



Notas e Problemas de
Modelação de Sistemas Físicos
usando *Python*

Vitor Torres

2022
Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Índice:

1. Física: Medição e modelação.
2. Movimento a uma dimensão.
3. Forças e vetores
4. Movimento no plano e no espaço
5. Leis de Conservação: Energia e Potência.
6. Oscilações Mecânicas e Elétricas
7. Osciladores Amortecido e forçados: Ressonância e Caos.
8. Osciladores acoplados: Modos Normais e Ondas

Formulário

Soluções dos problemas

Capítulo 1

Física: Medição e modelação

Sumário

Física: Observação, experimentação e modelação-teorização.

Erros de medição, algarismos significativos

Sistema de unidades. Conversão de unidades.

Dimensões de grandezas físicas.

Relação linear entre duas grandezas. Regressão Linear

Lei de potência e lei exponencial.

Python:

- Usar os pacotes numpy e matplotlib
- Executar somas e produtos.
- Usar ciclos.
- leitura de ficheiros.
- Usar ‘arrays’.
- Produzir gráficos.

Métodos Numéricos:

- Método dos mínimos quadráticos

1.1 Introdução

A ciência física procura identificar um número limitado de leis fundamentais que governam os fenómenos naturais. Está baseada em observações experimentais, medições quantitativas e a criação de modelos e teorias.

Medição de uma quantidade:

Medidas estão sempre sujeitas a uma indeterminação (erro) (a desenvolver nas aulas práticas). A medição requer:

Instrumentos de medição

- Medidas Padrão
- Sistema de unidades (e conversão entre unidades)
- Indicação das grandezas (muito grande e muito pequeno)

A análise dos dados medidos pode fornecer relações matemáticas entre as quantidades medidas

Modelação:

Modelação significa construir um modelo: um conjunto de equações matemáticas que sejam capazes de representarem com exatidão os fenómenos naturais (em estudo).

A importância da modelação deve-se a poder simular fenómenos que não são observados por serem caros, ou demorados, ...

Quantidades Físicas:

Cada medição tem associado uma quantidade física.

Por exemplo o comprimento (de um objeto).

Em Mecânica temos 3 quantidades básicas:

- Comprimento (L)
- Massa (M)
- Tempo (T)

Todas as outras quantidades físicas estão relacionadas com estas três últimas.

Sistema Internacional de Unidades (SI):

Quantidades básicas

Quantidade	unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampere	A

Outras quantidades importantes

Quantidade	unidade	Símbolo
Velocidade	metro/segundo	m/s
Aceleração	metro/segundo ²	m/s ²
Força	kilograma × metro/segundo ² = newton	N
Energia	kilograma × metro ² /segundo ² = joule	J
Potência	kilograma × metro ² /segundo ³ = watt	W

Em cálculo científico usam-se sistemas adequados, em que as constantes mais usadas tomam o valor da unidade. Assim evitam-se cálculos, propagação de erros e reduz-se o tempo de cálculo.

Exemplos:

- Sistema astronómico (Para o sistema solar, onde a unidade de comprimento é a distância média da Terra ao Sol)
- Sistema atómico de unidades (Para cálculos envolvendo átomos, onde a unidade de comprimento é a distância mais provável do eletrão ao protão no estado fundamental de um átomo de hidrogénio, o raio de Bohr).

	Fator	Prefixo	Símbolo
SUBMULTÍPLOS	$10^{-24} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$	yocto	y
	$10^{-21} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$	zepto	z
	$10^{-18} = 0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$	ato	a
	$10^{-15} = 0,000000000\ 000\ 001$	fento	f
	$10^{-12} = 0,000000000001$	pico	p
	$10^{-9} = 0,000000001$	nano	n
	$10^{-6} = 0,000001$	micro	μ
	$10^{-3} = 0,001$	milli	m
	$10^{-2} = 0,01$	centi	c
	$10^{-1} = 0,1$	deci	d
MÚLTIPLOS	$10^0 = 1$		
	$10^1 = 10$	deca	da
	$10^2 = 100$	hecto	h
	$10^3 = 1\ 000$	quilo	k
	$10^6 = 1\ 000\ 000$	mega	M
	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$	giga	G
	$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$	tera	T
	$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	peta	P
	$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	exa	E
	$10^{21} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	zetta	Z
	$10^{24} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$	yotta	Y

Conversões de unidades:

Muitas vezes é necessário converter unidades de sistemas diferentes ou no mesmo sistema

Exemplos:

kg em g:	$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$
cm em m:	$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$
pés em cm:	$1 \text{ ft} = 12 \text{ in} = 30,48 \text{ cm}$
polegadas em cm:	$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$
milhas em km:	$1 \text{ mi} = 1,609344 \text{ km}$
km/h em m/s:	$1 \text{ km/h} = 0,27777\ldots \text{ m/s}$

Como se converte:

$$v = 60 \text{ km/h} \quad \text{em m/s?}$$

É substituir km/h pelo seu valor em m/s:

$$v = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 60 \times 0,27777 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16,6666 \text{ m/s}$$

Dimensão:

A natureza física é indicada pela sua dimensão.

Exemplo: Distância entre dois pontos.

Pode ser medida em metros, cm, pés, polegadas, ..., mas é sempre um comprimento (L).

As dimensões das quantidades básicas:

- Comprimento (L)
- Massa (M)
- Tempo (T)

As outras quantidades (não básicas) são compostas por estas:

- Velocidade v dimensão: $[v] = L/T$
- Aceleração a $[a] = L/T^2$
- Área A $[A] = L^2$
- Força F $[F] = ML/T^2$

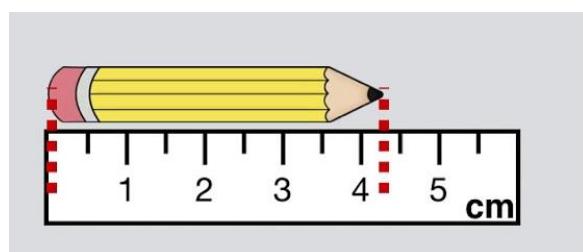
As equações respeitam a igualdade dimensional. Se tivermos a equação $A = B$, então A e B têm a mesma dimensão

Exemplo: Movimento uniformemente acelerado $x = \frac{1}{2}a t^2$

Análise dimensional: $[x] = [a] [t^2]$
 $L = \frac{L}{T^2} T^2$ correto! $L = L$

Observação e medição

Caso de 1 medição: Erro instrumental



O valor da medição de uma quantidade (como também a representação digital de um número real) está sempre afetado de uma incerteza,

À quantidade que se mede, na figura o comprimento do lápis, c , associamos ao valor que melhor se estima, \bar{c} , um outro valor, Δc , chamado erro ou indeterminação, tal que se tem a certeza que:

o comprimento c está compreendido entre $\bar{c} - \Delta c$ e $\bar{c} + \Delta c$

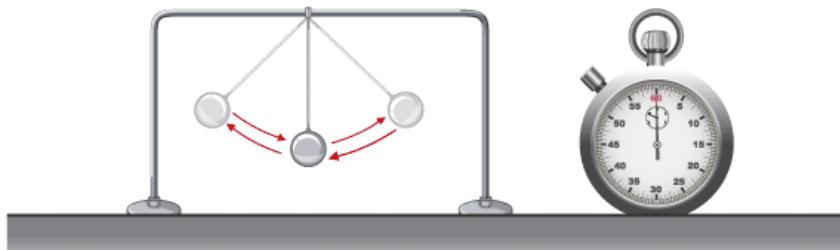
Pela figura tem-se a certeza que $4,0 \text{ cm} < c < 4,5 \text{ cm}$
e pode-se considerar $\bar{c} = 4,25 \text{ cm}$ e $\Delta c = 0,25 \text{ cm}$

O comprimento do lápis indica-se $c = 4,3 \pm 0,3 \text{ cm}$.

De um modo mais geral $c = \bar{c} \pm \Delta c$.

Este erro considerado é um exemplo de um **erro de leitura ou instrumental**.
Instrumentos de escala contínua: O erro é metade da menor divisão da escala
Instrumentos de escala digital: O erro é uma divisão da escala.

Caso de 10 medições ou mais da mesma quantidade: Erro de observação



Em muitas experiências as medições são realizadas por um instrumento preciso. Em cada medição da mesma quantidade obtém-se um valor diferente. Um bom exemplo é o caso de medir o período T de oscilação de um pêndulo.

Se temos N medições do período, $T_i, i = 1, 2, \dots, N$,

O valor médio é $\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$

e o desvio padrão $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}$,

O valor do período indica-se por

$$T = \bar{T} \pm s$$

Este é um **erro de observação**.

Erro de uma medição

Os erros de leitura e os erros de observação são independentes. Como erro a associar ao valor, toma-se como **erro o maior destes dois erros**.

Numa experiência podem ser cometidos outro tipo de erros. Por exemplo uma experiência mal desenhada, instrumentos não calibrados, ...

Precisão e Exatidão.

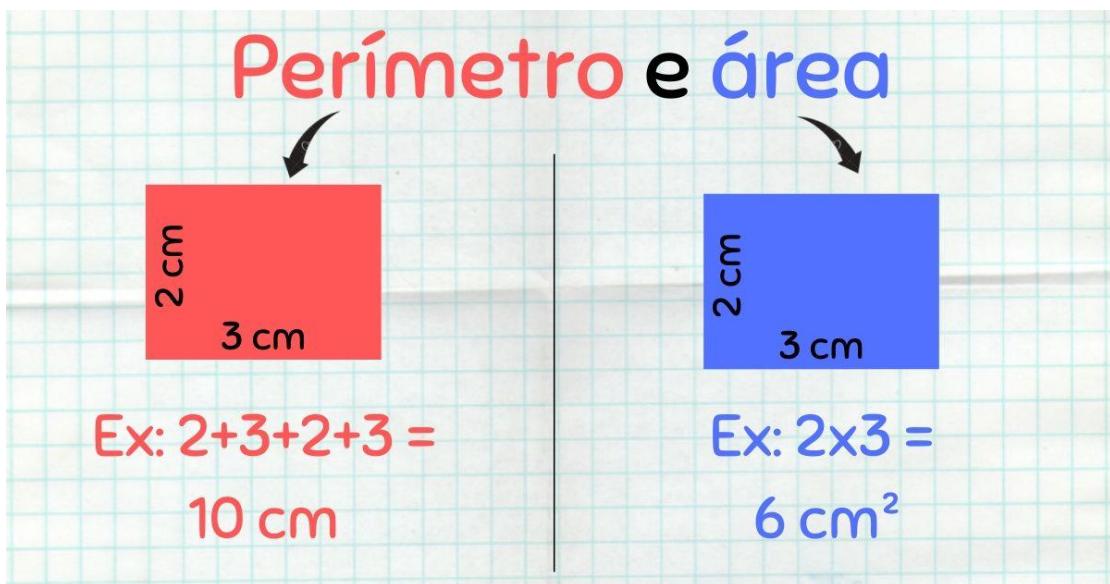
Precisão mede o grau de variação das medições da mesma quantidade obtido na experiência. Se a variação for pequena, tem-se precisão elevada. Pode-se relacionar com o erro relativo

$$\text{erro relativo} = \left| \frac{\Delta c}{c} \right|$$

A precisão é tanto maior quanto o erro relativo for menor.

A exatidão de uma quantidade física obtida numa medição mede a proximidade do valor medido e do valor correto. Quanto menor for a diferença entre estes últimos dois valores maior é a exatidão.

Erros de quantidades calculadas



Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas? Por exemplo: O perímetro e a área de um retângulo?

Para simplificar, vamos considerar a soma de duas parcelas: largura, L , e profundidade, P ,

$$S = L + P$$

Se $L = 3,0 \pm 0,1$ cm

e $P = 2,0 \pm 0,1$ cm

temos $S = 5,0$ cm, mas qual o erro ΔS que a afeta? Ou seja, qual o erro tal que $S = (L + P) \pm \Delta S$ abrange os valores mínimo e máximo possíveis?

Ora, o valor mínimo de $S = 5,0 - (\Delta L + \Delta P)$

e o valor máximo de $S = 5,0 + (\Delta L + \Delta P)$

o erro será $\Delta S = \Delta L + \Delta P$

O mesmo aplica-se à **subtração** de duas parcelas, $D = L - P$
 $\Delta D = \Delta L + \Delta P$

E o **produto** de 2 quantidades? Exemplo, a área do retângulo?

$$A = L \times P$$

O erro é dado por $\left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta P}{P} \right|$

E $\Delta A = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| |A| + \left| \frac{\Delta P}{P} \right| |A|$

Tem-se uma expressão igual para a **divisão** de duas quantidades.

Para uma quantidade $F = F(x, y, \dots)$ o erro é

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$

Note que a expressão envolve derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \dots$

Derivada Total e Parcial de uma função

A derivada total ($\frac{d}{dx}$) da função $f(x) = 4x^2$?

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = 8x$$

A derivada parcial ($\frac{\partial}{\partial x}$) da função $g(x, y) = 4x^2y$?

Por definição:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \delta x, y) - g(x, y)}{\delta x}$$

e $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \delta x, y) - g(x, y)}{\delta x} = 8xy$

Na derivada parcial é como se as outras variáveis (neste caso y) fossem constantes (não variam na definição de derivada parcial). E

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 4x^2$$

Algarismos Significativos de uma quantidade

São os algarismos que se conhecem com certeza (100%) mais o 1º algarismo que é afetado pelo erro

Ex: Comprimento

- | | |
|---|--|
| a) $4,10 \pm 0,02$ m
afeta as centésimas) | possui 3 algarismos significativos (o erro |
| b) $4,100 \pm 0,02$ m
afeta as centésimas) | possui 3 algarismos significativos (o erro |
| c) $4,100 \pm 0,2$ m
as décimas) | possui 2 algarismos significativos (o erro afeta |

Permite escrever os valores de um modo mais simples: Escrever só os algarismos significativos

- | | |
|-----------|------------------------------------|
| a) 4,10 m | possui 3 algarismos significativos |
| b) 4,10 m | possui 3 algarismos significativos |
| c) 4,1 m | possui 2 algarismos significativos |

Em Física $4,10$ m \neq $4,1$ m.

Nas Operações

Produto e divisão: O resultado da operação deve apresentar o número de algarismos significativos igual ao menor dos fatores

ex: Círculo de raio $r = 6,0 \pm 0,1$ cm
de área $A = \pi \times (6,0 \text{ cm})^2 = 113,097 \dots \text{ cm}^2$
mas apresenta-se com 2 algarismos significativos (os mesmos do raio)

$$A = \pi \times (6,0 \text{ cm})^2 = 1,1 \times 10^2 \text{ cm}^2$$

Adição e subtração: O resultado da operação deve apresentar o número de casas decimais igual ao menor número de casa decimais das parcelas.

ex: $23,2 + 5,174 = 28,4$
 $3,4 + 10 = 13$
 $1,0001 + 0,0003 = 1,0004$
 $1,002 - 0,998 = 0,004$

Cálculos intermédios fazem-se com os todos os algarismos (na máquina de calcular ou computador)

Arredondamento: para se apresentar só os algarismos significativos, os valores foram arredondados. Como regra, arredonda-se para o algarismo mais perto. Por exemplo:

28,374 arredondo às décimas, nas décimas 4 está mais perto do valor do que 3. Está mais perto de 28,4 do que 28,3.

15,45 arredondado às unidades está mais perto do 5 do que do 6. Está mais perto de 15 do que de 16.

Quando esta regra não puder ser aplicada, por exemplo arredondar 87,5 às unidades, não se sabe se deve ser 87 ou 88. Nestes casos, escolhe-se com o algarismo inteiro ímpar mais próximo. O valor arredondado seria 87. Poderão praticar no sítio <https://www.calculatorsoup.com/calculators/math/roundingnumbers.php>.

1.2 Modelos simples baseados em dados experimentais: Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Quando se tem um conjunto (x_i, y_i) de N medições ($i = 1, 2, \dots, N$), queremos saber que tipo de relação existe entre as quantidades x e y . A relação mais simples é a linear. Qual a melhor reta $y = mx + b$ que se ajusta aos pontos (x_i, y_i) ? Ou seja, qual o declive m e a ordenada na origem b , que melhor aproxima a reta $y = mx + b$ aos valores medidos (x_i, y_i) ? O método dos Mínimos Quadráticos oferece o ajuste linear que apresenta a menor diferença entre os valores medidos (x_i, y_i) e os estimados pela reta $y = mx + b$.

Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Dados experimentais: $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$

Pontos da reta: (x_i, p_i) dados pela reta $p_i = mx_i + b$

Não se conhece m e b !

Mínimo de $S(m, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - p_i)^2$

é dado pelas condições:

$$\frac{\partial S(m, b)}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial S(m, b)}{\partial b} = 0$$

Se se considerar que os erros que afetam os valores de y são iguais, as expressões que o método fornece são:

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}$$

O coeficiente de determinação r^2 é tal que quando ~ 1 indica um ótimo ajuste, enquanto que ~ 0 indica que o modelo não é linear, é expresso por

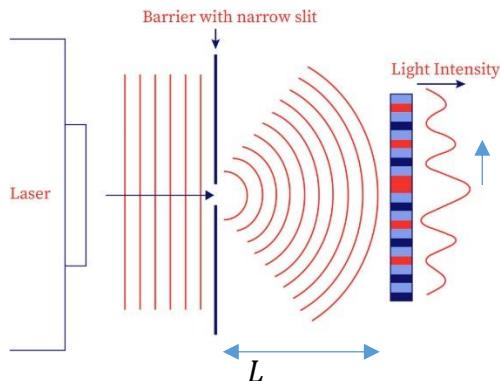
$$r^2 = \frac{(N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i)^2}{[N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2] [N \sum_{i=1}^N y_i^2 - (\sum_{i=1}^N y_i)^2]}$$

E os erros que afetam o declive e a ordenada na origem são:

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}$$

$$\Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}.$$

Exemplo, problema 1.5: Numa experiência de difração de um feixe de luz por uma fenda única foram medidos 7 pares de valores da distância da fonte de luz ao alvo, L , e a distância entre máximos luminosos consecutivos (entre a mancha vermelha central e as outras manchas vermelhas) da figura de difração, X ,



foram encontradas os pares de valores:

L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

Resolução: Vamos escrever um programa em python que calcule as somas necessárias do método dos mínimos quadráticos. Podemos usar os pacotes numpy, para os cálculos e o pacote matplotlib para construir um gráfico.

Essas somas necessárias são

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = 2322.4; \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1286.0; \quad \sum_{i=1}^N y_i = 13.5;$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = 221719.5; \sum_{i=1}^N y_i^2 = 24.33;$$

As quais substituídas nas várias expressões produzem os seguintes valores

$$m = 0.01015505; \Delta m = 0.000162973$$

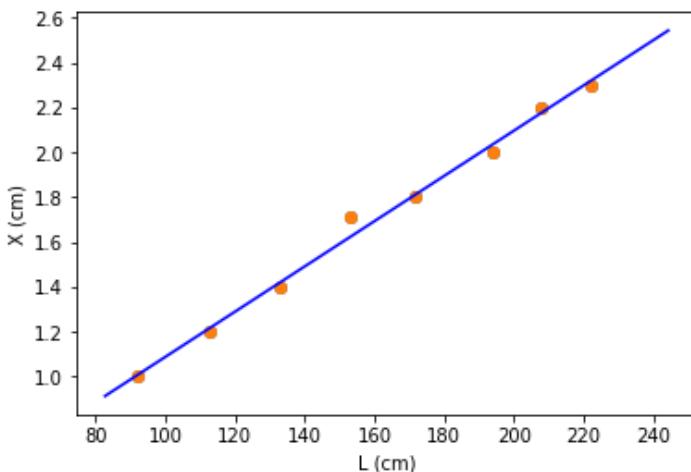
$$b = 0.05507544; \Delta b = 0.02713077$$

$$r^2 = 0.99845714$$

No gráfico abaixo estão os pontos experimentais e a reta

$$\text{de declive } m = 0.0102 \pm 0.0002 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = 0.0102 \pm 0.0002$$

e de ordenada na origem $b = 0.06 \pm 0.03 \text{ cm}$.



O valor de r^2 é muito próximo de 1, o que revela haver um ajuste linear muito bom entre as quantidades L e x .

O modelo linear entre as quantidades L e x permite realizar previsões:

Interpolação: para $L_{\text{mínimo}} < L < L_{\text{máximo}}$, por exemplo para $L = 165.0 \text{ cm}$, obtém-se o valor $x_{\text{previsto}} = 1.7 \text{ cm}$.

Extrapolação: para $L < L_{\text{mínimo}}$ ou $L > L_{\text{máximo}}$, por exemplo $L = 25.0 \text{ cm}$, obtém-se o valor de $x_{\text{previsto}} = 0.3 \text{ cm}$.

O valor interpolado deverá estar correto. O modelo linear é fiável para os valores entre os extremos das quantidades. Contudo não temos confiança no resultado extrapolado, pois não temos medições perto do valor considerado. Na realidade o modelo linear não está validado para valores de L pequenos.

Lei de Potência $y = cx^n$

A função logarítmica goza das seguintes propriedades:

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

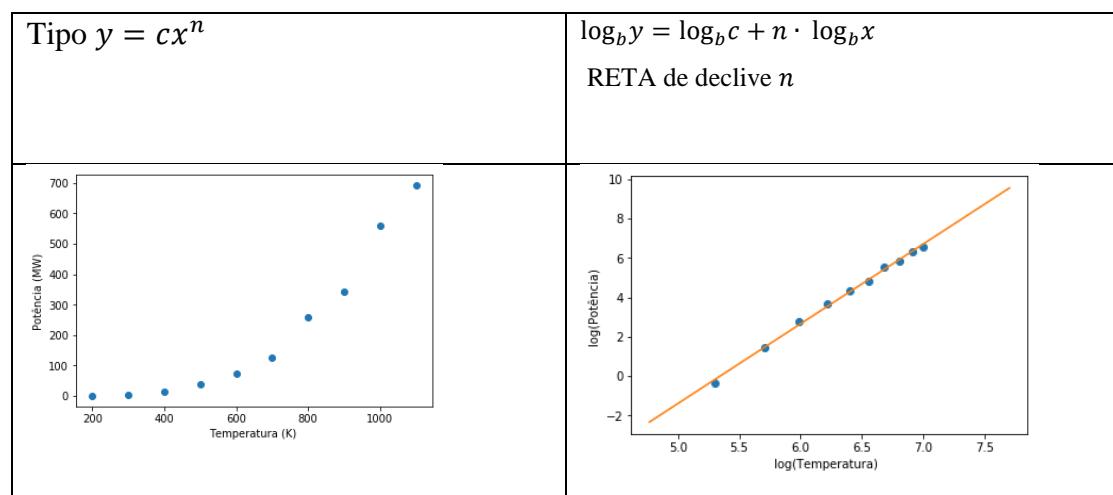
$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Ao aplicar a função logarítmica à relação $y = cx^n$ temos

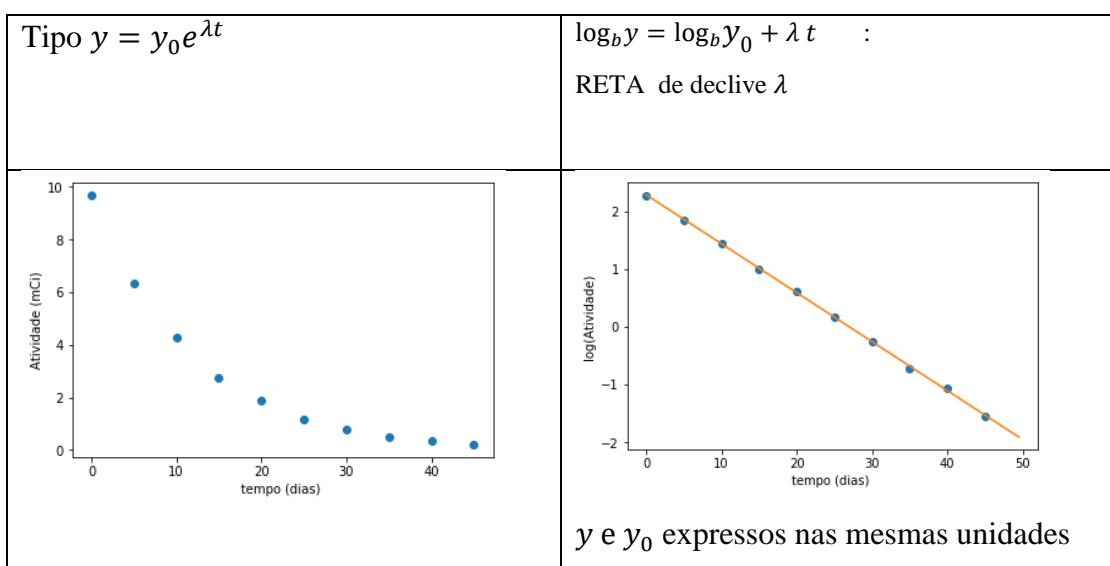
$$\log_b y = \log_b c + n \cdot \log_b x$$

Que é a expressão de uma reta de declive n e de ordenada na origem $\log_b c$, em que as abcissas é $\log_b x$ e as ordenadas $\log_b y$. Se um conjunto de pares de medições obedecerem à lei de potência $y = cx^n$, quando se fizer um gráfico ($\log_b x$, $\log_b y$) deverão os pontos se apresentarem numa reta aproximada. Assim poderemos aplicar de novo o método dos mínimos quadráticos e obter os parâmetros da lei de potência (n, c).



Lei Exponencial $y = y_0 e^{\lambda t}$

A lei exponencial também pode apresentar-se numa forma linear se aplicarmos logaritmos $\log_b y = \log_b y_0 + \lambda t$. Esta expressão é da forma de uma reta de declive λ e de ordenada na origem $\log_b y_0$. Se apresentarmos os pontos experimentais num gráfico $(t, \log_b y)$ teremos uma reta se os pontos experimentais obedecerem à lei exponencial. Assim poderemos aplicar de novo o método dos mínimos quadráticos e obter os parâmetros da lei de potência (λ, y_0) .

**Linearização de uma expressão:** $y^m = c x^n + b$

De igual modo se a lei for uma relação entre potências nas abscissas e nas ordenadas, a expressão pode ser transformada numa reta se se fizer: $\begin{cases} y^m = Y \\ x^n = X \end{cases}$

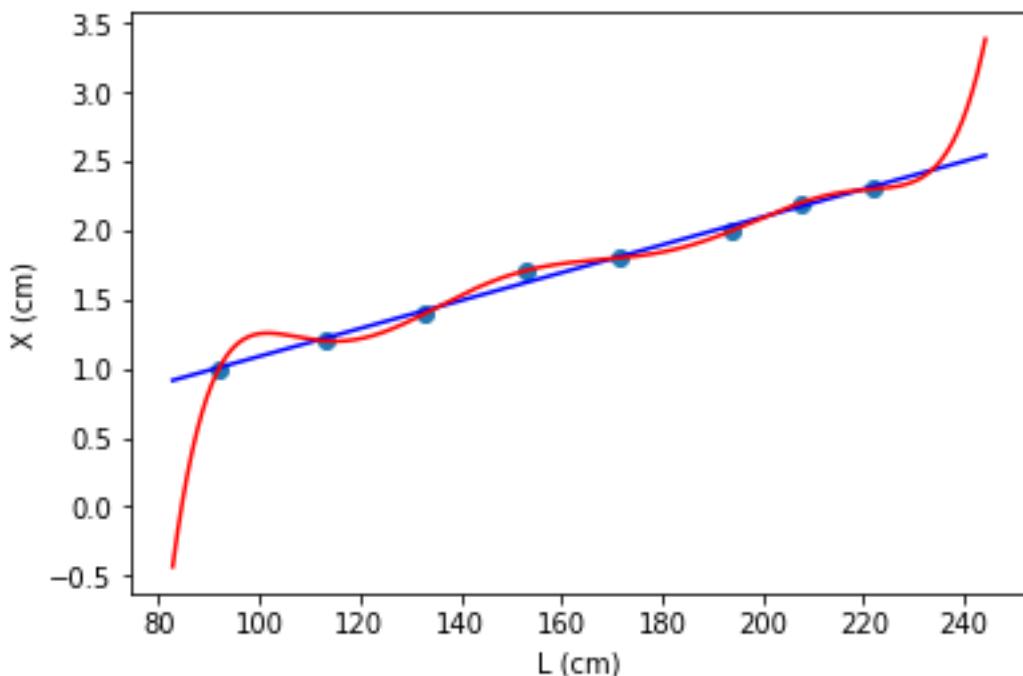
Obtendo-se

$$Y = c X + b, \text{ que é a equação da reta.}$$

Note que m e n podem ser negativos

Modelação de dados experimentais

Voltemos ao exemplo da difração da luz por uma fenda. A reta obtida pelo método dos mínimos quadráticos concorda muito bem com os pontos experimentais. Mas se o ajuste fosse realizado por um polinómio? A figura abaixo tem os pontos experimentais e os ajustes à reta (a azul) e a um polinómio de grau 7 (a vermelho). O ajuste dos pontos experimentais a uma reta é muito



A amarelo: $y = m x + b$ $r^2 = 0.990$

A verde: $y = c_7 x^7 + c_6 x^6 + c_5 x^5 + c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + m x + b$

A função polyfit(x,y,n) do pacote numpy de python faz a regressão linear como também o ajuste a um polinómio de grau n.

Qual a curva que melhor reproduz os dados experimentais? Qual se aceita como modelo? A reta ou o polinómio de 7º grau?

Um polinómio de grau n (ou superior) ajusta-se perfeitamente ao mesmo número n de dados experimentais. Mas será por isso que é um bom modelo?

Se a relação for mesmo linear, o afastamento dos dados experimentais à reta é devido a erros associados à medição.

O modelo do polinómio de grau 7 apresenta na:

- Interpolação ‘parece’ pior do que se usar o modelo linear. No gráfico pode ver a diferença de valores que para $L=100$ cm os dois modelos preveem,

- Extrapolação os resultados são muito diferentes do modelo linear e dos pontos experimentais mais próximos,

e também torna muito difícil a ligação do modelo de polinómio de grau 7 a teorias mais completas.

Com estes pontos experimentais, o modelo linear é preferível a outro modelo.

Análise de Dados

Com um conjunto de medições é aconselhável fazer os 3 tipos de gráficos

(x, y)

(log x, log y)

(x, log y)

Devido à digitalização dos dados, e ao software atual, é muito fácil e rápido obter sem demora estes três gráficos.

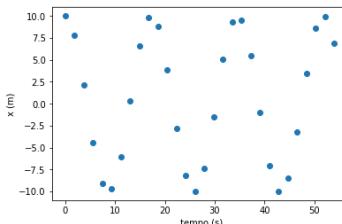
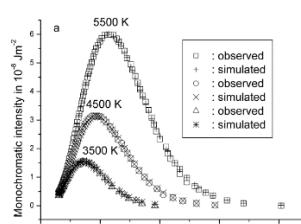
Outras leis

Existem casos de dados experimentais que não se podem modelar por uma reta, lei de potência ou exponencial. Por exemplo:

- Quando os pontos experimentais apresentam vários máximos e mínimos.

Provavelmente funções periódicas são mais adequadas para o ajuste (a fazer mais tarde).

- Quando os pontos experimentais podem apresentar formas ‘estranhas’. Por exemplo a radiação eletromagnética do corpo negro, na figura abaixo.

Dados a modelar por funções periódicas (a fazer mais tarde)	Radiação do corpo negro: Dados a modelar por funções ‘estranhas’
	 Figure 2
	Expressão de Planck $\rho(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$ Parâmetro a ajustar: $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $T = \text{temperatura}; f = \text{frequência}; c = \text{velocidade da luz no vácuo}; k = \text{constante de Boltzmann}$

Bibliografia

Serway, cap. 1

Sørensen, cap. 3

Garcia, cap.5.

John V. Guttag, Introduction to Computation and Programming Using Python, 2013,
2ª edição, MIT Press, cap. 15.

https://www.webassign.net/question_assets/unccolphysmech11/measurements/manual.html

Problemas

1. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 25 \pm 1 \text{ cm}$$

$$Q = 10 \pm 1 \text{ cm}$$

- a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + Q$
- b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = P - Q$
- c) Calcule o produto das duas quantidades $M = P Q$

2. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 15.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$Q = 14.9 \pm 0.3 \text{ cm}$$

- a) Calcule a soma das duas quantidades $S = P + Q$
- b) Calcule a diferença das duas quantidades $D = P - Q$
- c) Calcule o erro relativo da diferença D

3. Encontre as derivadas parciais das funções

$$h(x, y) = 8x + 10x^2y + y^2 \quad \text{e} \quad p(x, y, z) = -4xy + 10x^2yz + y^2 + yz$$

a) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$

b) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}$

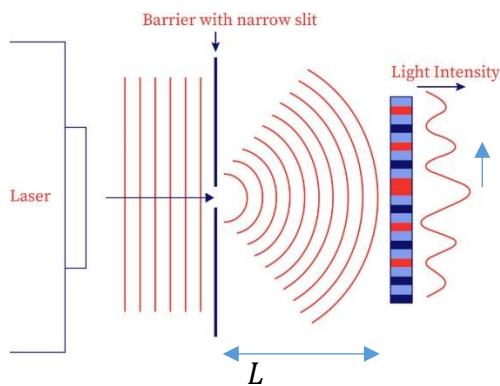
c) $\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x}$

4. Um carro americano segue à velocidade de 85,0 milhas/hora. Passa por uma estrada com o limite de velocidade 50 km/h.

- a) Está o carro a exceder o limite de velocidade?
- b) Expresse a velocidade do carro em m/s.

Note: 1 milha = 1609 m

5. Numa experiência de difração de um feixe de luz por uma fenda única foram medidos 7 pares de valores da distância da fonte de luz ao alvo, L , e a distância entre máximos luminosos consecutivos (entre a mancha vermelha central e as outras manchas vermelhas) da figura de difração, X ,



foram encontradas os pares de valores:

L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

- Comece por representar os dados experimentais num gráfico.
- Calcular as somas das expressões do método dos mínimos quadráticos.
- De seguida calcule o declive, a ordenada na origem e o coeficiente de determinação ou de correlação r^2 .
- faça um gráfico com os pontos experimentais e a reta cujos parâmetros m e b calculou anteriormente.
- Interpole o valor de X , quando $L = 165.0$ cm. Use a reta determinada pela regressão linear.
- Afaste da reta encontrada um dos valores medidos de X . Compare o coeficiente de determinação com o valor anterior. Faça um gráfico com os novos pontos experimentais e a nova reta.

- 6.** Um ciclista tenta percorrer a velocidade constante (uniforme) uma distância de 10 km. O seu treinador nos primeiros 9 minutos e a cada minuto mede a distância percorrida, e regista os valores em km:

0.00 0.735 1.363 1.739 2.805 3.814 4.458 4.355 5.666 5.329

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre o tempo e a distância percorrida é linear?

b) Encontre o declive, a ordenada na origem, os erros respetivos e o coeficiente de determinação.

É uma relação linear bem aproximada? O ciclista conseguiu manter a mesma velocidade uniforme durante o percurso?

c) Qual a velocidade média do ciclista?

d) Use a função *polyfit* dos pacotes *numpy* ou do pacote *pylab* para encontrar a reta que mais se aproxima das medições.

O declive e a ordenada na origem concordam com os valores calculados na alínea b)?

e) Apresente a velocidade em km/hora.

7. O período de oscilação de uma massa, M , presa a uma mola foi medido para massas diferentes. As medições efetuadas estão registadas na seguinte tabela:

M (kg)	T (s)
0,15	1,21
0,20	1,40
0,16	1,26
0,11	1,05
0,25	1,60
0,32	1,78
0,40	2,00
0,45	2,11
0,50	2,22
0,55	2,33

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre o período de oscilação e a massa é linear?

b) Apresente as medições num gráfico log-log. Qual a dependência entre as quantidades período e massa?

c) Considerando a relação entre o período e a massa descoberta na alínea anterior, transforme as quantidades de modo a obter um gráfico que apresente uma relação linear. Encontre o declive, a ordenada na origem, os erros respetivos e o coeficiente de determinação. É um bom ajuste?

d) Calcule a constante elástica, definida como $K = 4\pi^2 \frac{M}{T^2}$ (o que equivale a se ter $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$).

8. Foi medida a energia por segundo (potência) emitida por um corpo negro (corpo que absorve toda a energia que incide nele) de área 100 cm^2 em função da temperatura absoluta, T , e registada na seguinte tabela

T (K)	200.	300.	400.	500.	600.	700.	800.	900.	1000.	1100.
E (J)	0.6950	4.363	15.53	38.74	75.08	125.2	257.9	344.1	557.4	690.7

- a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a energia emitida e a temperatura é linear?
- b) Apresente as medições num gráfico log-log. Qual a dependência entre as quantidades energia emitida e a temperatura?

9. Foi medida a atividade de uma amostra do isótopo radioativo ^{131}I tem de 5 em 5 dias. Os valores medidos da atividade com o tempo são, em mCi:

9.676 , 6.355, 4.261, 2.729, 1.862, 1.184, 0.7680, 0.4883, 0.3461, 0.2119

- a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a atividade e o tempo é linear?
- b) Apresente as medições num gráfico semilog. Como depende a atividade com o tempo?

A unidade curie indica $3,7 \times 10^{10}$ desintegrações nucleares/s

10. A aceleração da gravidade sentida por um corpo de 1 kg em órbita é $a = \frac{K}{R^2}$, onde K é o produto entre a constante gravitacional universal e a massa da terra, $K = G \times M_T$, e R a distância ao centro da terra. Foram feitas medições da aceleração a diferentes altitudes. Os valores medidos estão registados na tabela:

$R (10^6\text{m})$	$a (\text{m/s}^2)$
6.37	9.8
7.02	8.0
7.61	6.6
8.02	6.3
8.43	5.5
8.92	5.1
9.31	4.6
9.78	4.1
10.25	3.8
10.74	3.6

Determine a constante K . Que quantidades serão a abcissa e a ordenada de modo a linearizar a expressão da aceleração a .

11. Uma bola é chutada a partir do solo. Altura da trajetória da bola em função da distância horizontal percorrida está registada na tabela para 4 chutes:

```
# Distance trial1 trial2 trial3 trial4 (em polegadas)
# x y1 y2 y3 y4
1080 0.0 0.0 0.0 0.0
1044 2.25 3.25 4.5 6.5
1008 5.25 6.5 6.5 8.75
972 7.5 7.75 8.25 9.25
936 8.75 9.25 9.5 10.5
900 12.0 12.25 12.5 14.75
864 13.75 16.0 16.0 16.5
828 14.75 15.25 15.5 17.5
792 15.5 16.0 16.6 16.75
756 17.0 17.0 17.5 19.25
720 17.5 18.5 18.5 19.0
540 19.5 20.0 20.25 20.5
360 18.5 18.5 19.0 19.0
180 13.0 13.0 13.0 13.0
0 0.0 0.0 0.0 0.0
```

e está no ficheiro data_cap1.11_guttag.txt que está no e-learning, na pasta Ficheiros de INPUT.

- Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a altura (y) e a distância horizontal percorrida é linear?
- Analise a curva obtida com a função polyfit do pacote numpy de python e compare-a com um polinómio do 2º grau (parábola). Apresente no mesmo gráfico os dados experimentais da trajetória da bola e a parábola obtida. Comente a acordo entre as duas curvas.

Capítulo 2

Movimento a 1 dimensão

Sumário

Lei do movimento.
Lei da velocidade.
Relação entre aceleração, velocidade e posição.
Método de Euler. Erro do método de Euler

Métodos numéricos:

Método de Euler de integração de uma equação diferencial de 1^a ordem de valor inicial.

Usain Bolt recordista mundial dos 100 m, 200 m e 4×400 m estafeta e olímpico dos 100 m.



Pouco depois da partida, Usain Bolt na pista 4.



A meio da corrida

O vídeo de Usain Bolt: <https://www.youtube.com/watch?v=k3PZgbQ8auE>

O problema de movimento comum:

Conhece-se

- A direção do movimento
- a aceleração
- velocidade inicial
- posição inicial

Quer-se prever a lei de velocidade e a lei do movimento (como a posição evolui no tempo)!

O estudo começa por construir um esquema:

- Escolha do eixo onde se desenvolve o movimento.
- Escolha do sentido positivo do eixo (costuma ser o do movimento)
- Escolha da origem desse eixo (costuma ser a posição inicial)
- Nesse eixo, colocar a aceleração e o seu sentido.
- Nesse eixo colocar a velocidade e a posição inicial.
- Escolha do instante zero, origem dos tempos (costuma ser o instante inicial).

Movimento de Usain Bolt

A posição de Usain Bolt evolui no tempo.

Em cada instante a posição do atleta é diferente. A posição é uma quantidade instantânea.

Indica-se a posição por x por ser referenciada no eixo OX. E sendo instantânea indica-se por $x(t)$.

Neste caso é conveniente colocar a origem do eixo no ponto da partida dos atletas.



mas razões a velocidade também é uma quantidade instantânea.
por $v_x(t)$. O índice x é para indicar que é referenciado no eixo OX.
A posição $x(t)$, e a velocidade $v_x(t)$ podemos ser positivos e negativos!

Pelas mesmas razões a velocidade também é uma quantidade instantânea. Indica-se por $v_x(t)$. O índice x é para indicar que a velocidade é referenciada no eixo OX. Frequentemente se o eixo for vertical, o índice é indicado por y ou z .

A posição $x(t)$ e a velocidade $v_x(t)$ podem ser positivos ou negativos!

A posição $x(t) > 0$ indica que o atleta está na parte positiva dos eixos, enquanto que $x(t) < 0$ indica que o atleta está na parte negativa do eixo. Uma velocidade $v_x(t) > 0$ indica que o atleta se move no sentido (positivo) do eixo, enquanto que $v_x(t) < 0$ indica que Bolt se move no sentido oposto ao sentido (positivo) do eixo OX.

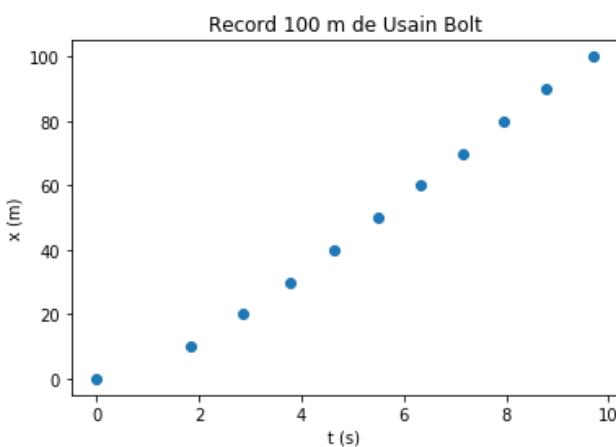
Análise da velocidade de Usain Bolt

O desempenho de Bolt nos 100m foram medidos.

```
# Tempos de Usain Bolt a correr os 100 m
# ficheiro dataUsainBolt.txt
# 1º conjunto: final olímpica em Pequim, 2008
# 2º conjunto: record mundial, Berlim 2009
# Medalha de ouro e record mundial
# x (m)      t1 (s)  t2 (s)
0          0        0
10         1.83    1.89
20         2.87    2.88
30         3.78    3.78
40         4.65    4.64
50         5.50    5.47
60         6.32    6.29
70         7.14    7.10
80         7.96    7.92
90         8.79    8.75
100        9.69   9.58
```

Pode-se analisar como foi o seu movimento.

1º A lei do movimento $x = x(t)$ e análise da velocidade



A velocidade de Usain Bolt evolui no tempo. Começou com velocidade nula, mas rapidamente aumentou a sua velocidade.

Que mais se pode afirmar sobre a velocidade de Usain Bolt?

Percorreu a pista de 100 m com a velocidade média:

$$\bar{v}_x = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{100 \text{ m}}{9.58 \text{ s}} = 10.4 \text{ m/s} = 37.6 \text{ Km/h}$$

Qual a velocidade média nos primeiros e nos segundos 50 m?

Pela mesma definição obtemos 9.14 m/s e 12.2 m/s, respetivamente

E em cada percurso de 10 m?

Pelo mesmo tipo de definição: $\bar{v}_x = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$, obtemos:

#	x_i	x_{i+1}	\bar{v}_x
0.0	10.0	5.3	
10.0	20.0	10.1	
20.0	30.0	11.1	
30.0	40.0	11.6	
40.0	50.0	12.0	
50.0	60.0	12.2	
60.0	70.0	12.3	
70.0	80.0	12.2	
80.0	90.0	12.0	
90.0	100.0	12.0	

a posição em m e a velocidade em m/s.

Para calcularmos a velocidade instantânea a partir da velocidade média, diminuímos o percurso em comprimentos muito pequenos (separados por um intervalo de tempo muito pequeno δt)

$$\bar{v}_x = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{(t + \delta t) - t}$$

e no limite quando $\delta t \rightarrow 0$ $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \bar{v}_x = \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{(t + \delta t) - t} = v_x(t)$

Ou seja, a velocidade instantânea $v_x(t)$ é a derivada da posição instantânea em ordem ao tempo $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$

Análise da Aceleração

A aceleração também varia com os percursos:

Nos instantes iniciais a velocidade altera-se muito (de nula até ~ 11 m/s).

Nos instantes médios até ao final da corrida a velocidade é ~ 12 m/s.

Para calcularmos a aceleração instantânea a partir da aceleração média, diminuímos o percurso em comprimentos muito pequenos (separados por um intervalo de tempo muito pequeno δt)

$$\bar{a}_x = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{tempo}} = \frac{v_x(t + \delta t) - v_x(t)}{(t + \delta t) - t}$$

E no limite quando $\delta t \rightarrow 0$ $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \delta t) - v_x(t)}{(t + \delta t) - t} = a_x(t)$

ou $\frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t)$

e também $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Relação entre as quantidades de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Cálculo da velocidade e da aceleração sabendo $x(t)$

Se se souber como a posição varia no tempo, saberei a velocidade e a aceleração.

Ex: A lei do movimento da queda de um grave é dada por (quando se considera a posição inicial a origem do eixo OX)

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow v_x(t) = gt \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_x(t) = gt \\ a_x(t) = g \end{cases}$$

Cálculo da velocidade e da posição sabendo $a_x(t)$

E se souber a aceleração instantânea?

$$\text{Pelo cálculo integral:} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\text{então:} \quad v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

ou,

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt \end{cases}$$

Estes dois integrais podem ser calculados.

Ex.: Voltemos ao exemplo da queda de um grave. Sabe-se que a queda de um grave está sujeita à aceleração g (está implícito o eixo orientado de cima para baixo e a aceleração da gravidade aponta para baixo, no mesmo sentido do eixo). Se for largado, nesse instante t_0 (escolhe-se $t_0=0$) possui velocidade nula, $v_x(t_0 = 0) = 0$ e

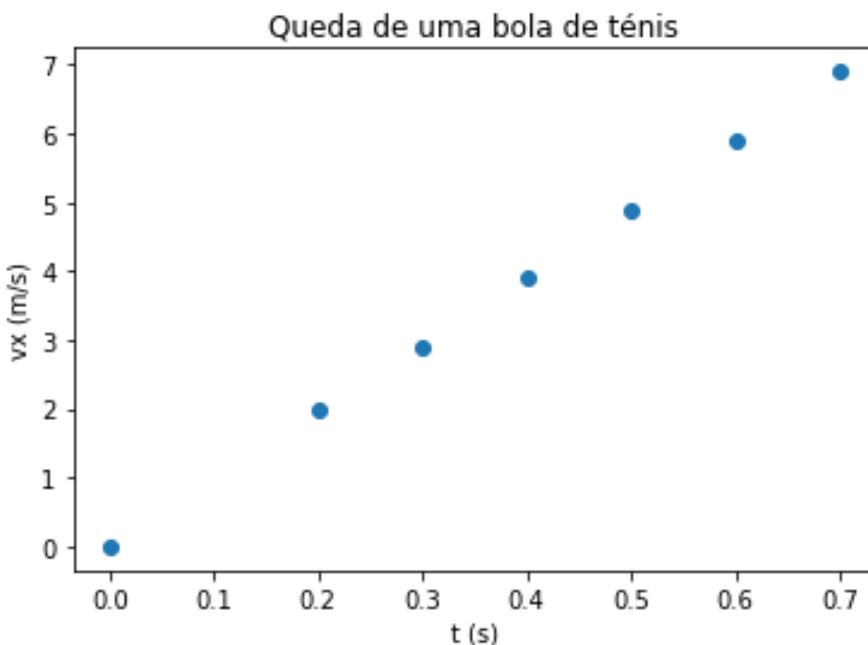
$$v_x(t) = 0 + \int_{t_0}^t g dt = \int_0^t g dt$$

e

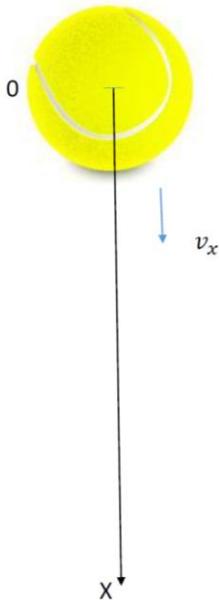
$$x(t) = 0 + \int_0^t g t dt = \frac{1}{2} g t^2$$

Queda de uma bola de ténis

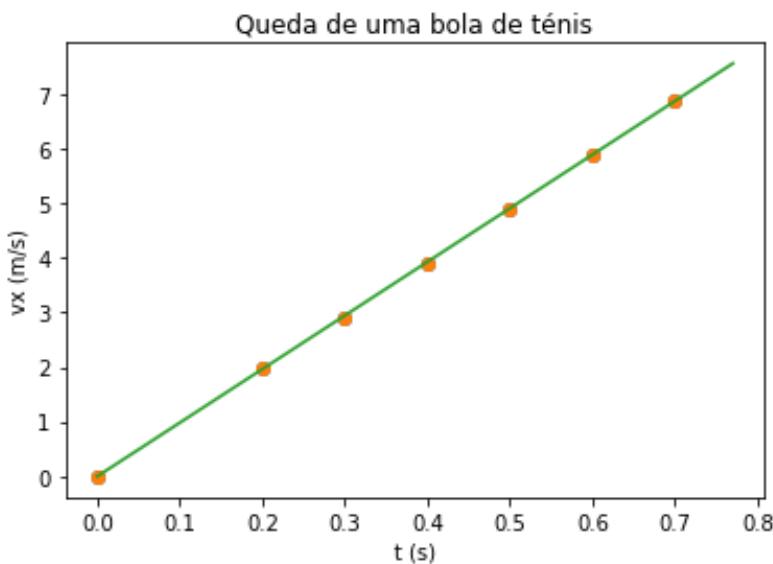
A resistência do ar ao movimento de uma bola de ténis a baixas velocidades é muito pequena. A velocidade de uma bola de ténis quando é largada é mostrada no gráfico, para alguns instantes:



em que se considerou $t_0 = 0$ e o eixo OX na figura:



Uma primeira análise visual ao gráfico, ficamos com a ideia que a velocidade é linear no tempo, implicando um movimento uniformemente acelerado. Vamos verificar esta ideia, fazendo a regressão linear aos valores da velocidade., o que está no gráfico:



O resultado é:

$$m = 9.84 \pm 0.06 \text{ m/s}^2$$

$$b = -0.01 \pm 0.03 \text{ m/s}, \text{ o que significa } v_x(t) = b + m t.$$

O ajuste é muito bom, uma vez que $r^2 = 0.9999$ é muito próximo da unidade.

Se compararmos com as leis do movimento uniformemente acelerado

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(0) + g t \\ x(t) = x(0) + v_x(0) t + \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

tem-se

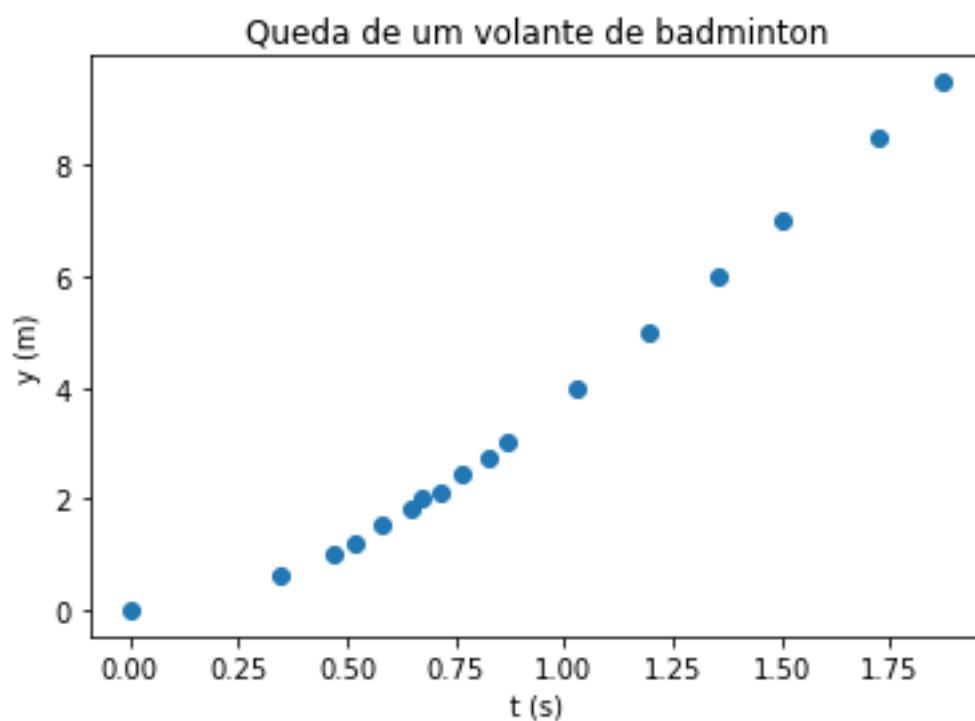
$$g = m = 9.84 \pm 0.06 \text{ m/s}^2$$

$$v_x(0) = b = -0.01 \pm 0.03 \text{ m/s}, \text{ o que é correto!}$$

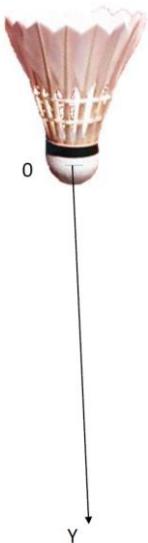
O movimento uniformemente acelerado é um bom modelo da queda de uma bola de ténis.

Queda de um volante de badminton

Queda de um volante de badminton, em que a resistência do ar é muito forte, devido às penas que rodeiam o volante. No caso em que o volante é largado, a posição foi registada e apresenta-se no gráfico:



em que se considerou $t_0 = 0$ e o eixo OY na figura:



Por análise visual do gráfico da posição em função do tempo:

Para instantes $t > 1.25$ s o movimento parece ser uniforme.

Para instantes $0 < t < 1.00$ s o movimento não parece uniforme.

Estamos na presença de um movimento com pelo menos 2 tipos de movimento.

De algum modo, temos de modelar a resistência do ar.

Para velocidades pequenas, a variação da velocidade com o tempo deve ser muito pequena. Para velocidades maiores, deve depender da velocidade e retardar o movimento. Ou seja deve originar uma aceleração negativa e vamos **supor que é proporcional ao quadrado da velocidade**. Apresentamos essa efeito na forma

$$a_y^{(res)} = -D v_y |v_y|$$

que é sempre oposta ao sentido do movimento, e em que o parâmetro D é positivo e a ser determinado numa experiência.

E, a aceleração total do movimento é

$$a_y(t) = g - D v_y |v_y|$$

Esta expressão leva a que como o termo da aceleração da resistência do ar se opõe ao movimento, **a partir de algum instante esse termo anula a parte gravítica**.

Se a aceleração for nula, temos movimento uniforme e a velocidade é constante

$|v_y| = v_T$ e chamada de velocidade terminal (também chamada de velocidade limite v_{lim})

$$0 = g - D v_T |v_T|$$

$$D = \frac{g}{v_T |v_T|} = \frac{g}{v_T^2}$$

A velocidade limite medida é, para o volante de badminton, usada na experiência,

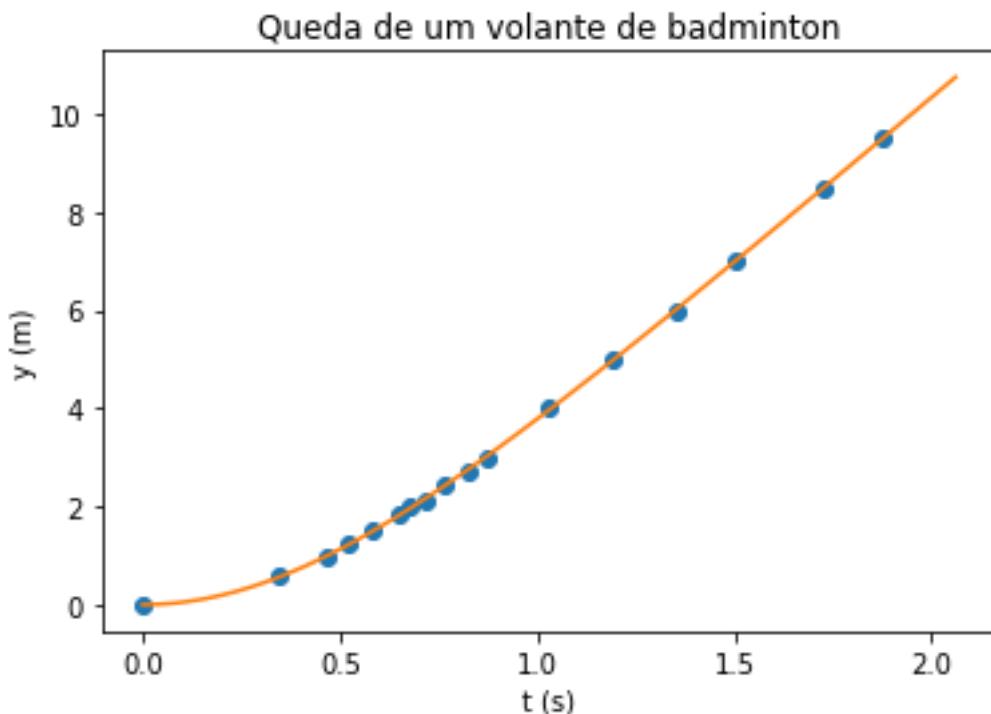
$v_T = 6,80 \text{ m/s}$, A aceleração do volante é

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} v_y |v_y| .$$

Por integração analítica, Python também tem um pacote para cálculo simbólico, obtemos.

$$y(t) = \frac{v_T^2}{g} \ln(\cosh(\frac{gt}{v_T}))$$

em que $t_0 = 0$, $v_y(0) = 0$ e $y(0) = 0$. A sobreposição desta última expressão e dos pontos experimentais, gráfico em baixo,



mostra um acordo muito bom a experiência e a lei do movimento com a aceleração $a_y(t) = g - Dv_y |v_y|$. Se a aceleração devida à resistência do ar for **proporcional à velocidade, a teoria e a experiência não concordam.**

A suposição que se fez de se considerar a aceleração do movimento com uma soma da aceleração da gravidade com uma aceleração devida à resistência do ar também resultou em pleno.

Método de Euler (método numérico de integração de uma equação diferencial de 1ª ordem de valor inicial)

Na maioria dos movimentos de interesse, a aceleração é uma função não simples o que torna impossível a integração da equação diferencial por métodos analíticos. Por exemplo, se considerarmos uma velocidade inicial não nula, a integração analítica não é possível. Nestes casos a integração far-se-á por métodos numéricos. O método de Euler é o mais simples

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} = a_x(t) \quad \text{aproximado por} \quad \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$$

Considere-se $v_x(0) = 0$, quando é largado e o movimento se inicia

Para δt pequenos espera-se que $\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$

Ou $v_x(t + \delta t) - v_x(t) \approx a_x(t) \times \delta t$

e $v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$

Ou, seja, se soubermos no mesmo instante, t , a velocidade $v_x(t)$ e a aceleração $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$ (a sua derivada) pode-se calcular (aproximado) o valor da velocidade num instante posterior, $t + \delta t$.

Cálculo da velocidade pelo Método Euler

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

Se se conhecer $v_x(0) = v_{x0}$

Obtém-se $v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x(0) \times \delta t$

e de novo $v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x(\delta t) \times \delta t$

e

$$v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x(2\delta t) \times \delta t$$

E assim sucessivamente, para todos os instantes posteriores (múltiplos de δt)

Este método é fácil de programar. Numa linguagem de programação pode-se usar o ciclo (loop) porque a expressão é sempre idêntica. Tem-se de escolher (input) o passo temporal δt de modo a se conseguir convergência da solução

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

Cálculo da lei do movimento $x = x(t)$, pelo Método de Euler

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} = v_x(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$$

Método de Euler: $\frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} \approx v_x(t)$

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

Se se conhecer $x(0) = x_0$

Obtém-se $x(\delta t) \approx x_0 + v_x(0) \times \delta t$

e de novo $x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$

e

$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x(2\delta t) \times \delta t$$

E assim sucessivamente, para todos os instantes posteriores (múltiplos de δt).

$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$$

$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x(2\delta t) \times \delta t$$

Exemplo: Como testes ao método de Euler, vamos calcular numericamente usando o método de Euler a velocidade e a lei do movimento da queda da bola de ténis, durante o intervalo de tempo de $t_0 = 0$ a $t_f = 5$ s. Escolheu-se um eixo vertical a apontar para baixo, $a_x(t) = g = 9.80 \text{ m/s}^2$ e com as condições da experiência no instante inicial $t_0 = 0$, tem-se $v_x(0) = v_{x0} = 0$ e $x(0) = x_0 = 0$.

Escolhemos o passo temporal $\delta t = 0.5$ s. O número de intervalos N a considerar, é tal que

$$(t_f - t_0) = N \delta t$$

As equações que o método de Euler fornece são

$$v_x(0) = v_{x0}$$

$$v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x(0) \times \delta t$$

$$v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x(\delta t) \times \delta t$$

$$v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x(2\delta t) \times \delta t$$

...

$$v_x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + a_x((N-1)\delta t) \times \delta t$$

$$v_x(N\delta t + \delta t) \approx v_x(N\delta t) + a_x(N\delta t) \times \delta t$$

e

$$x(0) = x_0$$

$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x(0) \times \delta t$$

$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$$

$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x(2\delta t) \times \delta t$$

...

$$x(N\delta t) \approx x((N-1)\delta t) + v_x((N-1)\delta t) \times \delta t$$

$$x(N\delta t + \delta t) \approx x(N\delta t) + v_x(N\delta t) \times \delta t$$

Implementação do Método de Euler em Python

Em cálculo científico as quantidades físicas expressam-se por números ou sequências destes. O pacote numpy possui 2 grandes vantagens, que o cálculo científico beneficia. Uma, as operações matemáticas e os algoritmos estão implementados em códigos précompilados códigos. A outra é que suporta de vectorização, através do uso de array. Uma simples operação pode ser levada a cabo em todo o array. Exemplos úteis são:

```
numpy.zeros(n+1)
numpy.array([1, 2, 3 ])
numpy.linspace(t0, tf, n+1)
```

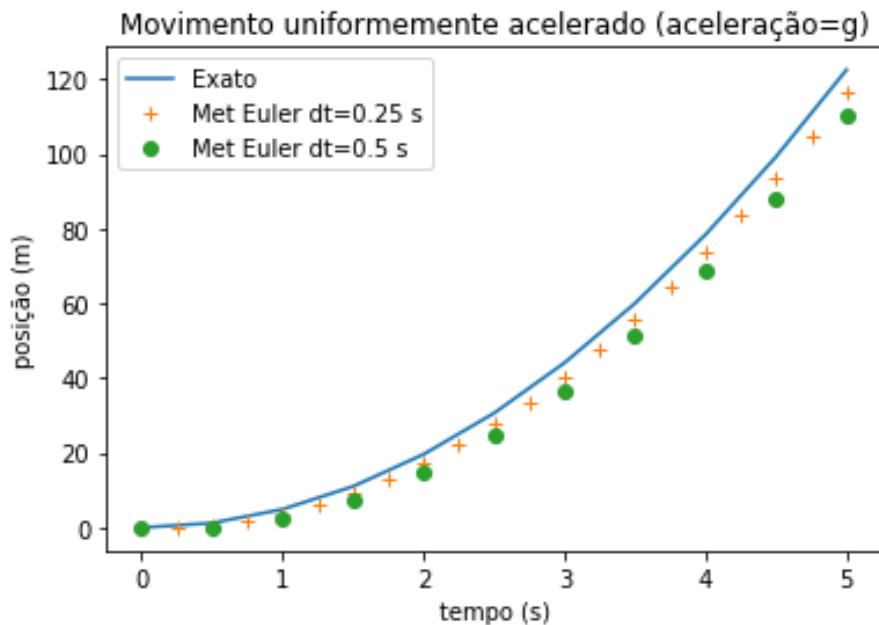
Todos os valores a calcular da posição podem ser colocados num array. Os indexes (inteiros) indicam simultaneamente a posição e o instante

Índices	Posição		Tempo
0	$x(0)$	$\rightarrow x[0]$ corresponde ao instante $t[0]$	0
1	$x(\delta t)$	$\rightarrow x[1]$ corresponde ao instante $t[1]$	δt
2	$x(2\delta t)$	$\rightarrow x[2]$ corresponde ao instante $t[2]$	$2\delta t$
3	$x(3\delta t)$	$\rightarrow x[3]$ corresponde ao instante $t[3]$	$3\delta t$
...
N	$x(n\delta t)$	$\rightarrow x[N]$ corresponde ao instante $t[N]$	$N\delta t$

Note que ao se ter começado a indexação por zero, a indexação é de 0 a n, num total de n+1 elementos.

```
# Programa em python
# Queda sem resistência do ar
# Integração numérica de dx/dt = vx, pelo Método de Euler
import numpy as np
dt=0.5          # escolha do passo temporal.
                  # A solução deve convergir com o decréscimo deste passo.
tf=5.0
t0=0
x0=0
v0x=0
g=9.80
n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)    # número de passos (inteiro)
print('n',n)
t=np.zeros(n+1)              # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)
vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0
for i in range(n):          # Método de Euler (n elementos)
    t[i+1]=t[i]+dt
    vx[i]=g*t[i]
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt      # último x[n]= x[n-1]+vx[n-1]*dt
                                # índice n : é o (n+1)º elemento
```

A solução encontrada pelo Método de Euler está no gráfico abaixo. Repetiu-se o mesmo procedimento mas com um passo temporal menor, $\delta t = 0.25$ s. O resultado também está no gráfico abaixo, assim com a solução exata. A solução com o passo temporal menor aproxima-se melhor da solução exata. Ou seja, a solução numérica converge, quando o passo menor temporal diminui.



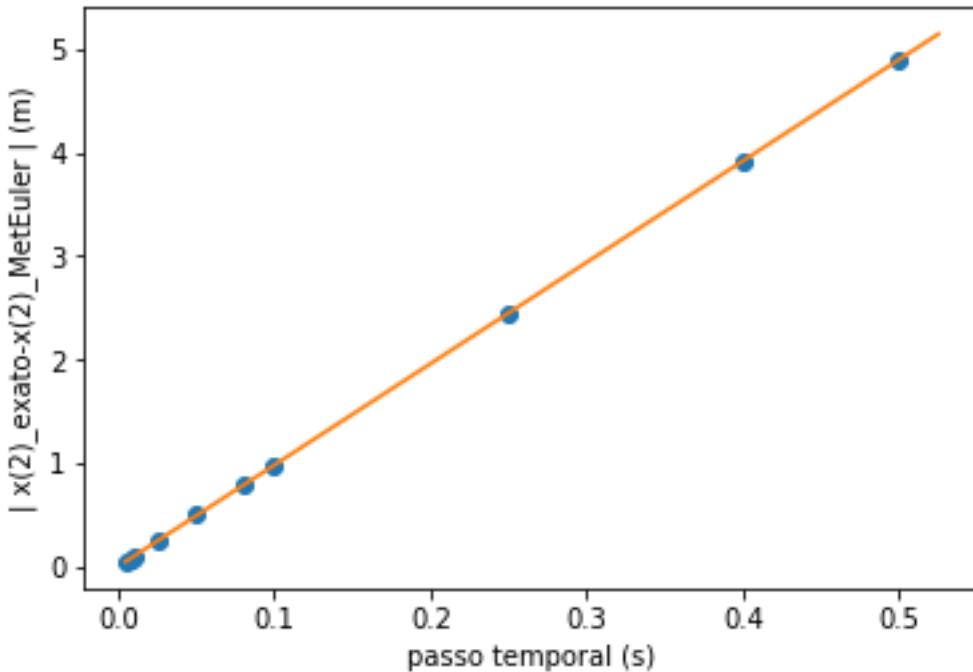
Erro do método de Euler

Podemos avaliar como o erro da aproximação efetuada pelo método de Euler varia com o passo temporal. Basta obter para um certo instante, digamos para $t = 2$ s, a diferença entre o valor exato, $x(2)_{exato} = \frac{1}{2}g 2^2 = 19.6$ m e o resultado numérico $x(2)_{MetEuler}$ obtido por passos temporais diferentes,

$$\mathcal{E}_{global} = |x(2)_{exato} - x(2)_{MetEuler}|$$

A tabela e o gráfico seguinte mostram como este erro varia com o passo temporal:

δt (s)	$x(2)$ (m)	$\mathcal{E}_{global} = x(2)_{exato} - x(2)_{MetEuler} $
0.5	14.7	4.9
0.25	17.15	2.45
0.1	18.62	0.98
0.05	19.1	0.50
0.01	19.502	0.10
0.005	19.550	0.05
$x(2)_{exato}$	19.60000	



Usando a técnica do ajuste linear, aprendido no capítulo anterior, o erro global (ao fim de 2 s) do método de Euler é linear no passo δt . Ou seja, o erro global é proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N.

Convergência do resultado

Pela tabela e pelo gráfico acima, o erro diminui lentamente com o passo temporal δt considerado. À medida que δt diminui:

- O resultado aproxima-se do valor exato,
- A precisão do resultado também melhora,
- O número de algarismos coincidentes com o exato aumenta.

Quando não se conhece o valor exato, como na maioria dos casos, diminui-se o passo δt e toma-se nota dos algarismos que não se alteram na mesma posição numérica.

Estimativa do Erro global

O método de Euler faz a seguinte aproximação

$$\frac{v_x(t + \delta t) - v_x(t)}{\delta t} \sim a_x(t)$$

ou

$$v_x(t + \delta t) \sim v_x(t) + a_x(t) \delta t$$

Se soubermos a expressão exata de $v_x(t + \delta t)$ em função de $v_x(t)$ e $a_x(t)$, saberemos qual o erro local cometido pelo método de Euler, num passo temporal δt .

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \delta t + \text{erro cometido na aproximação de Euler}$$

A série de Taylor relaciona dois pontos muito próximos de uma função.

Aplicado à função $v_x(t + \delta t)$ e $v_x(t)$, a série de Taylor é

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \frac{dv_x}{dt} \Big|_t \delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \Big|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 v_x}{dt^3} \Big|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

e

$$\frac{dv_x}{dt} \Big|_t = a_x(t)$$

a série de Taylor fornece a expressão exata de $v_x(t + \delta t)$ como:

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \delta t + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \Big|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 v_x}{dt^3} \Big|_t \delta t^3}_{\text{erro (de truncatura)}} + \sigma(\delta t^4)$$

Comparando esta última expressão com a aproximação de Euler, o método de Euler é uma série de Taylor truncada nos 2 primeiros termos. O erro local ϵ_{local} é

$$\epsilon_{local} = \frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \Big|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 v_x}{dt^3} \Big|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

Erro de truncatura local proporcional a δt^2 , $\epsilon_{local} \propto \sigma(\delta t^2)$

O cálculo de $v_x(t + \delta t)$ usou os valores da N velocidades anteriores

$v_x(\delta t), v_x(2 \delta t), \dots v_x(N \delta t)$, cada velocidade afetada do erro local ϵ_{local}

proporcional a δt^2 . Como o erro de uma soma se acumula, o erro global ao fim de N passos é

$$\epsilon_{global} = N \epsilon_{local} \propto N \delta t^2$$

Como $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$, substituindo,

$$\epsilon_{global} \propto N \left(\frac{t_f - t_0}{N} \right)^2 = \frac{(t_f - t_0)^2}{N}$$

Ou seja, o erro global de truncatura é proporcional ao inverso do número de passos

N , e por conseguinte proporcional ao passo δt .

Problema Texto2.1: Considere a queda de um objeto sem resistência do ar. Neste movimento a aceleração é constante durante todo o movimento. Neste caso a solução numérica da velocidade obtida pelo método de Euler é a solução exata. Porquê?

Bibliografia

Serway, cap. 2;

Sørensen, cap. 4;

Villate, cap. 1

Problemas

1. Um carro A segue numa estrada à velocidade constante de 70 km/h onde o limite de velocidade é de 40 km/h. Ao passar por um carro patrulha, este último parte imediatamente em sua perseguição à aceleração constante de 2,0 m/s².

- a) Faça o gráfico da lei do movimento do carro A e do carro patrulha, $x = x(t)$
- b) Em que instante e qual a distância percorrida pelo carro patrulha alcança o carro em infração?

2. Um volante de badminton foi largado de uma altura considerável. A lei do movimento é

$$y(t) = \frac{v_T^2}{g} \log \left[\cosh \left(\frac{gt}{v_T} \right) \right],$$

em que a terminal do volante v_T é 6.80 m/s.

- a) Faça o gráfico da lei do movimento $y(t)$ de 0 a 4.0 s.
- b) Determine a velocidade instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.
- c) Determine a aceleração instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. Faça o gráfico da aceleração em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.
- d) Mostre que a aceleração $a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} |v_y| v_y$ é equivalente à calculada na alínea anterior.
- e) Se o volante for largado de uma altura de 20 m, quanto tempo demora a atingir o solo? Compare com o tempo que demoraria se não houvesse resistência do ar.
- f) Nas condições da alínea anterior, qual o valor da velocidade e da aceleração quando o volante chega ao solo?

Nota:

- Para cálculo simbólico: para derivar pode usar as funções diff do pacote sympy
- Para cálculo numérico: Pode usar a função cosh do pacote numpy.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ e } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1; \tanh(x) = \sinh(x) / \cosh(x)$$

3. Um objeto pequeno é largado de uma altura elevada. Considere a queda livre, sem resistência do ar. Considere $g = 9.80 \text{ m/s}$

- a) Qual a relação entre a velocidade e a aceleração instantânea?

- b) Construa um programa que determine a velocidade do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4 \text{ s}]$. Qual a velocidade em 3 s ?
- c) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.
- d) Compare o resultado obtido em b) e c) com o resultado exato. Que conclui?
- e) Construa um programa que determine a posição do objeto, usando o método de Euler, no intervalo de tempo $[0, 4 \text{ s}]$. Qual a posição no instante 2 s , se o objeto partiu da posição 0 m ?
- f) Repita a alínea anterior, com um passo 10 vezes menor.
- g) Compare o resultado obtido em e) e f) com o resultado exato. Que conclui?
- h) Calcule novamente a posição no instante 2 s , com o passo 10 vezes menor. Faça o gráfico do desvio do valor aproximado com o valor exato em função do passo. Como varia o erro com o passo?

4. Um volante de badminton foi disparado para baixo na vertical, a uma velocidade de 200 km/h , de uma altura considerável. Considere o valor medido da velocidade terminal $v_T = 6,80 \text{ m/s}$.

- a) Qual a aceleração a que está sujeito o volante durante o movimento? Faça o gráfico da aceleração em função do tempo.
- b) Determine a velocidade instantânea, usando o método de Euler. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo. Qual a velocidade do volante (em km/h) ao fim de 1 s ?
- c) Em quanto tempo tem o volante reduzida a sua velocidade em 50%?
- d) Determine a lei do movimento $y(t)$, usando o método de Euler. Faça o gráfico da posição em função do tempo. Em quanto tempo percorre 4 m ?

Note: Teste o programa para o caso $v_y(0) = 0$, em que se conhece a solução exata.

5. Um volante de badminton foi largado de uma altura considerável. Considere a aceleração $a_y(t) = g - Cv_y$, em que a resistência do ar ao movimento é linear na velocidade. Considere o valor medido da velocidade terminal $v_T = 6,80 \text{ m/s}$.

- a) Calcule a expressão da velocidade terminal em função de C .
- b) Determine a velocidade instantânea, usando o método de Euler. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo.

- c) Determine a lei do movimento $y(t)$, usando o método de Euler. Faça o gráfico da posição em função do tempo.
- d) Compare a posição instantânea obtida com os valores medidos, registados no ficheiro: data_cap2_queda_volante.txt.

6. Queda de um paraquedista

Um paraquedista salta de um avião, a uma altitude de 1 km. As velocidades terminais típicas são 60.0 e 5.0 m/s para o salto livre e para o paraquedas aberto, respetivamente. Estas velocidades terminais correspondem à massa volúmica do ar à superfície do solo $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$.

- a) Quanto tempo demoraria a chegar ao solo com o paraquedas fechado? E a que velocidade?
- b) Quanto tempo demora a chegar ao solo com o paraquedas aberto, considerando numa aproximação pouco fiel, que o para-quedas é aberto imediatamente quando o paraquedista salta do avião?
- c) Considere a alínea anterior, considerando que o paraquedas fica aberto 20 s depois do salto do avião.
- d) Resolva novamente a questão anterior tendo em consideração que a densidade do ar varia de acordo com

$$\rho(h) = 1.225 e^{-0.1378 h} \text{ kg/m}^3$$

para alturas h até 90 km, sendo a altura medida em quilómetros. Considere que o coeficiente de resistência do ar é proporcional à densidade do ar.

7. Uma bola é lançada verticalmente para cima com a velocidade 10 m/s.

- a) Encontre analiticamente a lei do movimento $y = y(t)$, se não considerar a resistência do ar. Faça o gráfico de y em função do tempo.
- b) Qual a altura máxima e o instante em que ocorre, no caso da alínea a)?
- c) Em que instante volta a passar pela posição inicial, no caso da alínea a)? Qual a velocidade nesse instante?
- d) Resolva as alíneas anteriores, considerando a resistência do ar. Resolva usando o método de Euler. A velocidade terminal da bola no ar é de 100 km/h.

8. Uma bola de ténis, de massa 58 g, e um volante de badminton, de massa igual 58 g, são largados do cimo de um prédio de 5m de altura. Qual deles chega primeiro ao solo?

Calcule o instante em que cada objeto chega ao solo. A velocidade terminal é de 6,80 m/s e 100 km/h para o volante de badminton e a bola de ténis, respectivamente.

9. O método de Euler de integração numérica de uma equação diferencial de 1^a ordem apresenta um erro global inversamente proporcional ao número de passos N , em que se dividiu o tempo final total, t_f , em pequenos intervalos de tempo $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$, sendo t_0 o instante inicial. Este método, integra as equações, $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$, como

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t)$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{0x}$.

O método de Feynman-Newton integra as mesmas equações diferenciais do movimento $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$, fazendo a aproximação:

$$x(t + \delta t) = x(t) + v_x \left(t + \frac{\delta t}{2} \right) \times \delta t$$

$$v_x \left(t + \frac{\delta t}{2} \right) = v_x \left(t - \frac{\delta t}{2} \right) + a_x(t) \times \delta t,$$

se souber $x(t_0) = x_0$ e $v_x(t_0) = v_{x0}$.

- a) Calcule o erro de truncatura local do método de Feynman-Newton.
- b) Calcule o erro de truncatura global do método de Feynman-Newton.
- c) Para iniciar o cálculo das velocidades tem de conhecer $v_x \left(\frac{\delta t}{2} \right)$. Encontre uma expressão que permita calcular esta última quantidade. Considere $t_0 = 0$.

Capítulo 3

Forças e Vetores

Sumário

Força: intensidade, direção e sentido

Cálculo vetorial: Adição, produto escalar e produto vetorial entre vetores.

Sistema cartesiano de eixos. Coordenadas de vetores.

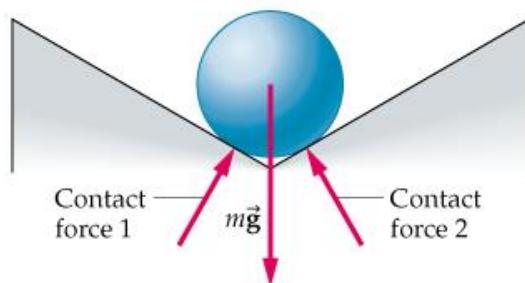
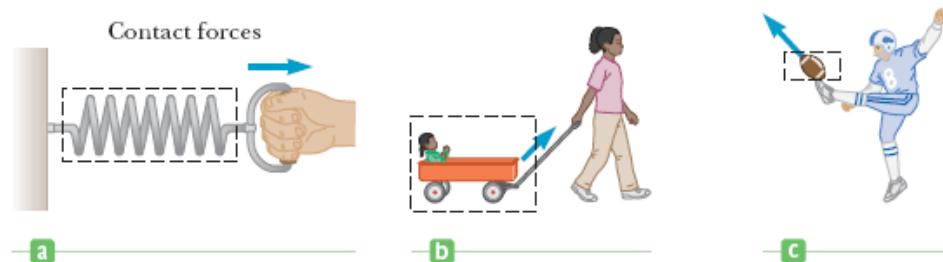
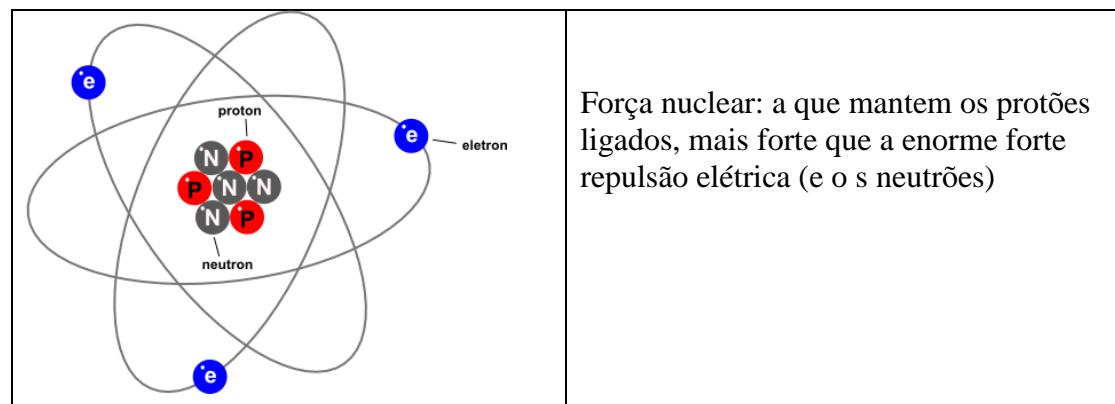
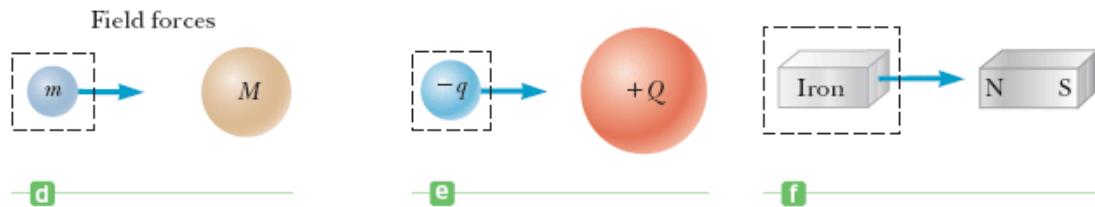
As três leis de Newton.

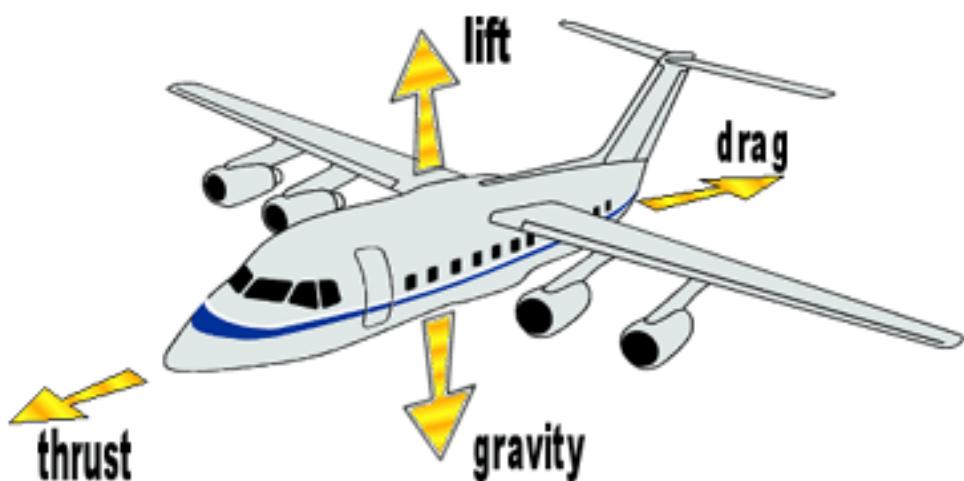
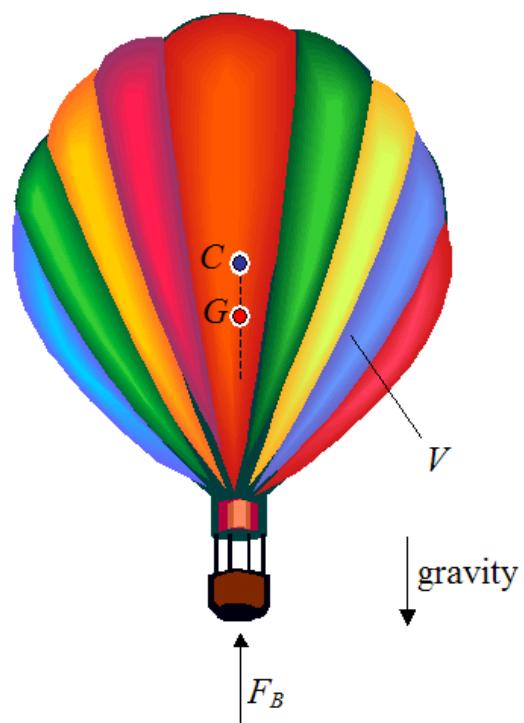
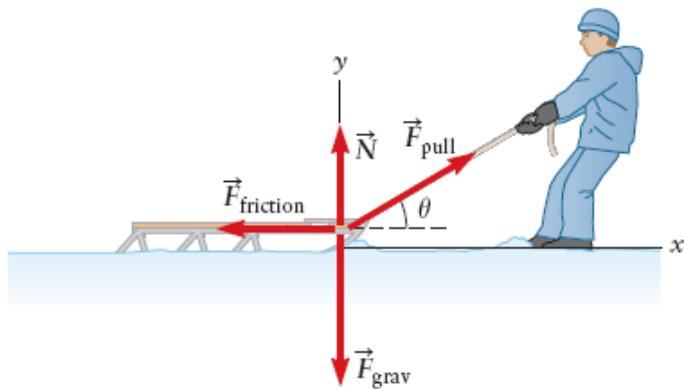
Python

Vetores e operações entre vetores.

3.1 Tipo de Forças

Em mecânica, a área que estuda o movimento de corpos, é muito importante se se souber as forças aplicadas a um corpo. Pela 2^a lei de Newton, se soubermos as forças aplicadas saberemos a aceleração, a velocidade e a lei do movimento.

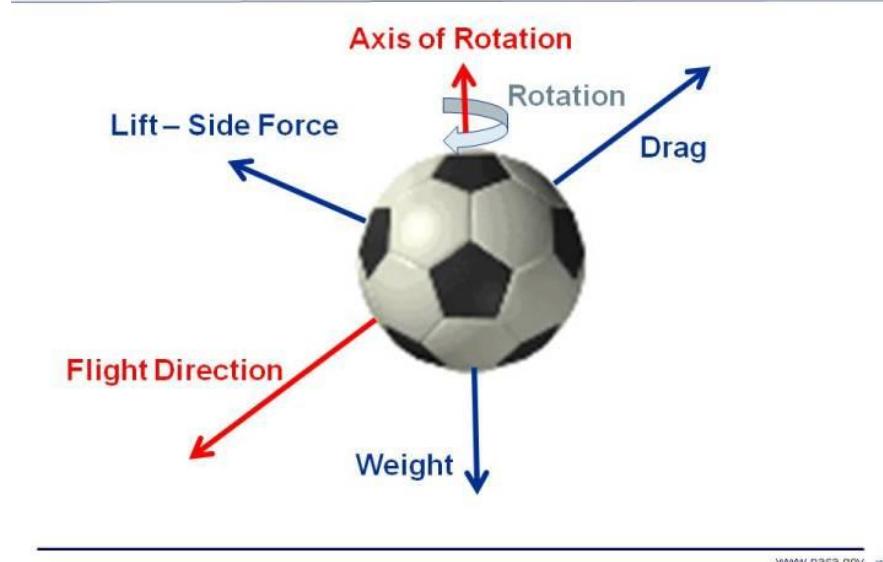




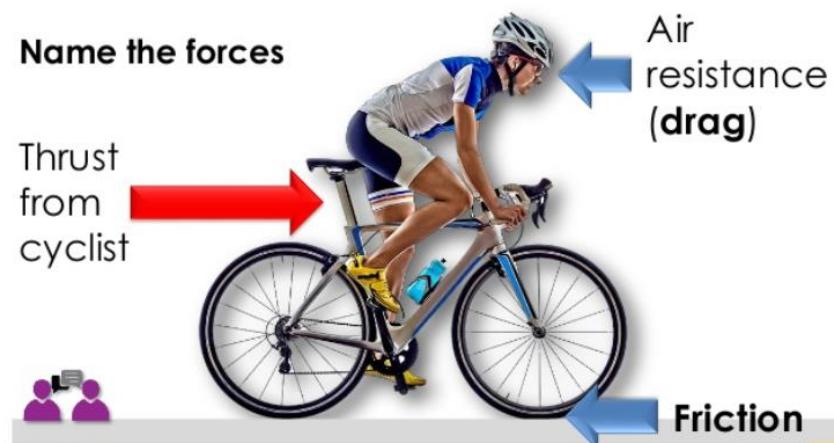
National Aeronautics and Space Administration



Forces on a Soccer Ball



www.nasa.gov



FORÇA é um VETOR. Indica-se por \vec{F} e a sua intensidade por $|\vec{F}|$.
Esta é a notação que se vai seguir.

Existem outros vetores, como por exemplo a velocidade (de um carro), a posição (de uma cidade), ...

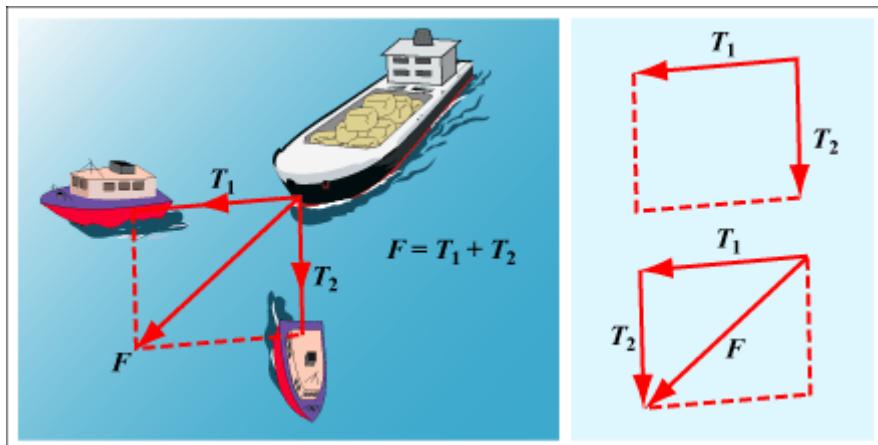
A posição de um objeto é dado pelo GPS, que fornece 2 números, a latitude e a longitude. Para os aviões é necessário também a altitude, requerendo no total três números para especificar a posição. O espaço que nos envolve é a 3 dimensões.

Outras quantidades que são especificados só por um número chamam-se escalares, por exemplo a temperatura, energia, Muitos calares podem ser negativos.

Outros vetores: lista ordenada de números

3.2 Cálculo vetorial

Vetores e operações em vetores



Vetor \vec{a} $\longrightarrow \vec{a}$

$|\vec{a}|$ = módulo, intensidade, magnitude ou comprimento de \vec{a}

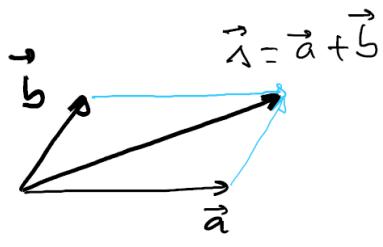
$\vec{c} = \lambda \vec{a}$ outro vetor \vec{c} ; $|\vec{c}| = |\lambda| |\vec{a}|$

Vetor unitário

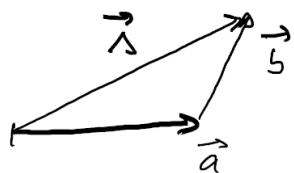
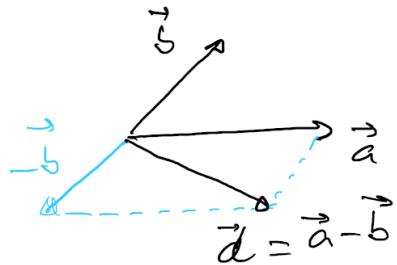
ou vetor \hat{a} , $|\hat{a}| = 1$: indica direção e sentido

$$\text{ex: } \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$$

Soma de 2 vetores

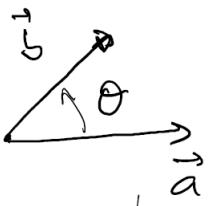
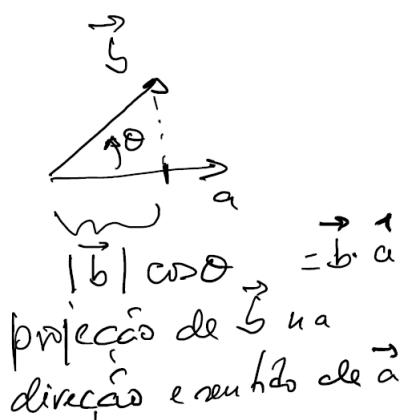


Diferença 2 vetores



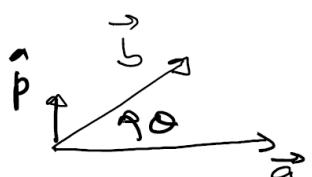
Produto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

Ou produto interno
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$ 

Produto Vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{p}$$



Ou, produto externo

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

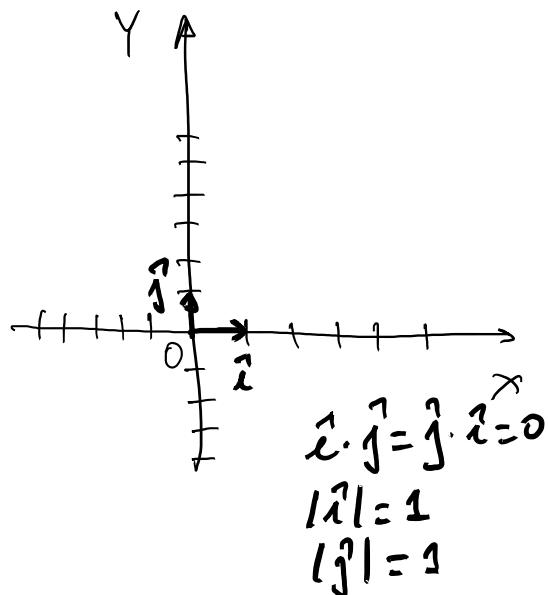
\hat{p} = vetor unitário
perpendicular ao plano formado por \vec{a} e \vec{b}

Sentido: observador vê
vetor \vec{a} ir para \vec{b}
no sentido direto

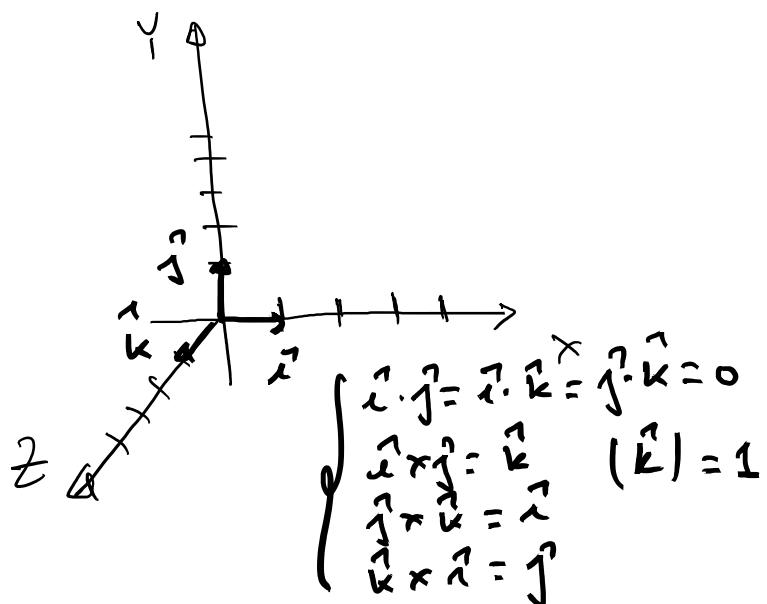
direto: antidireto:

Sistema de eixos cartesiano

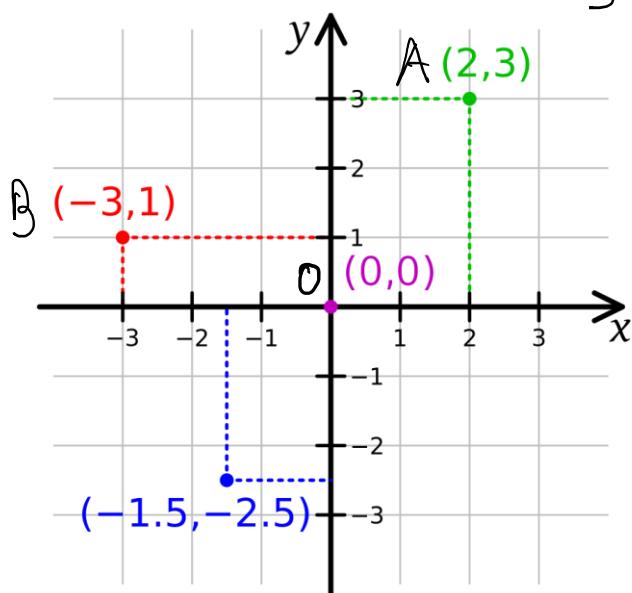
2 dimensões



3 dimensões



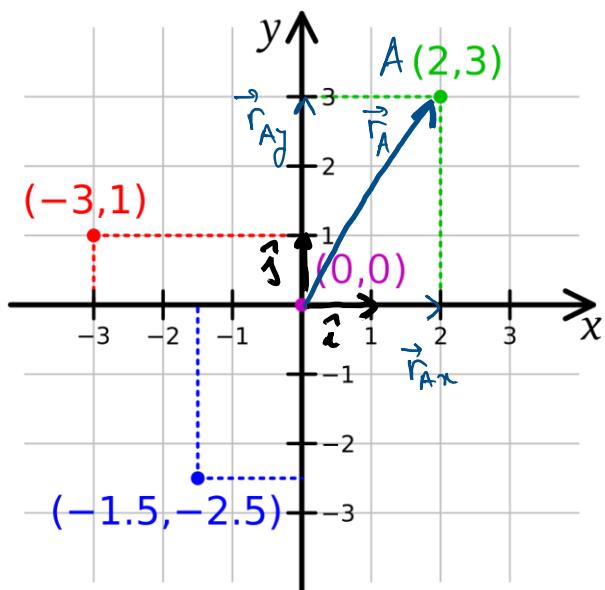
Posição dos pontos



A em $(2, 3)$
 O em $(0, 0)$ origem do sistema
 B em $(-3, 1)$
 C em $(-1.5, -2.5)$

Coordenadas abscissa (x)
 ordenada (y)

Posição A é também indicada por um vetor, \vec{r}_A .
Com origem no ponto origem e termina no ponto A.



$$\vec{r}_A = \vec{r}_{Ax} + \vec{r}_{Ay}$$

$$\vec{r}_{Ax} = x_A \hat{i} = 2 \hat{i}$$

$$\vec{r}_{Ay} = y_A \hat{j} = 3 \hat{j}$$

e

$$\vec{r}_A = x_A \hat{i} + y_A \hat{j}$$

A 3 dimensões um vetor \vec{r}

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

Componentes do vetor \vec{r} un eixo Ox, Oy, Oz , respectivamente.

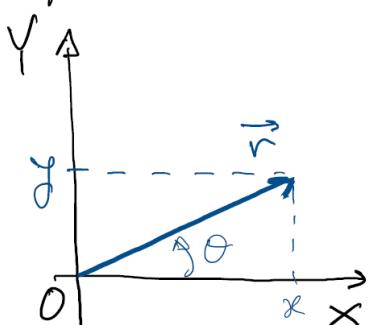
Tendo $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$
 $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= a_x b_x \hat{i} \cdot \hat{i} + a_x b_y \hat{i} \cdot \hat{j} + a_x b_z \hat{i} \cdot \hat{k} \\ &\quad + a_y b_x \hat{j} \cdot \hat{i} + a_y b_y \hat{j} \cdot \hat{j} + a_y b_z \hat{j} \cdot \hat{k} \\ &\quad + a_z b_x \hat{k} \cdot \hat{i} + a_z b_y \hat{k} \cdot \hat{j} + a_z b_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv \text{e um escalar}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

Espaço a 2D



Vetor \vec{r} , definido por 2 valores
(x, y) ou $(|\vec{r}|, \theta)$

$x, y \equiv$ Coordenadas cartesianas

$$x = \vec{r} \cdot \hat{i} = |\vec{r}| \cos \theta$$

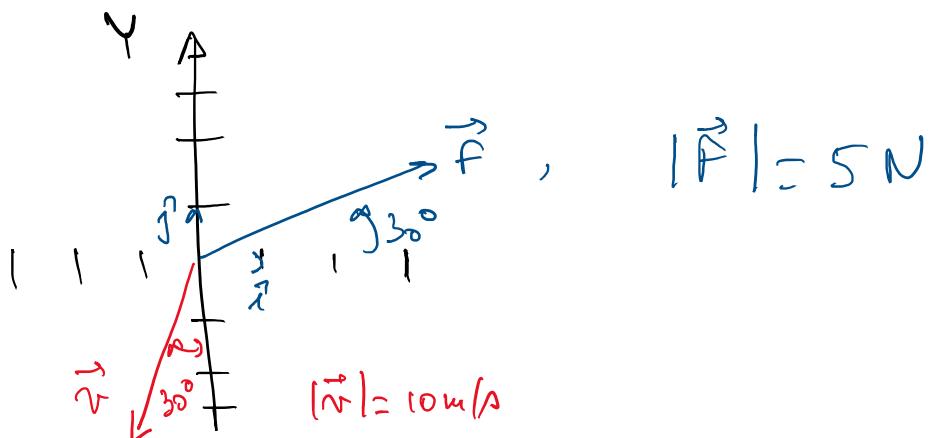
$$y = \vec{r} \cdot \hat{j} = |\vec{r}| \sin \theta$$

$(|\vec{r}|, \theta) \equiv$ Coordenadas polares

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arccos x / \sqrt{x^2 + y^2} \\ = \arcsin y / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cálculo das coordenadas



$$f_x = \vec{F} \cdot \hat{i} = |\vec{F}| |\hat{i}| \cos 30^\circ$$

$$f_y = \vec{F} \cdot \hat{j} = |\vec{F}| |\hat{j}| \cos 60^\circ$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} f_x = +|\vec{F}| \cos 30^\circ \\ f_y = +|\vec{F}| \sin 30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = (\vec{v} | \hat{i}) \cos(270^\circ - 30^\circ) = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5 \text{ m/s} \\ v_y = (\vec{v} | \hat{j}) \cos(180^\circ - 30^\circ) = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ m/s} \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} v_x = -(\vec{v}) \cos 60^\circ = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5 \text{ m/s} \\ v_y = -(\vec{v}) \cos 30^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ m/s} \end{cases}$$

Igualdade entre vetores e Equações etônicas

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ \vec{b} &= b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Outra maneira de indicar vetores

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

Problema:

$$\text{Se } \vec{a} = (a_x, 0, 0)$$

$$\vec{b} = (5, b_y, 0)$$

$$\vec{c} = (0, 1, c_z)$$

$$\text{e } \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

calcule as componentes a_x , b_y e c_z .

Resolução : $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 = a_x - 5 \\ 10 = a_y - b_y \\ 0 = a_z - 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 5 \\ b_y = 9 \\ c_z = 0 \end{cases}$$

3.3 Princípios de Newton da Mecânica

1^a lei de Newton ou lei de inércia: Quando $\vec{F} = 0$
O corpo ou está parado ou move-se a uma velocidade constante.

2^a Lei de Newton ou lei fundamental da dinâmica

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.

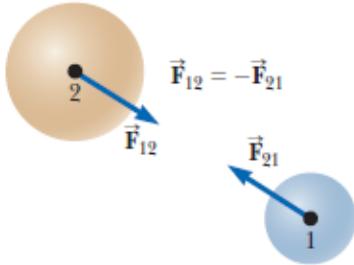
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo. É a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

3^a lei de Newton ou lei da ação e reação:

Quando 2 corpos interatuam,

\vec{F}_{12} a força no corpo 1 devido à interação com o corpo 2, e

\vec{F}_{21} a força no corpo 2 devido à interação com corpo 1, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



Importância da 2^a Lei de Newton: $\vec{F} = m \vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$
Se soubermos as forças aplicadas a um corpo, como também a sua massa) saberemos a sua velocidade instantânea e a lei do movimento, se se souber também a velocidade e a posição inicial.

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.

A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo. A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas, pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

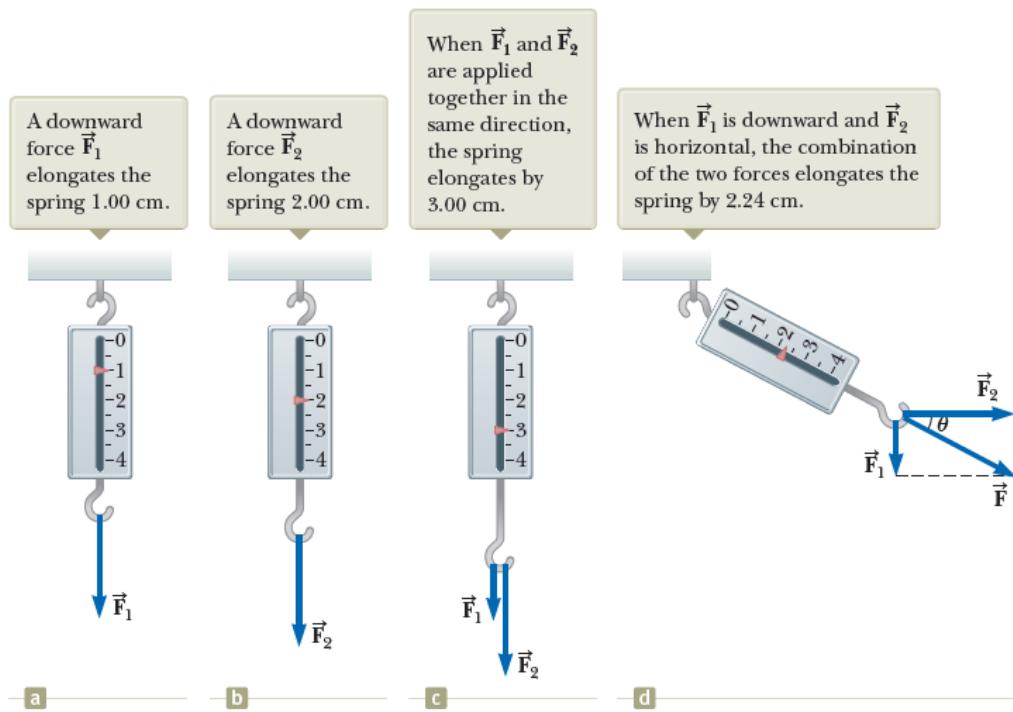
$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{F}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

3.4 Modelos analíticos de diversas forças

A mola e a força elástica



$$\begin{cases} F_x = -k x \\ F_y = -k y \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r} \\ F_z = -k z \end{cases}$$

Força de resistência do ar

Experiências no volante de badminton mostram:

- Força oposta à velocidade

A direção e sentido da velocidade é fornecida pelo seu vetor unitário: $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$

Assim a força é $\vec{F} = -C(v) \hat{v}$

- Proporcional ao quadrado da velocidade

$$\vec{F} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

$$|\vec{F}| \propto |\vec{v}|^2$$

A 1D : $\vec{v} = v_x \hat{i}$
 $|\vec{v}| = |v_x|$
 $\hat{v} = \frac{v_x}{|v_x|} \hat{i}$

$$F_x = -m D |v_x|^2 \frac{v_x}{|v_x|} = -m D |v_x| v_x$$

Expressão válida para qualquer sentido do eixo e sentido da velocidade.

A 2D : $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$
 $|\vec{v}| = \sqrt{|v_x^2 + v_y^2|}$
 $\hat{v} = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \hat{i} + \frac{v_y}{|\vec{v}|} \hat{j}$

$$\vec{F} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v} \frac{v_x}{|\vec{v}|} \hat{i} + \frac{v_y}{|\vec{v}|} \hat{j}$$

$$\begin{cases} F_x = -m D |\vec{v}|^2 \frac{v_x}{|\vec{v}|} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y = -m D |\vec{v}|^2 \frac{v_y}{|\vec{v}|} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

A 3D é só acrescentar a expressão correspondente à componente a z.

O parâmetro D é **ajustado aos valores experimentais**

Gravidade revela-se como:

- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso

Força entre corpos celestes:

- Observações experimentais muito precisas de Tycho Brahe:
- 3 Leis de Kepler das leis planetárias (em concordância com as observações experimentais de Tycho Brahe):
 - planetas com órbitas elípticas
 - o segmento que une cada planeta ao sol, varre áreas iguais em tempos iguais.
 - o quadrado do período de translação de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita
- Lei da gravidade de Newton (prevê as leis de Kepler)

Força atrativa na direção dos dois corpos

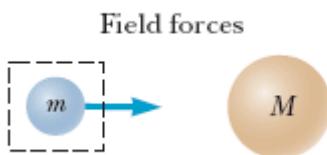
$$|\vec{F}_{grav}| = G \frac{mM}{d^2}, \quad G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

d distância entre 2 corpos

$$\vec{F}_{grav} = G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

$$|\vec{r}| = d,$$

O vetor unitário $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ expressa a direção e sentido de um astro em relação a outro



Peso:

Força vertical,
aponta para baixo

$$|\vec{P}| = m |\vec{g}|, \quad |\vec{g}| = g = 9.80 \text{ m/s}^2 \text{ aceleração da gravidade}$$

\vec{P} é a força gravítica que a Terra exerce em qualquer corpo de massa m .

R_T Distância do corpo (na superfície da Terra) até ao centro da Terra

$$|\vec{F}_{grav}| = G \frac{m M_{Terra}}{R_T^2}$$

$$|\vec{P}| = m |\vec{g}|$$

$$|\vec{g}| = G \frac{M_{Terra}}{R_T^2} \quad G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

$$M_{Terra} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg (valor médio)}$$

$$R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$G \frac{M_{Terra}}{R_T^2} = 9.83 \text{ m/s}^2$$

Impulsão:

Um corpo mergulhado num fluido (ar, gás ou líquido), este exerce uma força vertical, para cima, e de intensidade igual ao peso do fluido deslocado:

$$V_{fluido} = V_{corpo}, \text{ e}$$

$$|\vec{F}_{impulsão}| = m_{fluido} g$$

$$m_{fluido} = \rho_{fluido} V_{fluido},$$

em que ρ_{fluido} é a massa específica do fluido.

Força elétrica

Força elétrica entre duas cargas, q e Q (por experiências e medições)

Força atrativa entre cargas de sinais opostos e repulsiva entre cargas de igual sinal

Na direção das duas cargas

$$|\vec{F}_{elétrico}| = K \frac{qQ}{d^2}, \quad K = 8.987551 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2 \text{ (constante de Coulomb)}$$

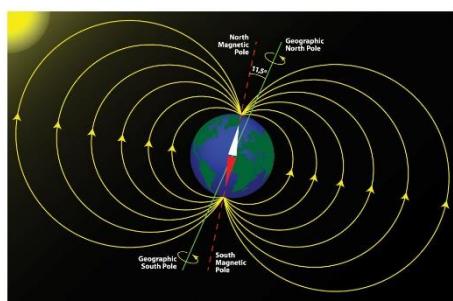
d distância entre 2 cargas

Força elétrica aplicada a um corpo de carga elétrica q , **num campo elétrico** $\vec{E}_{elétrico}$

$$\vec{F}_{elétrico} = q \vec{E}_{elétrico}$$

Força magnética aplicada a um corpo de carga elétrica q , **num campo magnético** $\vec{B}_{magnético}$

$$\vec{F}_{magnético} = q \vec{v} \times \vec{B}_{magnético}$$



Força normal \vec{N} ou \vec{n} é uma **força de contato**

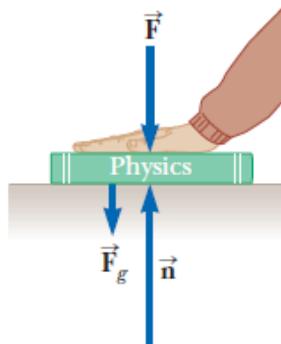


Figure 5.9 When a force \vec{F} pushes vertically downward on another object, the normal force \vec{n} on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

- perpendicular à superfície, e oposto.
- intensidade variável, a necessária para equilibrar o livro
(impede o livro de cair e de entrar dentro da mesa)

Qual a força normal aplicada ao livro (em função do peso e da força exercida pela mão)?

Forças aplicadas ao livro:

Peso: \vec{P} ou \vec{F}_g

Normal: \vec{n}

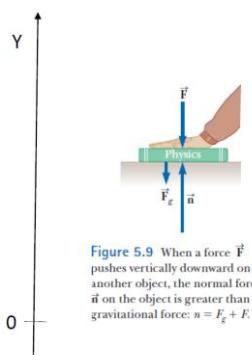
Força exercida pela mão: \vec{F}

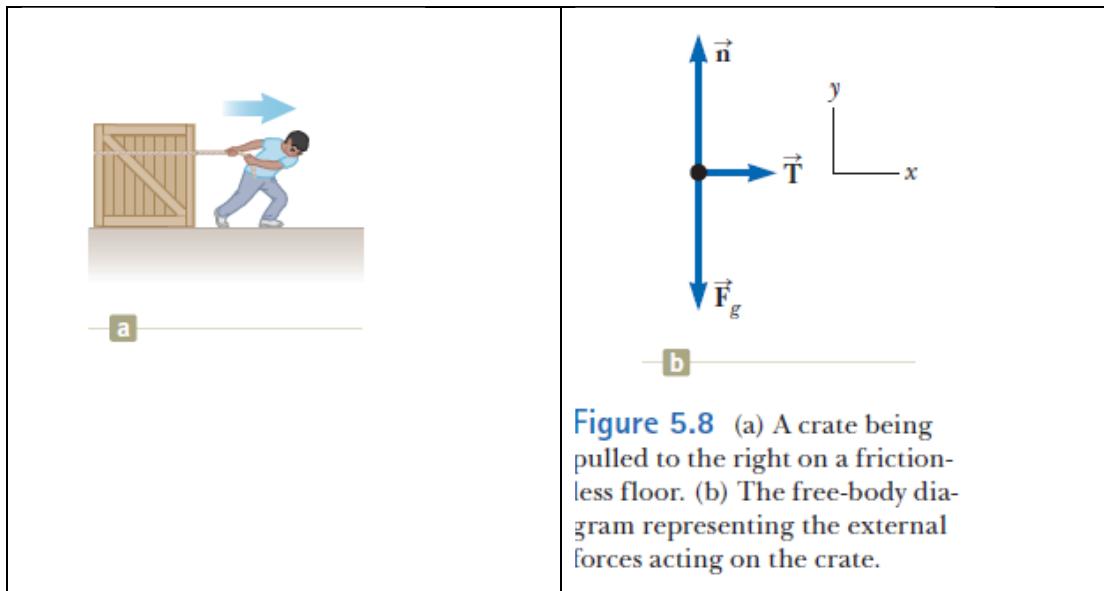
$$\text{Não existe movimento: } \vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = -\vec{F} - \vec{P}$$

Projetando no eixo OY

$$\begin{aligned} n_y &= -F_y - P_y \\ + |\vec{n}| &= -(-|\vec{F}|) - (-|\vec{P}|) \end{aligned}$$

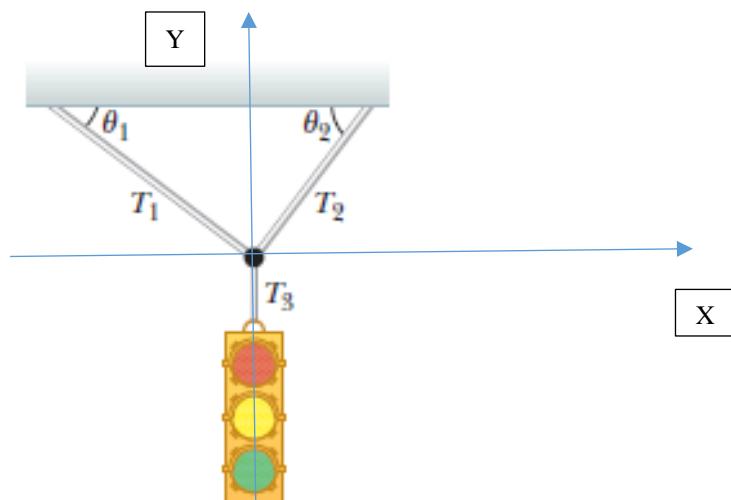
$$|\vec{n}| = |\vec{F}| + |\vec{P}|$$



Força Tensão

A força tensão na corda, a força que o homem aplica à corda para vencer as forças de atrito ou resistência ao movimento

Exemplo: Um semáforo pendurado por duas cordas não cai. Qual a relação entre as forças a que o semáforo está sujeito? O semáforo é reduzido a um ponto material (para um corpo tem-se de considerar mais outra lei, que impede rotação). Considere que a tensão que \vec{T}_3 é igual ao peso do semáforo, $\vec{T}_3 = \vec{P}$.



1^a lei de Newton

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0 \text{ e projetando}$$

$$\begin{cases} F_x = -|\vec{T}_1| \cos \theta_1 + |\vec{T}_2| \cos \theta_2 + 0 = 0 \\ F_y = |\vec{T}_1| \sin \theta_1 + |\vec{T}_2| \sin \theta_2 - |\vec{T}_3| = 0 \\ -|\vec{T}_1| \cos \theta_1 + |\vec{T}_2| \cos \theta_2 = 0 \\ |\vec{T}_1| \sin \theta_1 + |\vec{T}_2| \sin \theta_2 = |\vec{P}| \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} |\vec{T}_1| = |\vec{P}| \cos \theta_2 / \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ |\vec{T}_2| = |\vec{P}| \cos \theta_1 / \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Visto que (ver formulário) $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2$

Problema 3.20

Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo θ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida. O carro tem a massa m .

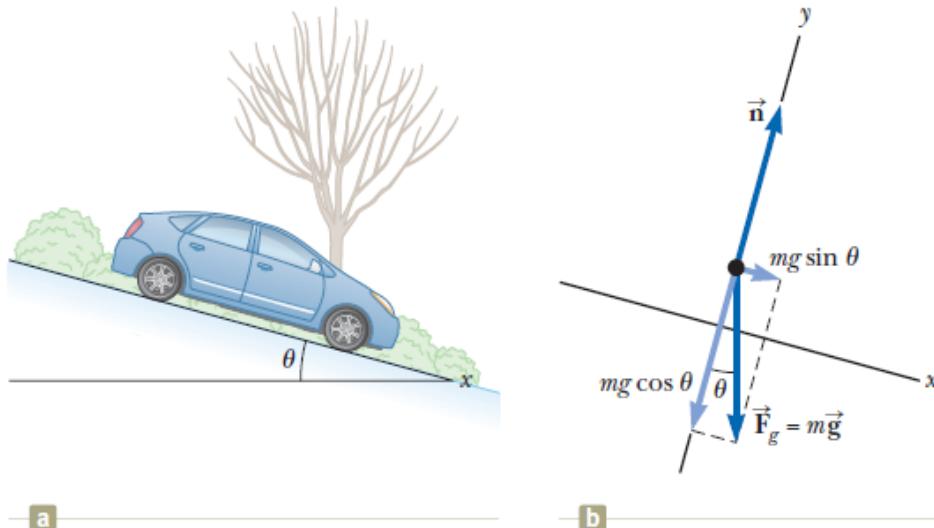


Figure 5.11 (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

O sistema de eixos escolhido é o mais conveniente, pois temos o eixo OX coincidente com a direção do movimento.

É feita a aproximação do carro a um ponto material. Esta aproximação pode ser insuficiente quando existem rotações.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a} \quad \vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = +m g \sin \theta + 0 = ma_x \\ F_y = -m g \cos \theta + |\vec{n}| = 0 \end{cases} \Rightarrow a_x = g \sin \theta$$

a força normal anula as forças na direção OY $|\vec{n}| = m g \cos \theta$

Bibliografia

- Serway, cap. 3 e 5;
- Sørensen, cap. 5 e 6;
- Villate, cap. 4
- Coleção Schaum, Linear Algebra, cap. 1

Problemas

Vetores a 2 dimensões

Nota: Resolva estes problema com papel e lápis e de seguida em python, usando o pacote numpy.

Vetor: $a = np.array([2, 3, -2])$;

Produto escalar: $np.dot(a,b)$; Produto vetorial: $np.cross(a,b)$

1. Um vetor a 2 dimensões tem as coordenadas (3, 4).

- a) Qual o seu módulo ou comprimento?
- b) Qual o vetor unitário correspondente?
- c) Qual o vetor $2 \times (3, 4)$? Qual o seu comprimento ou módulo?
- d) Qual o vetor $-2 \times (3, 4)$? Qual o seu comprimento ou módulo?

2. Dois vetores são (1, 2) e (-2, 3). Qual o seu produto escalar e qual o ângulo entre os dois vetores?

3. Dois vetores são (1, 2) e (-2, 1). Qual o seu produto escalar e qual o ângulo entre os dois vetores?

4. Considere um espaço a duas dimensões e o vetor (3,4).

- a) Encontre um vetor perpendicular ao vetor (3, 4).
 - b) Encontre os dois vetores unitários perpendiculares ao vetor (3,4)
- Note que o produtor escalar de dois vetores perpendiculares é nulo.

5. Duas forças aplicadas a um corpo de massa 2 kg, são (2,0; 1,2) N e (-3,0; 5,1) N.

Calcule a força resultante. Qual a sua intensidade?

6. Uma força de intensidade 6,0 N e de coordenada $F_x = 2,0$ N, qual a sua coordenada segundo OY?

7. Uma força tem como coordenada segundo OX $F_x = 2,0$ N e faz um ângulo de 60° com o eixo dos OX. Qual a intensidade (ou módulo) da força?

8. Uma força de intensidade $|\vec{F}| = 2.00 \text{ N}$ faz um ângulo θ com o eixo positivo OX.

Quais as coordenadas (F_x, F_y) da força, quando o ângulo for:

- a) $\theta = \pi/2$
- b) $\theta = -\pi/6$
- c) $\theta = 60^\circ$
- d) $\theta = 120^\circ$
- e) $\theta = 3\pi/2$
- f) $\theta = -7\pi/6$
- g) $\theta = 310^\circ$
- h) $\theta = 240^\circ$

9. Uma força de intensidade $|\vec{F}| = 10.0 \text{ N}$. Quais as coordenadas (F_x, F_y) da força,

quando o ângulo for:

- a) 30° com a parte positiva do eixo OX
- b) 10° com a parte positiva do eixo OY
- c) 30° com a parte negativa do eixo OX

Vetores a 3 dimensões

10. A força resultante aplicada a um objeto de massa 100 g é $(2,0; 4,0; 0,0) \text{ N}$. Qual a aceleração que provoca no objeto?

11. A aceleração de um objeto de massa 2 kg é de $(1,0; 0; 2,0) \text{ m/s}^2$. Qual a força resultante que provoca essa aceleração? E qual a sua intensidade?

12. Estão aplicadas duas forças a um objeto, $(2,0, 1,0, 0) \text{ N}$ e $(3,0, 0,0, 1,0) \text{ N}$. Qual a aceleração que originam num objeto de massa 2.0 kg?

13. Determine o produto escalar dos vetores $(2,0; 3,2; -1,0)$ e $(-1,0; 2,0; 4,6)$.

14. Um feixe de raios catódicos viaja num espaço onde existe um campo elétrico $\vec{E} = (0,1,0) \text{ N/C}$ (unidades SI). A força aplicada a cada partícula do feixe (eletrão) é

$\vec{F} = q \vec{E}$, onde $q = -1,602176208 \times 10^{-19}$ C é a carga elétrica do eletrão. Determine a aceleração que o eletrão sofre nesse campo elétrico, sabendo que a massa do eletrão é $m_e = 9,10938356 \times 10^{-31}$ kg?

15. Encontre o produto vetorial $(2,0; 3,0; -2) \times (-1,5; -1,0; 2,0)$. E o ângulo entre os dois vetores? Calcule também o ângulo entre os dois vetores através do produto escalar.

16. A lei do movimento de um objeto de massa 1 kg é $\vec{r} = (2t, t, 0)$ m.

a) Calcule a lei da velocidade.

b) Calcule o momento angular definido por $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$.

17. A lei do movimento de um objeto de massa 0.1 kg é $\vec{r} = (\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ m.

a) Calcule a lei da velocidade.

b) Calcule o momento angular definido por $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$, sabendo que a massa do objeto é 0.1 kg e $\omega = 1.0$ rad/s

18. Um objeto tem aplicada a força $\vec{F} = (0, 0, 0,1)$ N no ponto de coordenadas $\vec{r} = (1, 0, 0)$ m. Calcule o momento da força (torque) definido por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

19. Uma bola de futebol é pontapeada de modo que roda sobre si própria, o que resulta adicionar a força de Magnus às outras forças. A força de Magnus resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a rotação for descrita pelo vetor $\vec{\omega} = (0,0,10)$ rad/s e a velocidade for $\vec{v} = (0, 1, 0)$ m/s, qual a força de Magnus, se for definida por $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$, em que $A = \pi r^2$ é a área da secção de corte da bola, r o raio da bola e $\rho_{ar} = 1.225$ kg/m³ a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm.

20. Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo θ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida. O carro tem a massa m .

Capítulo 4

Movimento no plano e no espaço

Sumário

Movimento de um projétil a 2 dimensões.

Trajetória do projétil sem resistência do ar.

Trajetória do projétil com resistência do ar.

Trajetória do projétil com resistência do ar e com o efeito da rotação da bola.

Trajetória da Terra à volta do Sol.

Python

Criação e Uso de ‘functions’

Métodos Numéricos

Interpolação de Lagrange. Cálculo de máximos, mínimos e zeros de uma função.

Método de Euler-Cromer.

4.1 Introdução

O estudo e a previsão de trajetórias de corpos no espaço é possível se conhecermos as forças aplicadas ao corpo, pela Lei fundamental da Dinâmica

$$\vec{F}(t) = m \vec{a}(t)$$

Se soubermos a resultante das forças aplicadas ao corpo, e a sua massa m , podemos determinar a aceleração instantânea

$$\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m \Leftrightarrow \begin{cases} a_x(t) = F_x(t)/m \\ a_y(t) = F_y(t)/m \\ a_z(t) = F_z(t)/m \end{cases}$$

E sabendo a aceleração podemos calcular a velocidade instantânea, $\vec{v}(t)$, e a lei do movimento, $\vec{r}(t) = (x, y, z)$, ou seja, como a posição instantânea, pelo uso das relações

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Ou em termos de força,

$$\frac{\vec{F}(t)}{m} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Em termos de coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} \frac{F_x(t)}{m} = \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \frac{F_y(t)}{m} = \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \frac{F_z(t)}{m} = \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

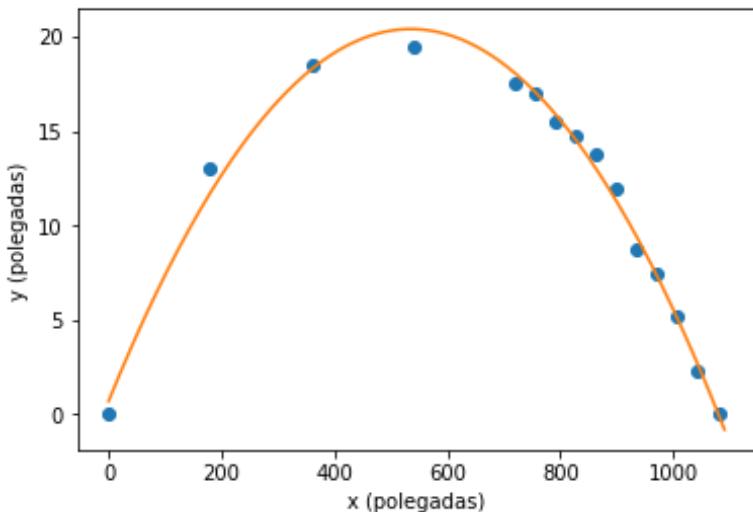
$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados

(i) por métodos analíticos (integração) ou (ii) por métodos numéricos, por exemplo o Método de Euler.

4.2 Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

Uma pequena bola foi atirada por uma mola. O registo do seu percurso foi medido em pares de posição (x, y) e podemos ver como pontos na figura abaixo. O seu pequeno tamanho faz reduzir a força de resistência do ar. Decididamente a curva não é linear. Um ajuste a um polinómio do 2º grau obtém um bom acordo com os valores medidos. O polinómio é

$$y = -0.000069 x^2 + 0.074 x + 0.710$$



Vamos considerar um modelo simples, para iniciar:

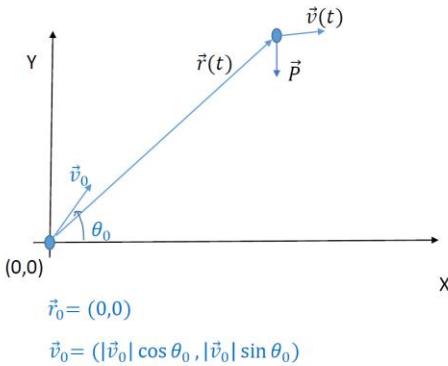
Modelo: O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade.

Aproximação: Não se considera o efeito da resistência do ar, a rotação da bola, o efeito de altitude, impulsão, a rotação da Terra, ...

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \text{em que } \vec{F} = \vec{P}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,

- na posição \vec{r}_0
- e inicia o seu movimento com
- uma velocidade \vec{v}_0 ,
- de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$
- e a fazer um ângulo θ_0 com a horizontal (solo)



$$\vec{P} = m \vec{a} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} P_x = m a_x \\ P_y = m a_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_x \\ -|\vec{P}| = m a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (x_0, y_0) = (0,0) \quad \text{e} \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos \theta_0, |\vec{v}_0| \sin \theta_0) \\ t_0 &= 0 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t a_x(t) dt \\ v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^t a_y(t) dt \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) - v_{0x} = \int_0^t 0 dt \\ v_y(t) - v_{0y} = \int_0^t -g dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v_x(t) dt \\ y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t v_y(t) dt \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t v_{0x} dt \\ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t [v_{0y} - gt] dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Eliminando o tempo nas expressões da lei do movimento, de modo a obter \$y\$ em função de \$x\$

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y = y_0 + v_{0y} \frac{x - x_0}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 \end{cases}$$

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x(t) - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x(t) - x_0)^2$$

obtemos a equação da parábola, o que concorda com as observações experimentais de uma bola pequena, analisado na parte inicial desta secção. Podemos até prever (e depois comparar com os valores medidos) a velocidade inicial e o ângulo \$\theta_0\$ com a horizontal, com que a bola pequena foi lançada.

Tomando \$x_0 = 0\$, e comparando com a relação obtida a partir das medições,

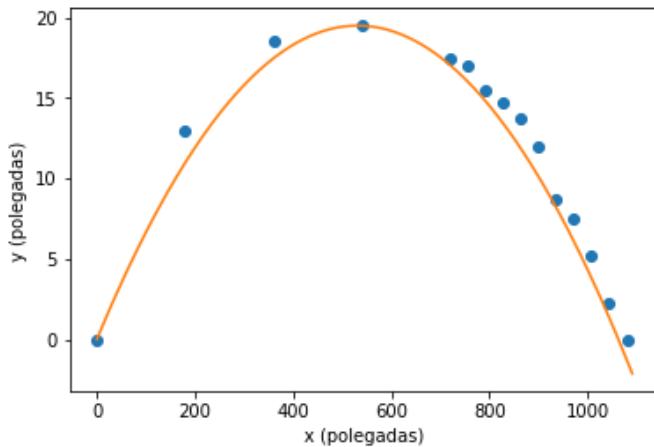
$y = -0.000069 x^2 + 0.074 x + 0.710$ polegadas
temos

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = 0.074 \Leftrightarrow \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = 0.074 \Rightarrow \theta_0 = \arctan 0.074 = 4.2^\circ$$

$$\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} = 0.000069 \Leftrightarrow v_{0x}^2 = \frac{g}{2 \times 0.000069} = 71014.49$$

e $|\vec{v}_0| = \frac{v_{0x}}{\cos \theta_0} = 267$ polegadas/s = 378 km/h

Estes valores de θ_0 e de $|\vec{v}_0|$ são coerentes com valores expectáveis a retirar só das medições.



Análise da trajetória

A trajetória de um corpo lançado obliquamente, em que as forças aplicadas ao corpo é só o seu peso, é dada pelas equações

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \\ \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \\ y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} (x - x_0)^2 \end{cases}$$

e consiste numa parábola. Pode ser visto no gráfico acima (com $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$).

Várias perguntas importantes podem ser feitas, quando se sabe a trajetória:

1. Qual a altura máxima (y_m) da trajetória e quando é atingida (t_m)?

2. Qual o alcance máximo (x_{solo}) e quando o alcança t_{solo} ?

A condição de altura máxima é (quando $y(t)$ é máximo)

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow v_y = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_{0y}}{g} \quad \text{e} \quad y_m = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g}$$

A condição de alcance máximo

$$y = 0$$

e quando $y_0 = 0 \Rightarrow t_{solo} = \frac{2 v_{0y}}{g}$

$$\text{e quando } x_0 = 0 \quad \Rightarrow x_{\text{solo}} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g}$$

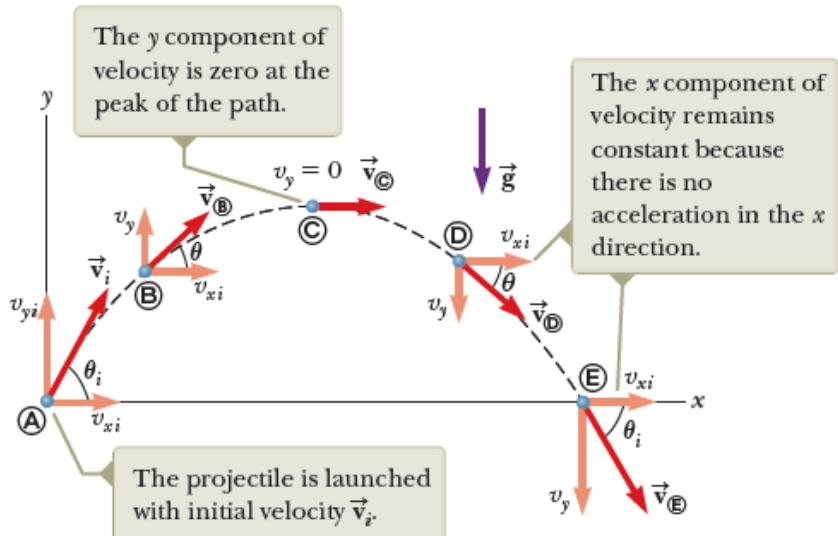
No modelo físico considerado atrás, a trajetória da bola pequena,
 $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$

$$\begin{cases} |\vec{v}_0| = 267 \text{ polegadas/s} \\ \theta_0 = 4.2^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 266.282 \text{ polegadas/s} \\ v_{0y} = 19.554 \text{ polegadas/s} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_m &= 2.0 \text{ s} \\ y_m &= 19.5 \text{ polegadas} \\ t_{\text{solo}} &= 4.0 \text{ s} \\ x_{\text{solo}} &= 1063 \text{ polegadas} \end{aligned}$$

Pelo gráfico vimos o acordo da previsão do modelo para a altura máxima e alcance máximo é bom.

A trajetória de um corpo só sujeito ao seu peso, a sua trajetória é uma parábola, como é vista na figura abaixo, assim como a velocidade em qualquer ponto e as suas componentes cartesianas.



4.3 Estudo da trajetória de uma bola de futebol com resistência do ar

A maioria dos corpos que se movem no nosso planeta estão sujeitos, além do seu peso, também a uma força de resistência do ar. O nosso modelo simples tem de incluir esta força de resistência. Basta considerar também esta força

$$\vec{F}^{res} = m D |\vec{v}|^2 \hat{v}, \quad \text{em que } \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad D = g/v_T^2$$

na equação fundamental da dinâmica

$$\vec{F} = \vec{P} - m D |\vec{v}|^2 \hat{v} = m \vec{a}$$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos um problema a 2D:

$$\vec{F} = \vec{P} - m D |\vec{v}|^2 \hat{v} = m \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = P_x - m D |\vec{v}| v_x = m a_x \\ F_y = P_y - m D |\vec{v}| v_y = m a_y \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} a_x = -D |\vec{v}| v_x \\ a_y = -g - D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

Como sabemos a aceleração instantânea, podemos integrar

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

as equações diferenciais. Neste caso não é possível integrar analiticamente, então vamos tentar integrar numericamente usando o método de Euler a cada uma das equações diferenciais.

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler das duas equações diferenciais. O método de Euler calcula a velocidade num instante posterior, conhecendo a aceleração a velocidade no instante anterior

$$\begin{cases} v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t \\ v_y(t + \delta t) \approx v_y(t) + a_y(t) \times \delta t \end{cases}$$

Como já fizemos, considera-se um ciclo para termos a velocidade num intervalo de tempo de interesse (até por exemplo o corpo atingir o solo). Em python

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2      # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
```

2º Cálculo da posição por integração com o método de Euler das duas equações diferenciais:

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

Neste caso temos

$$\begin{cases} x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t \\ y(t + \delta t) \approx y(t) + v_y(t) \times \delta t \end{cases}$$

Em python:

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    dres=g/vt**2      # D
    ax[i]=-dres*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

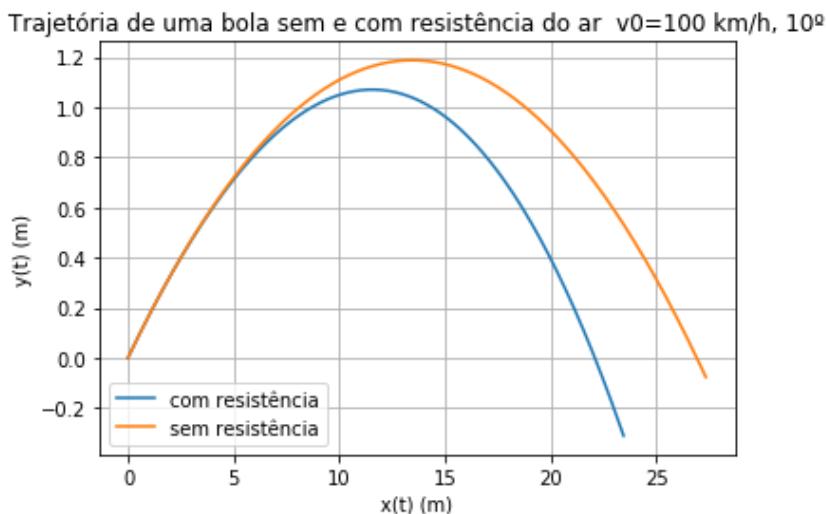
Problema Vamos considerar uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com o campo (horizontal), as condições do problema 4.1

O input é

$$\begin{cases} |\vec{v}_0| = 100 \text{ km/h} \\ \theta_0 = 10^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = 26.8 \text{ m/s} \\ v_{0y} = 7.19 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$$

A obtida pelo método de Euler está apresentada no gráfico abaixo a azul.



Teste para validar o método de Euler aplicado a este problema:

Quando a força de resistência do ar for nula, temos o modelo simples (só se considera o peso do corpo) e os resultados devem ser os mesmo que os obtidos analiticamente. No gráfico acima está a amarelo a trajetória que o corpo seguiria se não houvesse resistência do ar.

Com $\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$ a altura máxima e o instante em que alcança,

$$y_m = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} \quad \text{e} \quad t_m = \frac{v_{0y}}{g},$$

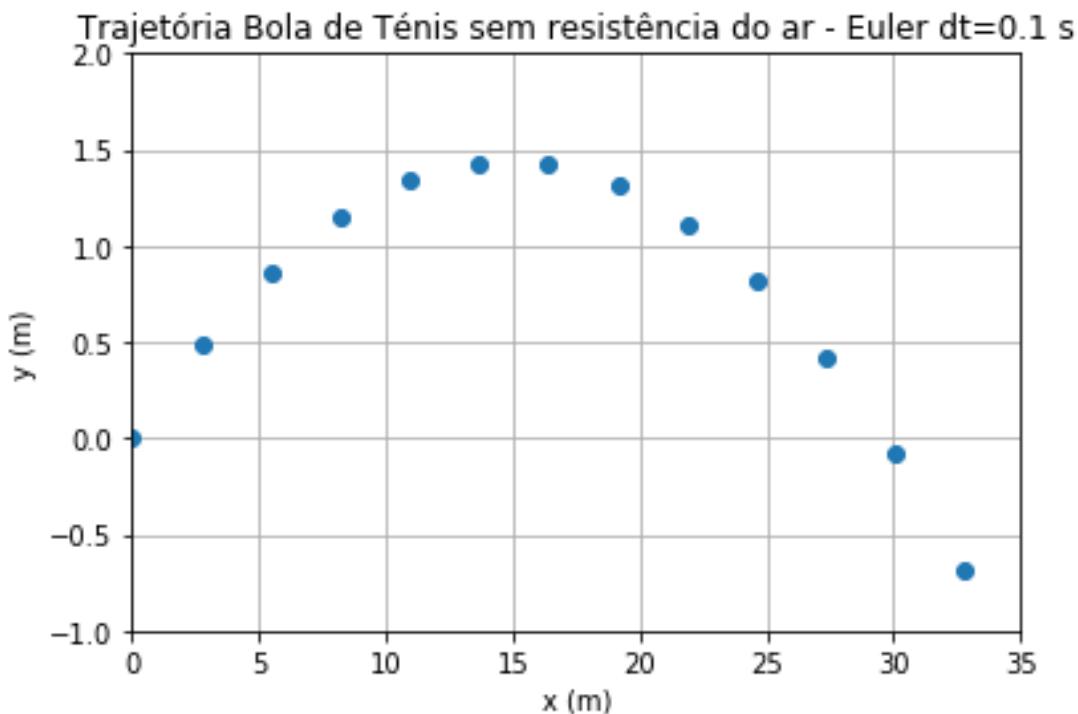
respetivamente. O alcance e o instante em que atinge o solo é

$$x_{solo} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} \quad \text{e} \quad t_{solo} = \frac{2 v_{0y}}{g},$$

respetivamente. Obtemos, por via analítica:

$$\begin{cases} y_m = 1.1871 \text{ m} \\ t_m = 0.49220 \text{ s} \\ x_{solo} = 26.929 \text{ m} \\ t_{solo} = 0.98440 \text{ s} \end{cases}$$

Como determinar estes valores, uma vez que não temos a expressão funcional, mas temos a função só em alguns pontos, como mostra a figura abaixo.



1. Para a altura máxima, analisamos a matriz onde estão os pontos y, e vemos qual o maior. A condição de maior é, por exemplo, o ponto que tem os pontos imediatamente próximos com altura mais baixa.
2. Para o alcance máximo, onde a bola encontra o solo, é o ponto em que se passa de y positivo, para y negativo. Este ponto pode ser encontrado pela condição

$$y_i * y_{i+1} < 0,$$

pois o valor deste produto é único. O alcance máximo será o valor de y_m correspondente ao valor de y_m mais perto de zero.

Para usarmos o método de Euler temos de escolher o passo tempo δt , o que deverá ser muito mais pequeno do que o a duração do movimento, t_f , tal como $\delta t = t_f/200$.

Uma estima grosseira por excesso, poderá ser deste tempo $t_f = 2t_{\text{ solo}} \approx 2$ s, o que faz $\delta t = 0.01$ s. Na tabela abaixo está os resultados para vários passos temporais.

δt	y_m (m)	$t_{\text{ solo}}$ (s)	$x_{\text{ solo}}$ (m)
0.1	1.43178	1.100000	30.09135
0.01	1.21128	0.990000	27.08221
0.001	1.18949	0.985000	26.94543
0.0001	1.18732	0.984500	26.93176
exato	1.1871	0.98440	26.929

A convergência para os valores exatos é muito lenta. Para o passo $\delta t = 0.001$ s obtém-se valores com a precisão de 3 dígitos. Vamos usar este passo para o estudo do movimento com resistência do ar.

Movimento com resistência do ar

δt	y_m (m)	$t_{\text{ solo}}$ (s)	$x_{\text{ solo}}$ (m)
0.01	1.0923	0.95000	22.466
0.001	1.0723	0.93500	22.135
0.0001	1.0703	0.93370	22.106

Os valores convergem para

$$\begin{cases} y_m = 1.07 \text{ m} \\ x_{\text{ solo}} = 22.1 \text{ m} \\ t_{\text{ solo}} = 0.93 \text{ s} \end{cases}$$

Estes valores são mais pequenos que os correspondentes ao movimento sem resistência do ar.

4.4 Estudo da trajetória de uma bola de futebol com resistência do ar e rotação da bola

Problema 3. Um jogador de futebol executa um canto e chuta a bola de modo a ela entrar na baliza. Para conseguir uma trajetória que possibilite à bola entrar na baliza, pontapeia a bola com uma rotação lateral sobre si própria, o que resulta no aparecimento da força de Magnus, $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$, em que $A = \pi r^2$ é a área da secção de corte da bola, r o raio da bola e $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm. Esta força de resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a bola for chutada com a rotação descrita pelo vetor $\vec{\omega} = (0,400,0) \text{ rad/s}$ e a velocidade inicial for $\vec{v} = (25,5, -50) \text{ m/s}$, e a posição inicial for o canto $(0,0,23.8) \text{ m/s}$, a bola entra na baliza? A massa da bola de futebol é 0,45 kg. O sistema de eixos considerado é: OX de baliza a baliza, OY o eixo vertical e OZ o eixo deste o poste da baliza e passa pela marca de canto. É golo quando: $x < 0$ e $0 < z < 7.3 \text{ m}$ e $0 < y < 2.4 \text{ m}$. A velocidade terminal é $v_T = 100 \text{ km/h}$.

Vamos estudar o movimento de uma bola de futebol em rotação e sujeita à resistência do ar, assim como à gravidade.

O peso é

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

A força de resistência do ar apresentamos na forma

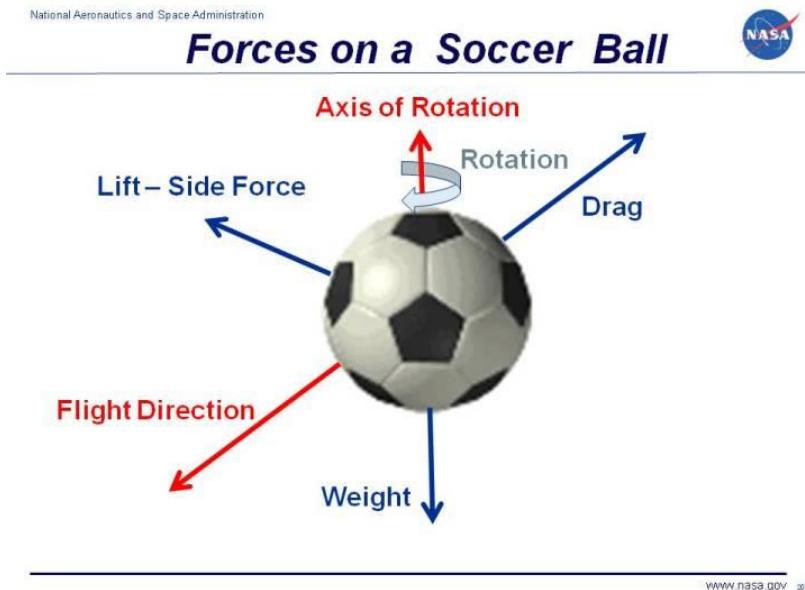
$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

A rotação da bola faz que o escoamento do ar seja diferente nos lados opostos da bola. O resultado é o aparecimento de uma força perpendicular ao eixo de rotação. É a força de Magnus, que tem a forma

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

onde, $A = \pi r^2$ a área da secção da bola, ρ_{ar} a densidade do ar e r o raio da bola. A rotação é caracterizada pelo vetor rotação $\vec{\omega}$, em que $|\vec{\omega}| = \text{ângulo (rad)/segundo}$.

Estas forças estão ilustradas na figura abaixo.



A força total aplicada à bola durante o seu trajeto é:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{Magnus}$$

As três forças aplicadas não têm a mesma direção, o que origina um movimento a 3 dimensões. Vamos por isso usar a equação fundamental da dinâmica nos três eixos cartesianos

$$\vec{F} = \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{Magnus} = m \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + F_{res,x} + F_{Magnus,x} = ma_x \\ F_y = P_y + F_{res,y} + F_{Magnus,y} = ma_y \\ F_z = P_z + F_{res,z} + F_{Magnus,z} = ma_z \end{cases}$$

Na figura abaixo, de um futebolista a pontapear um canto, estão os eixos cartesianos. As projeções das forças são:

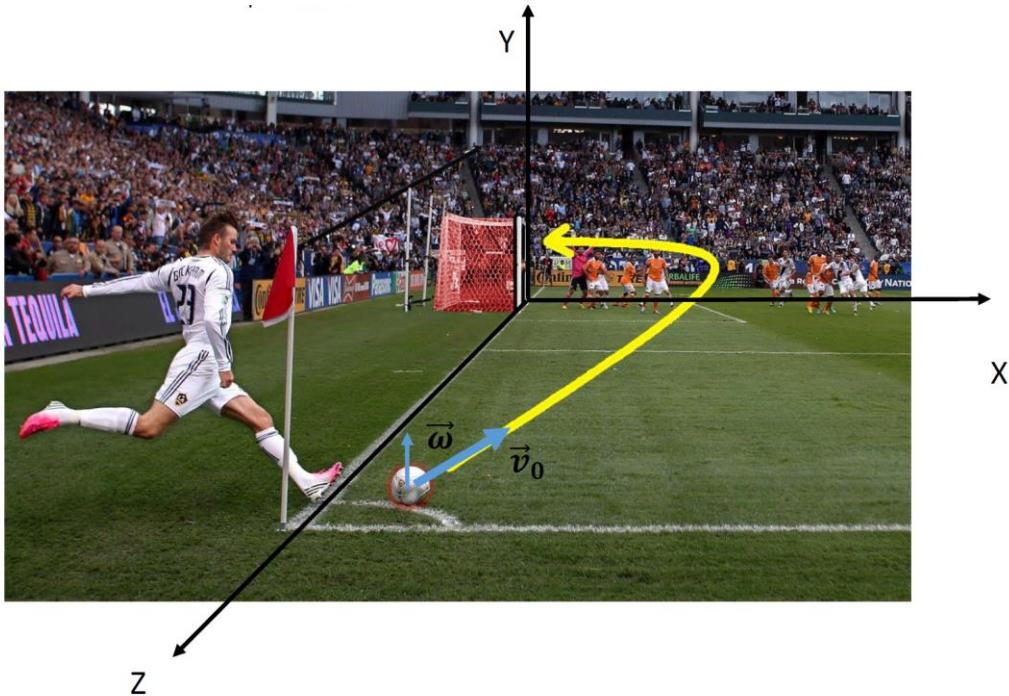
$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \text{ e} \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_{res,y} = -m D |\vec{v}| v_y \\ F_{res,z} = -m D |\vec{v}| v_z \end{cases}$$

O vetor velocidade angular $\vec{\omega} = (0,400,0)$ rad/s, faz que a força de Magnus seja

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Magnus} &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 400 & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r (400 v_z \hat{i} - 400 v_x \hat{k}) \end{aligned}$$

e assim as projeções são:

$$\begin{cases} F_{Magnus,x} = 200 \rho_{ar} r v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -200 \rho_{ar} r v_x \end{cases}$$



As projeções das forças são:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \quad \text{e} \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_{res,y} = -m D |\vec{v}| v_y \\ F_{res,z} = -m D |\vec{v}| v_z \end{cases}$$

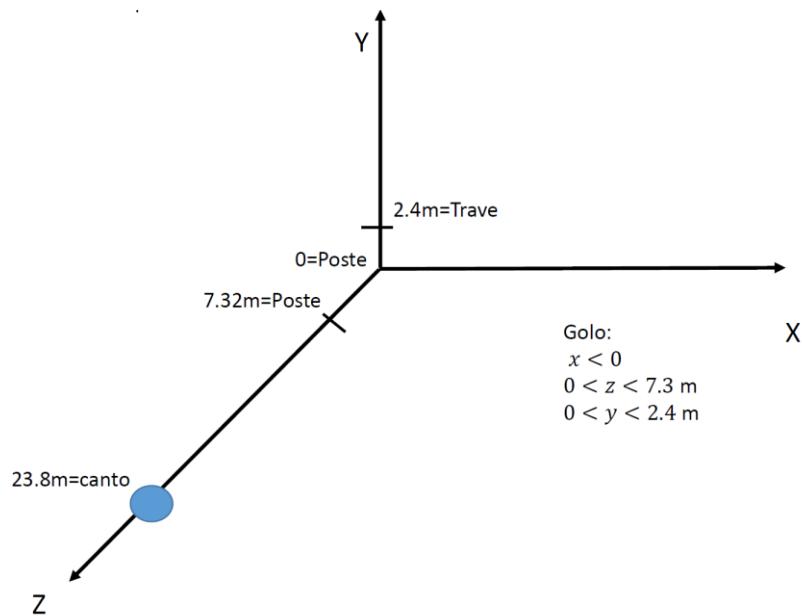
O vetor velocidade angular $\vec{\omega} = (0, 400, 0)$ rad/s, faz que a força de Magnus seja

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Magnus} &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 400 & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} A \rho_{ar} r (400 v_z \hat{i} - 400 v_x \hat{k}) \end{aligned}$$

e assim as projeções são:

$$\begin{cases} F_{Magnus,x} = 200 \rho_{ar} r v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -200 \rho_{ar} r v_x \end{cases}$$

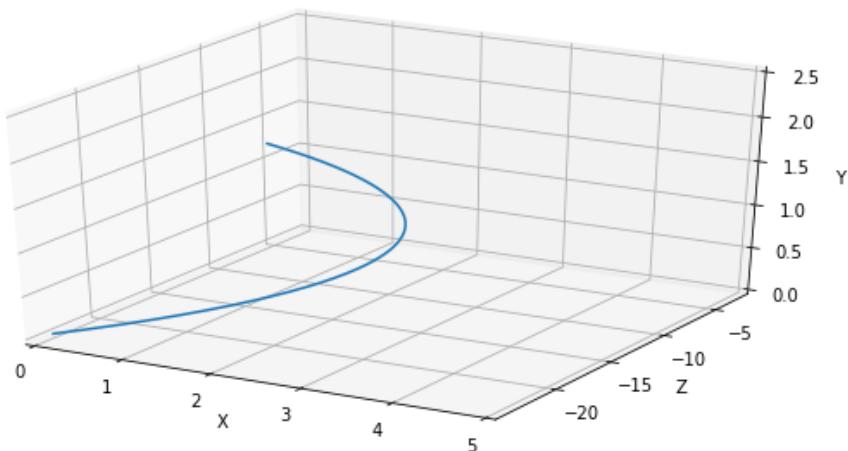
A baliza tem postes separados de 7.32 m, e a trave está à altura de 2.4. O canto está à distância 23.8 m do poste mais afastado. Posicionamos a baliza no sistema de coordenadas como está na figura abaixo.



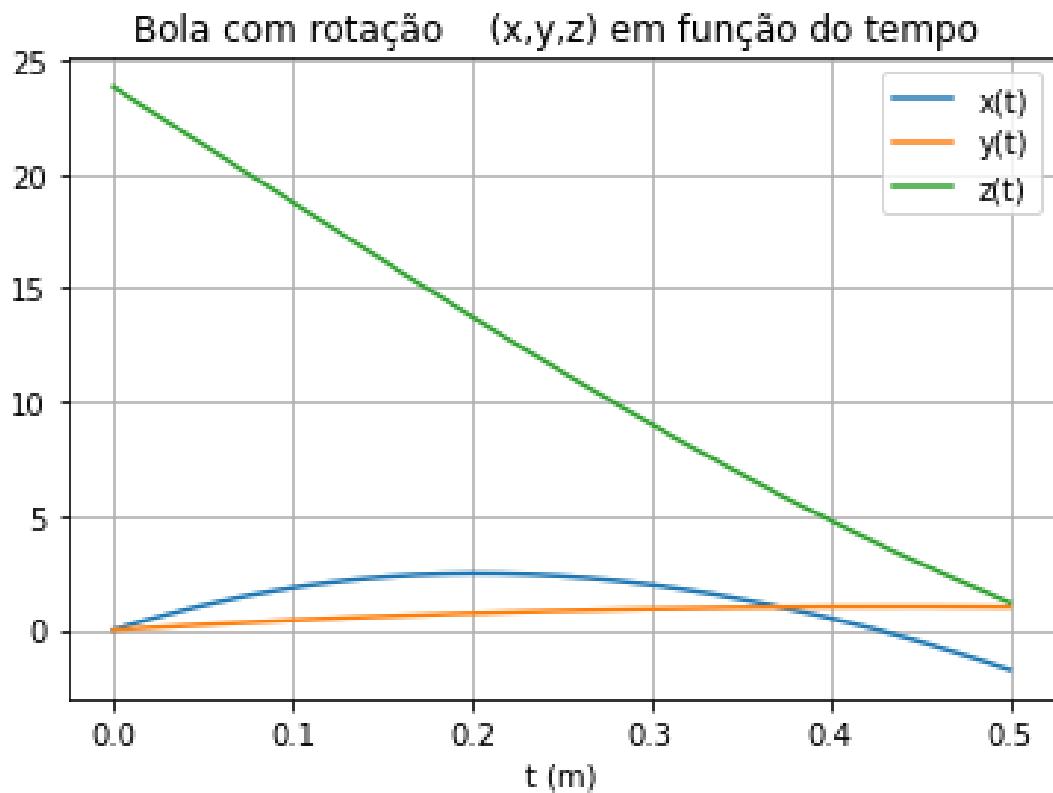
Neste sistema de coordenadas, é golo quando :

$$\begin{cases} x < 0 \\ 0 < y < 2.4 \text{ m} \\ 0 < z < 7.3 \text{ m} \end{cases}$$

Com os dados do problema, a trajetória da bola está na figura



Se comparamos as dimensões e a posição da baliza, vimos que é marcado golo direto. Mas vamos visualizar mais em detalhe as projeções da trajetória nos três eixos, figura abaixo.



Efetivamente em instantes entre 4 e 5 s, as três coordenadas obedecem às condições de golo

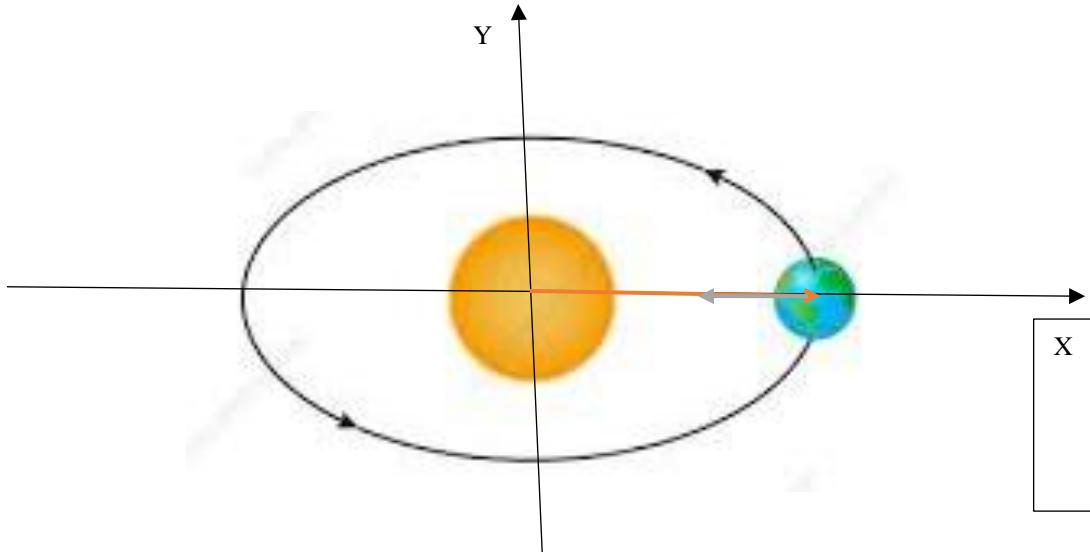
$$\begin{cases} x < 0 \\ 0 < y < 2.4 \text{ m} \\ 0 < z < 7.3 \text{ m} \end{cases}$$

4.5 Trajetória da Terra à volta do Sol.

Vamos tratar o movimento da Terra à volta do Sol com um modelo muito simples. Consideremos o Sol como fixo e o sistema Sol-Terra sujeito à força gravítica que cada astro exerce no outro. A força que a Terra está sujeita é

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad \text{em que } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

e \vec{r} é o vetor com origem no Sol e termina na Terra. Na figura abaixo o vetor posição da Terra está a laranja e a força gravítica a cinzento claro.



Num sistema de eixos centrado no Sol, a posição da Terra é dada por $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ e a força que o Sol exerce na Terra é

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} (\vec{x} \hat{i} + \vec{y} \hat{j}) = \left(-G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} x, -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} y \right)$$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos um problema a 2D:

$$\vec{F} = \vec{F}_{grav} = m \vec{a} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} F_{grav,x} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} x = ma_x \\ F_{grav,y} = -G \frac{mM}{|\vec{r}|^3} y = ma_y \end{cases}$$

e
$$\begin{cases} a_x = -G \frac{M}{|\vec{r}|^3} x \\ a_y = -G \frac{M}{|\vec{r}|^3} y \end{cases}$$

Como sabemos a aceleração instantânea, podemos integrar as equações

diferenciais.
$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

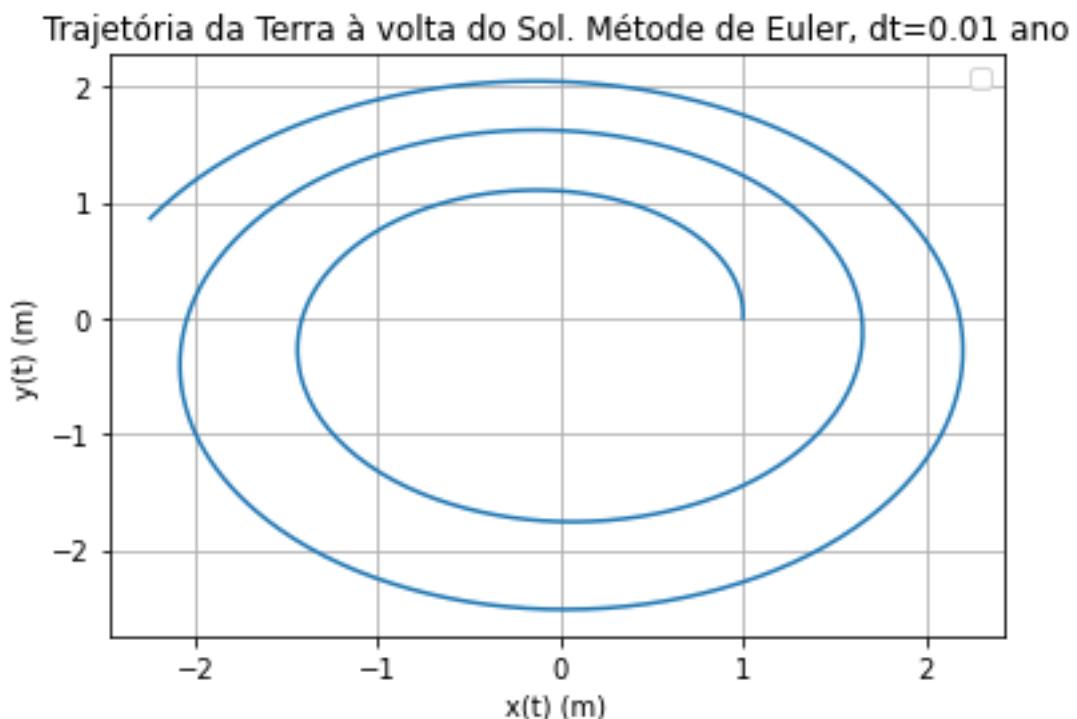
Este problema tem solução analítica. A solução é conhecida por nós, a Terra movimenta-se em órbitas elípticas. Mas nós vamos estudar o movimento da Terra usando métodos numéricos. Vamos verificar qual o desempenho do método de Euler neste problema.

Se usarmos um dos programas (uma cópia) que já fizemos sobre movimento a 2 dimensões, e mudando só a parte da aceleração, como no programa abaixo

```
# Integração pelo método de Euler
```

```
....  
t[0]=0  
vx[0]=v0x  
vy[0]=v0y  
x[0]=x0  
y[0]=y0  
for i in range(n):  
    t[i+1]=t[i]+dt  
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)  
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]  
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]  
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt  
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt  
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt  
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

obtemos trajetórias abaixo. Mesmo com um passo pequeno, as órbitas não se fecham.



Método de Euler-Cromer

Foi descoberto (devido a um erro no programa) que se alterar a forma como a posição é calculada, não a partir da velocidade no instante anterior, mas sim no posterior

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t + \delta t) \times \delta t$$

Permanecendo o cálculo da velocidade como no método de Euler,

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

como está implementado no programa abaixo

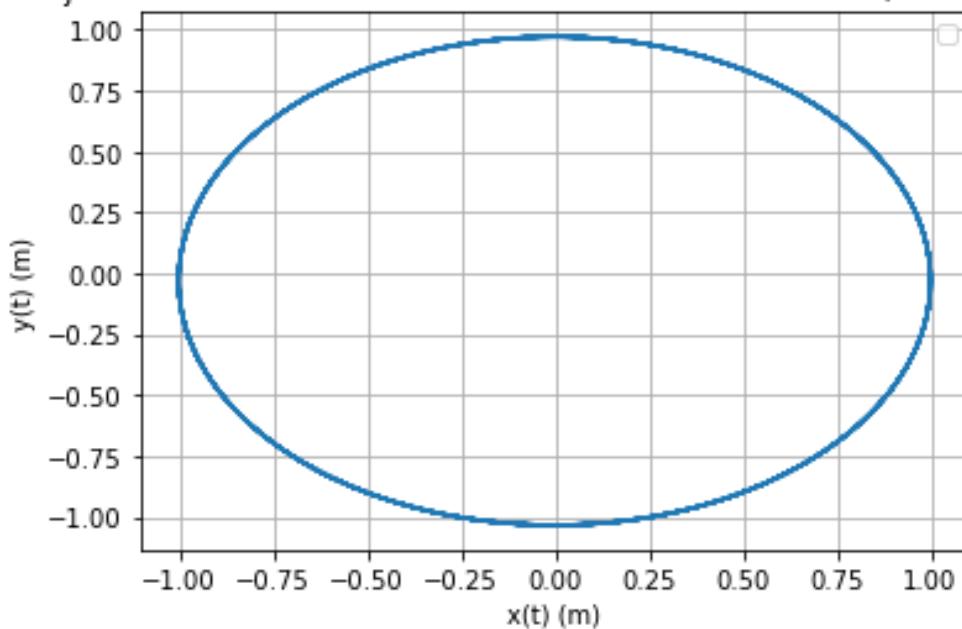
```
#Integração pelo método de Euler-Cromer ou Euler modificado
...
t[0]=0
vx[0]=v0x
vy[0]=v0y
x[0]=x0
y[0]=y0
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt
```

as órbitas terrestres já se fecham, como mostra a figura abaixo.

Cromer, o professor que viu o erro, mostrou que este método apresenta:

- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas para movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período (Terra à volta do Sol demora um ano)

Trajetória da Terra à volta do Sol. Método de Euler-Cromer, dt=0.01 ano



Cromer, o professor que viu o erro, mostrou que este método apresenta:

- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas para movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período (Terra à volta do Sol demora um ano)

Este novo método é apelidado de Euler-Cromer, ou método de Euler modificado. Este estudo mostra que o método de Euler é medíocre para movimentos periódicos.

Bibliografia

Serway, cap. 4;

Sørensen, cap. 6;

Villate, cap. 6

Problemas

- 1.** Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o campo (horizontal).
- Encontre a lei do movimento usando métodos analíticos, se só considerar o peso da bola. Faça um gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.
 - Nas condições da alínea a), qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante?
 - Nas condições da alínea a), qual o alcance (distância entre a posição onde foi chutada e o ponto onde alcançou no campo) da trajetória da bola e quanto tempo demorou?
 - Desenvolva um programa que obtenha a lei do movimento e a lei da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler. Tem confiança que o seu programa está correto?
 - Considerando agora a resistência do ar. A força de resistência do ar ao movimento da bola é:

$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

em que $D = g/v_T^2$, e a velocidade terminal é $v_T = 100$ km/h. Atualize o seu programa de modo a considerar a força de resistência do ar. Faça o gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.

- Nas condições da alínea e), determine qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante? Tem confiança no seu resultado?
- Nas condições da alínea e), qual o alcance (distância entre a posição onde foi chutada e o ponto onde alcançou no campo) da trajetória da bola e quanto tempo demorou? Tem confiança no seu resultado?

- 2.** Um volante de badminton é batido à altura de 3 m (a partir do chão), com velocidade 200 km/h e a fazer um ângulo de 10° com a horizontal. Considerando que a velocidade terminal é 6.80 m/s,

- Faça o gráfico da trajetória (altura em função da distância percorrida na horizontal).
- Em ponto cai no chão e quanto demorou?

- 3.** Um jogador de futebol executa um canto e chuta a bola de modo a ela entrar na baliza. Para conseguir uma trajetória que possibilite à bola entrar na baliza, pontapeia a bola com uma rotação lateral sobre si própria, o que resulta no aparecimento da força de Magnus, $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$, em que $A = \pi r^2$ é a área da secção de corte da bola, r o raio da bola e $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm. Esta força de resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola. Se a bola for chutada com a rotação descrita pelo vetor $\vec{\omega} = (0,400,0)$ rad/s e a velocidade inicial for $\vec{v} = (25,5, -50)$ m/s, e a posição inicial for o canto $(0,0,23.8)$ m/s, a bola entra na baliza? A massa da bola de futebol é 0,45 kg. O sistema de eixos considerado é: OX de baliza a baliza, OY o eixo vertical e OZ o eixo deste o poste da baliza e passa pela marca de canto. É golo quando: $x < 0$ e $0 < z < 7.3$ m e $0 < y < 2.4$ m. A velocidade terminal é $v_T = 100$ km/h.

- 4.** Numa partida de ténis, muitas vezes a bola é batida de modo a adquirir rotação, num eixo horizontal e perpendicular à velocidade. Calcule a trajetória da bola, quando parte da posição inicial $(-10,1,0)$ com a velocidade 130 km/h, a fazer um ângulo de 10° com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo

vertical. A bola de ténis tem a massa 57 g, o diâmetro 67 mm e no ar tem a velocidade terminal 100 km/h. Calcule a altura máxima e o alcance (quando bate em $y = 0$) da trajetória da bola, quando

- a) A rotação é nula.
- b) A rotação é descrita por $\vec{\omega} = (0, 0, +100)$ rad/s
- c) A rotação é descrita por $\vec{\omega} = (0, 0, -100)$ rad/s

5. Simule a órbita da Terra á volta do sol, usando o método de Euler sabendo que a força de atração da Terra exercida pelo Sol é

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \hat{r}$$

em que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ e \vec{r} o vetor da posição da Terra relativamente ao Sol.

Como as quantidades envolvidas são enormes, trabalhe no sistema astronómico de unidades (ver apêndice). Considere a posição inicial da Terra (1,0) AU, e a velocidade inicial ($0,2\pi$) AU/ano e o Sol como fixo na origem do sistema de eixos.

- a) A órbita da Terra à volta do sol é fechada? Consegue obter elipses?
- b) Implemente o método de Euler-Cromer. Este método a 1D integra as equações diferenciais

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

ao fazer as aproximações

$$\begin{aligned} v_x(t + \delta t) &= v_x(t) + a_x(t) \times \delta t \\ x(t + \delta t) &= x(t) + v_x(t + \delta t) \times \delta t \end{aligned}$$

Consegue órbitas fechadas? São elipses? Concordam com as leis de Kepler?

- c) Encontre o erro de truncatura deste método de Euler-Cromer.

6. Uma mola exerce uma força $F_x = -k x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m . Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

- a) Mostre que a lei do movimento $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, com $\omega = \sqrt{k/m}$, é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola, Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola, em que A e ϕ são constantes?
- b) Calcule numericamente a lei da velocidade e compare com o resultado analítico. Qual o método numérico que escolhe? Considere nula a velocidade inicial e a posição inicial 4 m.
- c) Calcule numericamente a lei do movimento nas condições da alínea anterior e compare com o resultado analítico.

Formulário MSF20022:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_t \delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 v_x}{dt^2} \right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 v_x}{dt^3} \right|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 \quad \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}| \vec{v} \quad \vec{F}_{res} = -\frac{c_{res}}{2} A \rho_{ar} |\vec{v}| \vec{v} \quad |\vec{F}_{rol}| = \mu |\vec{N}| \quad |\vec{F}_{impulsão}| = m_{fluido} g$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}_{elástica} = -k \vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k_e \frac{q Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}_{elet} = q \vec{E}_{elet}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad E_p = m g y \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad E_p = -G \frac{m M}{|\vec{r}|}$$

$$P_o = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 E_p}{dx^3} \right|_{x_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b \omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Grandezas físicas e conversões:

$$\begin{aligned}
1 \text{ polegada} &= 1 \text{ in} = 0,39370 \text{ m} & 1 \text{ pé} &= 1 \text{ ft} = 2,54 \text{ cm} & 1 \text{ milha} &= 1,609344 \text{ km} \\
1 \text{ rad} &= 57.29578 \text{ graus} \\
1 \text{ cv (cavalo - vapor métrico)} &= 735,4975 \text{ W} & 1 \text{ hp (cavalo - vapor inglês)} &= 745,715 \text{ W} \\
M_{Sol} = M &= 1.989 \times 10^{30} \text{ kg} & 1 \text{ AU} &= 1.489 \times 10^{11} \text{ m} & 1 \text{ ano} &= 365,24 \text{ dias} \\
g = 9,80 \text{ m/s}^2 & & G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) &= 4\pi^2 \text{ AU}^3/(M \cdot \text{ano}^2) & R_{Terra} &= 6371 \text{ km} \\
\rho_{ar} &= 1.225 \text{ kg/m}^3 & v_{som} &= 340 \text{ m/s} \\
c &= 299792,458 \text{ km/s} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \\
k_B &= 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.61733 \times 10^{-5} \text{ eV/K} \\
\varepsilon_0 &= 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m} & k_e &= 1/4\pi\varepsilon_0 = 8,98755188 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \\
m_e &= 9,10938356 \times 10^{-31} \text{ kg} \\
m_p &= 1,67262 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836.151 m_e \\
m_n &= 1,67493 \times 10^{-27} \text{ kg} & 1 \text{ \AA} &= 10^{-10} \text{ m} \\
e &= 1,602176208 \times 10^{-19} \text{ C} & e/c &= 5,34428 \times 10^{-28} \text{ C} \cdot \text{m/s}
\end{aligned}$$

Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$$\begin{aligned}
e &= 2,71828183 & \pi &= 3,14159265 \\
\sin(-x) &= -\sin(x) & \sin(\pi - x) &= \sin(x) & \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \pm \cos(x) \\
\cos(-x) &= +\cos(x) & \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin(x) \\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \\
\cos x \sin y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)] \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x & \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\
\sin x \pm \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 & \tanh(x) &= \sinh(x) / \cosh(x)
\end{aligned}$$

Sistema Internacional de Unidades (SI):

Quantidades básicas

Quantidade	unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampere	A

Outras quantidades importantes

Quantidade	unidade	Símbolo
Velocidade	metro/segundo	m/s
Aceleração	metro/segundo ²	m/s ²
Força	kilograma × metro/segundo ² = newton	N
Energia	kilograma × metro ² /segundo ² = joule	J
Potência	kilograma × metro ² /segundo ³ = watt	W

Sistema Astronómico de unidades

Grandeza	Símbolo	Definição	Valor no SI	Conversão do SI
Massa	M	Massa do Sol	$1,989 \times 10^{30}$ kg	$1 \text{ kg} = 5,028 \times 10^{-31} \text{ M}$
Distância	AU	Distância média da Terra ao Sol	$1,498 \times 10^{11}$ m	$1 \text{ m} = 6,676 \times 10^{-12} \text{ AU}$
Tempo	ano	Período da Terra em volta do Sol	$3,15 \times 10^7$ s	$1 \text{ s} = 3,17 \times 10^{-8} \text{ ano}$

Neste sistema, a constante de gravitação é

$$G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{(6.676 \times 10^{-12} \text{ AU})^3}{5.028 \times 10^{-31} \text{ M} (3.17 \times 10^{-8} \text{ ano})^2} = 4\pi^2 \text{ AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2),$$

a unidade de energia é 5.50×10^{38} J e a unidade de velocidade é 4718.48 m/s.

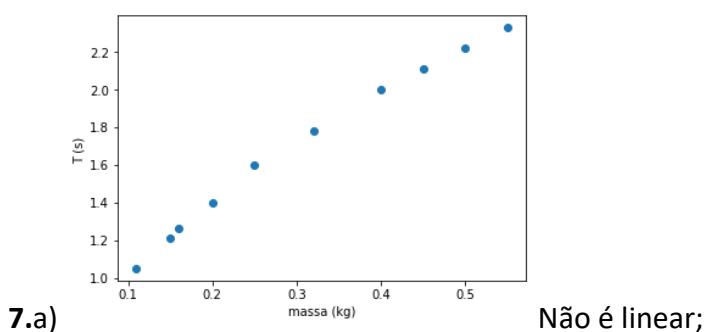
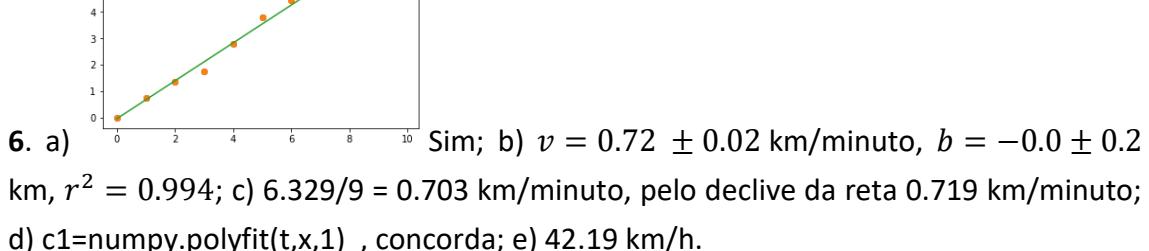
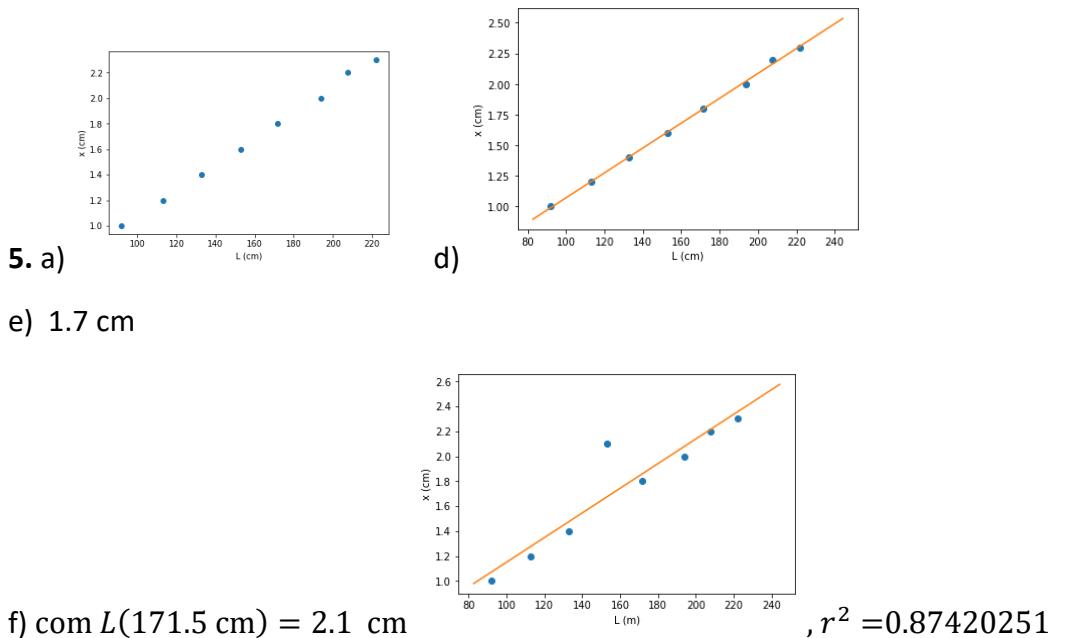
Quantidades experimentais do sistema solar.

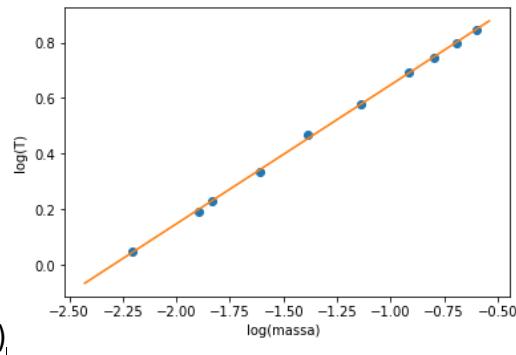
	Massa (kg)	Período sideral (1 ano=365,24 dias)	Distância média ao Sol (semi-eixo maior)	Excentricidade	Inclinação eclíptica (grau)
			(10^{11} m)	(AU)	
Mercúrio	$3,301 \times 10^{23}$	0,2408	0,5791	0,3871	0,2056
Vénus	$4,669 \times 10^{24}$	0,6151	1,082	0,723	0,0068
Terra	$5,978 \times 10^{24}$	1	1,496	1	0,0167
Marte	$6,420 \times 10^{23}$	1,881	2,279	1,523	0,0934
Júpiter	$1,899 \times 10^{27}$	11,86	7,783	5,203	0,0481
Saturno	$5,685 \times 10^{26}$	29,46	14,27	9,54	0,0533
Urano	$8,686 \times 10^{25}$	84,02	28,69	19,18	0,0507
Neptuno	$1,025 \times 10^{26}$	164,8	44,98	30,07	0,0040
Sol	$1,989 \times 10^{30}$				
Lua	$7,353 \times 10^{22}$		384 400 km à Terra		0,055
Plutão	5×10^{23}	248	59,00	39,44	0,2533
					17,142

Soluções de problemas

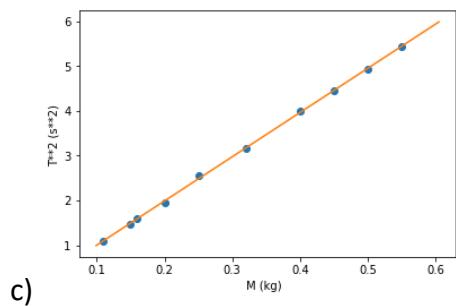
Cap. 1

1. a) 35 ± 2 cm; b) 15 ± 2 cm; c) 250 ± 35 cm
2. a) $30,1 \pm 0,4$ cm; b) $0,3 \pm 0,4$ cm; c) 1.3
3. a) $8x + 20xy$; b) $10x^2 + 2y$; c) $-4y + 20xyz$
4. a) 137 km/h; b) 38,0 m/s



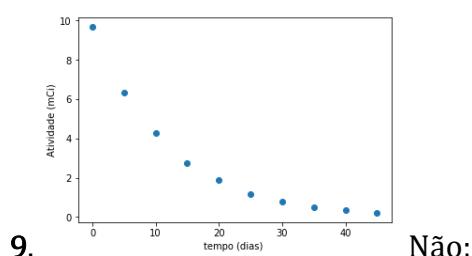
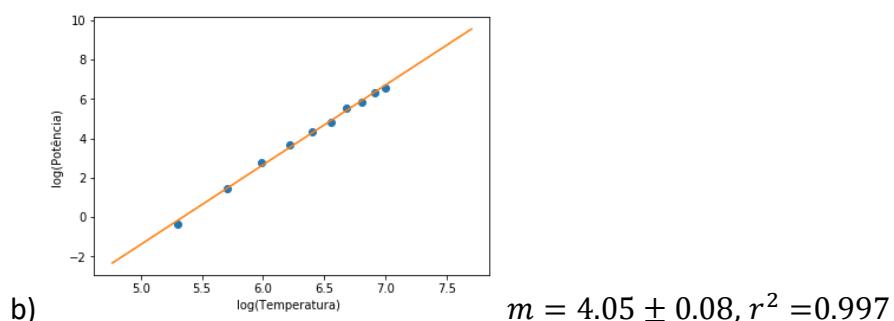
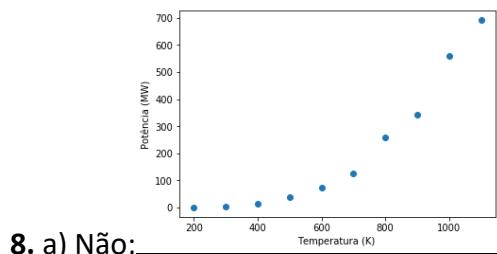


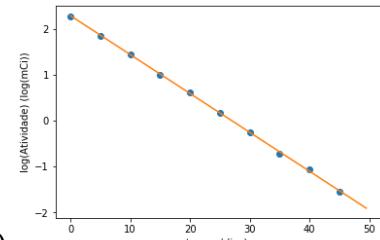
$$T = CM^{0.5} \quad (\text{declive é o expoente de uma lei de potência, } m = 0.499 \pm 0.005;$$



$$m = 9.87 \pm 0.08 \text{ s}^2/\text{kg}; b = 0.02 \pm 0.03 \text{ s}^2; r^2 = 0.9995$$

d) $k = 4.00 \pm 0.03 \text{ kg/s}^2$

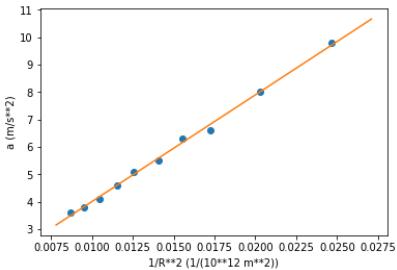




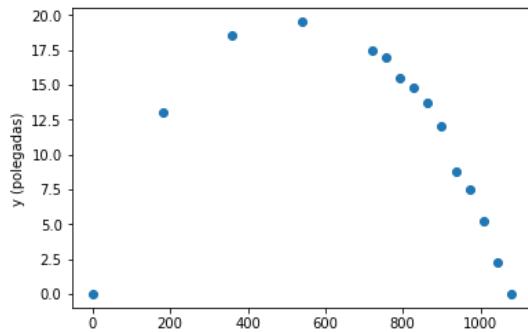
b) $m = -0.0847 \pm 0.0006 \text{ l dias}^{-1}$

$$\log\left(\frac{\text{atividade}(t)}{\text{atividade}(0)}\right) = (-0.0847 \pm 0.0006) t \quad t \text{ em dias}$$

$$\text{atividade} = \text{atividade}(0) \times e^{(-0.0847 \pm 0.0006) t}$$

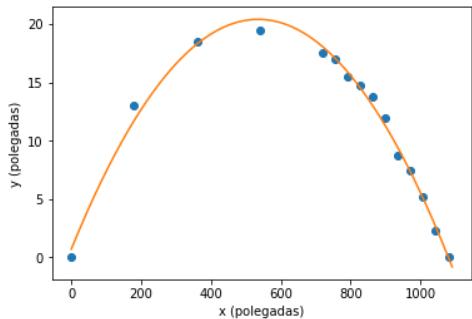


10. $K = (389 \pm 8) \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2 ; x \equiv 1/R^2, y \equiv a$



11. a) Não.

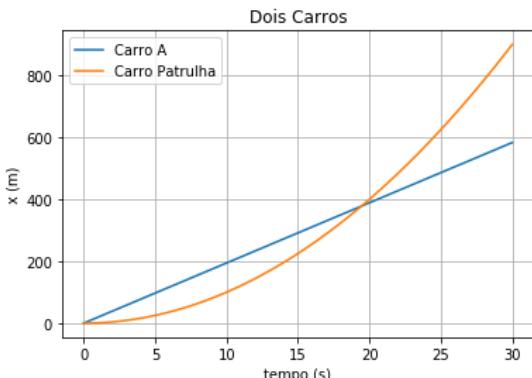
b) polyfit c2= [-6.87260098e-05 7.35804301e-02 7.10488194e-01]



Bom acordo.

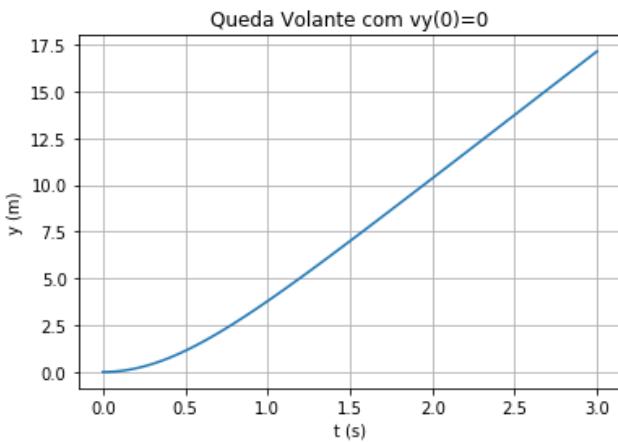
Cap. 2

Texto 2.1 O erro local de truncatura é proporcional às derivadas da aceleração em ordem ao tempo. Como a aceleração é constante, todas as derivadas que constam do erro local são nulas, o que faz o erro global também ser nulo.

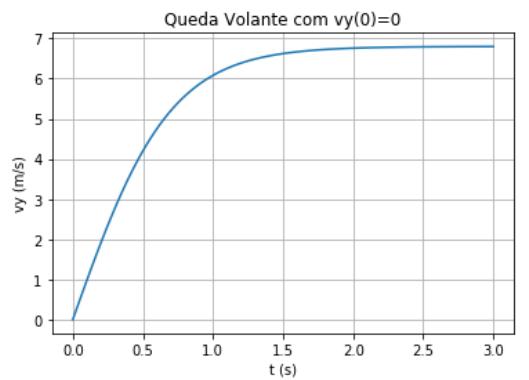


1. a)

b) 19 s, 378 m.

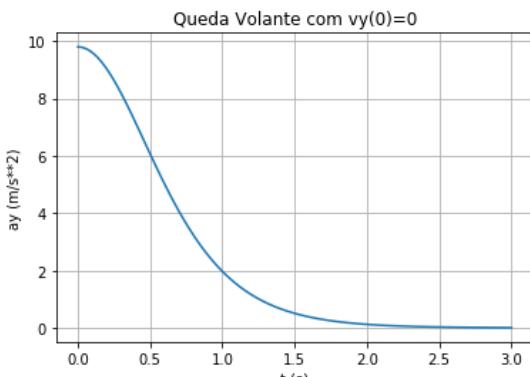


2. a)



$$\text{b) } v_x(t) = v_T \tanh \frac{gt}{v_T}$$

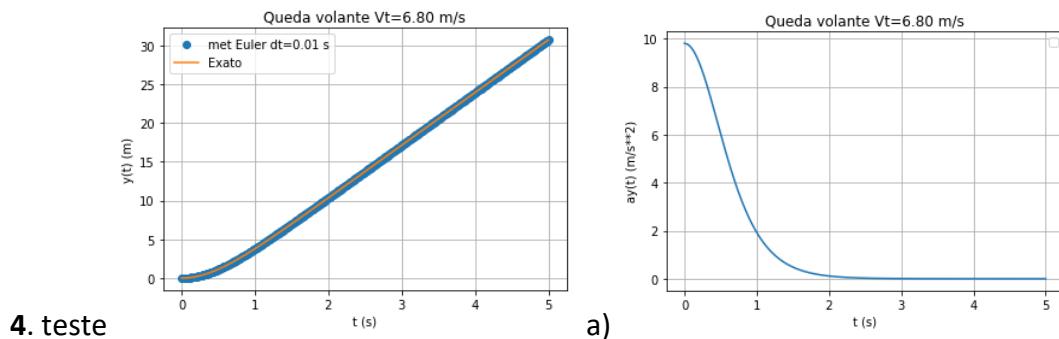
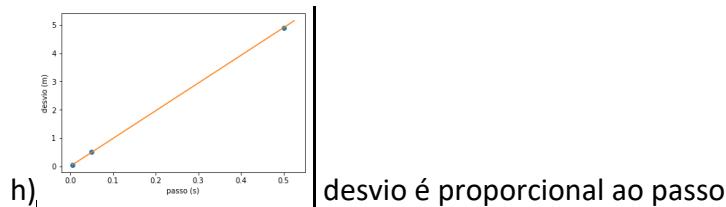
;

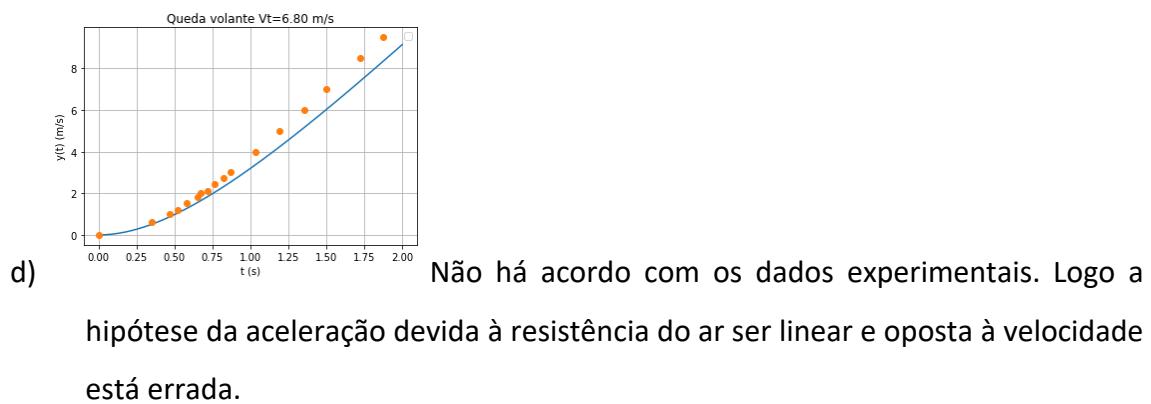
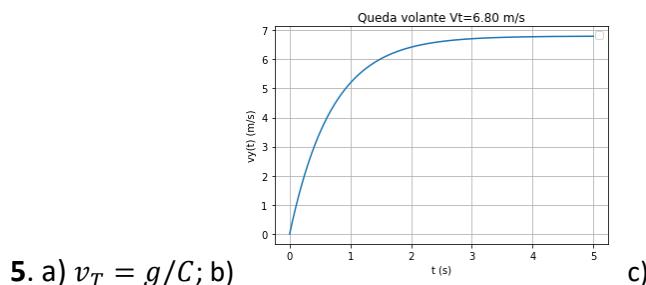
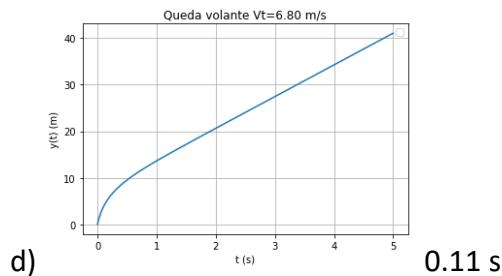
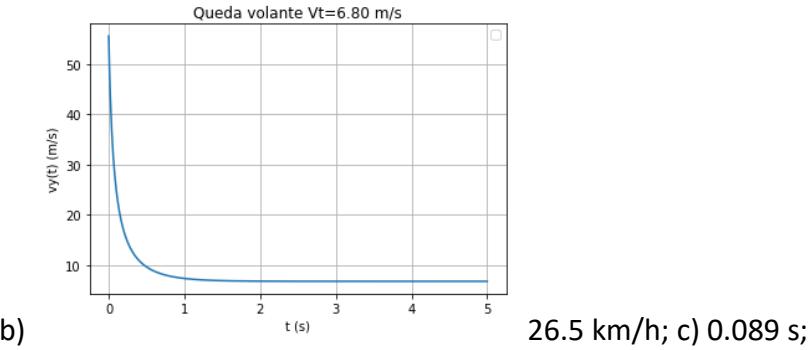


c) $a_x(t) = \frac{g}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_T}\right)}$;

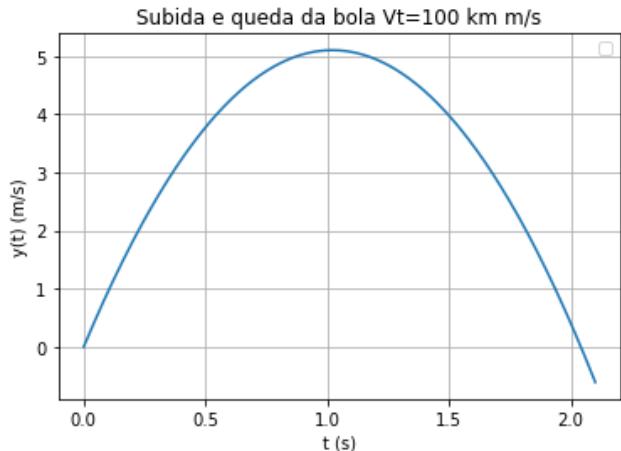
e) com resistência do ar 3.4 s; sem resistência 2,0 s; f) 6.8 m/s e 0.002 m/s².

3. a) $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$; b) 29.4 s; c) 29.4 s (neste caso não altera); d) todas os valores são iguais; e) passo=0.5 s, $x(2s) = 14.7$ m; f) passo=0.05 s, $x(2s) = 19.1$ m; g) $x_{exato}(2s) = 19.6$ m, passo diminui o valor aproximado aproxima-se do valor exato;





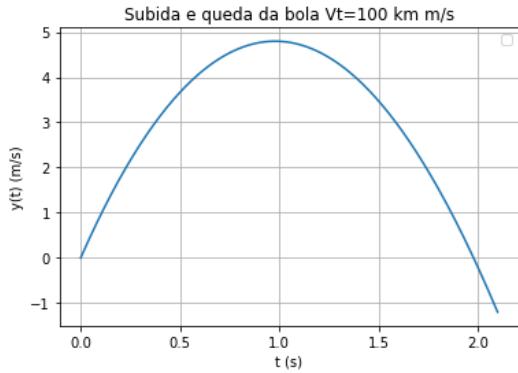
6. a) 20.9 s; 215 km/h; b) 3.3 minutos; 18 km/h; c) 29.9 s; 18 km/h; d) 3.5 minutos; 17 km/h



7. a) $y(t) = +10 t - \frac{1}{2} g t^2$;

b) $t_m = 1.02$ s, $y_m = 5.10$ m; c) $t_{solo} = 2.04$ s; $v_{solo,y} = -10.0$ m/s

d) $t_m = 0.979$ s, $y_m = 4.798$ m, $t_{solo} = 1.979$ s, $v_{solo,y} = -9.41$ m/s



8. A bola ténis chega ao solo em 1.02 s e o volante badminton 1.19 s. Chega 1º a bola de ténis

9. a) $\sigma(\delta t^3)$; b) $\sigma(\delta t^2)$;

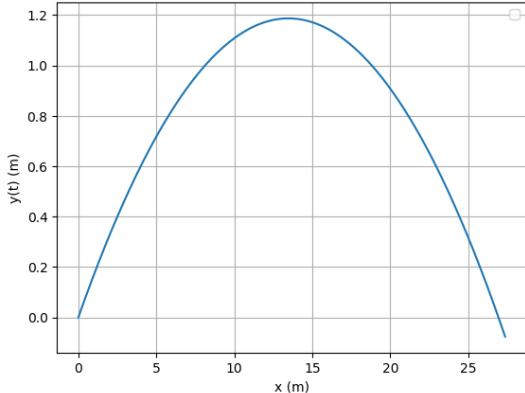
c) $v_x(\delta t/2) = v_x(0) + \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_{t=0} \delta t/2 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 v_x}{dt^2} \right|_{t=0} \delta t^2/4 + \sigma(\delta t^3)$

Cap. 3**1.** a) 5; b) $(375, 4/5)$; c) $(6,8), 10$; d) $(-6,-8), 10$ **2.** 4, $60,3^\circ$ **3.** 0, 90° **4.** a) Família de vetores $(a, -3/4 a)$, por exemplo o vetor $(4, -3)$;b) os versores $(4/5, -3/5)$ e $(-4/5, 3/5)$ **5.** $(-1,0; 6,6) \text{ N} ; 6,7 \text{ N}$ **6.** $+5,7 \text{ N}$ ou $-5,7 \text{ N}$ **7.** 4.0 N **8.** a) $(0.00, 2.00) \text{ N}$; b) $(1.73, -1.0) \text{ N}$; c) $(1.00, 1.73) \text{ N}$; d) $(-1.00, 1.73) \text{ N}$;e) $(0.00, -2.00) \text{ N}$; f) $(-1.73, 1.00) \text{ N}$; g) $(1.29, -1.53) \text{ N}$; h) $(-1.00, -1.73) \text{ N}$ **9.** a) $(8.66, 5.00) \text{ N}$; b) $(-9.85, 1.74) \text{ N}$; c) $(-8.66, 5.00) \text{ N}$ **10.** $(20, 40, 0) \text{ m/s}^2$ **11.** $(0,5; 0,0; 1,0) \text{ N}; 1,0 \text{ N}$ **12.** $(5/2, 1/2, 1/2) \text{ m/s}^2$ **13.** 0,20**14.** $(0, -1.8, 0) \times 10^{12} \text{ m/s}^2$ **15.** [4., -1., 2.5]; 154.2° **16.** a) $\vec{v} = (2, 1, 0) \text{ m/s}$; b) $\vec{L} = 0$ **17.** a) $\vec{v} = (-\omega \sin \omega t, \omega \cos \omega t, 0) \text{ m/s}$; b) $\vec{L} = (0, 0, 0.1) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ **18.** $\vec{\tau} = (0, 0.1, 0) \text{ m} \cdot \text{N}$ **19.** $\vec{F}_{Magnus} = (-0.026, 0, 0) \text{ N}$ **20.** $g \sin \theta$

Cap. 4

1. a) $\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$ $\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Trajetória de uma bola sem resistência do ar $v_0=100$ km/h, $\theta=10^\circ$

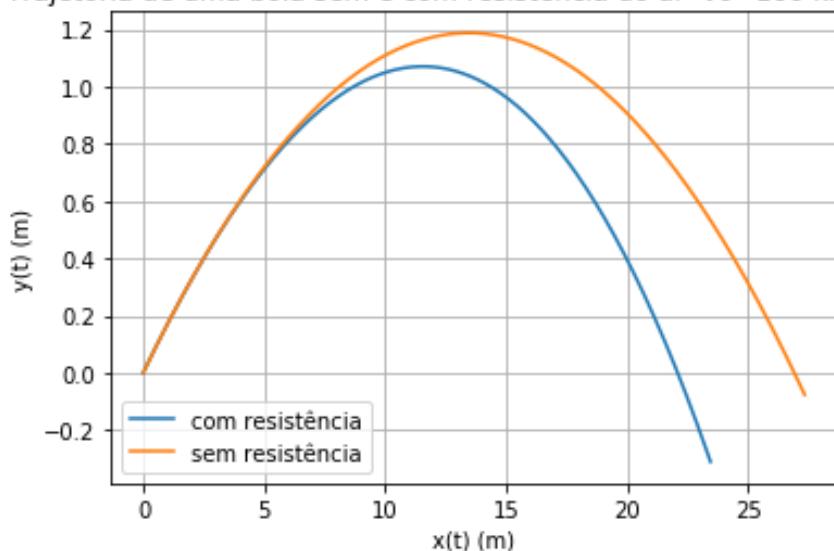


- b) $y_m = 1.19$ m e $t_m = 0.49$ s; c) $x_{solo} = 26.9$ m e $t_{solo} = 0.98$ s;
d) Um teste ao seu programa para ter confiança é reproduzir os resultados exatos obtidos nas alíneas anteriores.

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	1.440506	29.6646007221
0.01	1.21113	27.202581
0.001	1.18949136	26.95637
0.0001	1.18731954	26.931759207
0.00001	1.187102	26.9292971

A altura máxima é 1.187 m e o alcance é 26.9 m, o que reproduz os valores determinados pelo método exato.

Trajetória de uma bola sem e com resistência do ar $v_0=100 \text{ km/h}, 10^9$

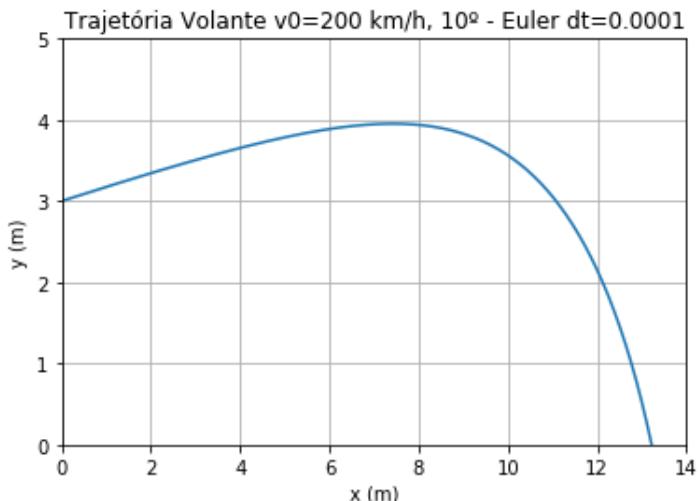


e)

f) e g)

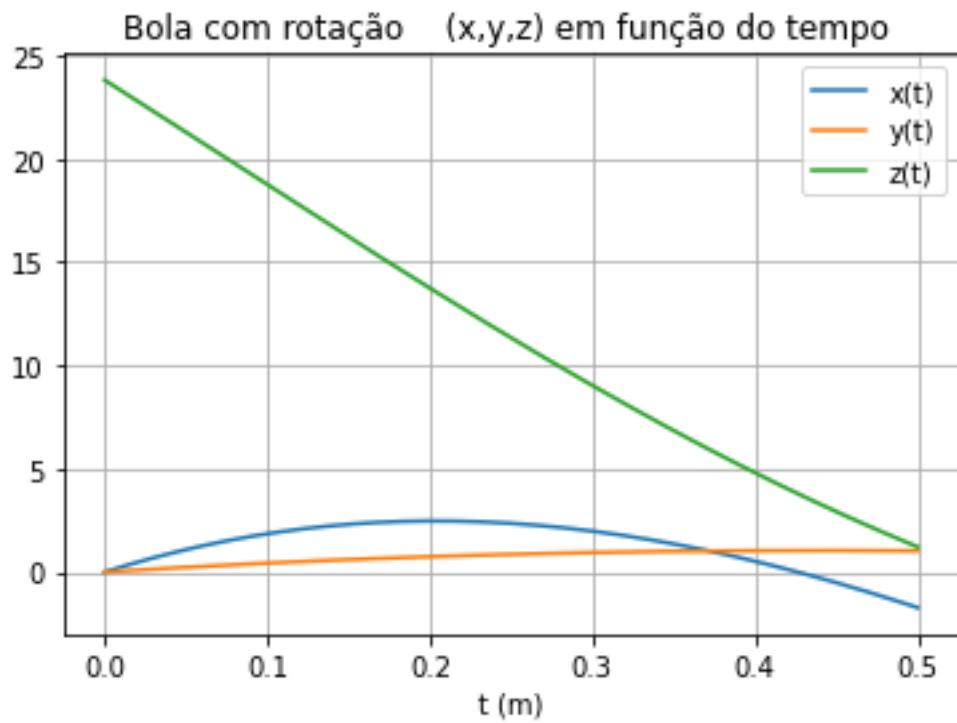
δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	1.3050	24.1821
0.01	1.09232639	22.311966
0.001	1.072268232	22.1245316
0.0001	1.0702742	22.1057830
0.00001	1.07007500	22.103908

A altura máxima é 1.070 m e o alcance é 22.10 m.



2.

b) 13.2 m e 1.46 s



3.

Entra

4. a)

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	2.9868	29.16701087
0.01	2.7282197721	27.4047699
0.001	2.70360028	27.22868
0.0001	2.701150538	27.211076
0.00001	2.700905686	27.2093157962

altura máxima = 2.70 m; alcance 27.21 m;

b)

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	3.9019528	40.96493035
0.01	3.646755	39.4620245
0.001	3.622064	39.310731
0.0001	3.61960309	39.2955928
0.00001	3.61935707370	39.294078914

3.62 m; 39.29 m

c)

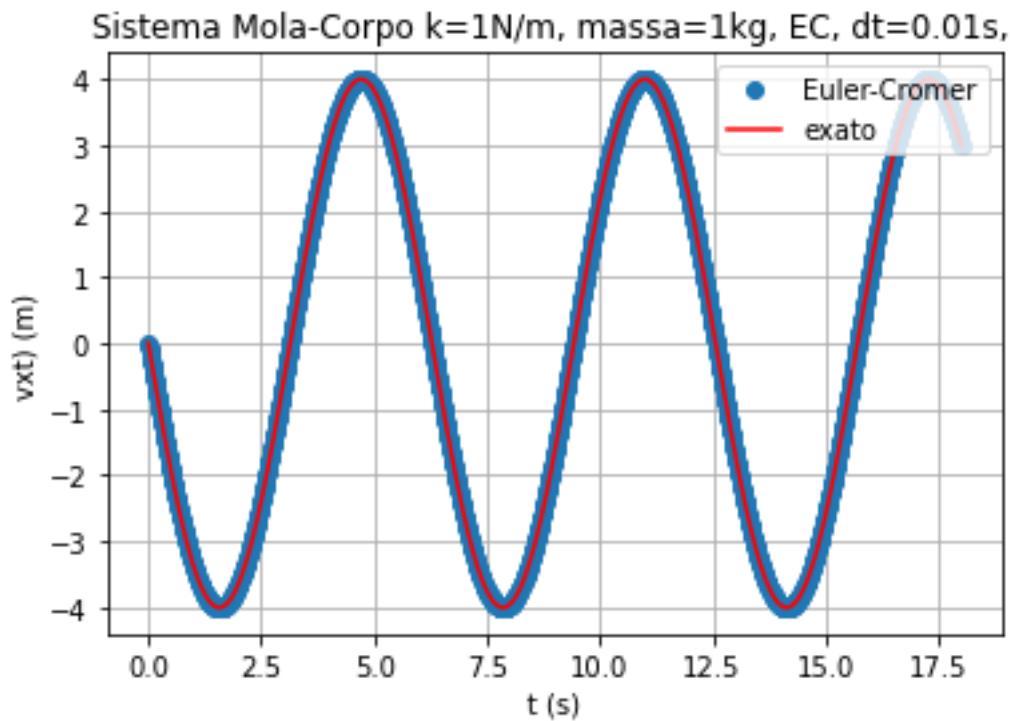
δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	2.53547	21.74859
0.01	2.26736381	19.8336427
0.001	2.24225	19.6436191
0.0001	2.23976238	19.6246321
0.00001	2.239513193	19.6227335

2.24 m; 19.62 m;

5. a) Não; b) Sim.; são; Concordam com as leis de Kepler; c) erro linearmente proporcional a δt

6. a) $v_x(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi)$;

b) Método de Euler-Cromer;



c

