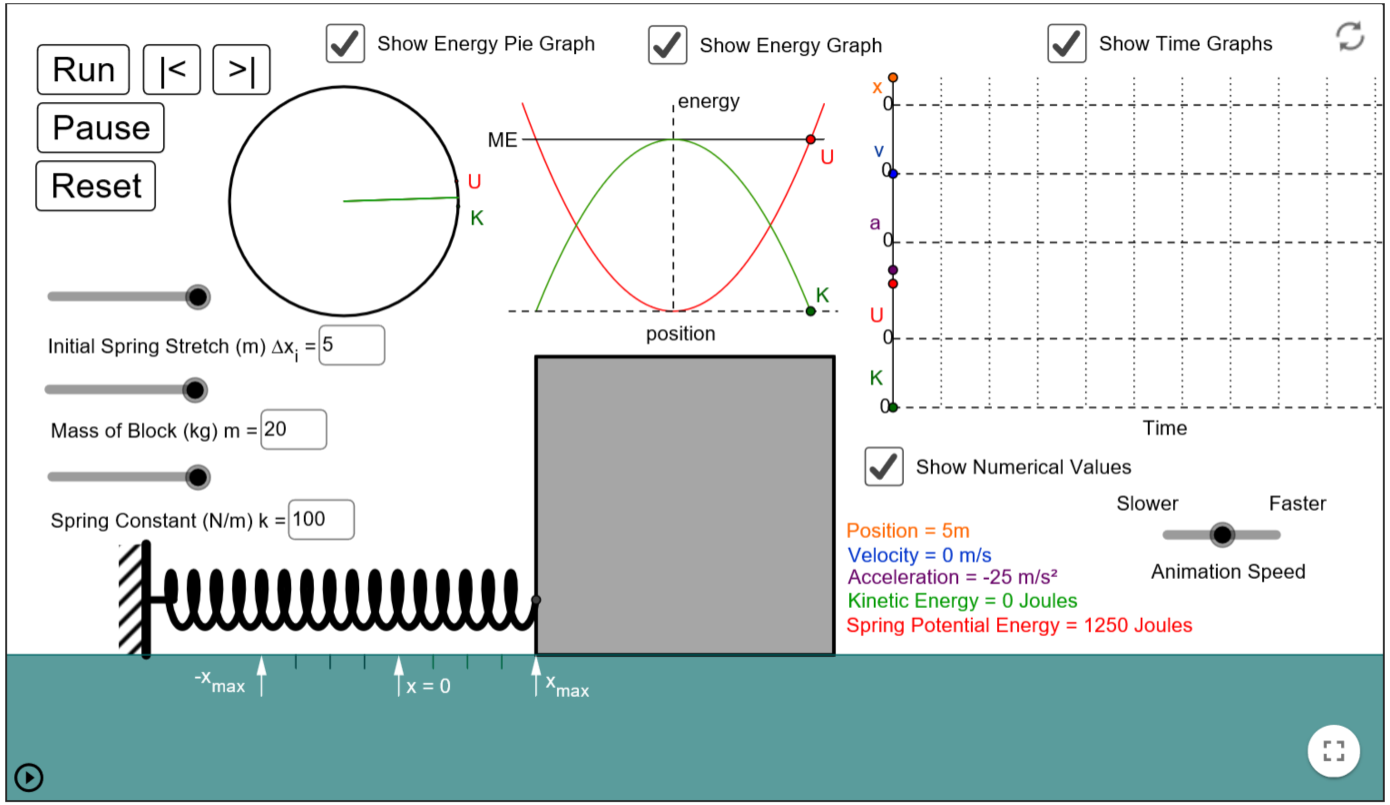
Bibliografia:
Cap. 7: Serway, cap. 15;


X
0
−X
m
T
t
Motion
of paper

# Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring

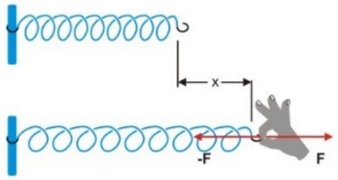
**Autor:** Alan Pacey, Tom Walsh

This simulation shows the oscillation of a box attached to a spring. Adjust the initial position of the box, the mass of the box, and the spring const Run, Pause, Reset, and Step buttons to examine the animation. Check or uncheck boxes to view/hide various information.




https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))




Cálculo Analítico:

$$F_x = -k\,x \;\Longrightarrow\quad a_x = -\frac{k}{m}x \quad\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases} \qquad k = m\omega^2$$

Com $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se $A$ e $\phi$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\;,\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

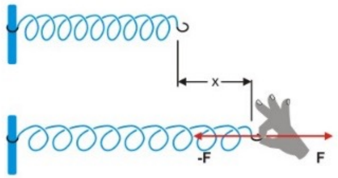
$$F_x = -k\,x = -\frac{dE_p}{dx} \quad\Longrightarrow\quad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\,x^2 \quad\Longrightarrow\quad E = \frac{1}{2}m\omega^2\,A^2$$ = conserva-se

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega t + \phi) \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ \dfrac{v_x(t)}{\omega} = -A\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases}$$

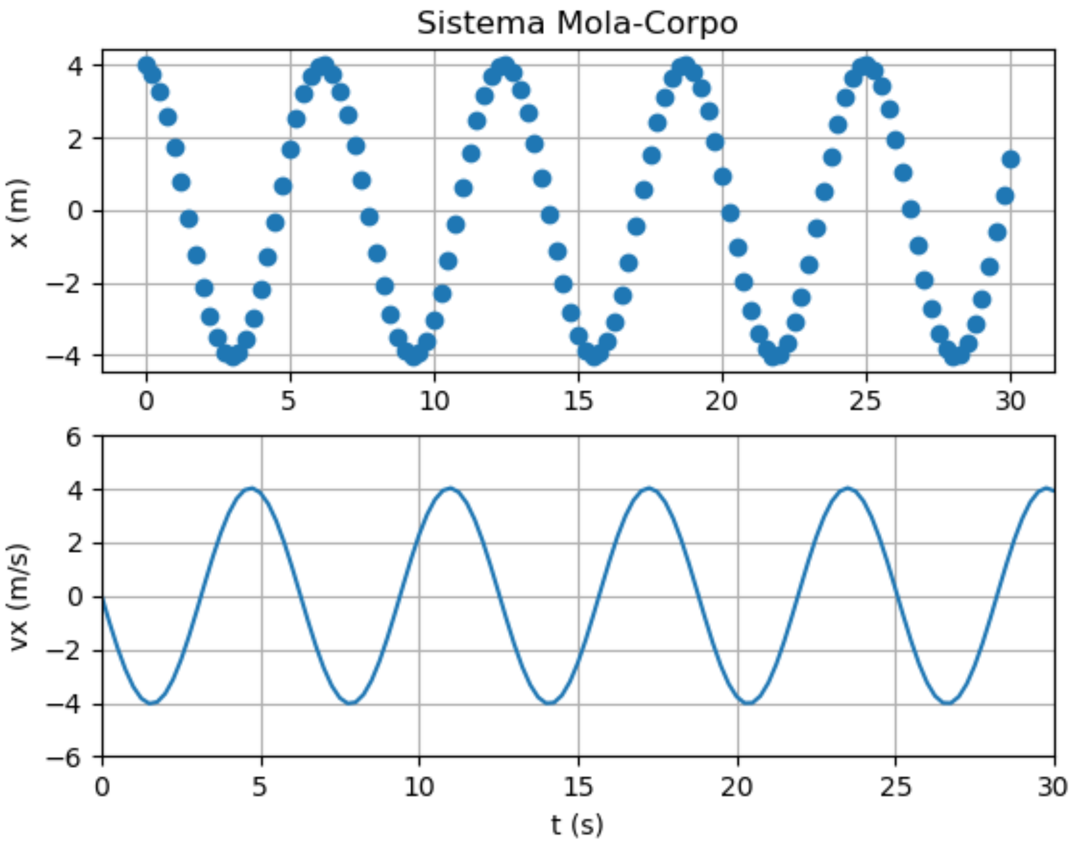
$$\Longrightarrow \qquad x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2$$ eq. circunferência raio $A$

Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))

<u>Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer</u>

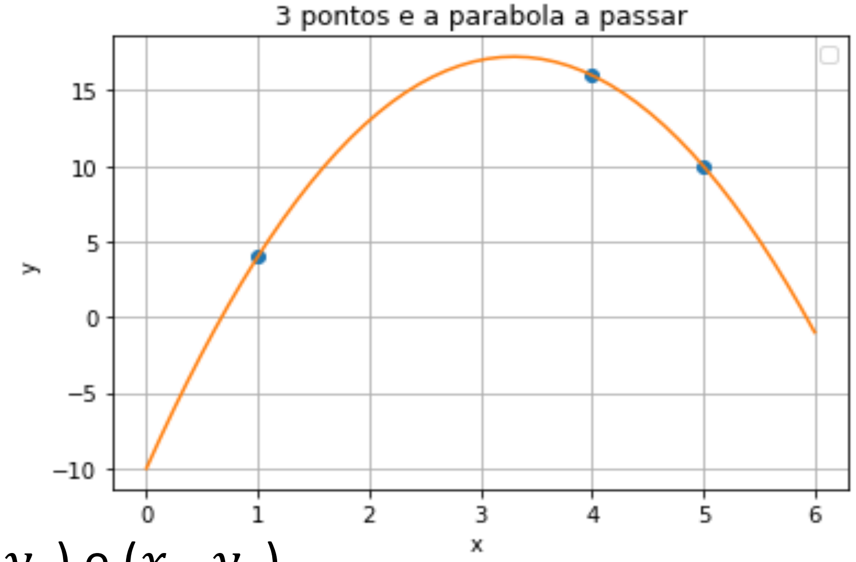



$$F_x = -k\,x \implies \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$




Como calcular a amplitude $A$ e o período $T$? Como saber a fase $\phi$?

# Cálculo da amplitude da oscilação: **interpolação**




Por três pontos $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$
há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos.

<u>Polinómio de Lagrange:</u>

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

Podemos usar o polinómio para:

- Interpolação – encontrar o valor de $y$ num ponto $x$ onde não temos dados
- Interpolação inversa – encontrar o valor de $x$ que corresponde a um determinado valor de $y$
- Cálculo de máximo e mínimos

# Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

Por três pontos $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos.
Polinómio de Lagrange

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

**A condição de máximo**, como de mínimo, é :

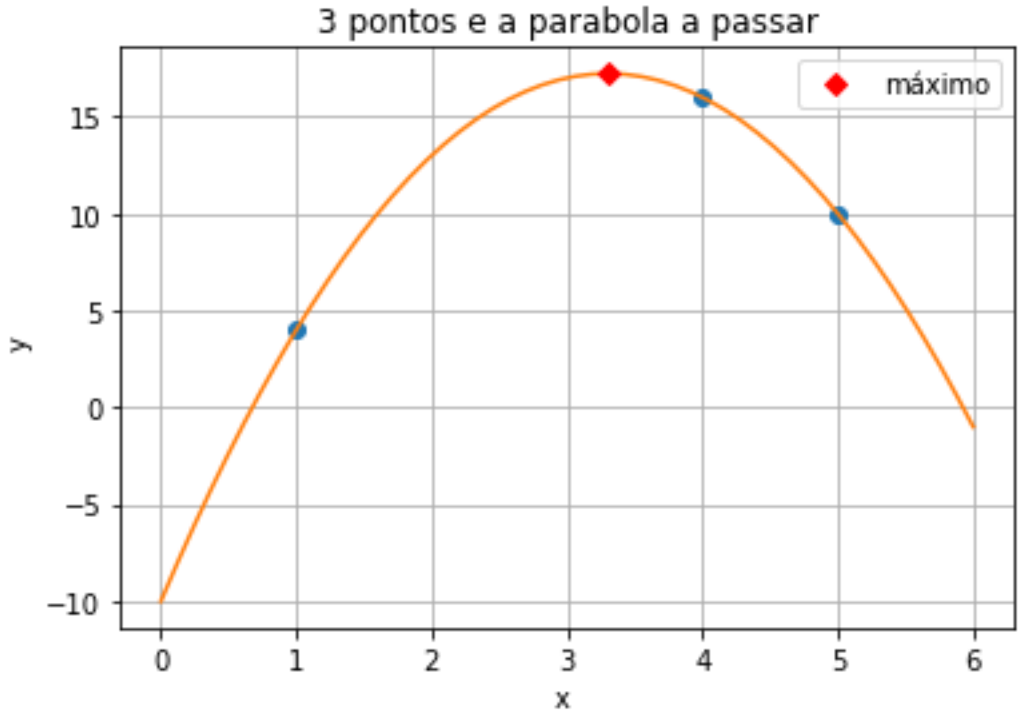
$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \textbf{no ponto } (x_m, y_{max})$$

$$\Longrightarrow \frac{[(x-x_2)+(x-x_1)]}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{[(x-x_2)+(x-x_0)]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{[(x-x_0)+(x-x_1)]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 = 0$$

$$\Longrightarrow x_m = \frac{a0+b0+c0}{2(a+b+c)} \qquad \Longrightarrow y_{max}(x_m) = \text{polinómio de Lagrange}$$

$$a = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad \mathrm{b} = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad c = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$a0 = \frac{(x_2+x_1)y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad b0 = \frac{(x_2+x_0)y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \qquad c0 = \frac{(x_0+x_1)y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

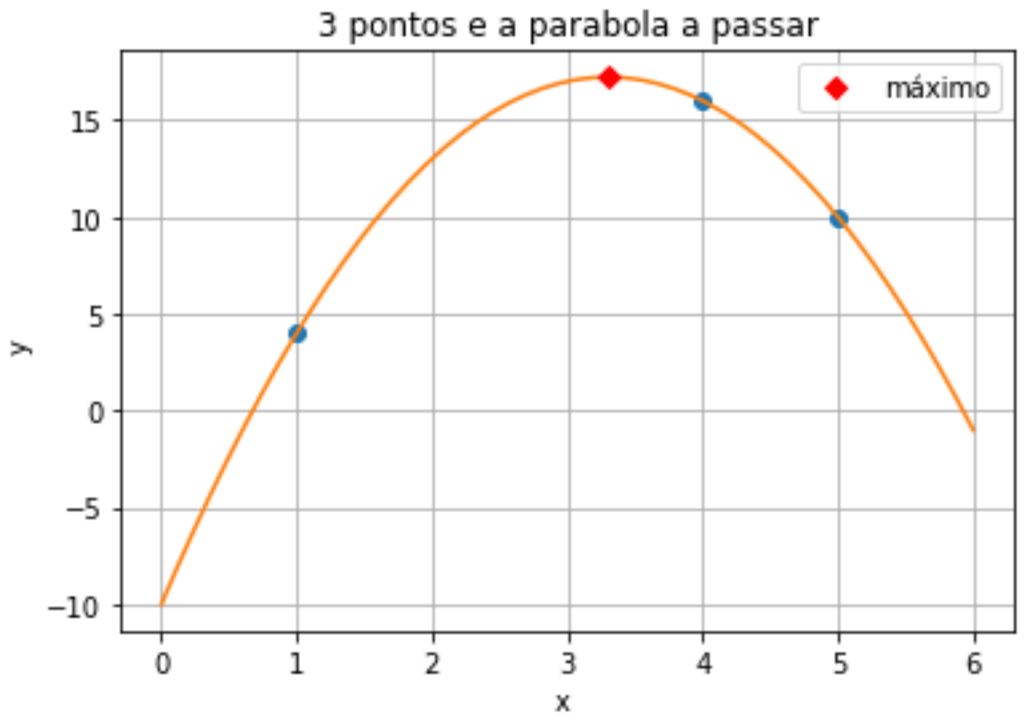


# Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

Por três pontos $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$ há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos:
Polinómio de Lagrange

**O máximo ou o mínimo duma função** de pontos discretos por interpolação de Lagrange:

```
def maxminv(x0,x1,x2,y0,y1,y2):
    # Máximo ou mínimo usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input): (x0,y0), (x1,y1) e (x2,y2)
    # Resultados (output): xm, ymax
    xab=x0-x1
    xac=x0-x2
    xbc=x1-x2

    a=y0/(xab*xac)
    b=-y1/(xab*xbc)
    c=y2/(xac*xbc)

    xmla=(b+c)*x0+(a+c)*x1+(a+b)*x2
    xm=0.5*xmla/(a+b+c)

    xta=xm-x0
    xtb=xm-x1
    xtc=xm-x2

    ymax=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
    return xm, ymax
```



## Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

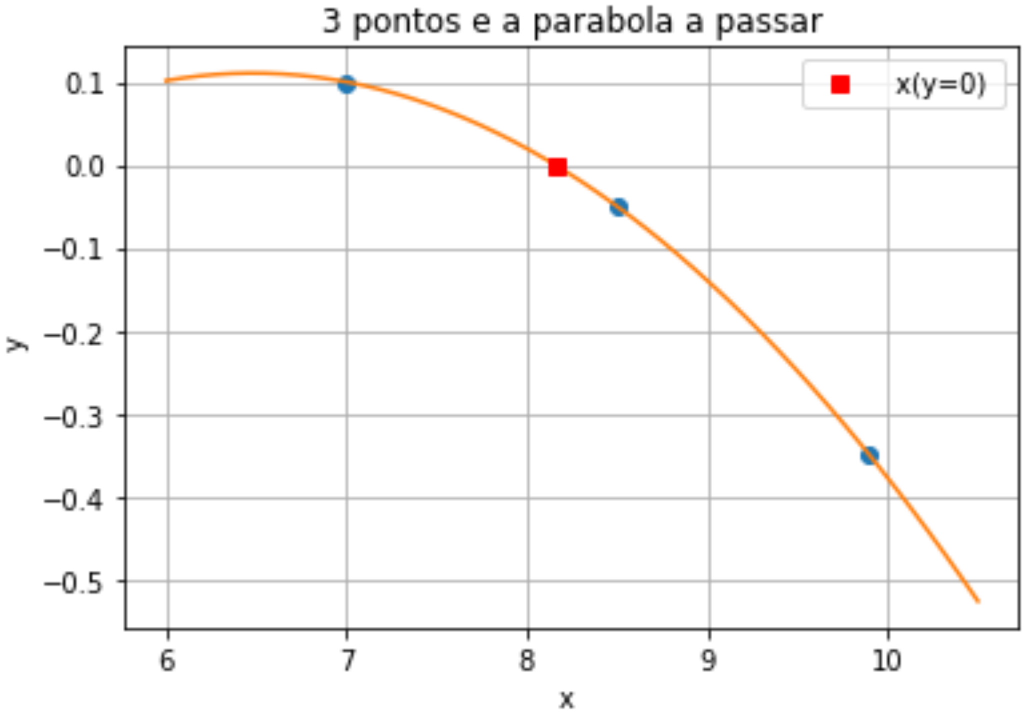
Problema: Dado um certo $y_{inp}$, qual o $x_{out}$ correspondente?

**Interpolação inversa**

$$y_{inp} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} a = e + f + g \\ b = e\,(x_0+x_1) + f\,(x_0+x_2) + g\,(x_1+x_2) \\ c = y_{inp} + \ e\,x_0x_1 + f\,x_0x_2 + g\,x_1x_2 \\ e = \frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)} \\ f = \frac{y_1}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)} \\ g = \frac{y_0}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)} \end{cases}$$

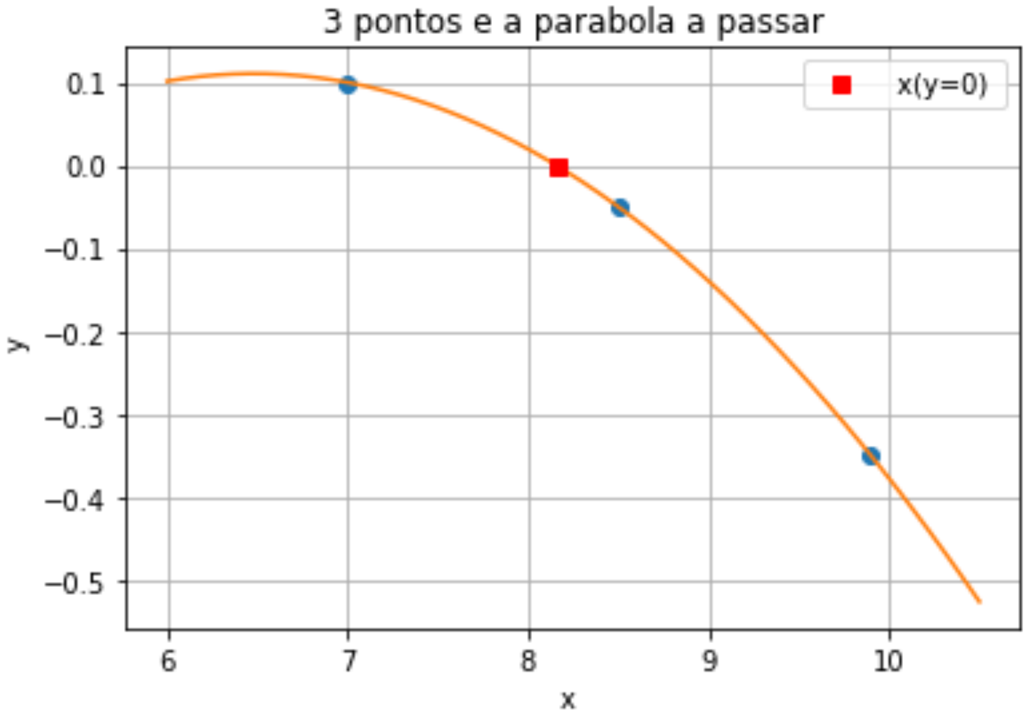


# Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

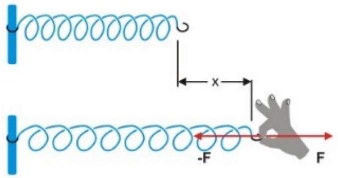
Problema: Dado um certo $y_{inp}$, qual o $x_{out}$ correspondente?

**Interpolação inversa** $x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

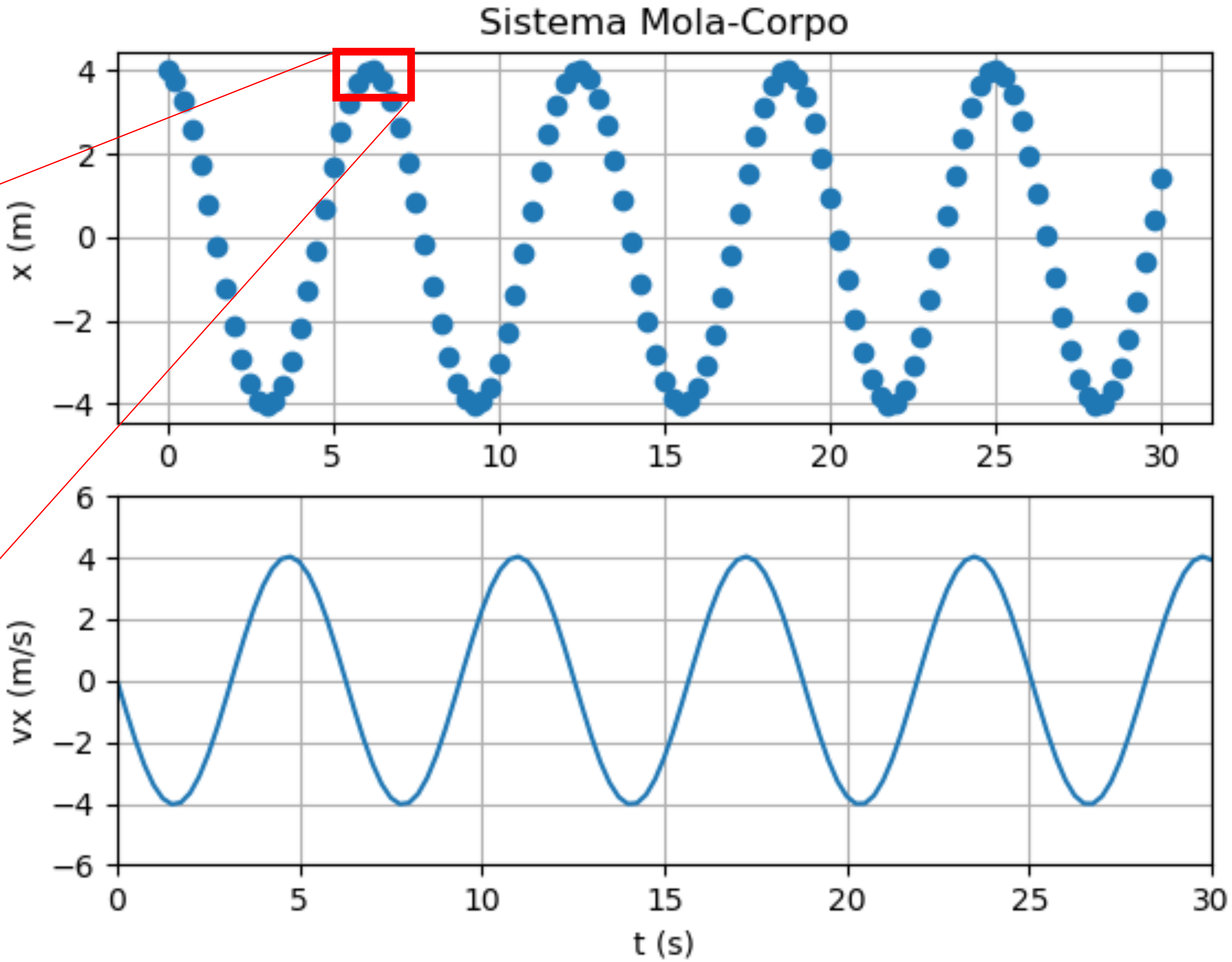
```
def intlaginvv(yinp,xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):
    # interpolação inversa usando o polinómio de Lagrange
    # Dados (input): yinp, (x0,y0), (x1,y1), (x2,y2)
    # Resultados (output): xout,  yout
    xab=xm1-xm2
    xac=xm1-xm3
    xbc=xm2-xm3
    a=ym1/(xab*xac)
    b=-ym2/(xab*xbc)
    c=ym3/(xac*xbc)
    am=a+b+c
    bm=a*(xm2+xm3)+b*(xm1+xm3)+c*(xm1+xm2)
    cm=yinp+a*xm2*xm3+b*xm1*xm3+c*xm1*xm2
    xout=(bm+np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)
    if xm3 > xm1 and (xout < xm1 or xout > xm3):
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)
    if xm1 > xm3 and (xout < xm3 or xout > xm1):
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)

    xta=xout-xm1
    xtb=xout-xm2
    xtc=xout-xm3
    yout=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb
    return xout, yout
```



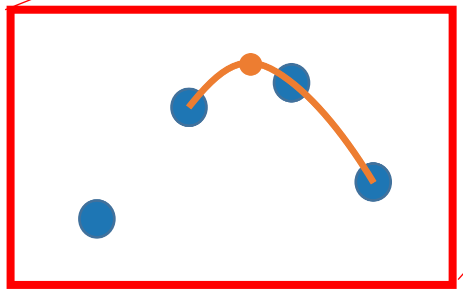
Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:



$$F_x = -k\,x \implies \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

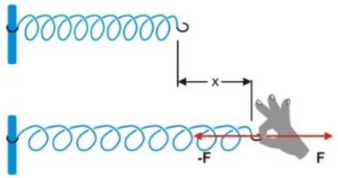



Como calcular amplitude $A$?



$$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

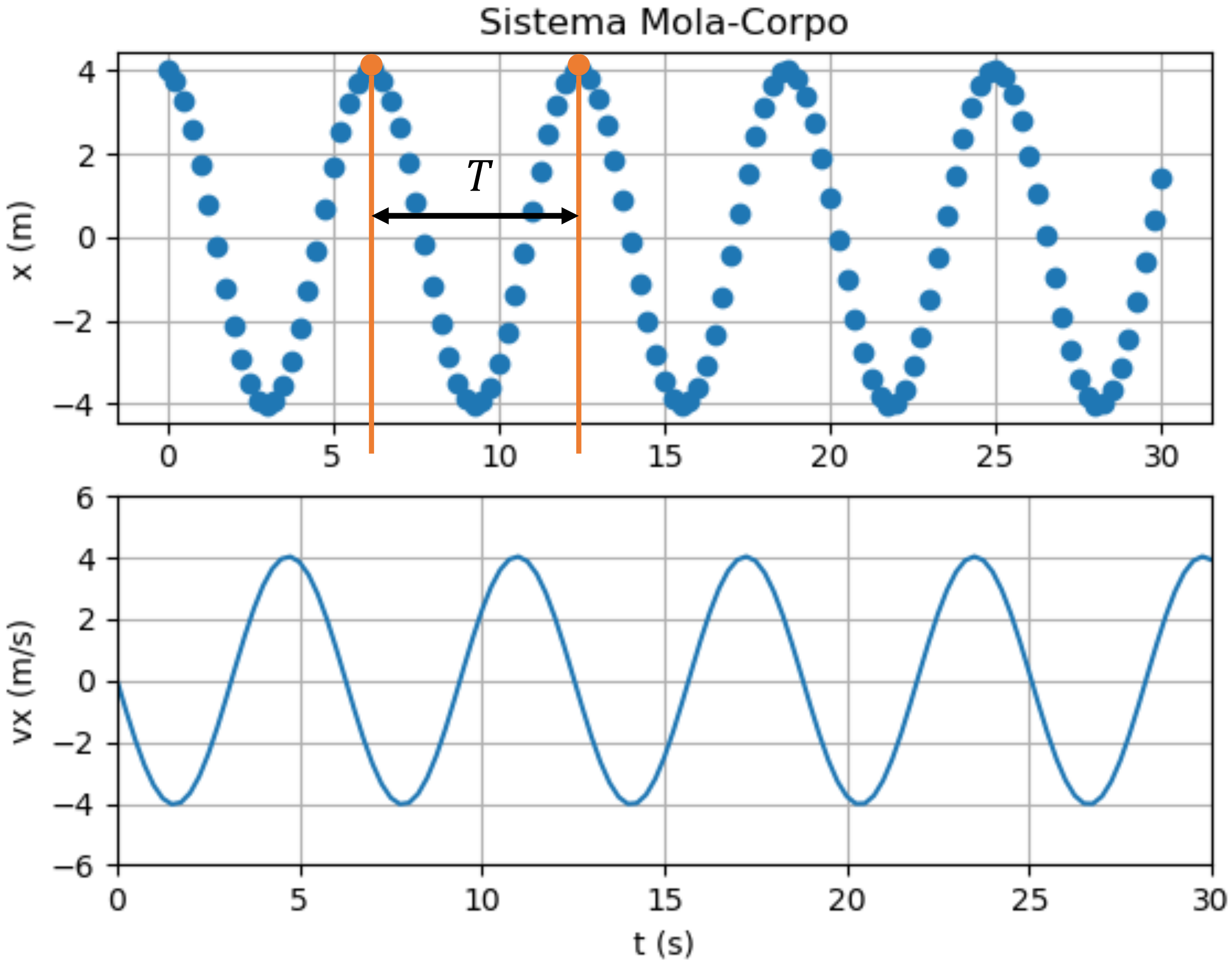
Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:



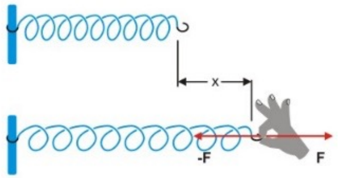

$$F_x = -k\,x \implies \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

Como calcular período $T$?

$$T = x_{max2} - x_{max1}$$



Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:



$$F_x = -k\,x \;\Longrightarrow\; \begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

# Como calcular fase $\phi$?

$x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,)$
máximo quando $\omega t + \phi = 2\pi, 4\pi, \ldots$

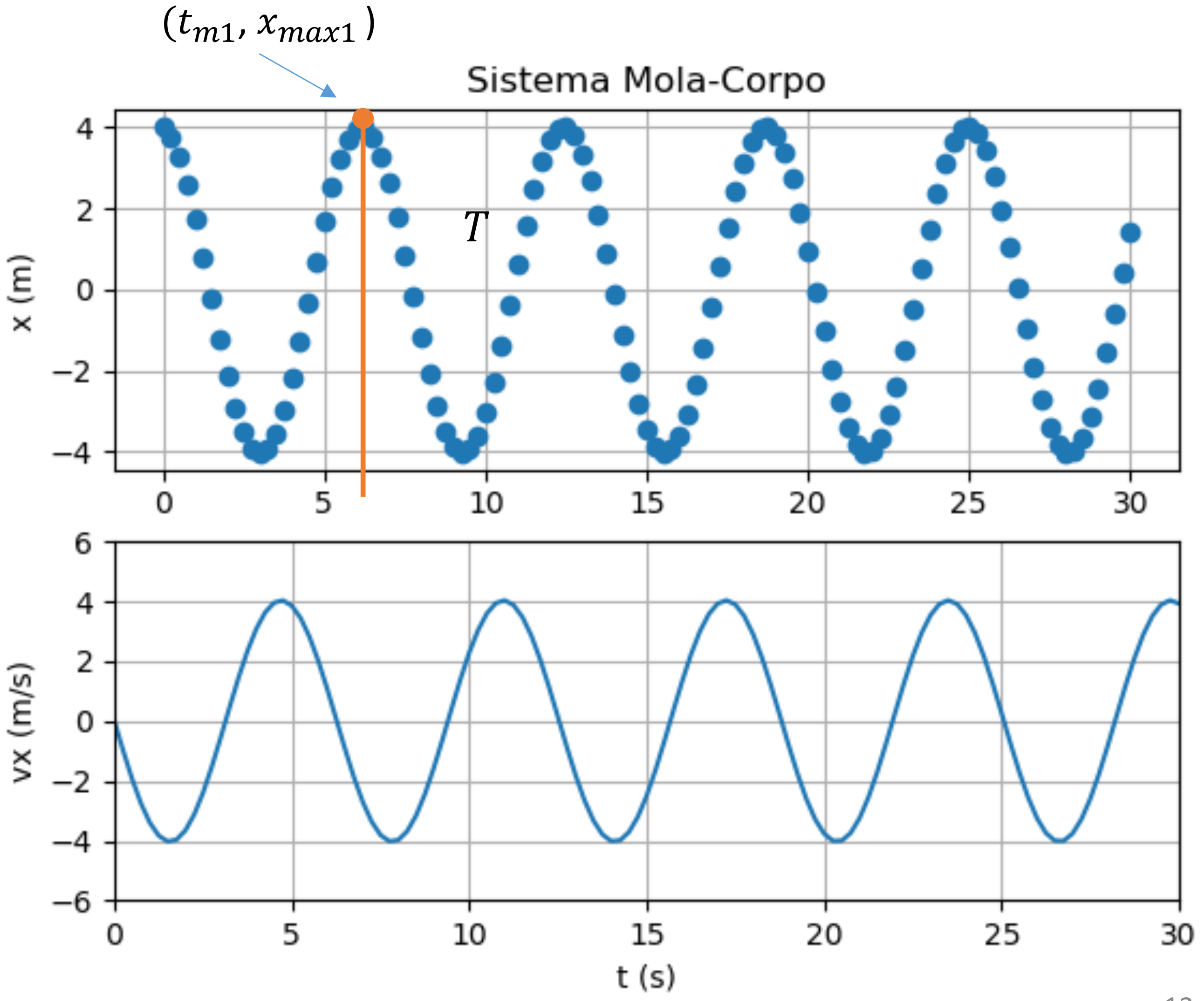
primeiro máximo $x_{max1}$ $(t_{m1})$ quando

$$\omega t_{m1} + \phi = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

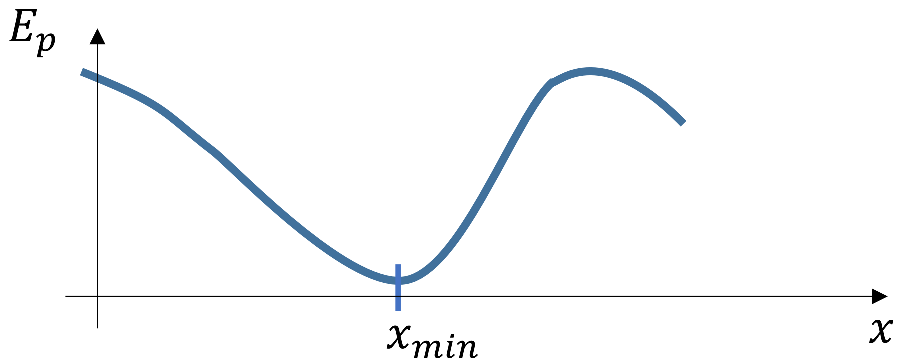
$$\Rightarrow \quad \phi = 2\pi\left(1 - \frac{t_{m1}}{T}\right)$$

Se encontrar $\phi > \pi$, subtrair $2\pi$: $\phi = -2\pi\,\dfrac{t_{m1}}{T}$



# Importância do oscilador harmónico

Energia potencial qualquer, com mínimo em $x_{min}$




Expansão de Taylor à volta de $x_{min}$:

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{tx_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

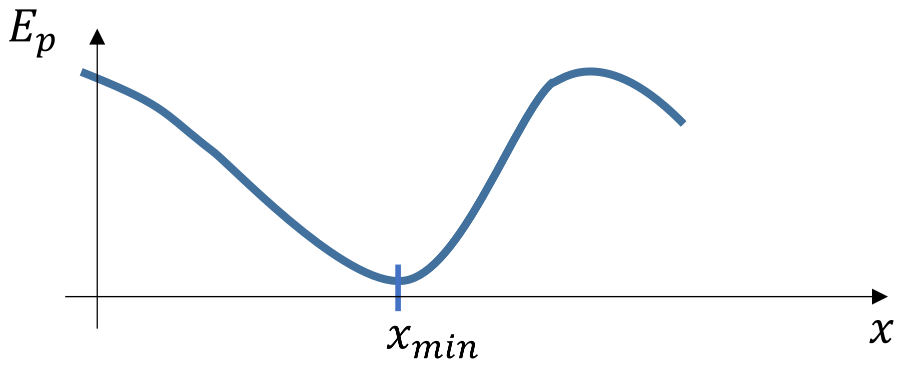
com $\delta x = x - x_{min}$

em $x_{min}$ a força é nula! $\quad F_x(x_{min}) = -\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_{min}} = 0$

$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = +\frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{tx_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

# Importância do oscilador harmónico

Energia potencial qualquer, com mínimo em $x_{min}$




$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = +\frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3E_p}{dx^3}\bigg|_{x_{min}} \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

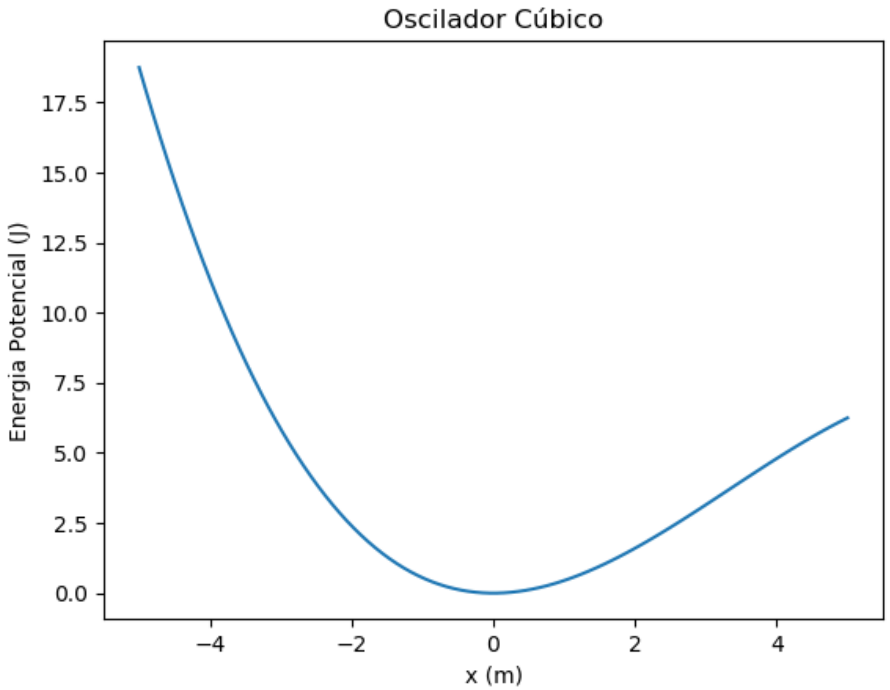
Se fizermos a escolha: $E_p(x_{min}) = 0 \quad e \quad x_{min} = 0$

$$E_p(x) = +\frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3E_p}{dx^3}\bigg|_{x_{min}} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \qquad \text{com: } \frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x_{min}} = k$$

e requer $\delta x \ll 1$

Troncar a $\mathcal{O}(x^2) \longrightarrow$ oscilador harmónico simples.
Troncar a $\mathcal{O}(x^3) \longrightarrow$ oscilador cúbico.

**Oscilador cúbico:** $$E_p(x) = +\frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_{min}} x^3 \quad = \quad \frac{1}{2}k\,x^2 + \alpha\,x^3$$




Solução analítica (muito) difícil

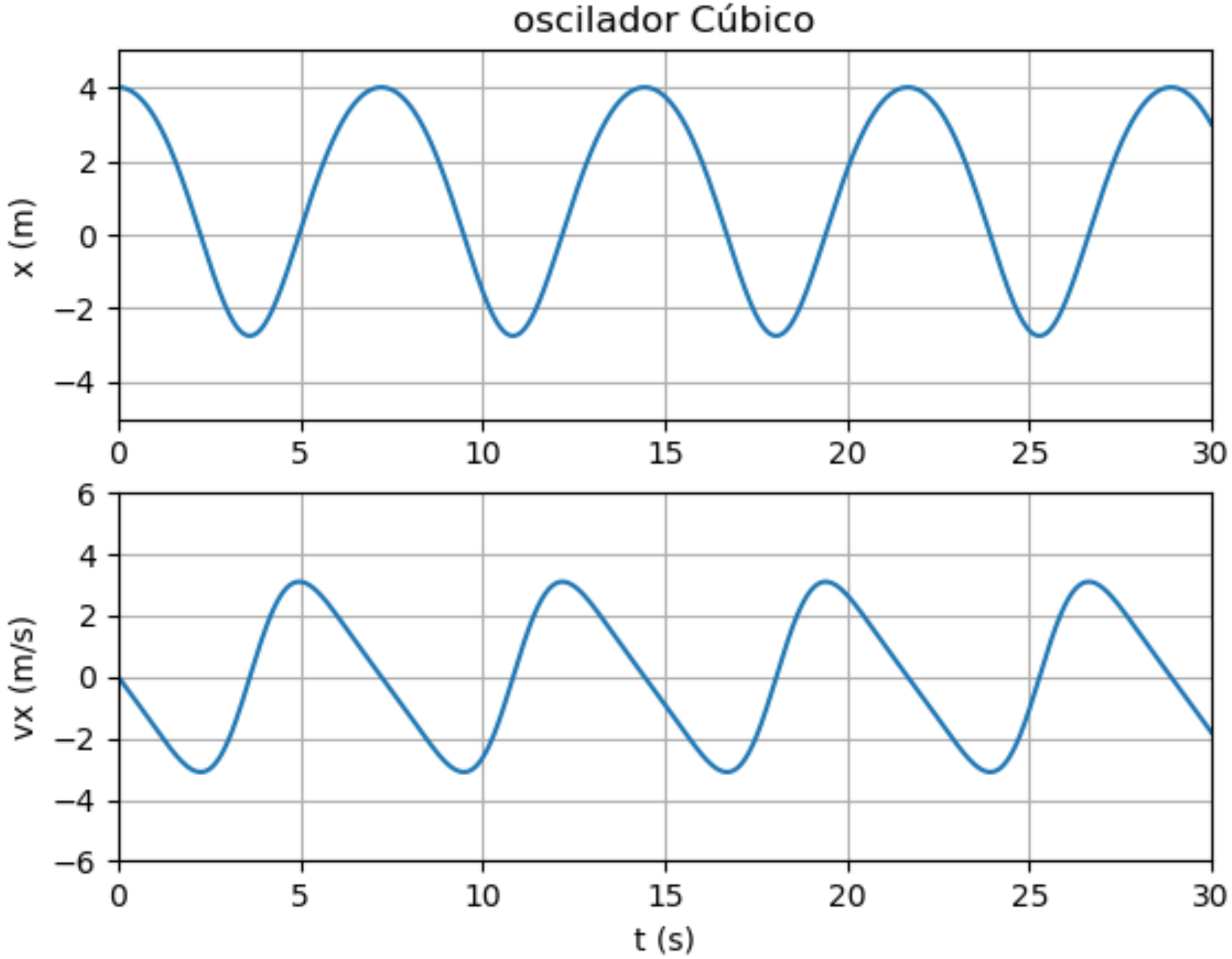
⇒ Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

**Oscilador cúbico:** $E_p(x) = +\frac{1}{2} k\, x^2 + \alpha\, x^3$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

Força: $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -k\, x - \alpha\, x^2$

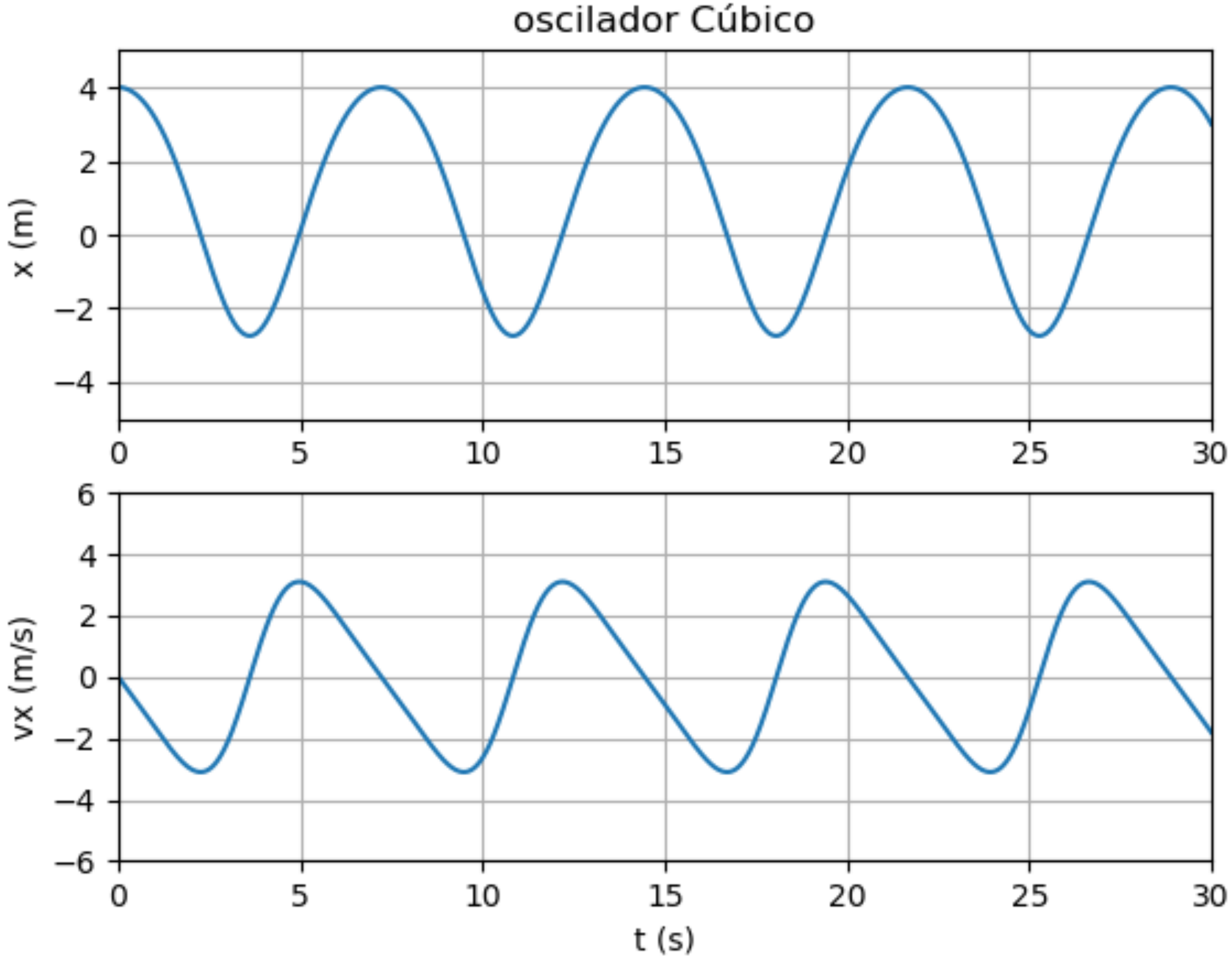
$$\Longrightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{\alpha}{m}\, x^2 \\ x(0) \\ v_x(0) \end{cases}$$



Oscilador cúbico: $$E_p(x) = +\frac{1}{2}k\,x^2 + \alpha\,x^3$$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

- Movimento periódico
- Podemos calcular a amplitude e o período usando os métodos de interpolação.

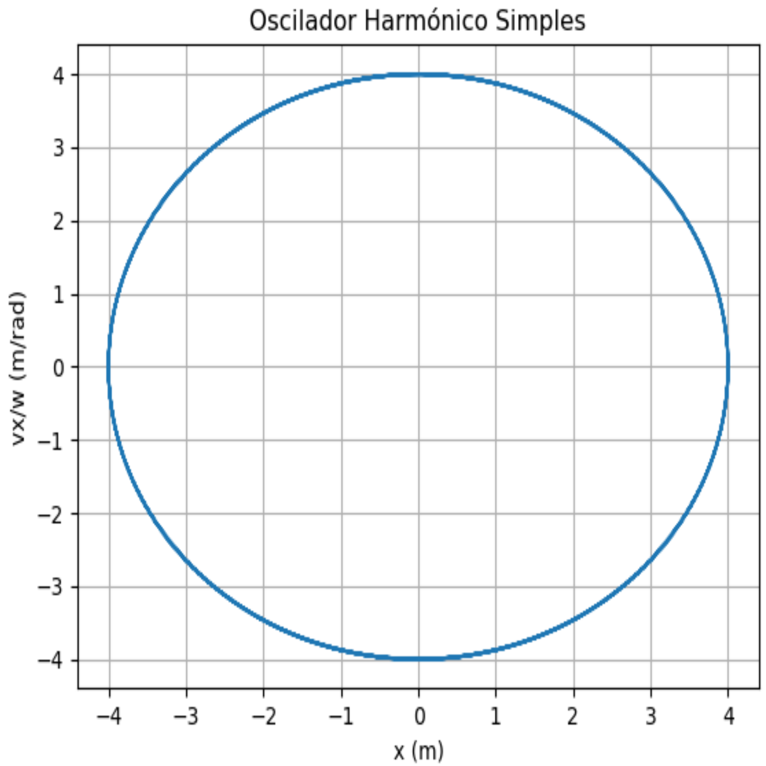


# Espaço de fase $(x, v_x)$

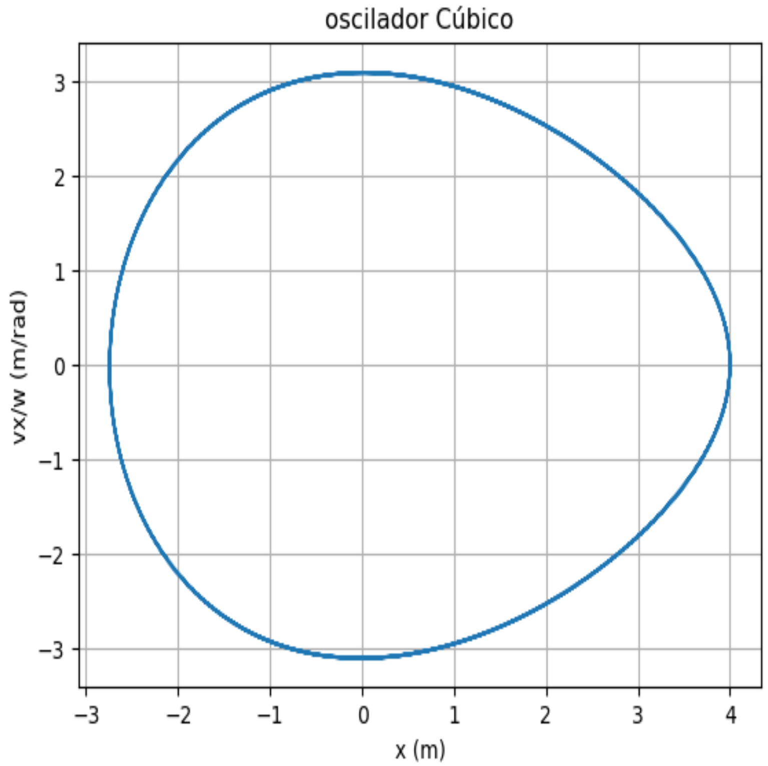
Oscilador Harmónico Simples:

$$x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2 \quad \text{eq. circunferência raio } A$$

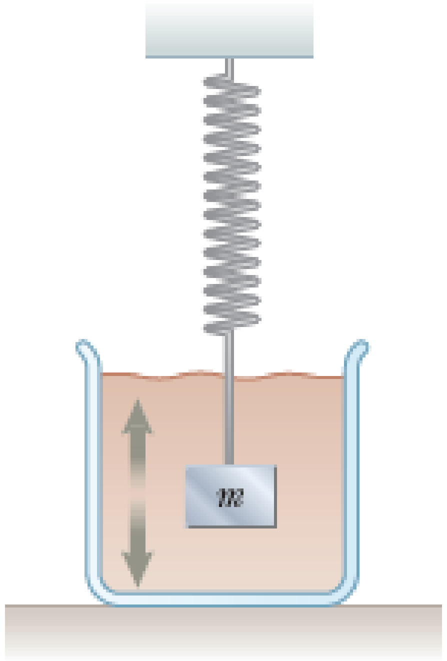
$\Rightarrow$ plot $\frac{v_x(t)}{\omega}$ vs $x$




Oscilador Cúbico:



# Oscilador Harmónico Amortecido

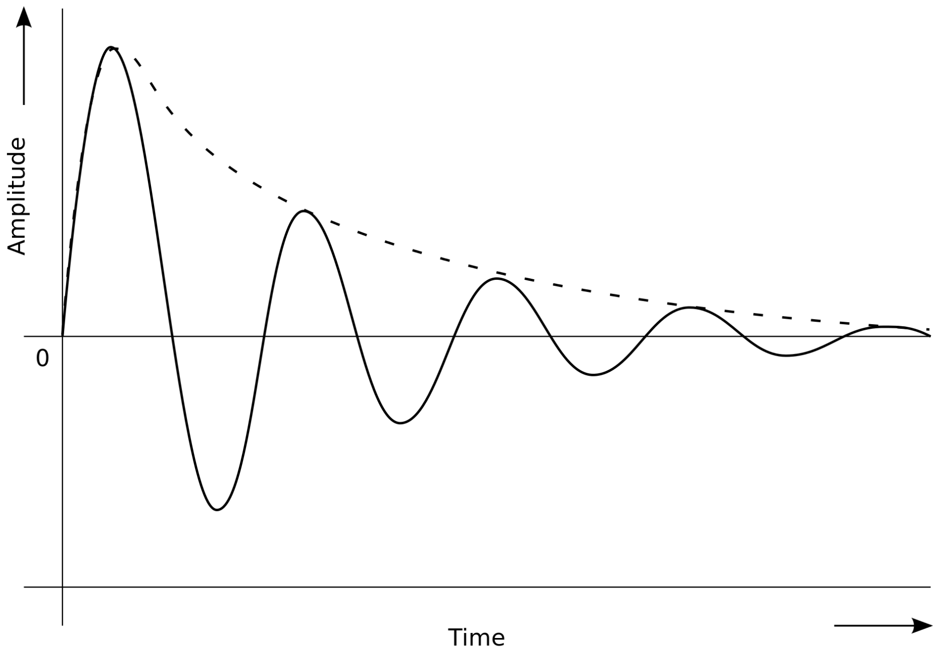



$$F_x^{resistência} = -bv_x$$

# Oscilador Harmónico Amortecido

## Amortecimento fraco: $b < 2\, m\, \omega_0$

$$F_x = -k\, x\; - b v_x \qquad \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x \; = -\,\omega_0^2\, x - \frac{b}{m} v_x$$

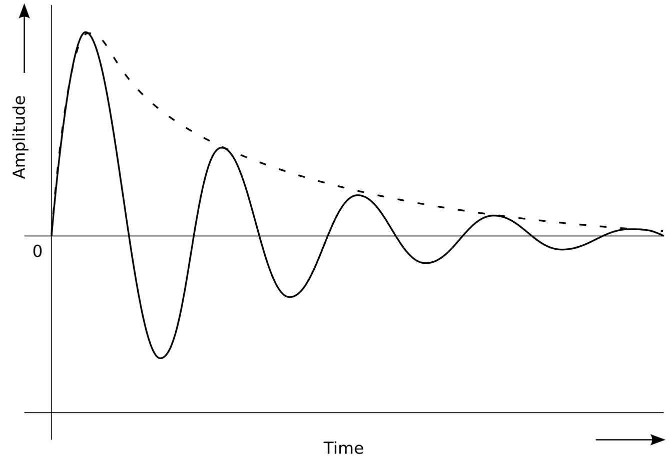



$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega\, t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A_a \omega e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega\, t + \phi) - A_a \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega\, t + \phi\,) \end{cases}$$

em que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ ou $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = frequência de oscilação sem amortecimento

# Oscilador Harmónico Amortecido Cálculo Analítico: <u>Amortecimento fraco</u>: $b < 2\,m\,\omega_0$




$$F_x = -k\,x\; - bv_x \Longrightarrow \qquad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\, t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A_a\omega e^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega\, t + \phi) - A_a\frac{b}{2m}e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\, t + \phi\,) \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Sabendo $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se $A_a$ e $\phi$ :

$$\phi = arc\tan\,[-(\frac{v_x(0)}{x(0)} + \frac{b}{2m})/\omega]$$

obtemos 2 valores . Temos de escolher qual deles é!

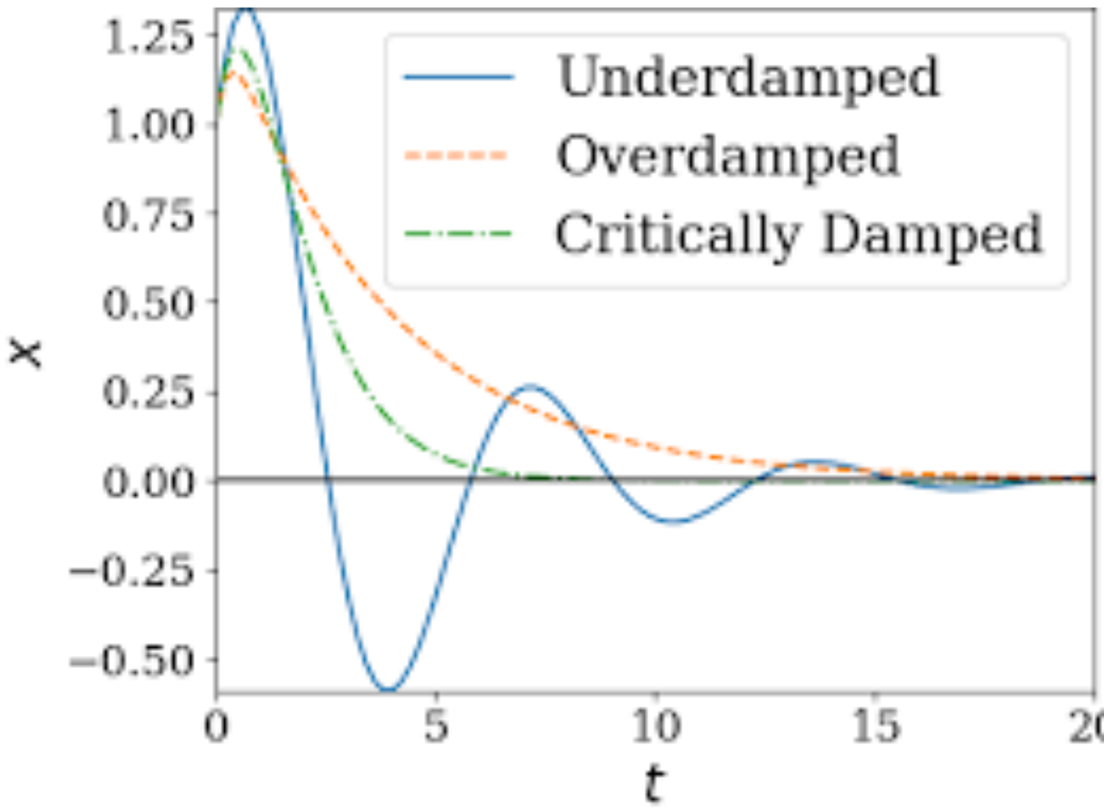
$$A_a = \sqrt{x(0)^{\,2} + ((v_x(0) + x(0)\frac{b}{2m})/\omega)^2}$$

# Oscilador Harmónico Amortecido    Outros casos

## Amortecimento forte   $b > 2\,m\,\omega_0$

Amortecimento tão forte que o corpo vai diretamente para a posição de equilíbrio, sem oscilar

Decaimente exponencial   $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\{Ce^{\omega t} + De^{-\omega t}\}$




## Amortecimento critico (ou excecional)   $b = 2\,m\,\omega_0$

Quando começa o amortecimento forte

Decai o mais rapidamente possível   $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\{C + Dt\}$

# Oscilador Harmónico Amortecido

## Cálculo Numérico

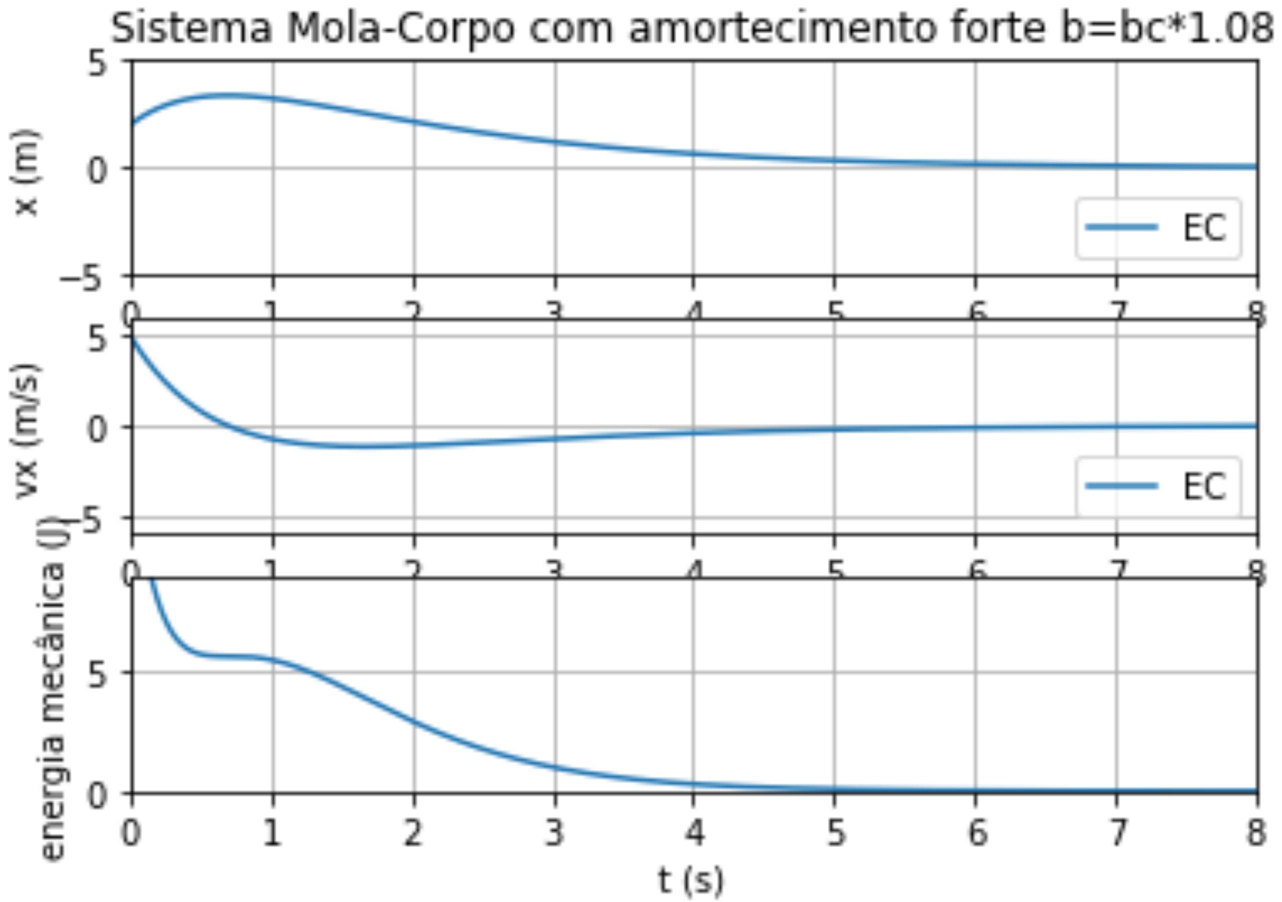
Amortecimento forte: $b > 2\,m\,\omega_0$

$$F_x = -k\,x\ - bv_x \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

$k = 1$ N/m
$m = 1$ kg $\qquad \omega_0 = 1\ \mathrm{rad/s}$
$b_c = 2$ kg/s
$b = \boldsymbol{b_c}\times\mathbf{1.08} = 2.16$ kg/s

$x(0)$=2m e $v_x(0) = 5$m/s

Usando o método de Euler-Cromer obtivemos as soluções:



# Oscilador Harmónico Amortecido

# **Cálculo Numérico**

Amortecimento fraco: $b < 2\,m\,\omega_0$

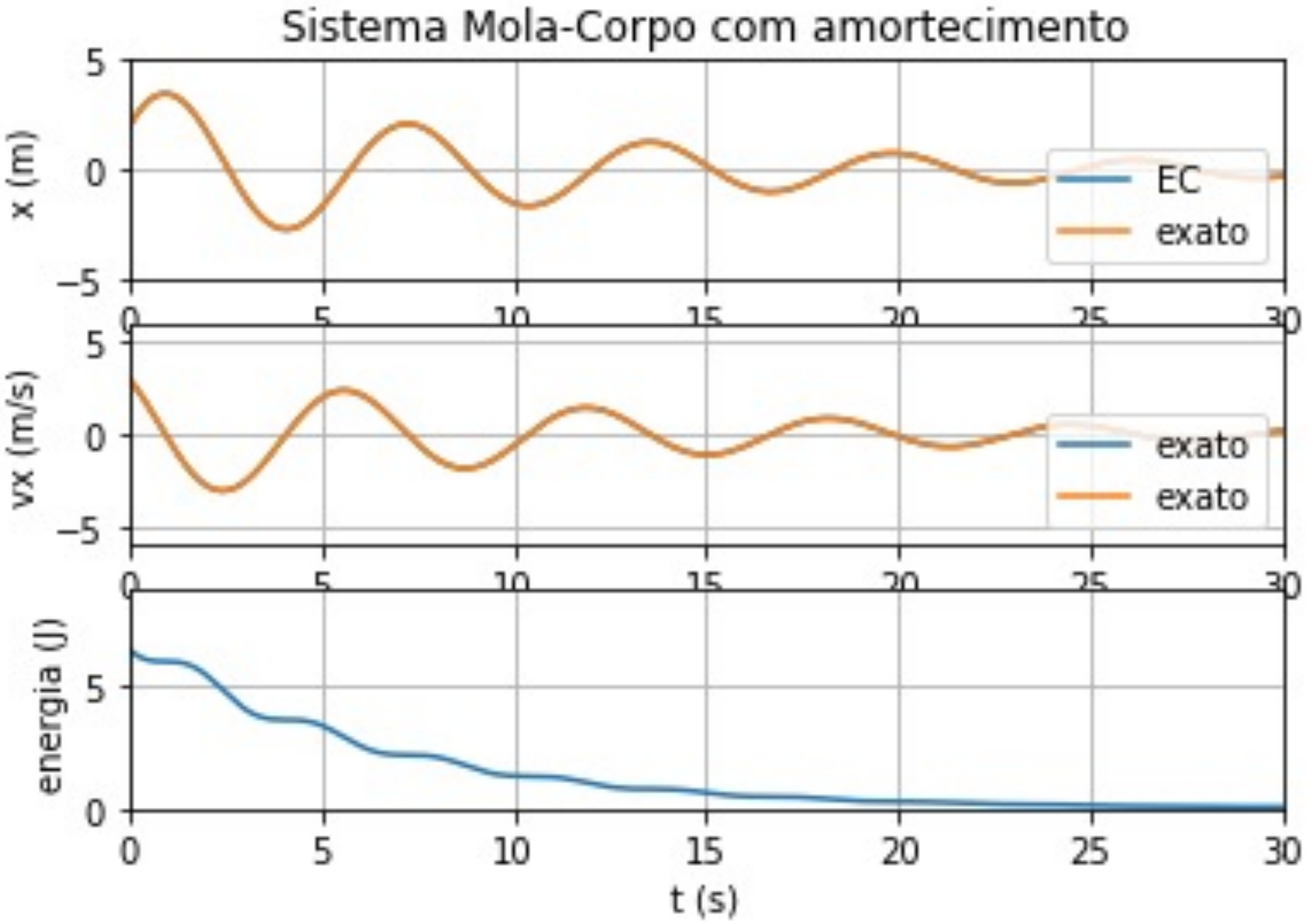
$F_x = -k\,x\ - bv_x \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$

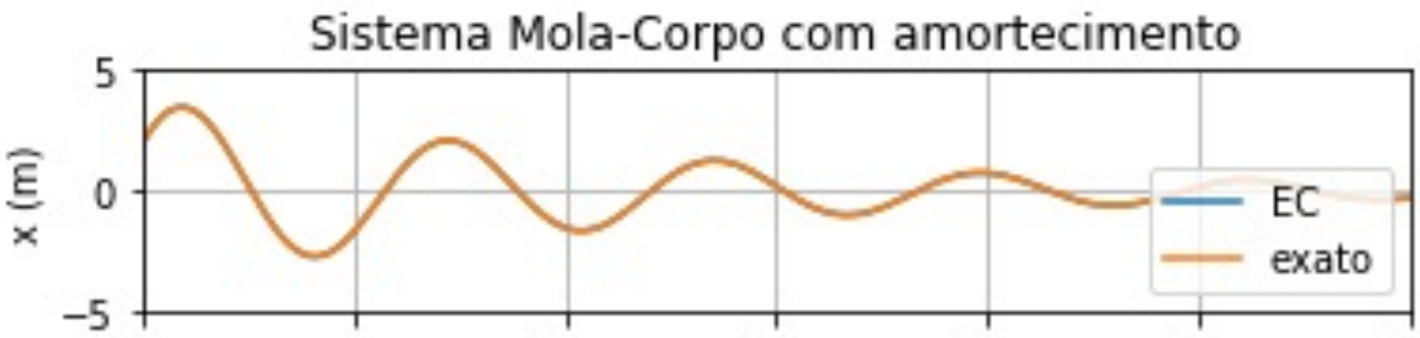
$k = 1$ N/m
$m = 1$ kg $\qquad \omega_0 = 1\ \mathrm{rad/s}$
$b_c = 2$ kg/s
$b = \boldsymbol{b_c}\times\mathbf{0.08} = 0.16$ kg/s

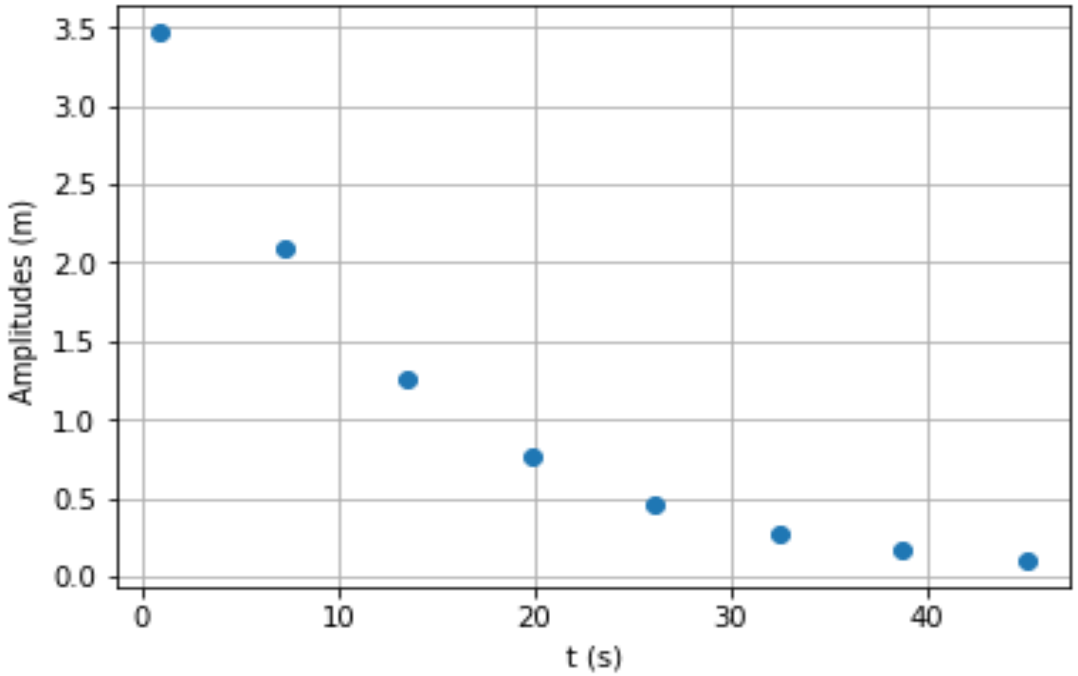
$x(0)$=2m e $v_x(0) = 5$m/s

Do resultado numérico ($\delta t = 10^{-5}$ s)
T = 6.3034 s
$\omega = 0.9968$ rad/s

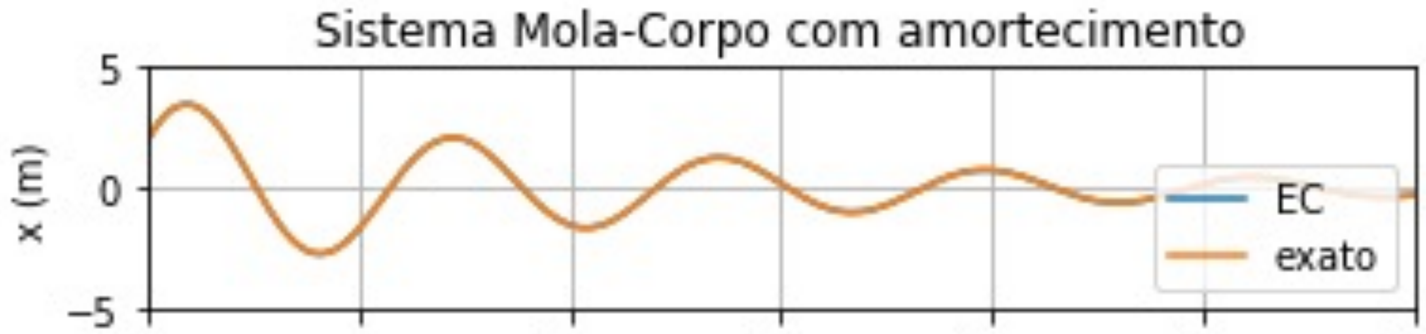
$$\omega^{\,analitico} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = 0.9968 \text{ rad/s}$$

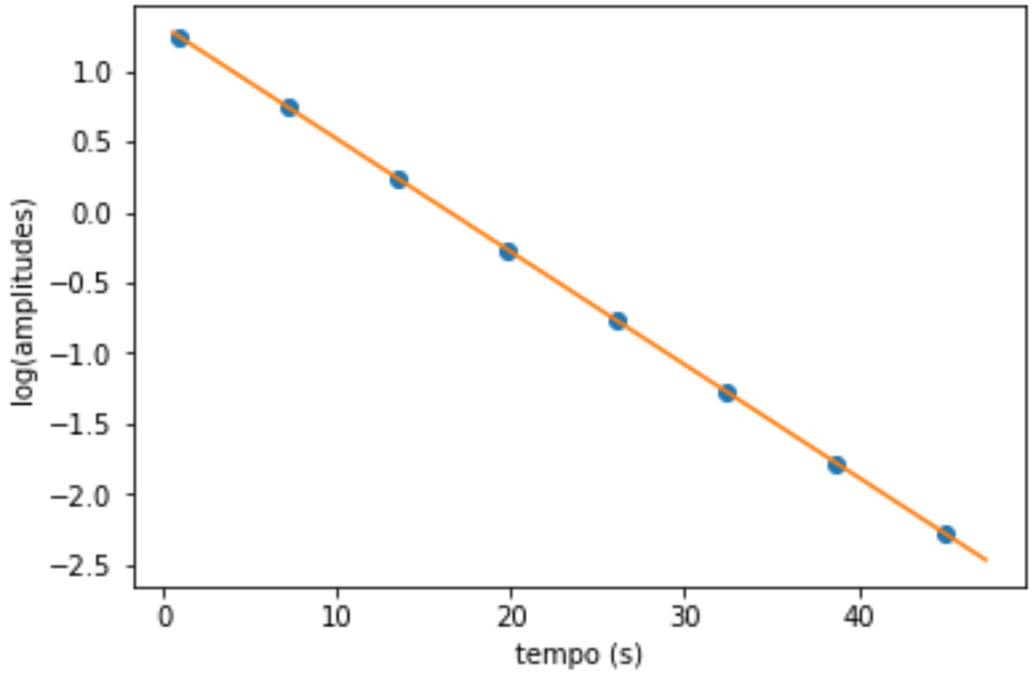





Que lei segue o decréscimo das amplitudes?




Por regressão linear
m = -0.08000031898266281 dm = 1.3765157967774959e-09
b = 1.3180827347694213 db = 3.737587029359997e-08
r**2 = 0.9999999999999983

$$A = e^{b} e^{mt}$$

$$A = 3.736\ e^{-0.0800\ t}\ \mathrm{m}$$

Solução analítica:

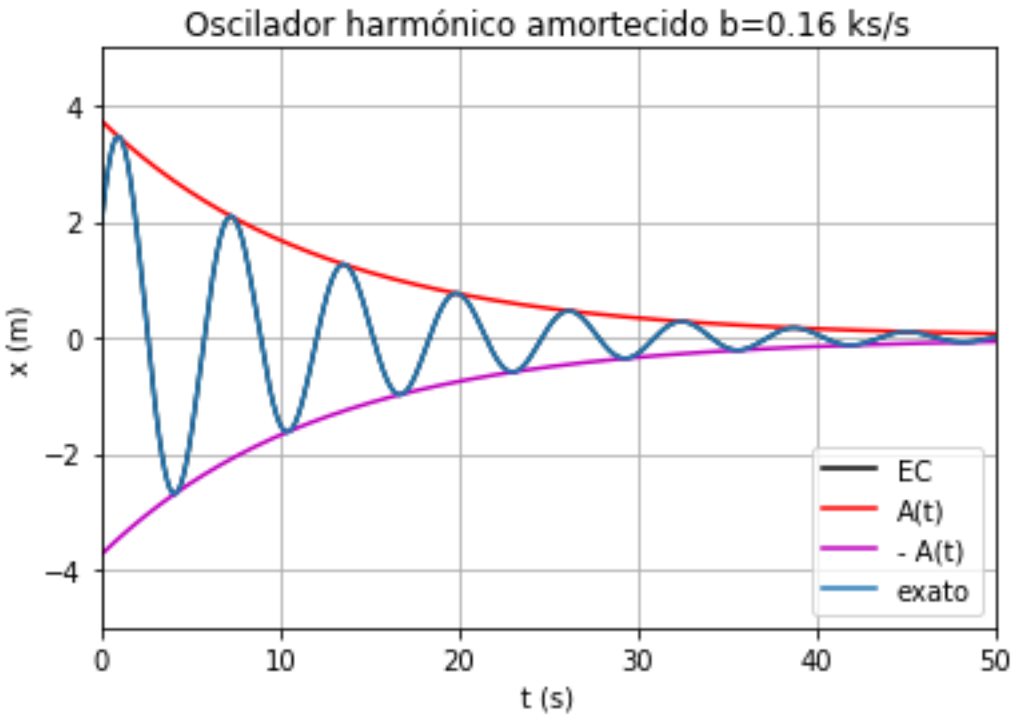
$$A = 3.748\ e^{-0.08\ t}$$

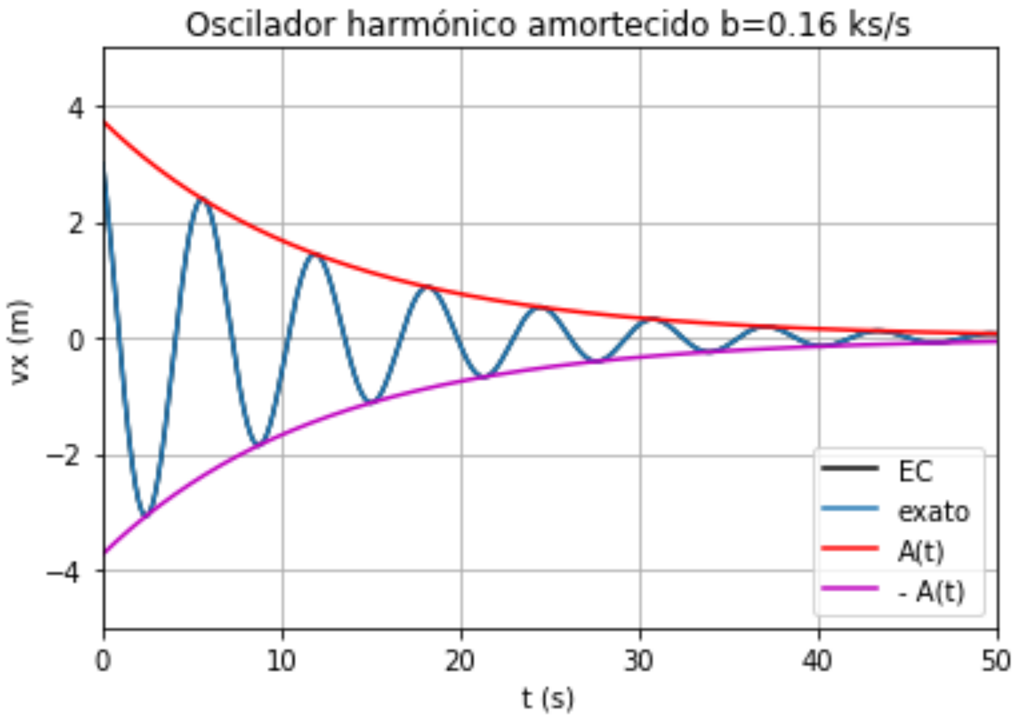
$$A_a = \sqrt{x(0)^{\,2} + ((v_x(0) + x(0)\frac{b}{2m})/\omega)^{2}}$$

$$A(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega\, t + \phi\,)$$

$$v_x(t) = -A(t)\,\left[\omega\sin(\omega\, t + \phi) + \frac{b}{2m}\cos(\omega\, t + \phi\,)\right]$$

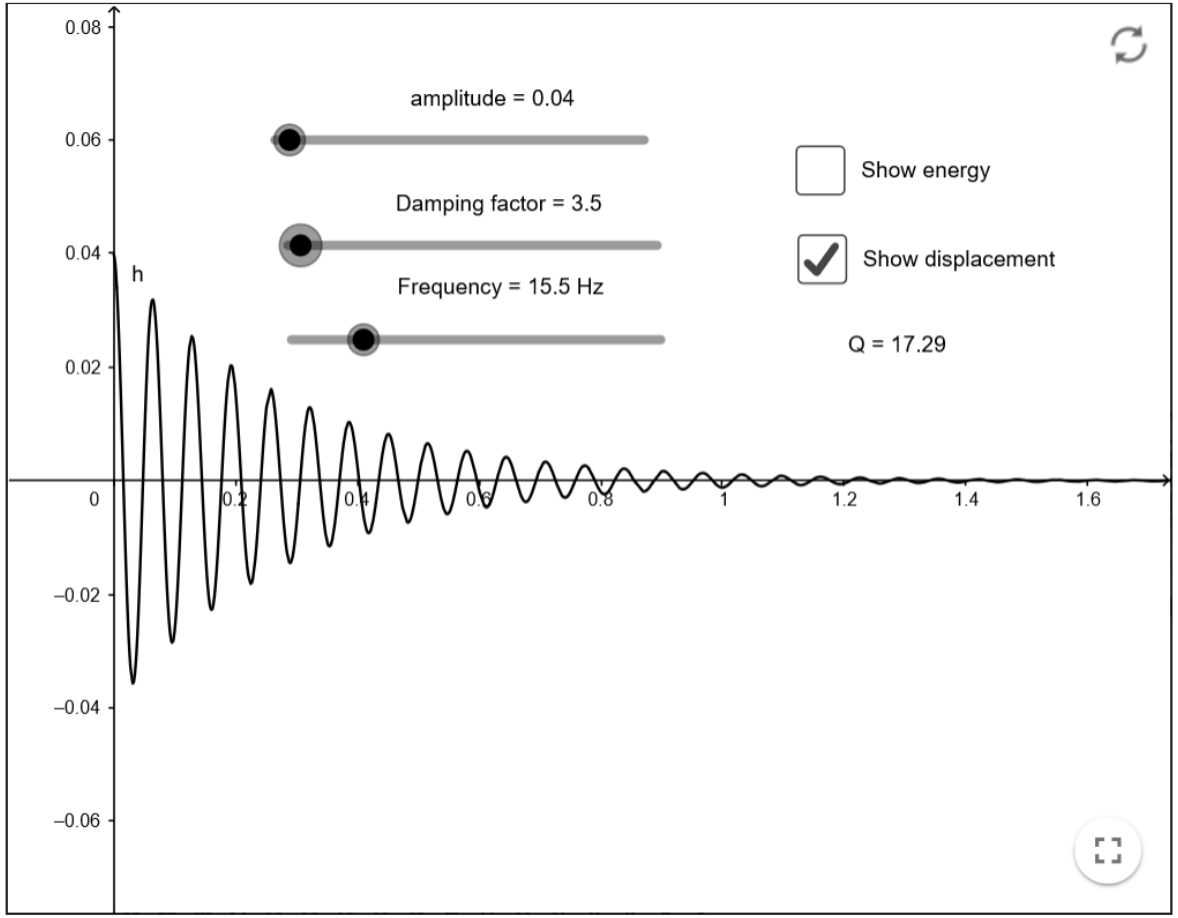


# Damped harmonic motion

**Autor:** Chris Hamper

Vary the damping factor to see the the change in Q value




https://www.geogebra.org/m/ZMjkkEwU

**Problema 7.13**

Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola ($k$ = 100 N/m) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.

b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.

c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento ($b$ = 2 kg/s). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1$ s) seguinte.