Problemas

Capítulo 5 Trabalho e energia

1. Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -\, F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$

em que x é a posição do átomo e b a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal. Se o átomo partir da posição x_0 com velocidade v_{0x}, qual a dependência da velocidade em função da posição? É possível integrar analiticamente e desse modo calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

R: $v_x = \pm\sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\, m}\left[\cos\frac{2\pi x}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right]}$, Não

2 A relação entre a força conservativa e a energia potencial é

$$\begin{cases} F_x = -\frac{dE_p}{dx} \\ F_y = -\frac{dE_p}{dy} \\ F_z = -\frac{dE_p}{dz} \end{cases}$$

Calcule a força associada à energia potencial:

a) elástica $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$

b) gravítica superfície da Terra $E_p = m\, g\, y$

c) elástica do oscilador duplo $E_p = \frac{1}{2} k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2$

d) gravítica $E_p = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|} = -G\frac{m\,M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

e) da carga elétrica q originada pela carga Q, $E_p = -K\frac{q\,Q}{|\vec{r}|}$

R: a) $-kx$ b) $-mg$ c) $-2\,k\,\left(x^2 - x_{eq}^2\right)x$ d) $-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$ e) $-K\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$

3. O método numérico de integração numérica de um integral definido

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

de menor precisão é a aproximação retangular (ver apêndice).

a) Determine como varia o erro de truncatura local com o passo δx.

b) Determine como varia o erro de truncatura global com o passo δx.

R: a) $\mathcal{O}(\delta x^2)$ b) $\mathcal{O}(\delta x)$

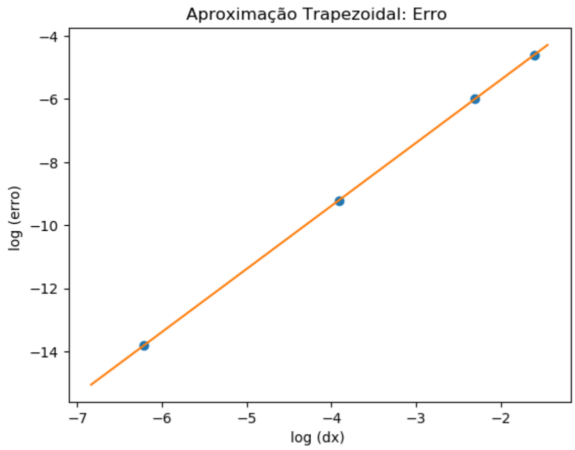
4. Como teste de integração numérica, calcule usando a aproximação trapezoidal o integral

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{4}\,dx$$

que é igual a 1. Use vários passos δx e verifique que o erro é proporcional a δx^2.

R:

δx	Integral	erro
0.2	1.01	0.01
0.1	1.0025	0.0025
0.02	1.0001	0.0001
0.002	1.000001	0.000001



declive=2, $r^2 = 0.9999999999$

5. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.

a) Calcule a energia mecânica em qualquer instante, no caso de não considerar a resistência do ar.

b) Considerando a resistência do ar, calcule a energia mecânica nos três instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 0.4$ s e $t_2 = 0.8$ s.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 0.4$ s e $t_2 = 0.8$ s.

Use a aproximação trapezoidal para calcular os integrais. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A bola de ténis tem a massa 57 g.

R: a) 21.99 J; b) 21.99 J; 17.01 J; 13.61 J; c) 0 J; -4.98 J; - 8.38 J

6. Nas condições do problema 4.6:

Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais: $x_0 = 4$ m e $v_{0x} = 0$.

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações

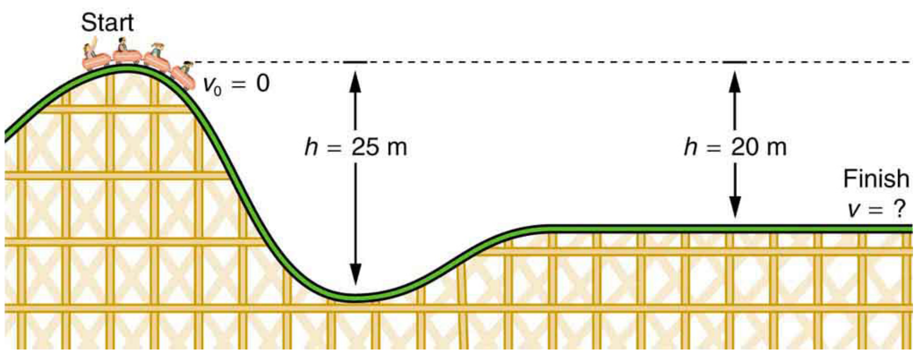
$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer.

7. Se na montanha russa esquematizada na figura abaixo, a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade

a) no ponto mais baixo?

b) na zona plana?



R: $|\vec{v}|^2 = 2\,g\,(y_0 - y)$ a) 22.1 m/s; b) 19.8 m/s

8. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador duplo, com dois pontos de equilíbrio, $x_{eq} = 2$ m. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k(|x| - x_{eq})^2$$

exerce no corpo a força

$$F_x = \begin{cases} -(x - x_{eq}) & x > 0 \\ (-x - x_{eq}) & x < 0 \end{cases}$$

onde $k = 1$ N/m.

a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial.

b) Qual o movimento quando a energia mecânica é 1J?

c) Calcule a lei do movimento, quando a energia total for 0.75 J. Qual a amplitude e a frequência do movimento?

d) Calcule a lei do movimento quando a energia total for 1.5 J? Qual a amplitude e a frequência do movimento?

9. Qual a potência desenvolvida por um ciclista de massa 75 kg para manter a velocidade uniforme, na horizontal,

a) a 30 km/h?

b) a 40 km/h?

c) a 296.010 km/h?

O coeficiente de resistência μ de um piso liso de alcatrão é de 0.004, o coeficiente de resistência do ar é $C_{res} = 0.9$, de área frontal 0.30 m^2 e densidade do ar $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m^3.

R: a) 120 W = 0.163 cv; b) 260 W = 0.353 cv; c) 92177 W = 125 cv,

10. Um ciclista no pelotão varre uma área eficaz 30% inferior à do ciclista à frente do pelotão.

a) Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 40 km/h.

b) Calcule a potência a desenvolver pelos dois ciclistas quando rolarem a uma velocidade de 50 km/h?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

11. Muitos ciclistas amadores conduzem com o tronco levantado. Esta posição aumenta a área de varrimento para o dobro.

a) Calcule a potência a desenvolver pelo ciclista se a velocidade for 30 km/h.

b) E se a velocidade for de 40 km/h, qual a potência desenvolvida pelo ciclista?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

12. Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

a) Qual a sua velocidade terminal?

b) Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?

c) Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

R: a) 11.63 m/s; b) 23.66 s; c) 180.9 s = 477.3 s = 3’ 0.9”

13. O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de 5°.

a) Quanto tempo demora a percorrer 2 km?

b) Qual a sua velocidade terminal?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.

R: a) 4.21 m/s; b) 477.3 s = 7’ 57.3”

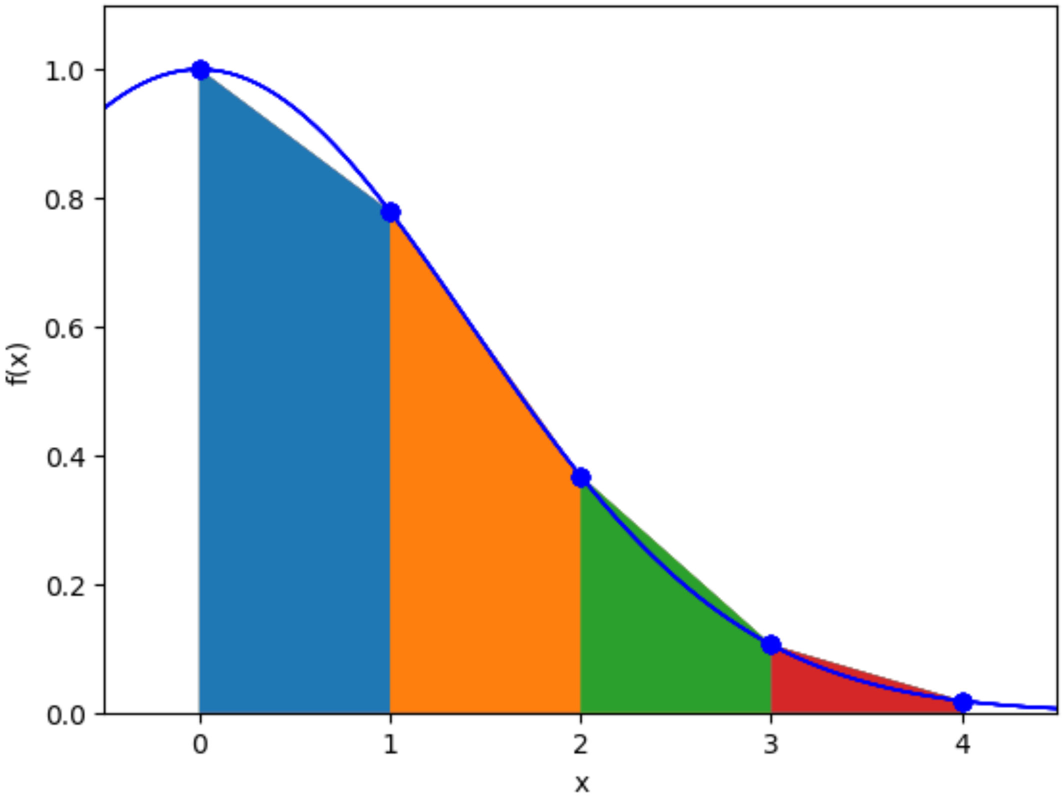
Integração numérica a 1 dimensão:

Quando temos uma função $f(x)$ expressa só em pontos x_i, de í**ndices** $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3, \dots, n}$, igualmente espaçados por δx, num total de $\boldsymbol{n+1}$ **elementos.** O integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos a e b

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

e onde $n = (b-a)/\delta x$ e $x_i = a + i\,\delta x$, obtêm-se facilmente por integração numérica.

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos a e b. Na figura abaixo $a = 0$ e $b = 4$.



Essa áreas pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Essa área pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais. Assim $\delta x = (b-a)/n$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$

Aproximação retangular: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \approx f(x_i)\,\delta x$

$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x =$

$$= \delta x \times \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Em python podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

Integral = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))

Note que temos $\boldsymbol{n+1}$ elementos da função.

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de $\boldsymbol{n+1 = n_{dim}}$

a integração trapezoidal é calculada por

integral = dx * ((f[0]+f[n_{dim}-1])*0.5+np.sum(f[1: $n_{dim} - 1$]))

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\,\delta x \right)_{ap.\ trap} \right|$$

A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de x_i

$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \mathcal{O}((x - x_i)^3)$

Subst. em

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \mathcal{O}((x - x_i)^3) \right] dx$$

$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \mathcal{O}((x - x_i)^3) \right] dx$

$$= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

$$= f(x_i)\,\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

E, por sua vez

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

o que faz

$$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \left.\frac{1}{2}\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \left.\frac{1}{4}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\,\delta x \right)_{ap.\ trap} \right|$$

$$= \left| f(x_i)\,\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3) - \left(\left(f(x_i) + \left.\frac{1}{2}\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \left.\frac{1}{4}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \right) \delta x \right) \right|$$

$$= \mathcal{O}(\delta x^3)$$

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da $\mathcal{O}(\delta x^3)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais

$$n\,\mathcal{O}(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x}\,\mathcal{O}(\delta x^3) = \mathcal{O}(\delta x^2).$$