

# Modelação de Sistemas Físicos

## 14<sup>a</sup> Aula Teórica

Sumário:

Cap. 9

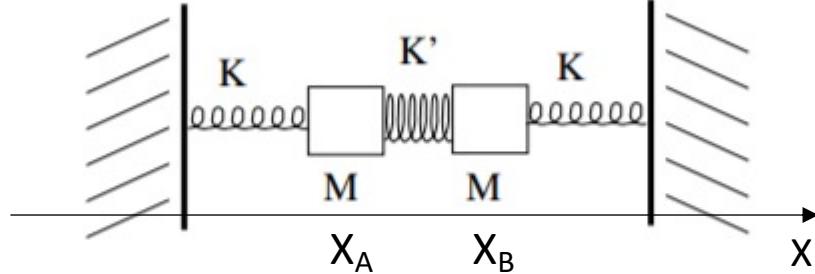
N Osciladores acoplados, modos normais e ondas

Resolução de problemas.

Bibliografia:



# Modos Normais



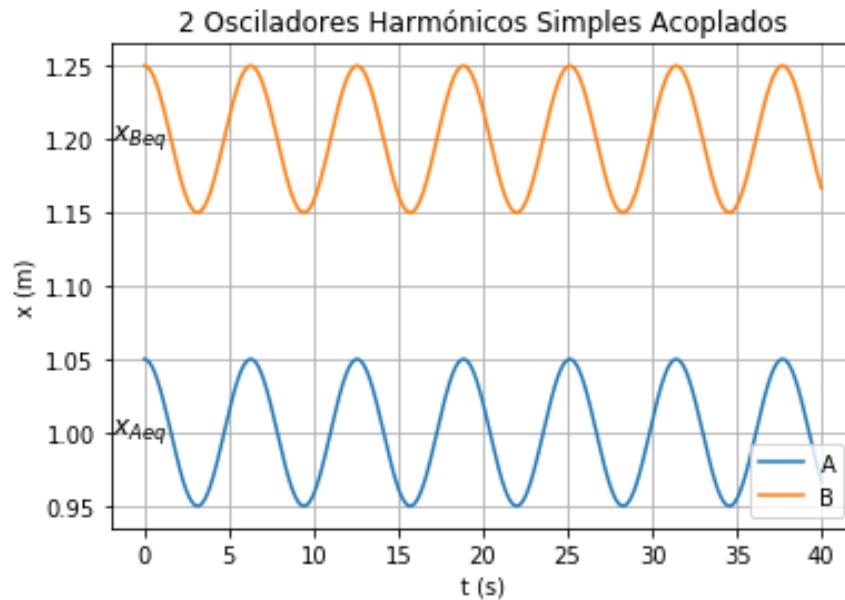
Corpo A

$$m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$$

Corpo B

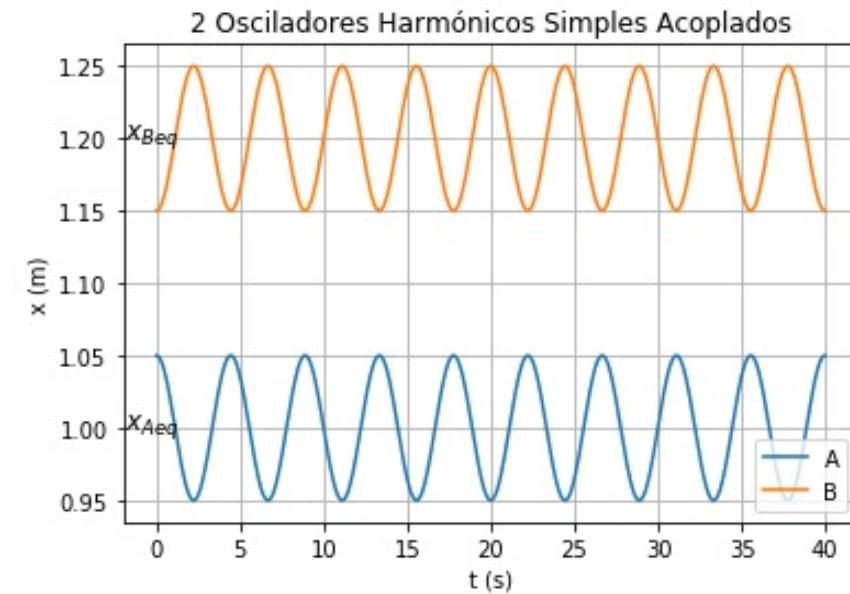
$$m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$$

Modo normal 1  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$



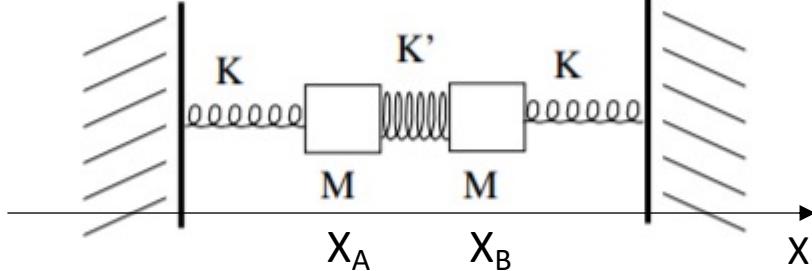
$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases}$$

Modo normal 2  $\omega_2 = 1.414 \text{ rad/s}$



$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

# Modos Normais

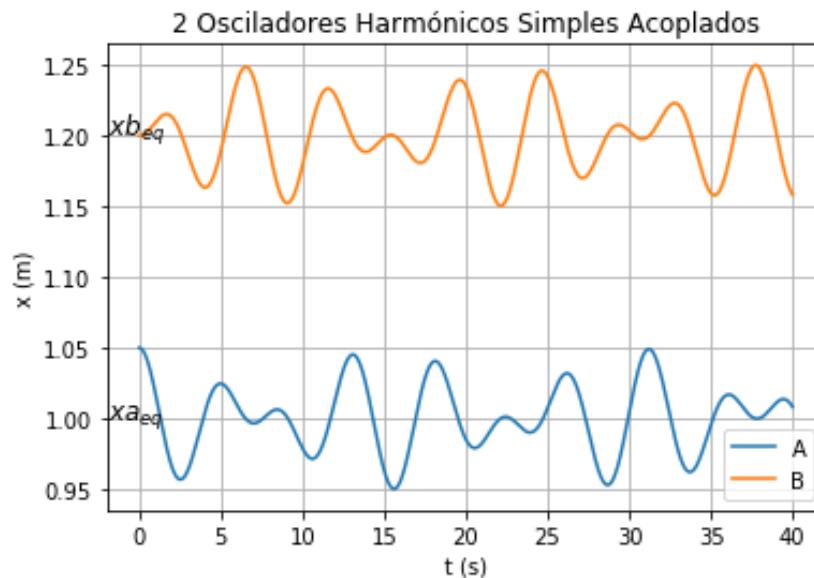


$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$



Movimento não periódico

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

$$\text{Com } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

**Qualquer movimento de 2 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição dos MODOS NORMAIS**

## Série de Fourier:

A série de Fourier decompõe uma função periódica  $f(t)$ , de período  $T$  ou frequência angular  $\omega = 2\pi/T$ , numa soma de funções sinusoidais de frequência angular múltipla de  $\omega$  ( $\omega_n = n\omega$ )

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\}$$

Os coeficientes de Fourier são expressos por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Joseph Fourier 1768-1830

## Série de Fourier: Ex.: Onda quadrada

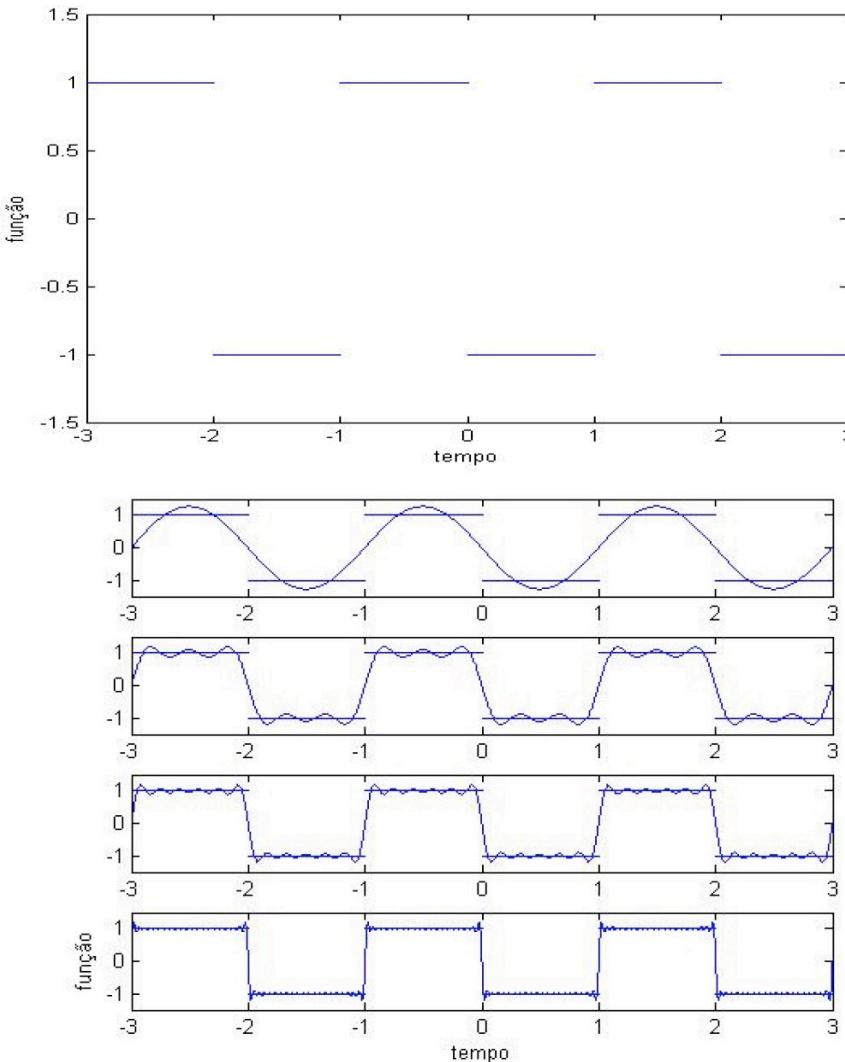


Figura 3.

A função quadrado reconstruída usando a série de Fourier com um número crescente de termos. De cima para baixo está a função reconstruída com 1, 5, 11 e 41 termos.

Vamos calcular os coeficientes a e b, usando

$$\begin{cases} a_n = 0, & n = 0, 1, 2, 3 \\ b_n = 2((-1)^n - 1)/(n\pi), & n = 1, 2, 3 \end{cases}$$

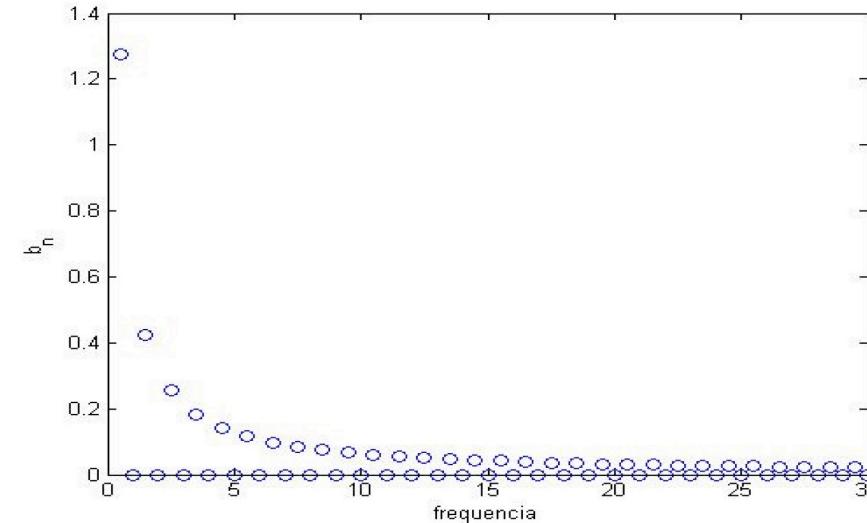
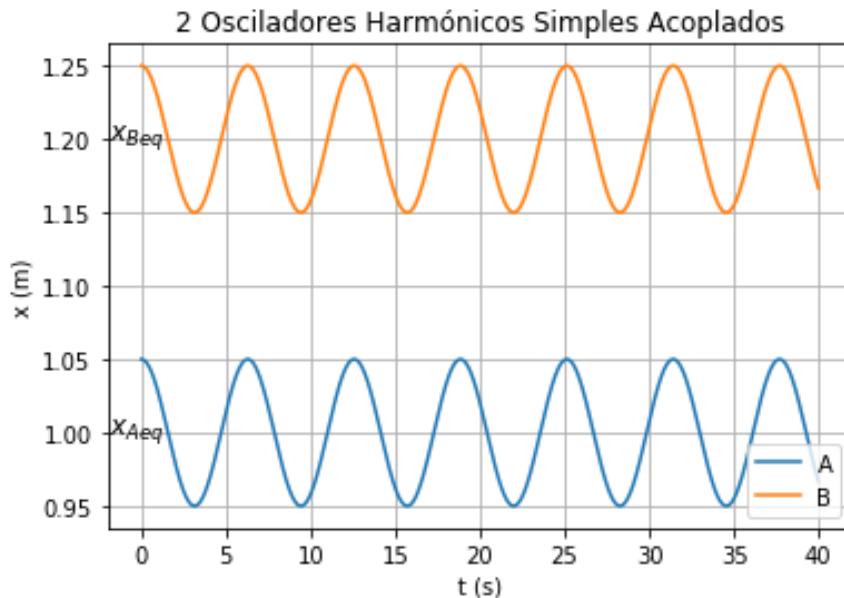


Figura 2.  
Os coeficientes de Fourier  $b_n$

## Série de Fourier: Ex.: 2 Osciladores Acoplados

Modo normal 1       $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$



Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mas a função está expressa por pontos!

⇒ **Integração numérica usando a aproximação trapezoidal**

# Cálculo numérico dos coeficientes de Fourier

Calcula os integrais

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

pela aproximação trapezoidal.

Input:

dados numéricos **tp** e **xp**  
(valores de x em momentos t)

**it0** e **it1**

índices de tempo do inicio e do fim do período  
de analizar:

$$T = tp[it1] - tp[it0]$$

**nf**

número do coeficiente a calcular

$$\omega_n = n\omega$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

```
def abfourier(tp,xp,it0,it1,nf):
    # cálculo dos coeficientes de Fourier a_nf e b_nf
    #      a_nf = 2/T integral ( xp cos( nf w ) ) dt entre tp(it0) e tp(it1)
    #      b_nf = 2/T integral ( xp sin( nf w ) ) dt entre tp(it0) e tp(it1)
    # integracao numerica pela aproximação trapezoidal
    # input: matrizes tempo tp  (abcissas)
    #           posição xp (ordenadas)
    #           indices inicial it0
    #           final   it1 (ao fim de um período)
    #           nf índice de Fourier
    # output: af_bf e bf_nf
    dt=tp[1]-tp[0]
    per=tp[it1]-tp[it0]
    ome=2*np.pi/per

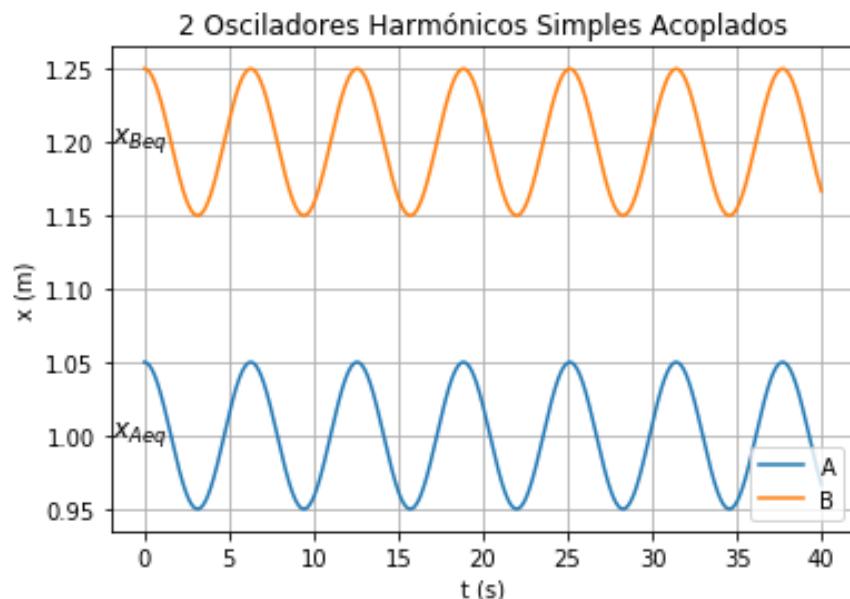
    s1=xp[it0]*np.cos(nf*ome*tp[it0])
    s2=xp[it1]*np.cos(nf*ome*tp[it1])
    st=xp[it0+1:it1]*np.cos(nf*ome*tp[it0+1:it1])
    soma=np.sum(st)

    q1=xp[it0]*np.sin(nf*ome*tp[it0])
    q2=xp[it1]*np.sin(nf*ome*tp[it1])
    qt=xp[it0+1:it1]*np.sin(nf*ome*tp[it0+1:it1])
    somq=np.sum(qt)

    integra=((s1+s2)/2+soma)*dt
    af=2/per*integra
    integq=((q1+q2)/2+somq)*dt
    bf=2/per*integq
    return af,bf
```

# Série de Fourier: Ex.: 2 Osciladores Acoplados

Modo normal 1       $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$

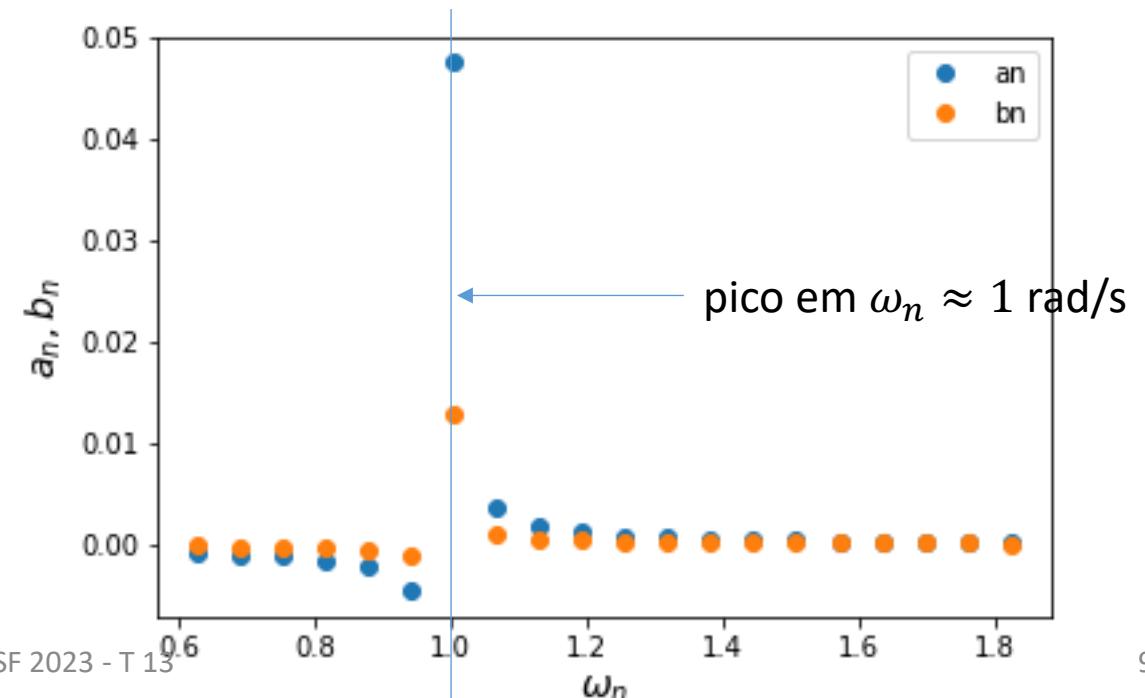


Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

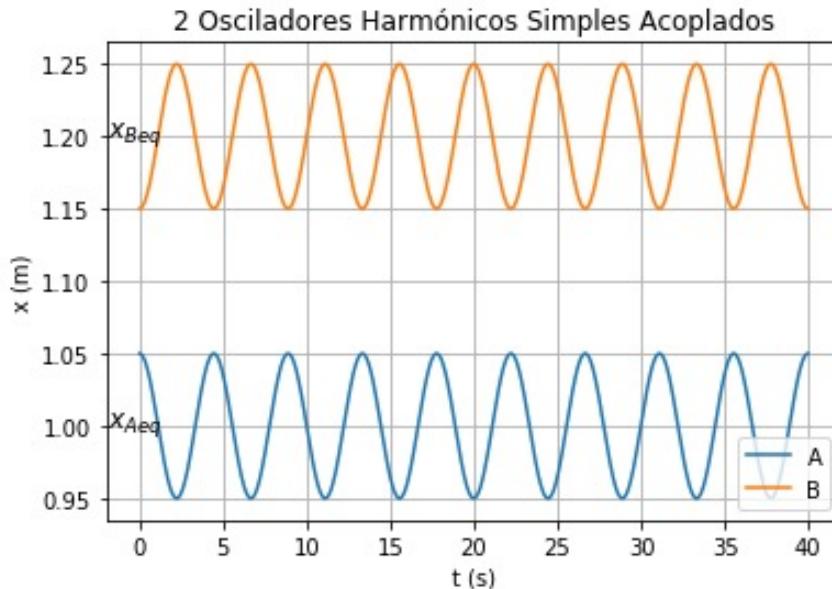
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



# Série de Fourier: Ex.: 2 Osciladores Acoplados

Modo normal 2     $\omega_2 = 1.414 \text{ rad/s}$

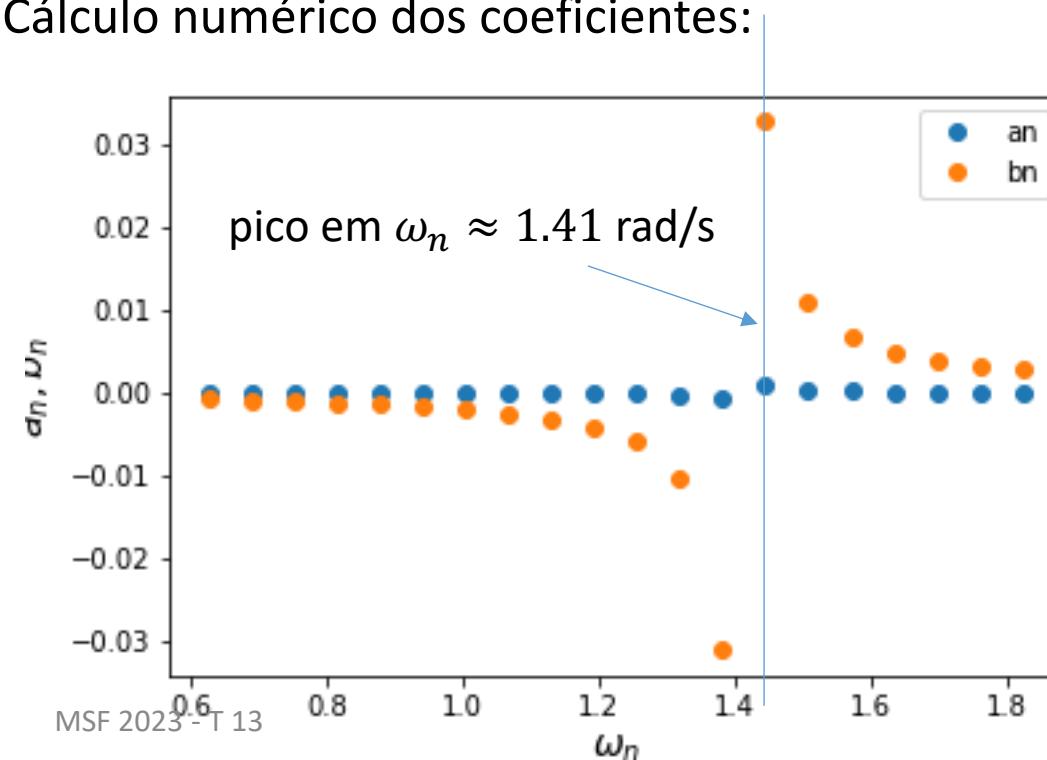


Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

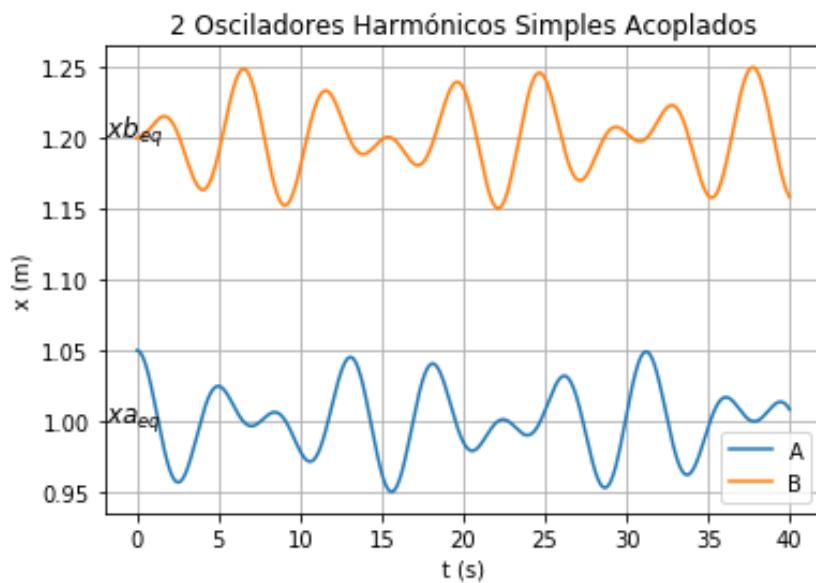
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



# Série de Fourier: Ex.: 2 Osciladores Acoplados

Condições iniciais gerais:



$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

picos em  $\omega_n \approx 1 \text{ rad/s}$

e  $\omega_n \approx 1.41 \text{ rad/s}$

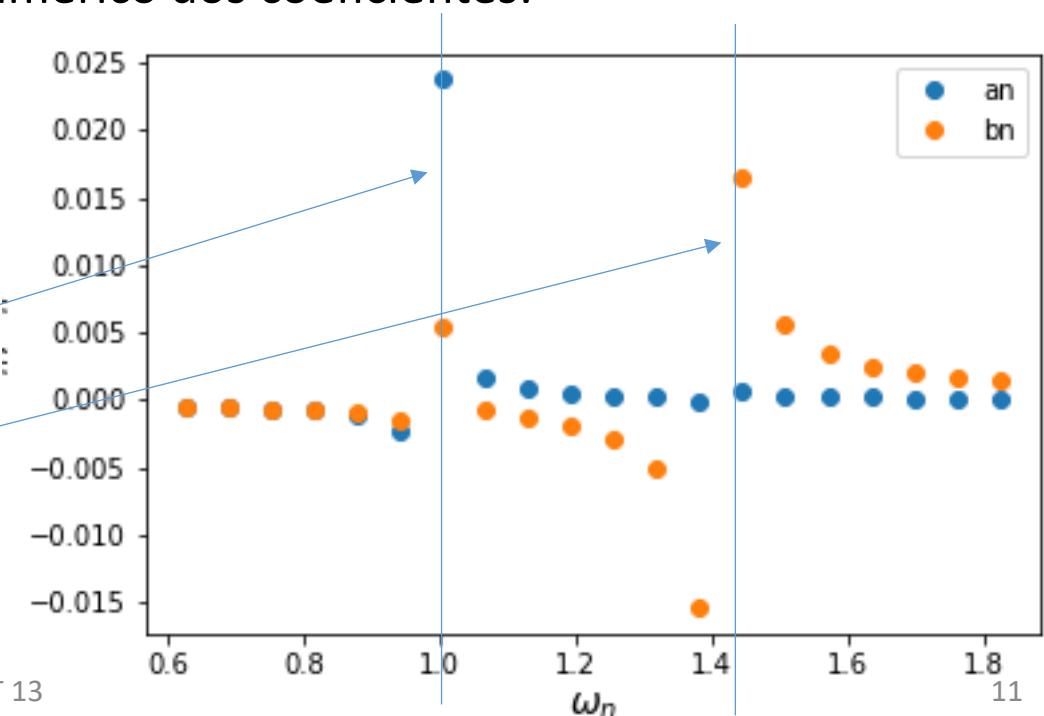
Confirma que é uma sobreposição dos 2 modos normais

Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



# Série de Fourier: Ex.: Oscilador Quártico Não Harmônico Forçado

$$E_p = \alpha x^4$$

$$x(t=0) = 3.0000 \text{ m}$$

$$v_x(t=0) = 0$$

$$k = 1 \text{ N/m};$$

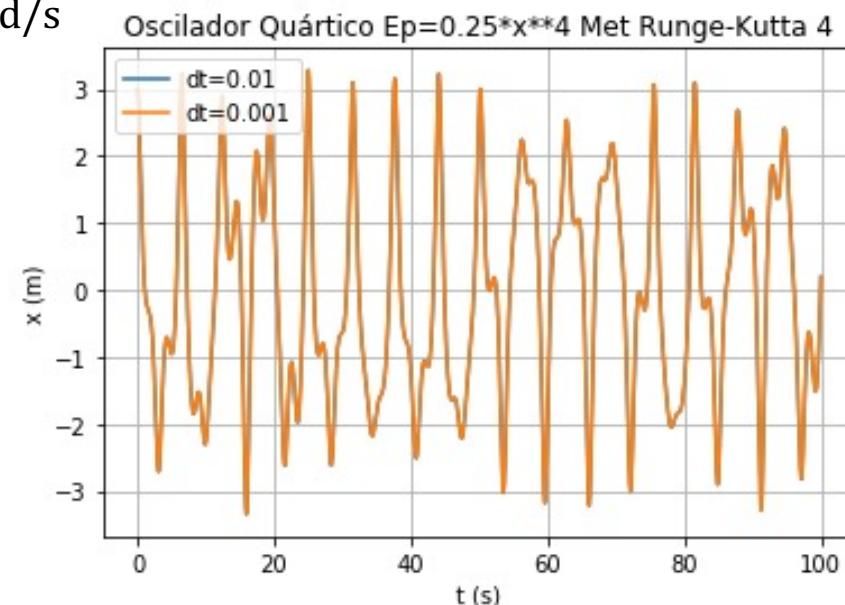
$$m = 1 \text{ kg}; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

$$\alpha = 0.25 \text{ m}^{-2}$$

$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

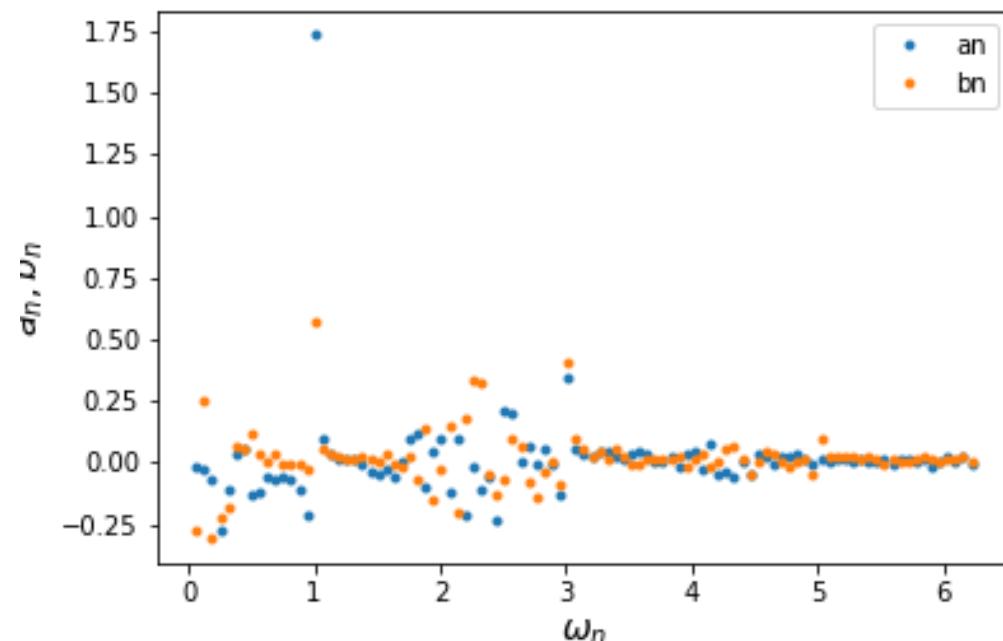


Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

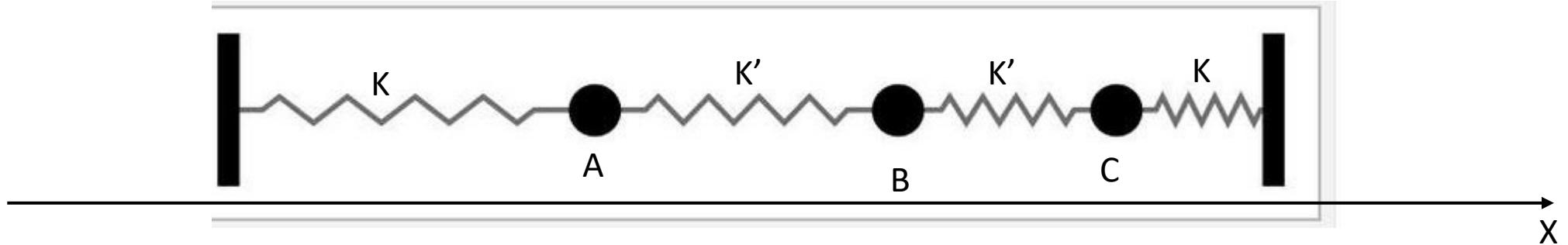
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



Não tem frequência característica

### 3 Osciladores Harmónicos Acoplados

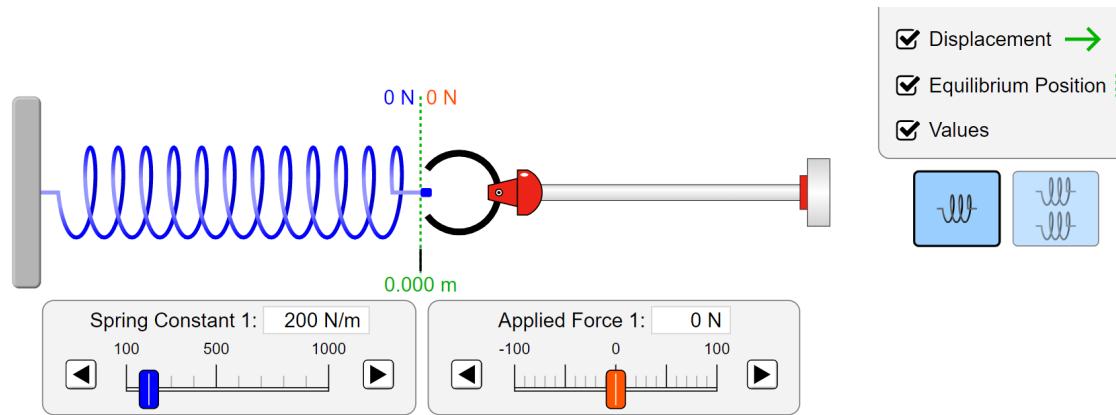


Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

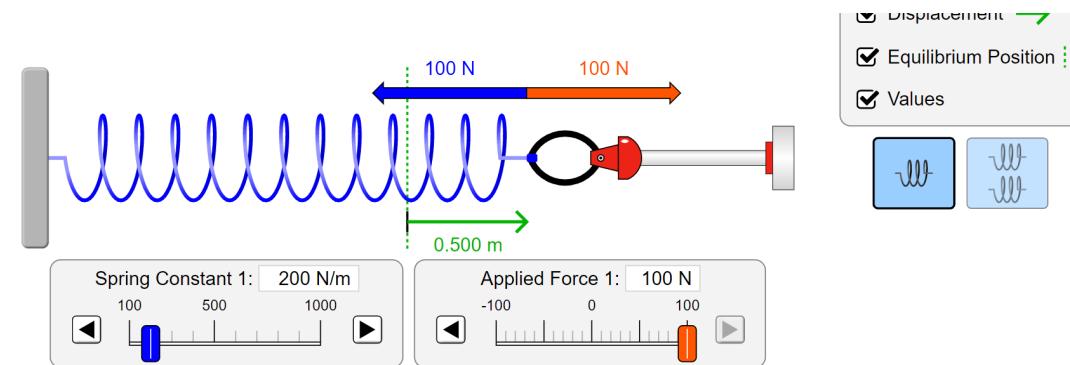
Que forças estão aplicadas a cada corpo?

# Mola: Posição de equilíbrio e comprimento da mola

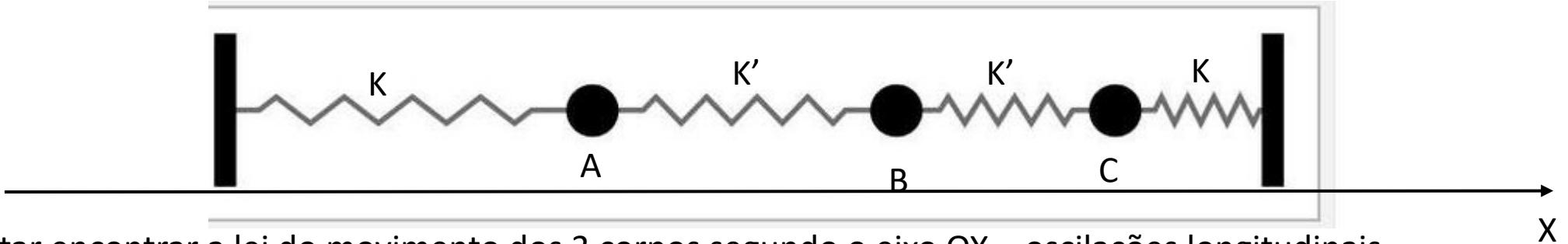
Equilíbrio:  
Posição  $x_{eq}$  e comprimento da mola  $l_{eq}$



Mola distendida:  
O afastamento  $x - x_{eq}$  à posição de equilíbrio  
é quanto o comprimento da mola  $l$  aumentou  
 $x - x_{eq} = l - l_{eq}$



### 3 Osciladores Harmónicos Acoplados



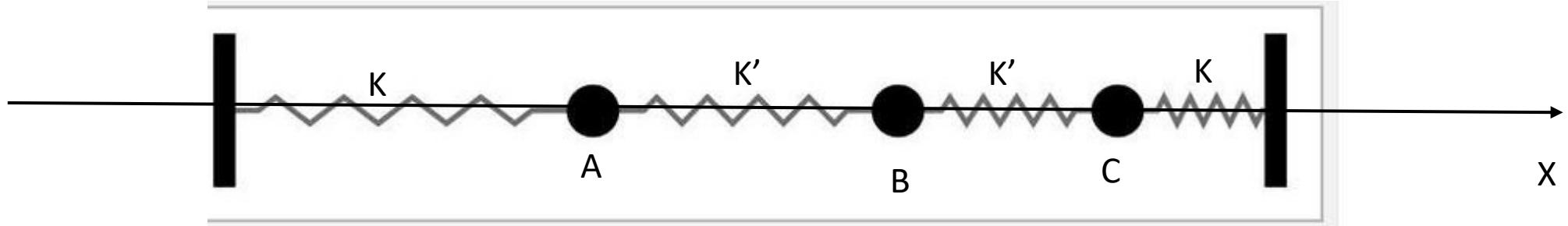
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

X

Força aplicada ao corpo B:

$$F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$$

### 3 Osciladores Harmónicos Acoplados



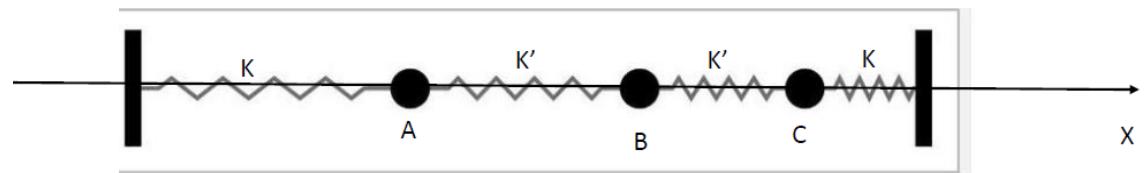
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

Equação dinâmica de Newton para cada corpo

$$\text{Corpo A} \quad m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$$

$$\text{Corpo B} \quad m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$$

$$\text{Corpo C} \quad m \frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$$



Corpo A       $m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Corpo B       $m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$

Corpo C       $m \frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$

**Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:**

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m} \quad x_{Ceq} = 1.4 \text{ m}$$

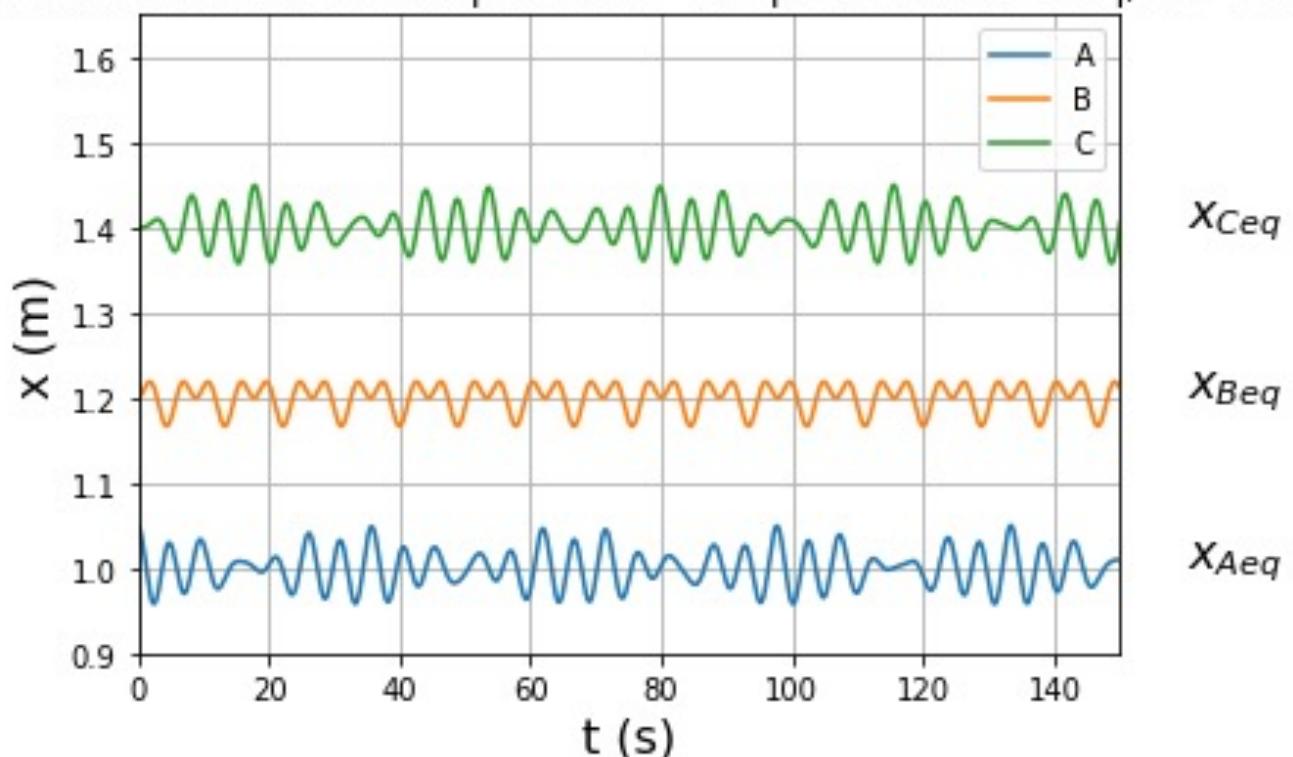
$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} \quad x_{C0} = x_{Ceq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

Movimento de cada corpo parece periódico

3 Osciladores Harmónicos Acoplados  $x_{A0}=x_{Aeq}+0.05 \text{ m}$   $x_{B0}=x_{Beq}$ ,  $x_{C0}=x_{Ceq}$



# MODOS NORMAIS: Cálculo

Corpo A     $m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Corpo B     $m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$

Corpo C     $m \frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$

**Estas equações admitem soluções sinusoidais para cada corpo?**

Transformação das variáveis  $x$  para o desvio  $u$  à posição de equilíbrio  $x_{eq}$

$$\begin{aligned}x_A - x_{Aeq} &= u_A \\x_B - x_{Beq} &= u_B \\x_C - x_{Ceq} &= u_C\end{aligned}$$



$$\begin{cases} m \frac{d^2u_A}{dt^2} = -k u_A - k'(u_A - u_B) \\ m \frac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m \frac{d^2u_C}{dt^2} = -k u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

# MODOS NORMAIS

$$\begin{cases} m \frac{d^2u_A}{dt^2} = -k u_A - k'(u_A - u_B) \\ m \frac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m \frac{d^2u_C}{dt^2} = -k u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

Suponha-se que  $u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

Substituir nas equações:

$$\begin{cases} -\omega^2 u_A = -\frac{k}{m} u_A - \frac{k'}{m} (u_A - u_B) \\ -\omega^2 u_B = \frac{-k'}{m} (u_B - u_A) - \frac{k'}{m} (u_B - u_C) \\ -\omega^2 u_C = -\frac{k}{m} u_C - \frac{k'}{m} (u_C - u_B) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_A - \frac{k'}{m} u_B = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_A + \left(\frac{2k'}{m} - \omega^2\right) u_B - \frac{k'}{m} u_C = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_B + \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_C = 0 \end{cases}$$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas

# MODOS NORMAIS

Suponha-se que  $u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas

$$\begin{cases} \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_A - \frac{k'}{m} u_B = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_A + \left(\frac{2k'}{m} - \omega^2\right) u_B - \frac{k'}{m} u_C = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_B + \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_C = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{k+k'}{m} u_A - \frac{k'}{m} u_B = \omega^2 u_A \\ -\frac{k'}{m} u_A + \frac{2k'}{m} u_B - \frac{k'}{m} u_C = \omega^2 u_B \\ -\frac{k'}{m} u_B + \frac{k+k'}{m} u_C = \omega^2 u_C \end{cases}$$

Pode ser escrito com matrizes:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Problema de valores ( $\omega^2$ ) e vetores próprios

# MODOS NORMAIS

Suponha-se que  $u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Problema de valores ( $\omega^2$ ) e vetores próprios

Tem solução não nula, o que requer:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m} - \omega^2\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

(determinante)

# MODOS NORMAIS

**Problema:**

- a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que  $k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ;  $k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$

- b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)  
c) Verifique que os vetores próprios são ortogonais (produto escalar nulo).

Python:

```
from numpy import linalg as LA
w, v = LA.eig(matdyn) # eig: function para calcular valores e vetores próprios
# de uma matriz simétrica
# w: valores próprios
# v: vetores próprios
```

# MODOS NORMAIS

**Problema:**

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que  $k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ;  $k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

Solução:

```
w, v = LA.eig(matdyn)    # eig: function para calcular valores e vetores próprios
print(np.sqrt(w),v)

(array([0.70710678,           1.22474487,           1.41421356]),    # Frequencias

array([[ 4.08248290e-01, -7.07106781e-01,  5.77350269e-01], # Vetores próprios
       [ 8.16496581e-01,  4.02240178e-16, -5.77350269e-01],
       [ 4.08248290e-01,  7.07106781e-01,  5.77350269e-01]]))
```

## Modo Normal Simétrico

frequência: 1.22474487

vetor próprio:

$$[-7.07106781e-01, 4.02240178e-16, 7.07106781e-01]$$

$$\begin{matrix} -u \\ 0 \\ u \end{matrix}$$

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

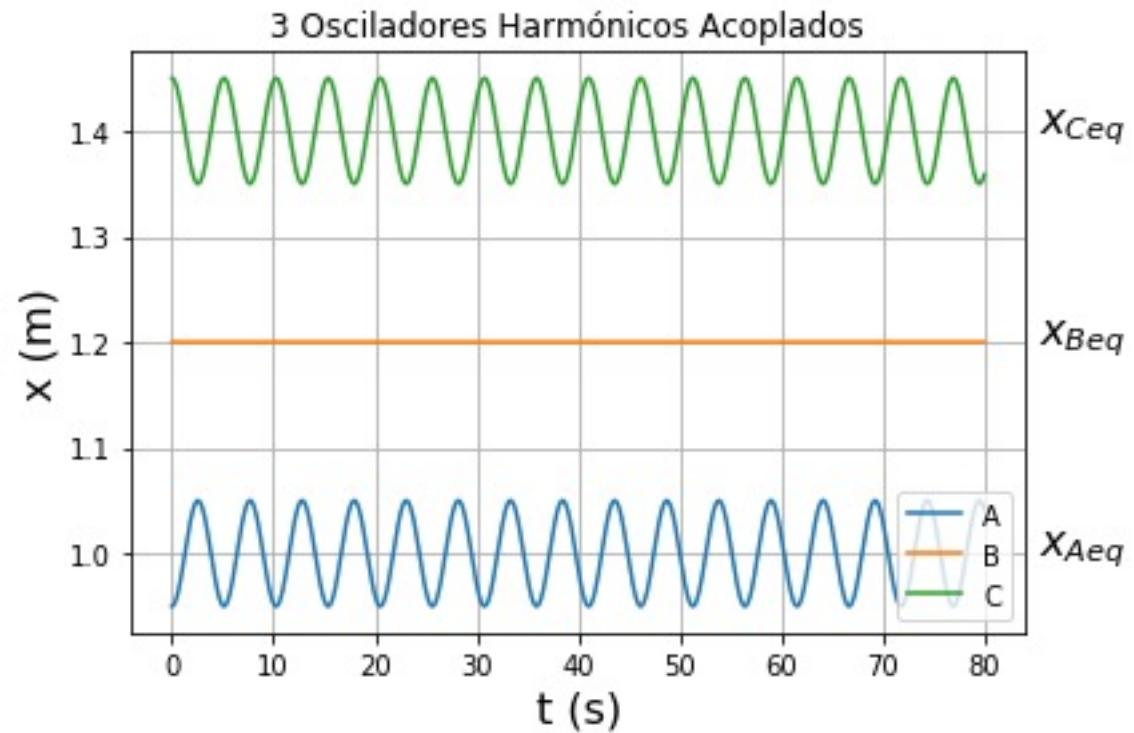
$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m} \quad x_{Ceq} = 1.4 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} - 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.05 \text{ m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$



$$T=5.130 \text{ s} \quad e \quad \omega = 1.225 \text{ rad/s}$$



(c) Longitudinal normal modes

# Modo Normal Asimétrico

frequência: 1.41421356

vetor próprio:

$$\begin{bmatrix} 5.77350269e-01, \\ -5.77350269e-01, \\ 5.77350269e-01 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} u \\ -u \\ u \end{matrix}$$

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

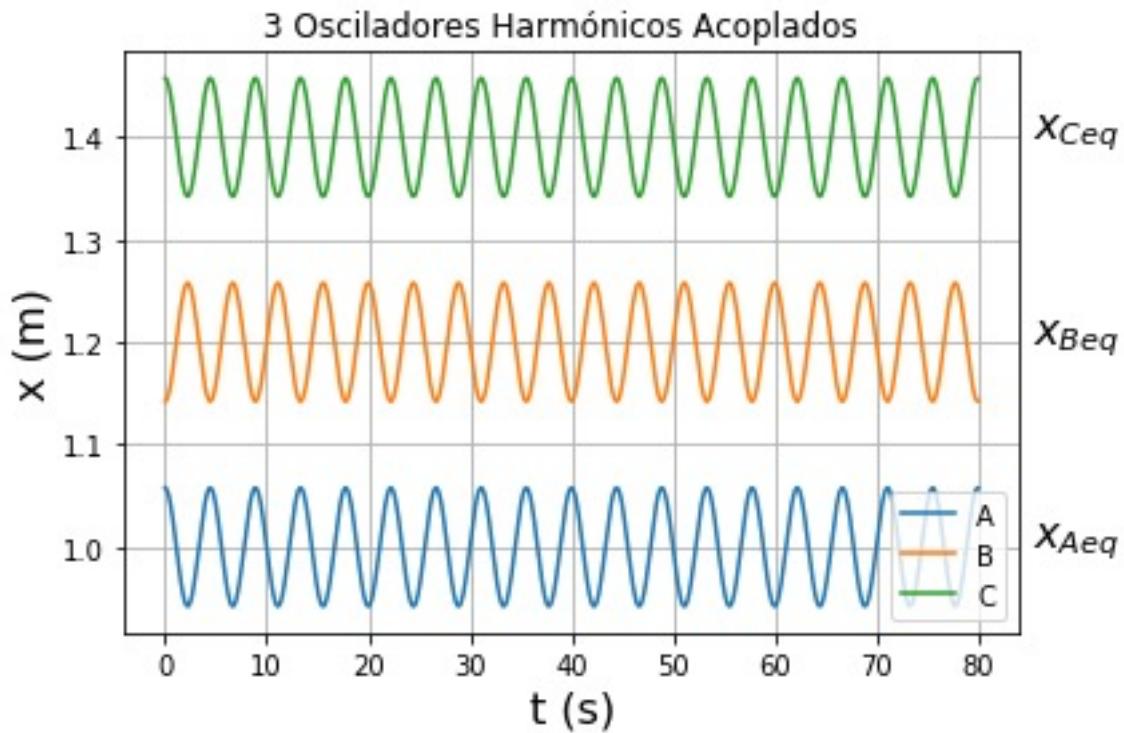
$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m} \quad x_{Ceq} = 1.4 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} - 0.05 \text{ m}$$

$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.05 \text{ m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$



$$T = 4.443 \text{ s} \quad e \quad \omega = 1.414 \text{ rad/s}$$



## Modo Normal 3

frequênciā: 0.70710678

vetor próprio:

$$[ 4.08248290e-01, \\ 8.16496581e-01, \\ 4.08248290e-01 ]$$

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m} \quad x_{Ceq} = 1.4 \text{ m}$$

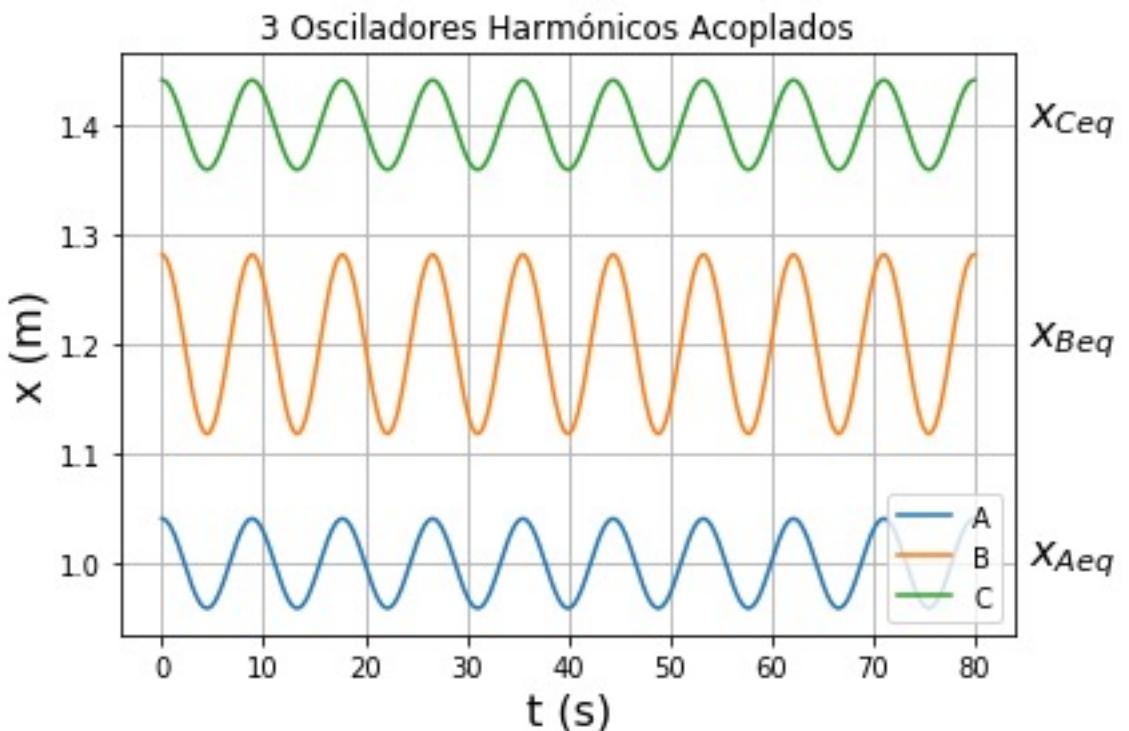
$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.04 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.08 \text{ m}$$

$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.04 \text{ m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

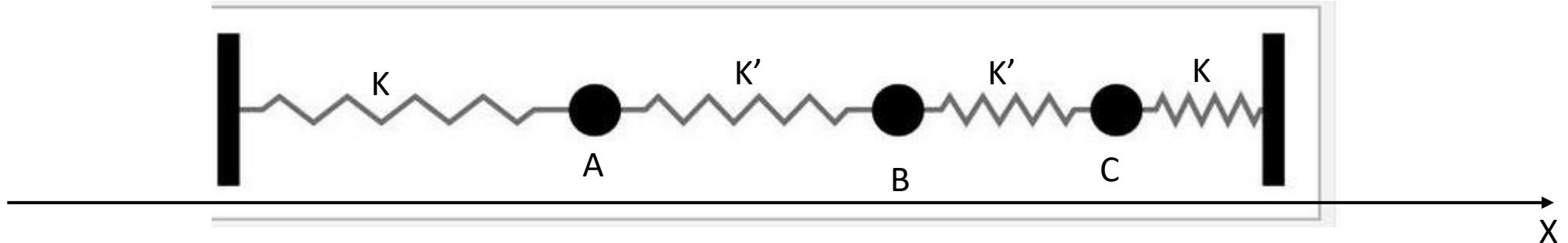
$$\begin{matrix} u \\ 2u \\ u \end{matrix}$$



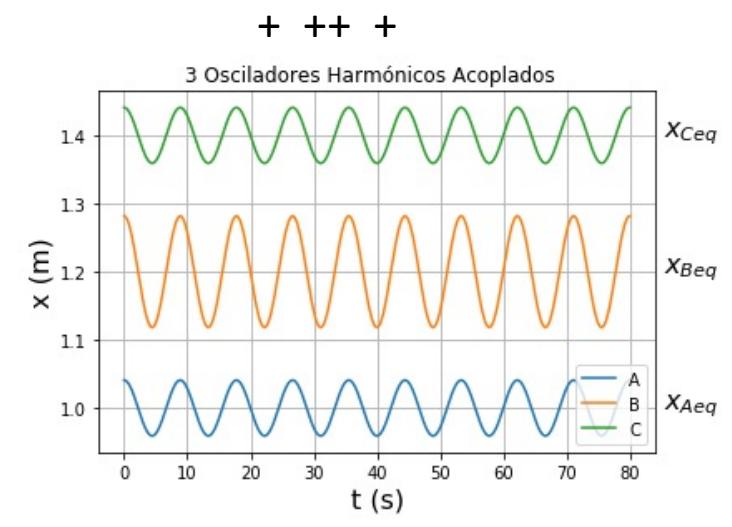
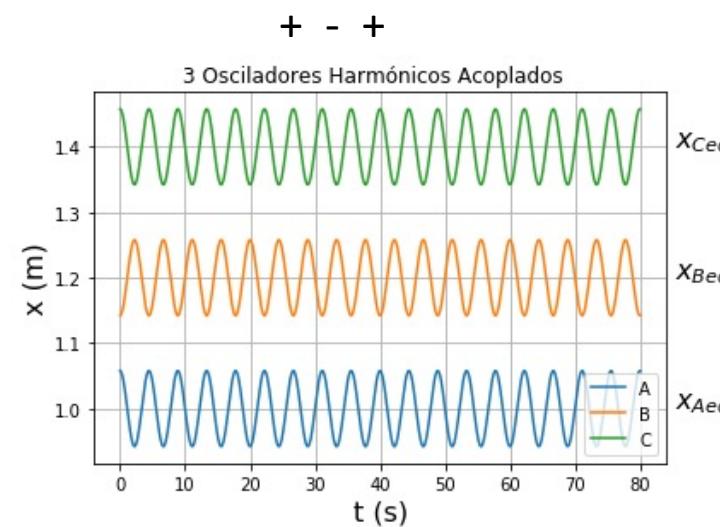
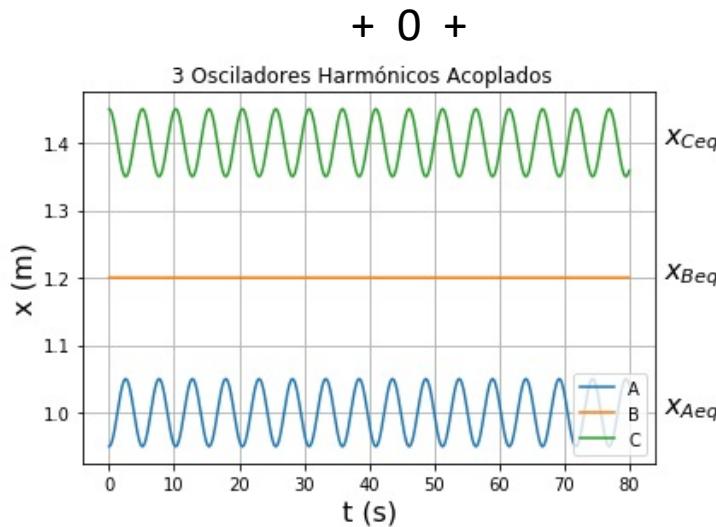
$$T=8.886 \text{ s} \quad e \quad \omega=0.707 \text{ rad/s}$$



### 3 Osciladores Harmónicos Acoplados



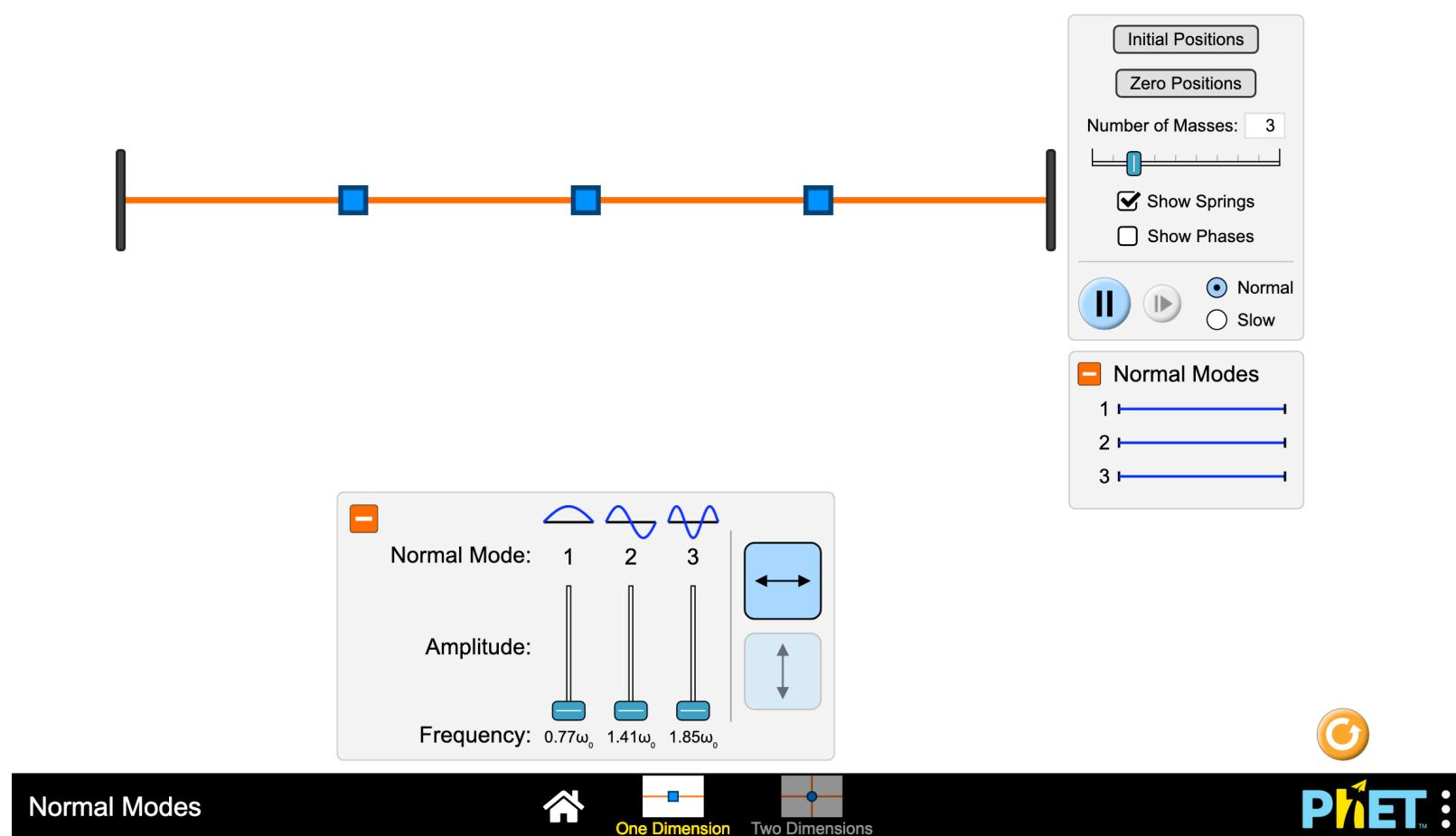
3 modos normais:



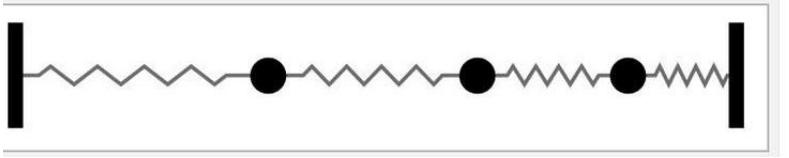
Qualquer movimento de 3 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição dos 3 MODOS NORMAIS

# 3 Osciladores Harmónicos Acoplados

[https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html)



# Amortecido



Corpo A  $m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})] \quad -b v_{Ax}$

Corpo B  $m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})] \quad -b v_{Bx}$

Corpo C  $m \frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})] \quad -b v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m} \quad x_{Ceq} = 1.4 \text{ m}$$

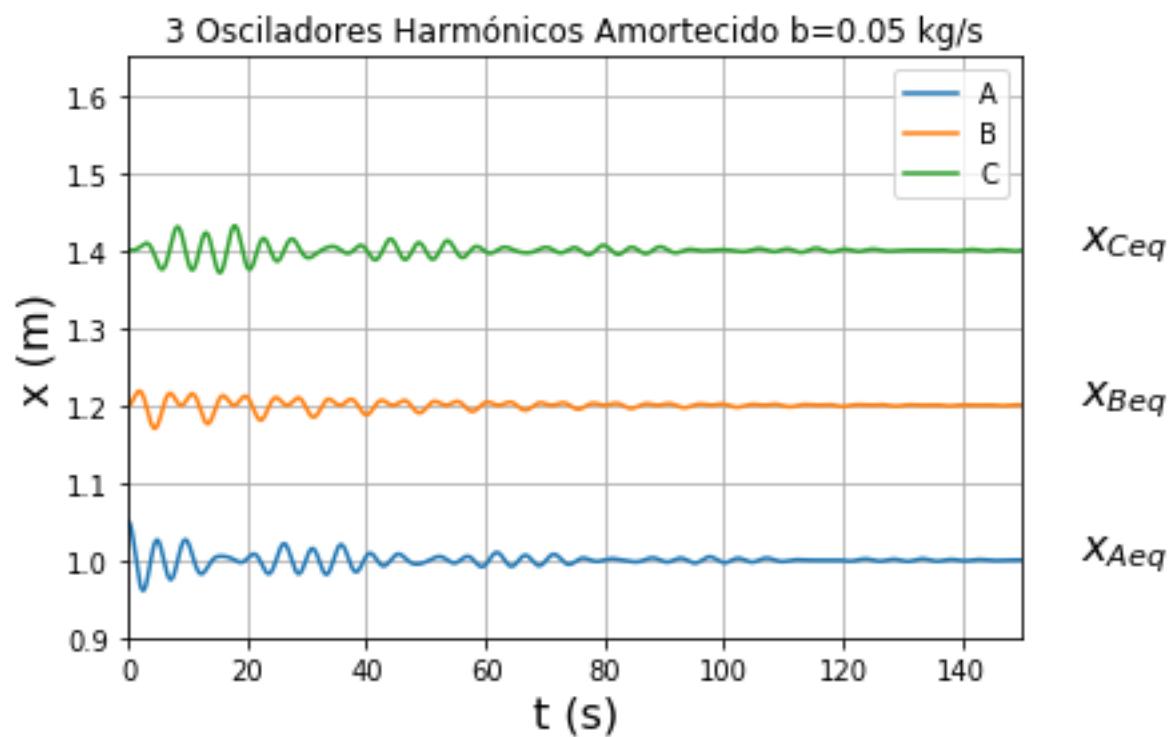
$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

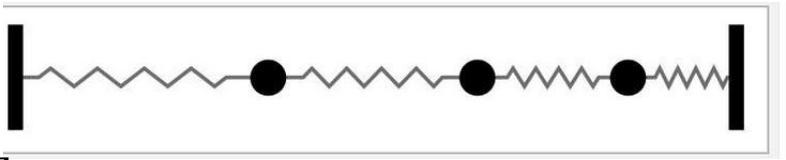
$$x_{C0} = x_{Ceq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

Cada corpo tende para a posição de equilíbrio, à medida que o tempo aumenta.



# Oscilador Harmônico Forçado



Corpo A  $m \frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})] - b v_{Ax} + F_0 \cos(\omega_f t)$

Corpo B  $m \frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})] - b v_{Bx}$

Corpo C  $m \frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})] - b v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}, b = 0.05 \text{ kg/s}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m} \quad x_{Ceq} = 1.4 \text{ m}$$

$$F_0 = 0.04 \text{ N}; \omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

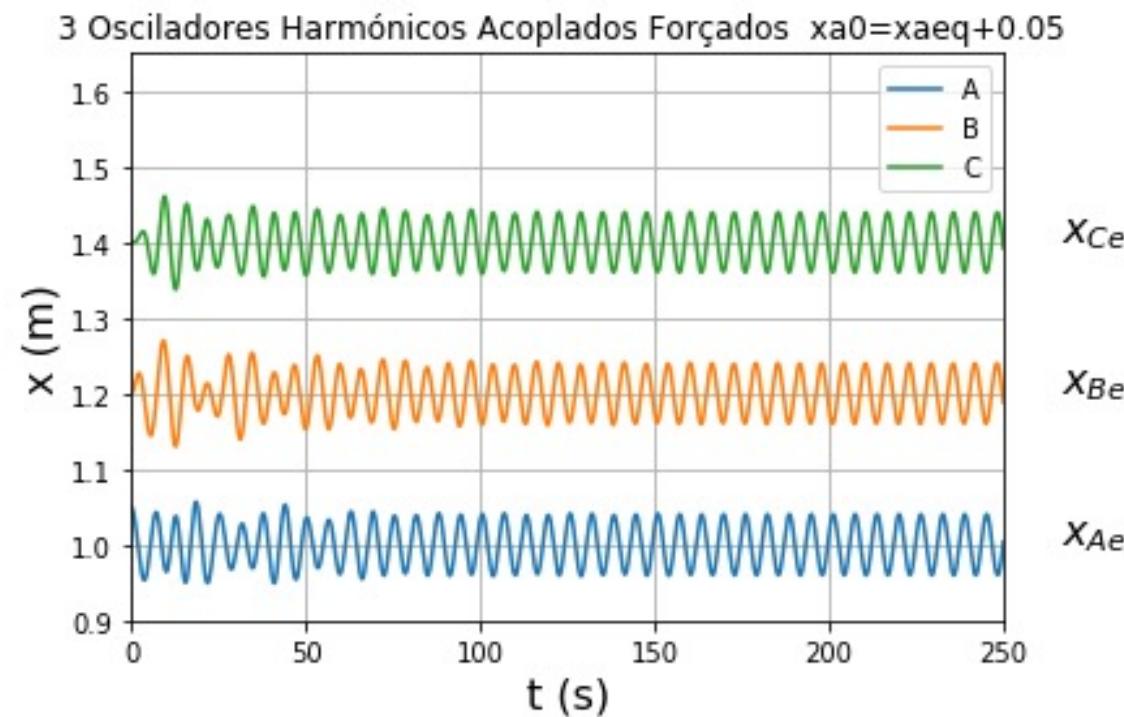
$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$x_{C0} = x_{Ceq}$$

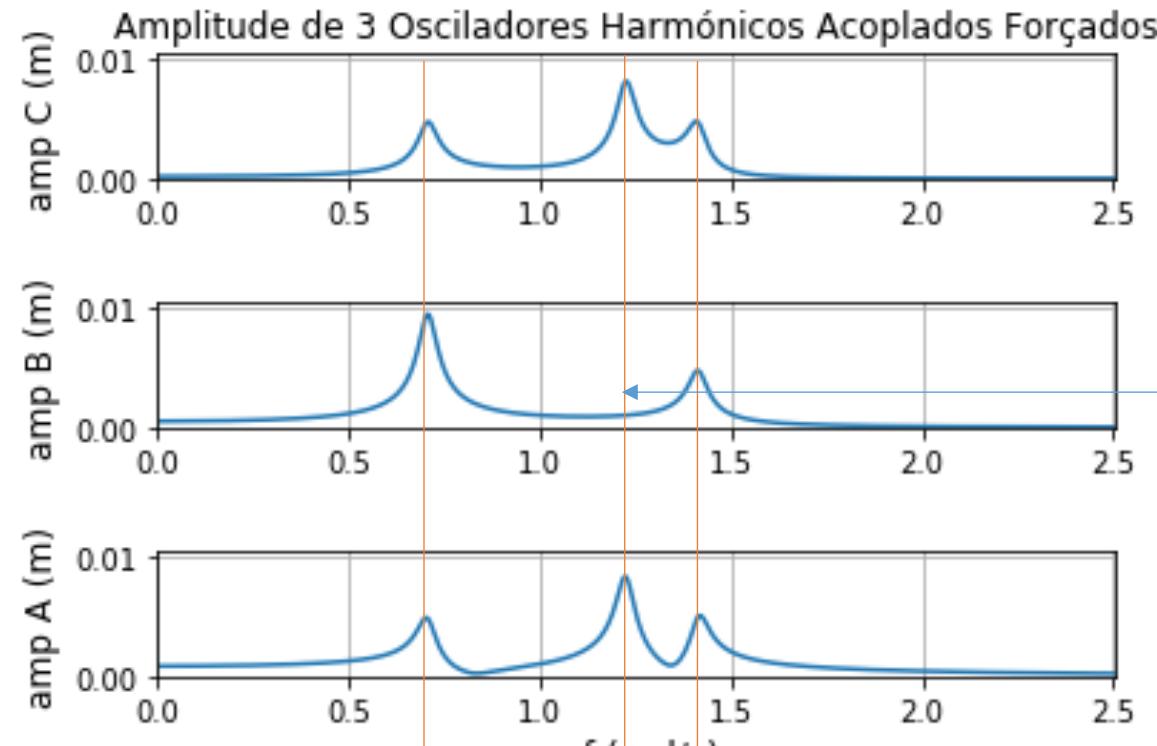
$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

Cada corpo tende para um regime estacionário de um movimento harmônico simples, de frequência igual à da força exterior:

$$\omega_A = \omega_B = \omega_C = 1.000 \text{ rad/s}$$



# Oscilador Harmônico Forçado: Amplitude no regime estacionário



Corpo B não participa  
no modo simétrico  
( $\omega_f = 1.225 \text{ rad/s}$ )

Ressonâncias nas frequências  $\omega_f = 0.703, 1.225 \text{ e } 1.409 \text{ rad/s.}$

São as frequências dos modos normais?

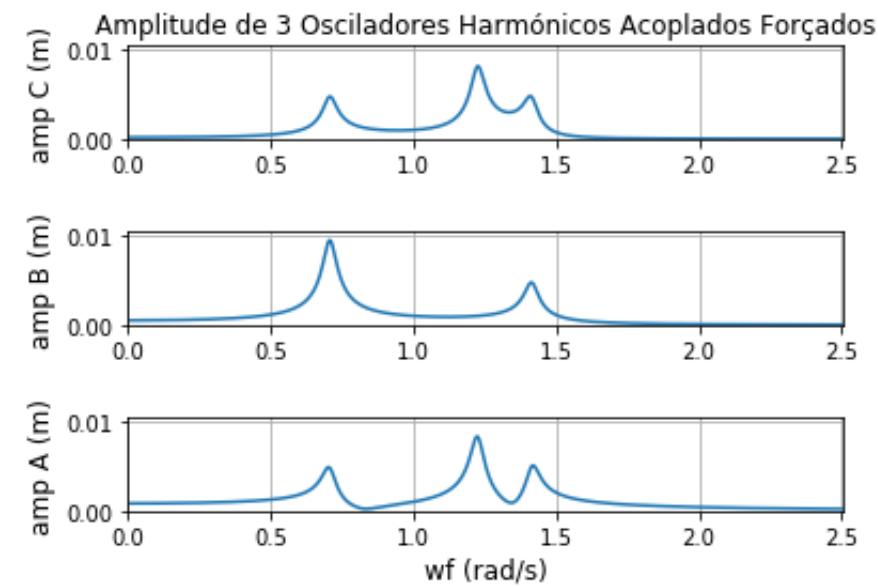
Se no caso não forçado e amortecido, cada corpo tiver movimento harmônico simples (amplitude e período constantes) com estas frequências. SIM!

# Modos Normais e Osciladores Forçados

## Ressonância:

Quando são forçados por uma força exterior, apresentam Ressonância quando a frequência da força externa for igual à frequência dos modos normais.

⇒ Por medição pode-se determinar as frequências dos modos normais.



# Modos Normais e Osciladores Forçados

## Modos normais são:

- Medidos
- Calculados, ou por modelos ou por equações fundamentais da Física.

São usados no estudo da estrutura da matéria: Moléculas, Cristais, Sólidos, ...

## Ex: Materiais:

### Experiência:

A matéria em estudo é excitada por luz laser, onda eletromagnética (campo elétrico)

$$\text{Força elétrica} = \text{Carga} * \text{Campo Elétrico}$$

Excita os núcleos atómicos, porque possuem carga elétrica positiva.

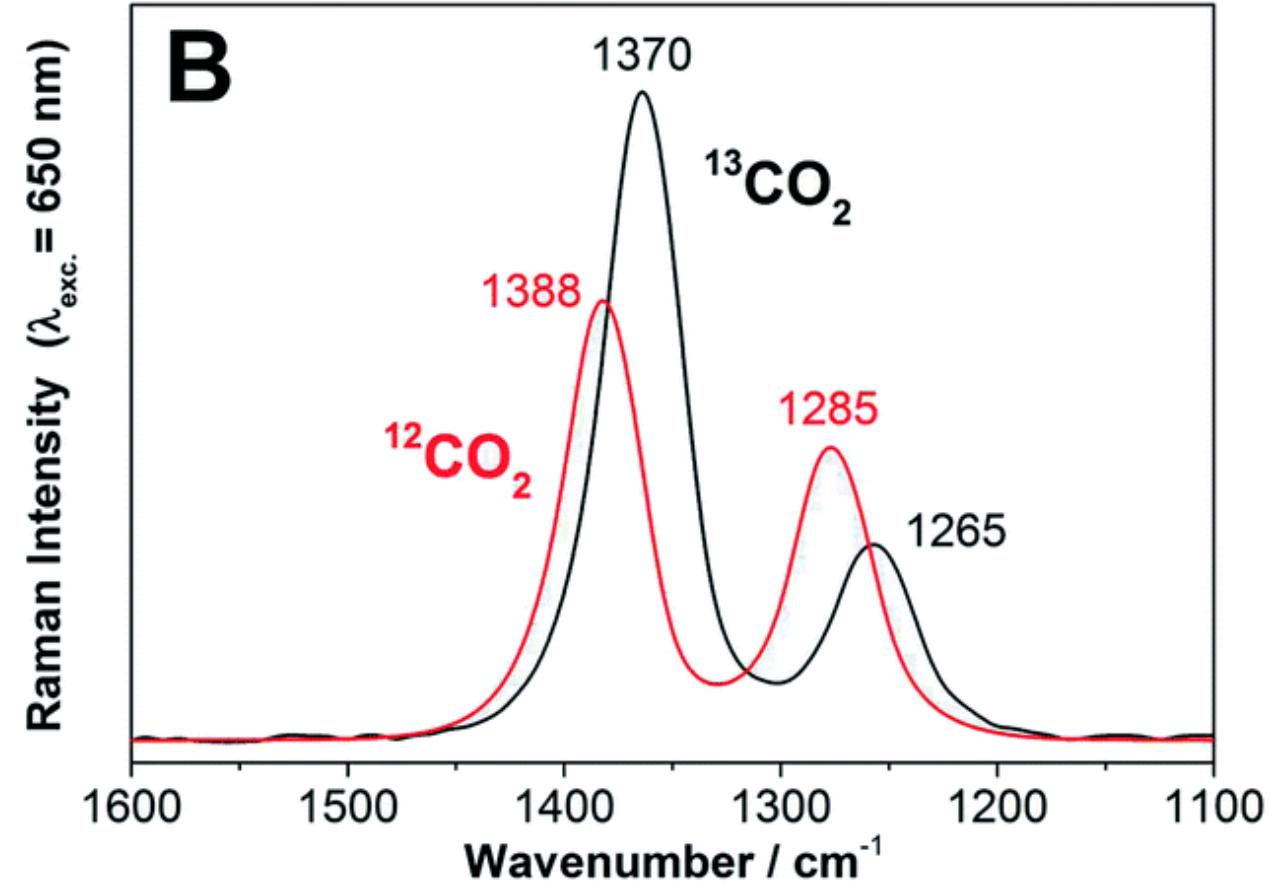
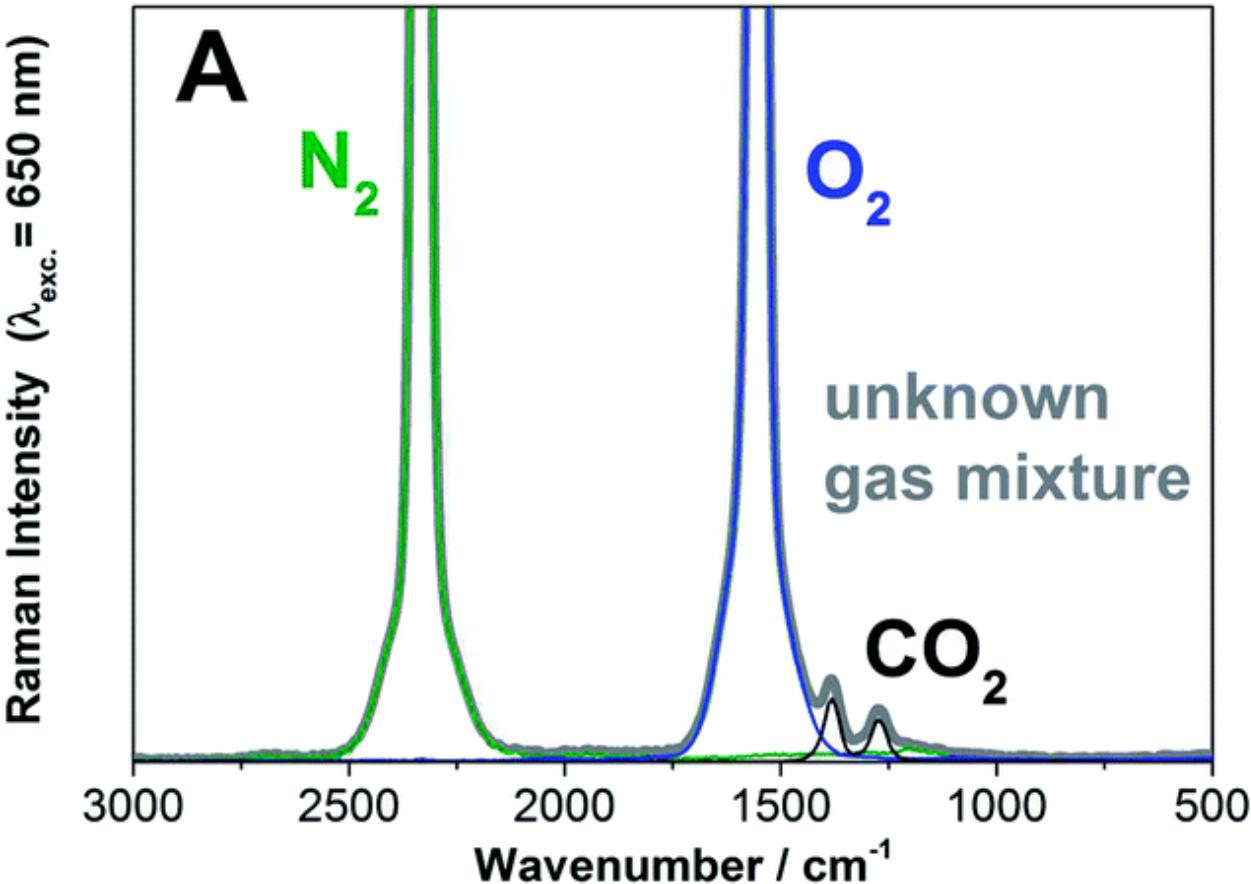
Quando a frequência do laser produz ressonância, obtêm-se os modos normais.

### Teoria:

Modelos fenomenológicos – parâmetros ajustados aos valores experimentais dos modos normais

Primeiros Princípios: Todas as quantidades medidas calculadas pela equação fundamental da Mecânica Quântica.

## Modos Normais: Ressonância



Excitação por laser, que mede as frequências de ressonância  
e as dos modos normais serve para determinar a constituição química dos gases.

# MODOS NORMAIS

Problema:

- a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

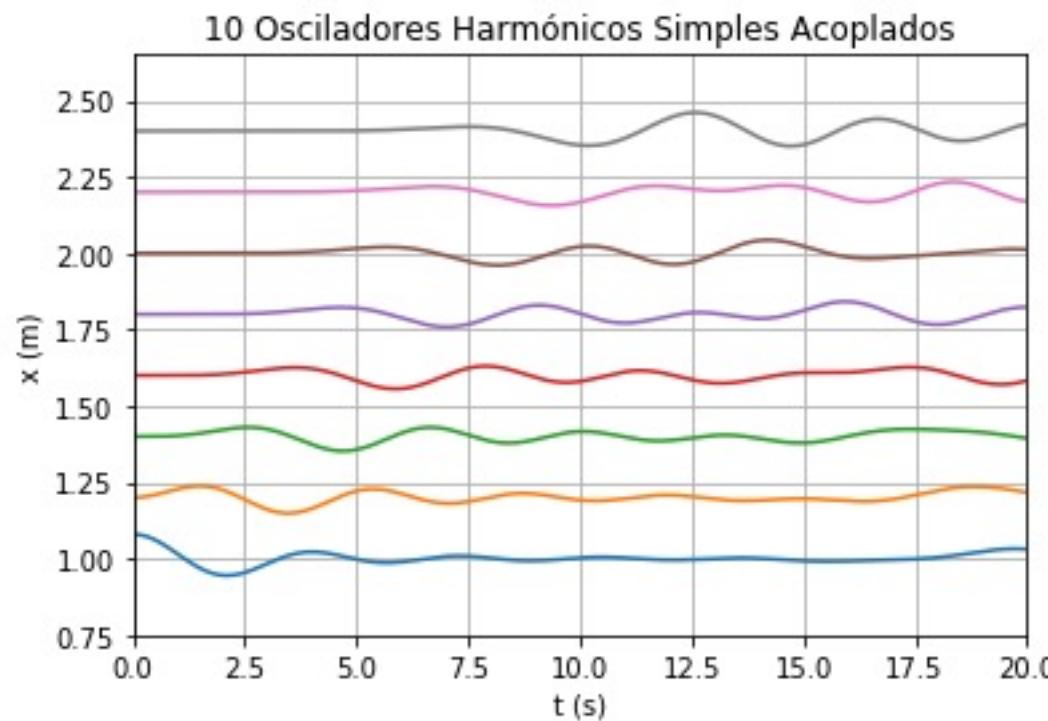
em que  $k = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ;  $k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$

- b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)  
c) Para o caso em que  $m = 2 \text{ kg}$ , calcule as frequências dos modos normais.

## N osciladores acoplados



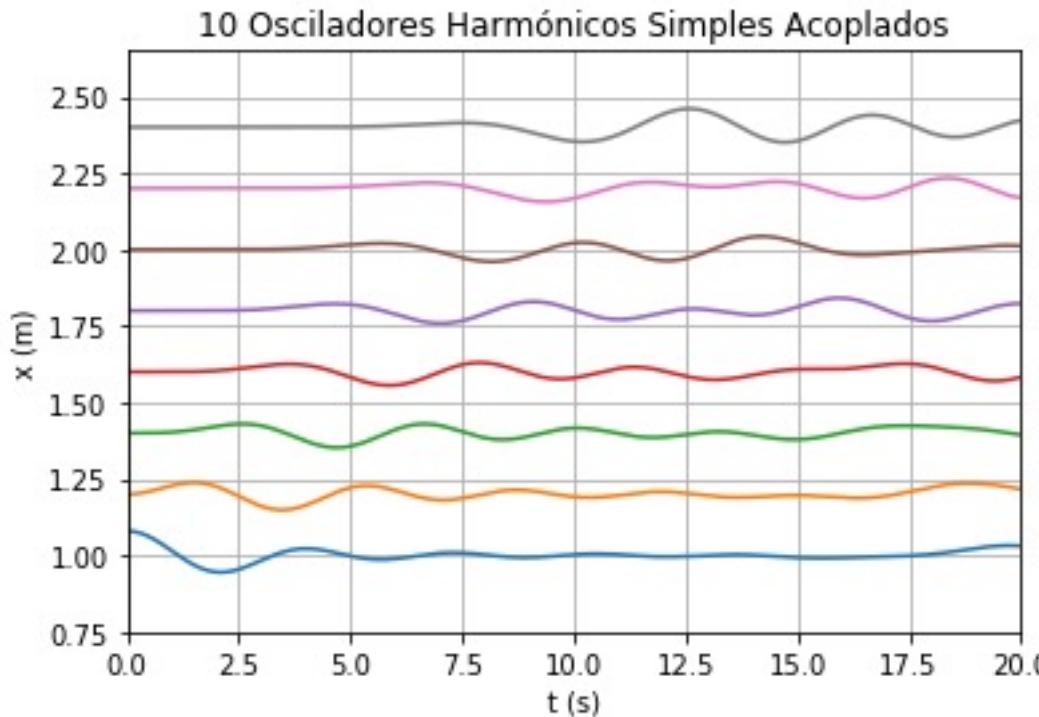
Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



Acoplamentos de osciladores: Transmissão de energia, não instantânea

# N osciladores acoplados

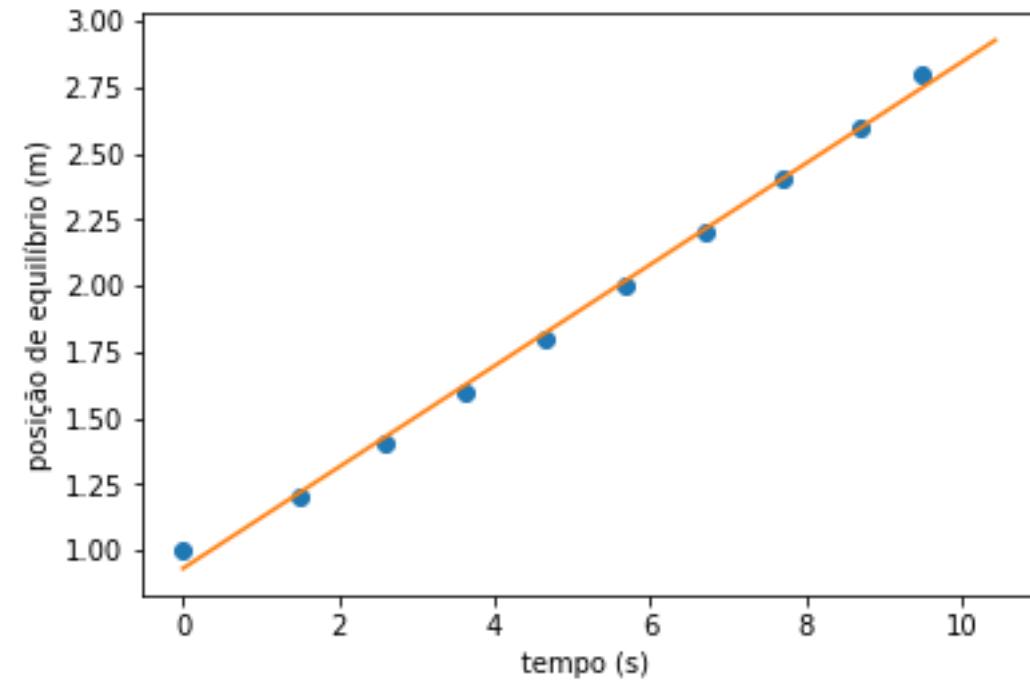
Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



Velocidade de propagação da perturbação

$0.192 \pm 0.004$  m/s

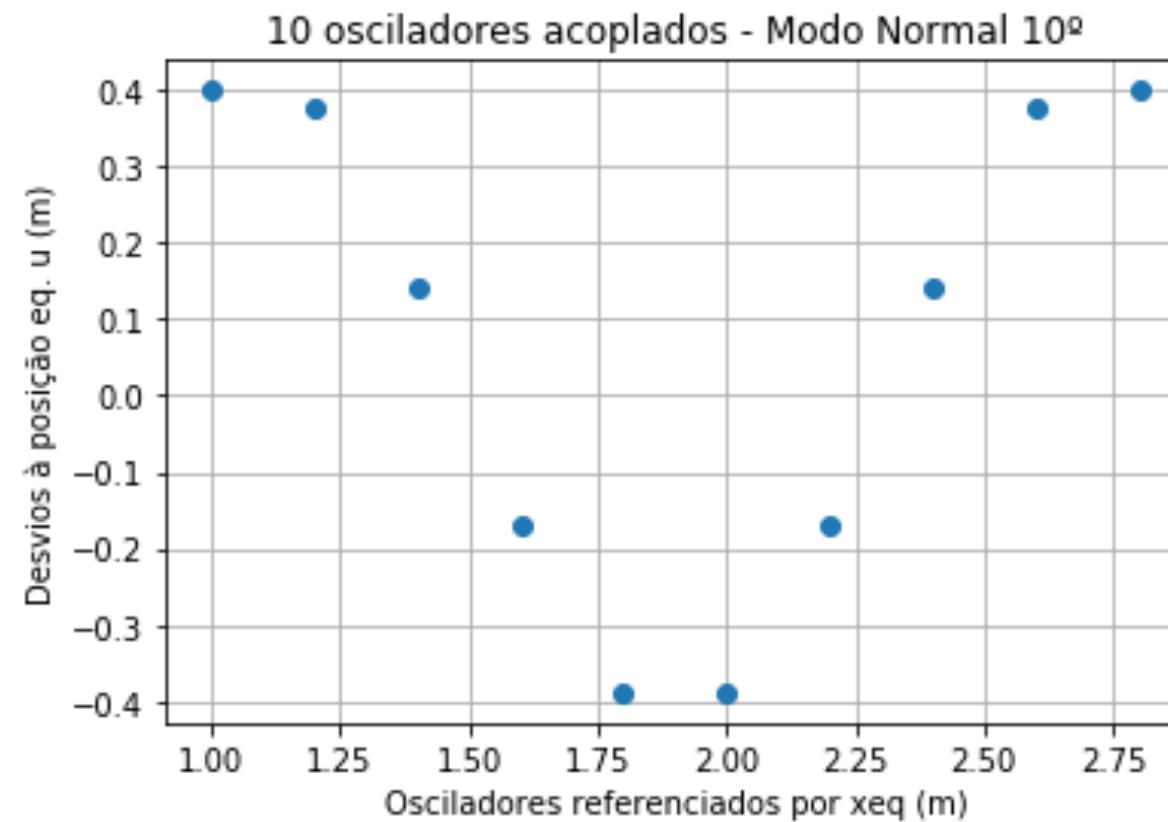
Tempo do primeiro máximo



Acoplamentos de osciladores: **Transmissão não instantânea de informação e de energia**

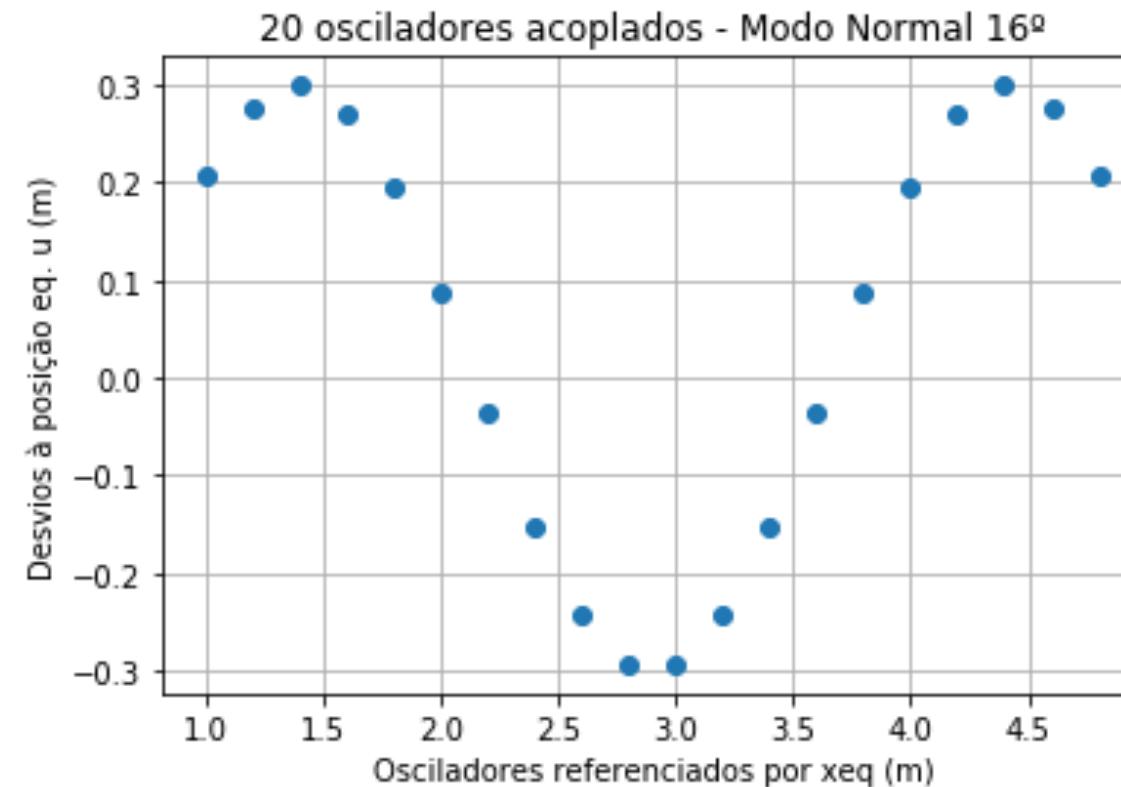
# MODOS NORMAIS

10 osciladores acoplados: modo normal 10º



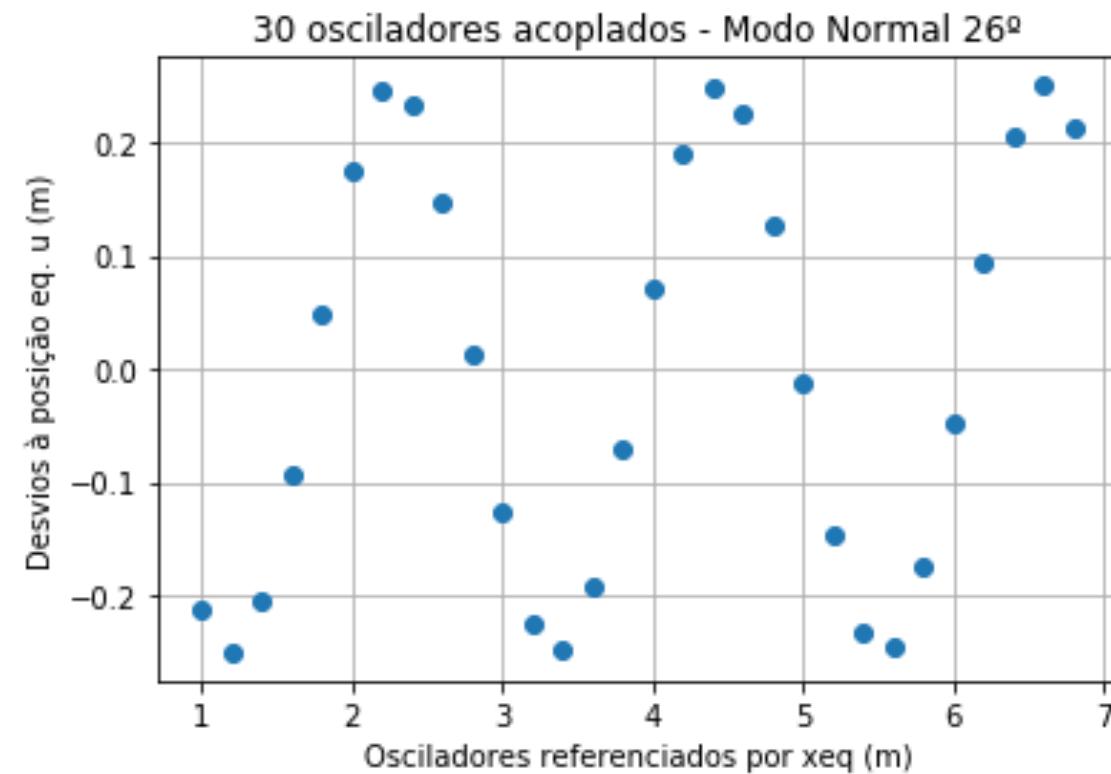
# MODOS NORMAIS

20 osciladores acoplados: modo normal 16º



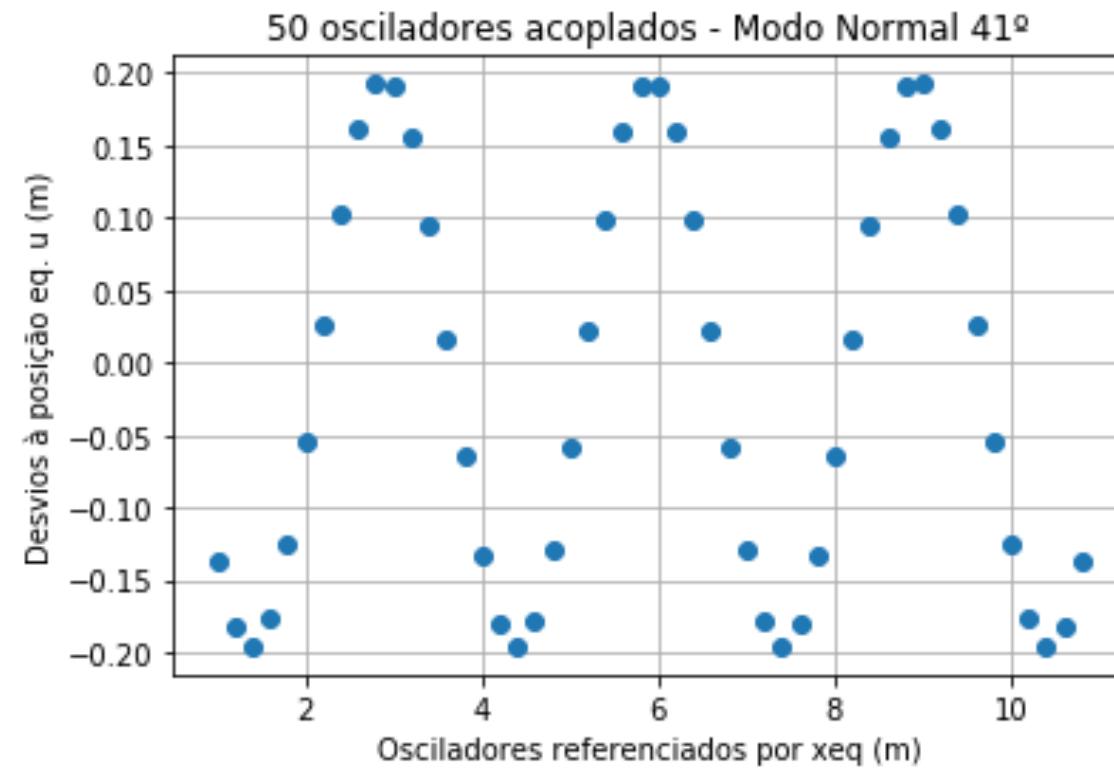
# MODOS NORMAIS

30 osciladores acoplados: modo normal 26º



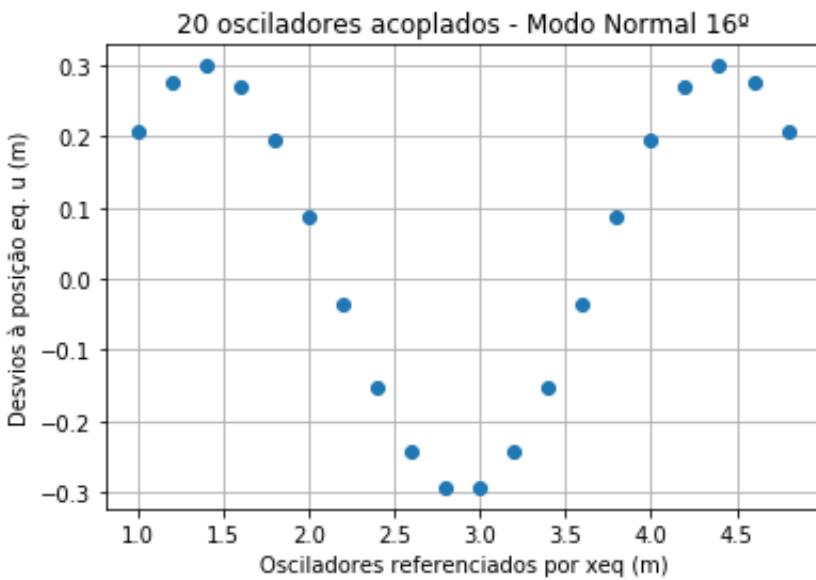
# MODOS NORMAIS

50 osciladores acoplados: modo normal 41º



# N osciladores acoplados

Considere 20 osciladores acoplados de igual massa. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios às posições de equilíbrio:

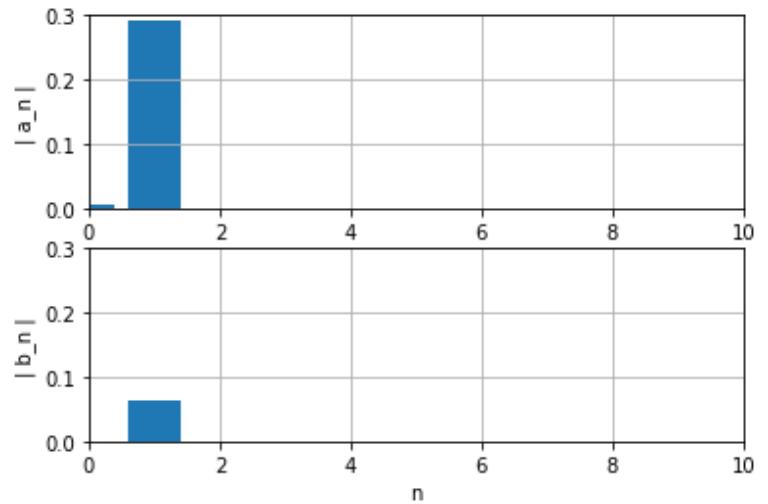


Parece uma função sinusoidal!

Os coeficientes de Fourier da parte que representa uma repetição (de máximo a máximo).

O comprimento dessa repetição é  $\lambda = 4.4 - 1.4 = 3.0$  m.

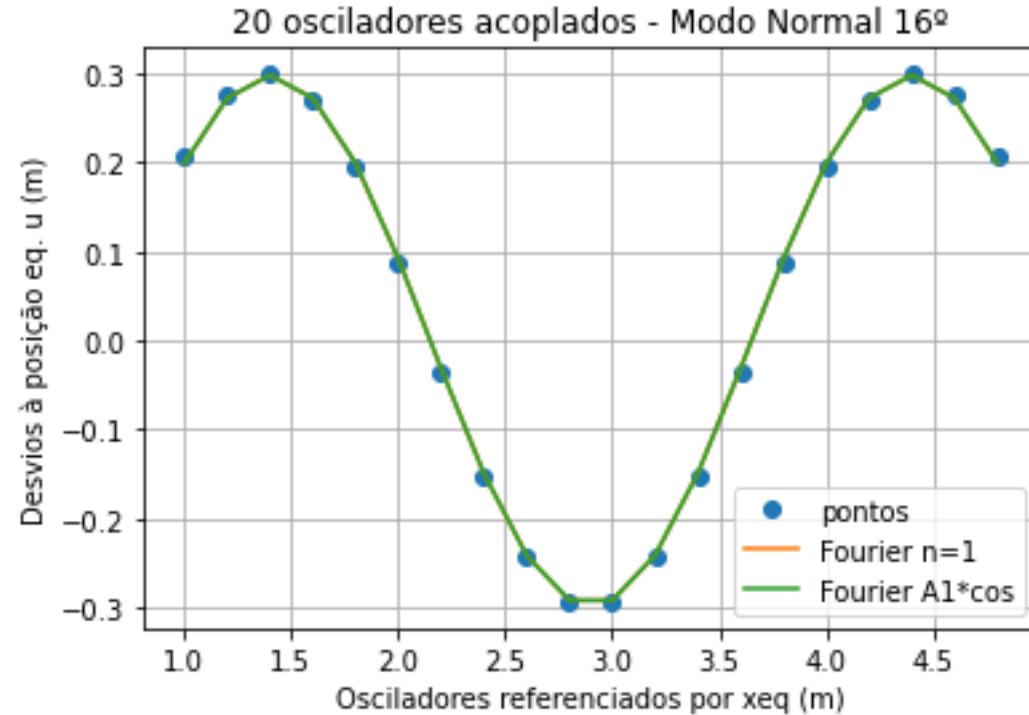
Coeficientes de Fourier



## N osciladores acoplados

Considere 20 osciladores acoplados de igual massa. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios às posições de equilíbrio:

O modo normal 16 usando só o termo de Fourier n=1:



$$u_{16}(x_{eq}) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_{eq}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x_{eq}\right) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_{eq} - \frac{2\pi}{3}1.4\right)$$

# N osciladores acoplados

6 osciladores acoplados: modos normais

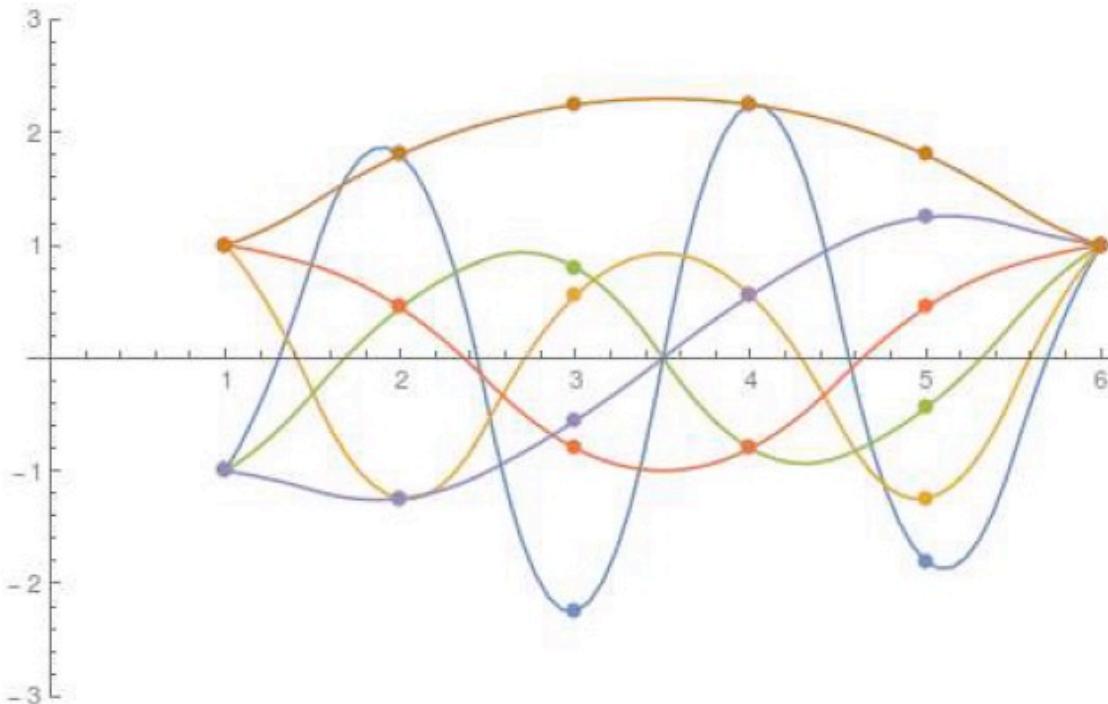
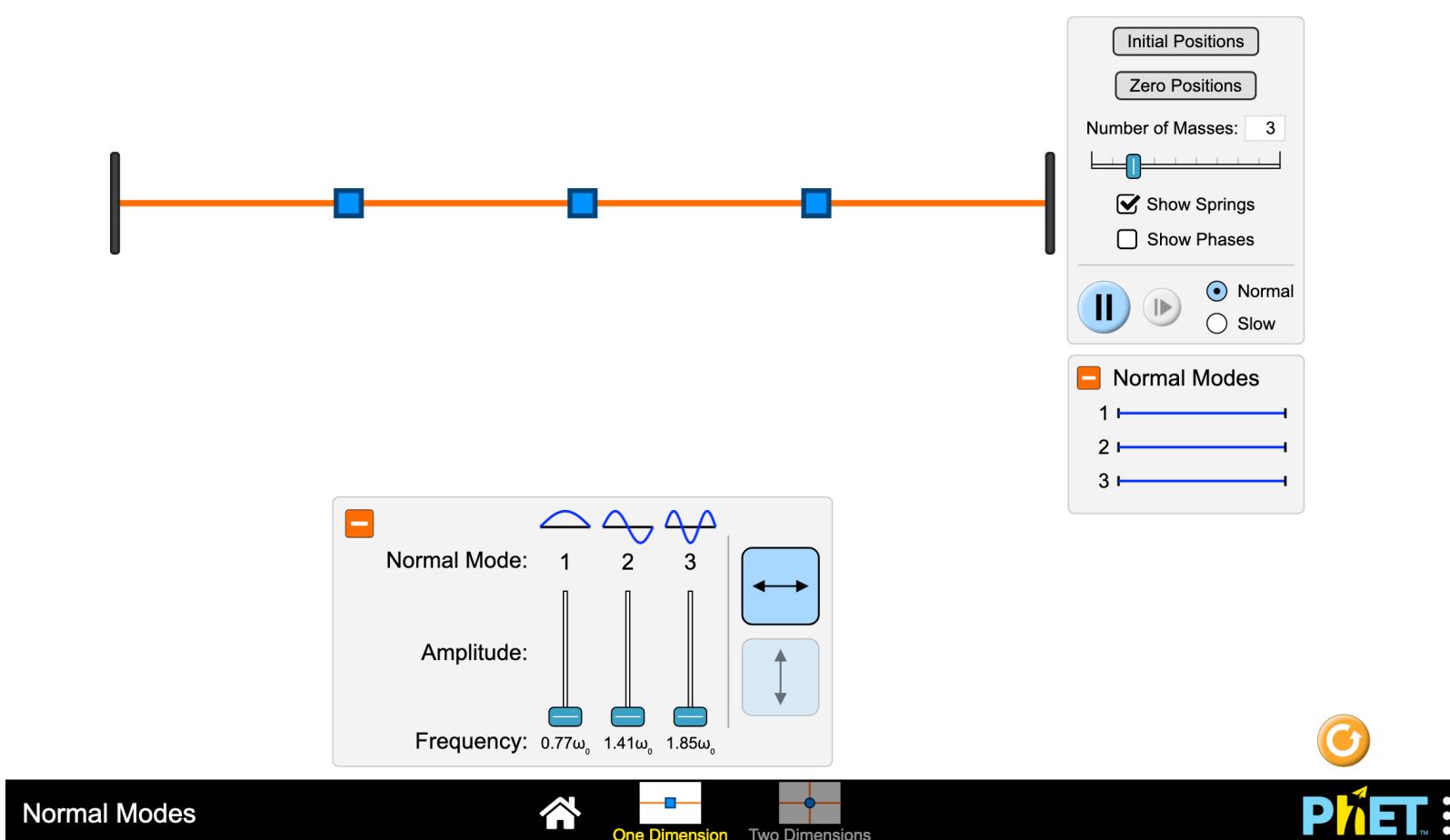


Figure 4. Normal modes displacements for the 6 mass system. These curves look like sine curves.

Os modos normais são um cosseno ou seno em cada corpo!

# MODOS NORMAIS Longitudinais e Transversais

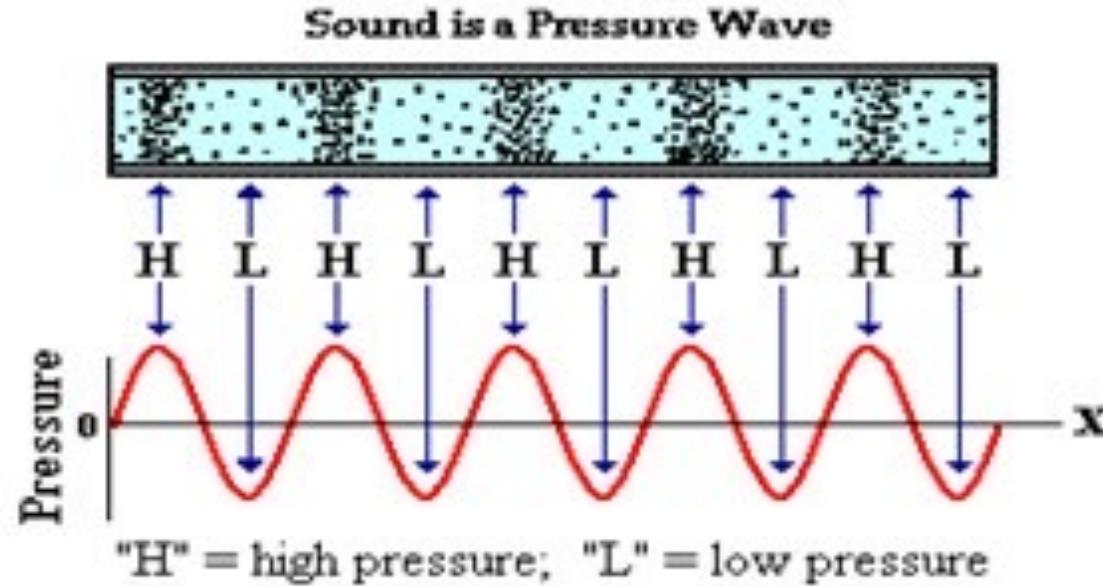
[https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html)



# Ondas

## Ondas longitudinais

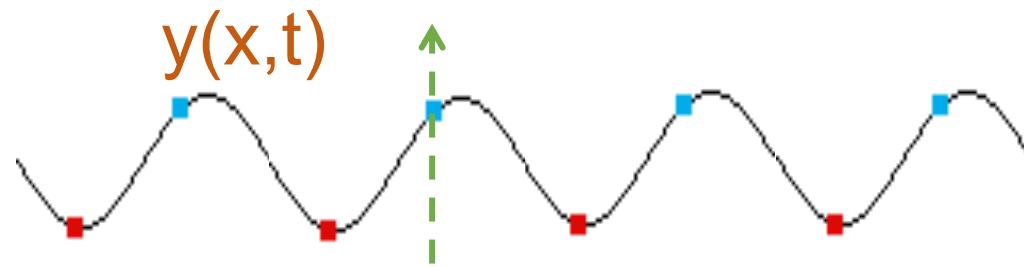
perturbação do meio tem a mesma direção da propagação da onda



# Ondas

## Ondas transversais

a perturbação do meio é perpendicular à direção de propagação da onda



○ Manual  
● Oscillate  
● Pulse

Restart

● Fixed End  
● Loose End  
● No End

Slow Motion  
Normal

Amplitude: 0.75 cm  
Frequency: 1.50 Hz  
Damping: None  
Tension: Low

Rulers  
Timer  
Reference Line

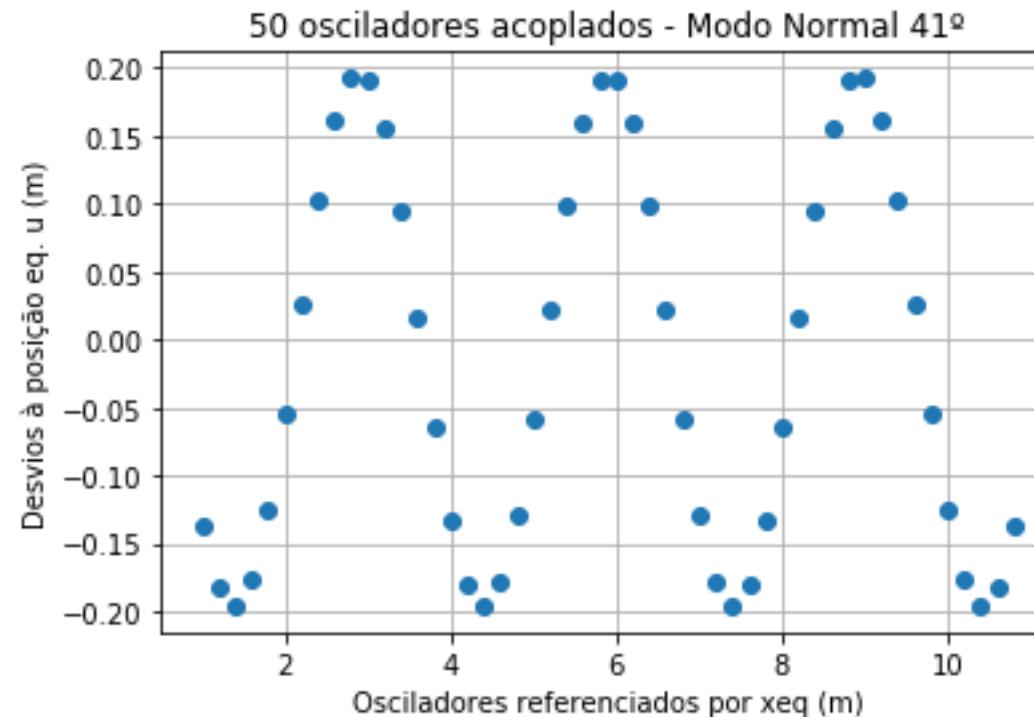
Wave on a String

PHET

<https://phet.colorado.edu/pt/simulations/wave-on-a-string>

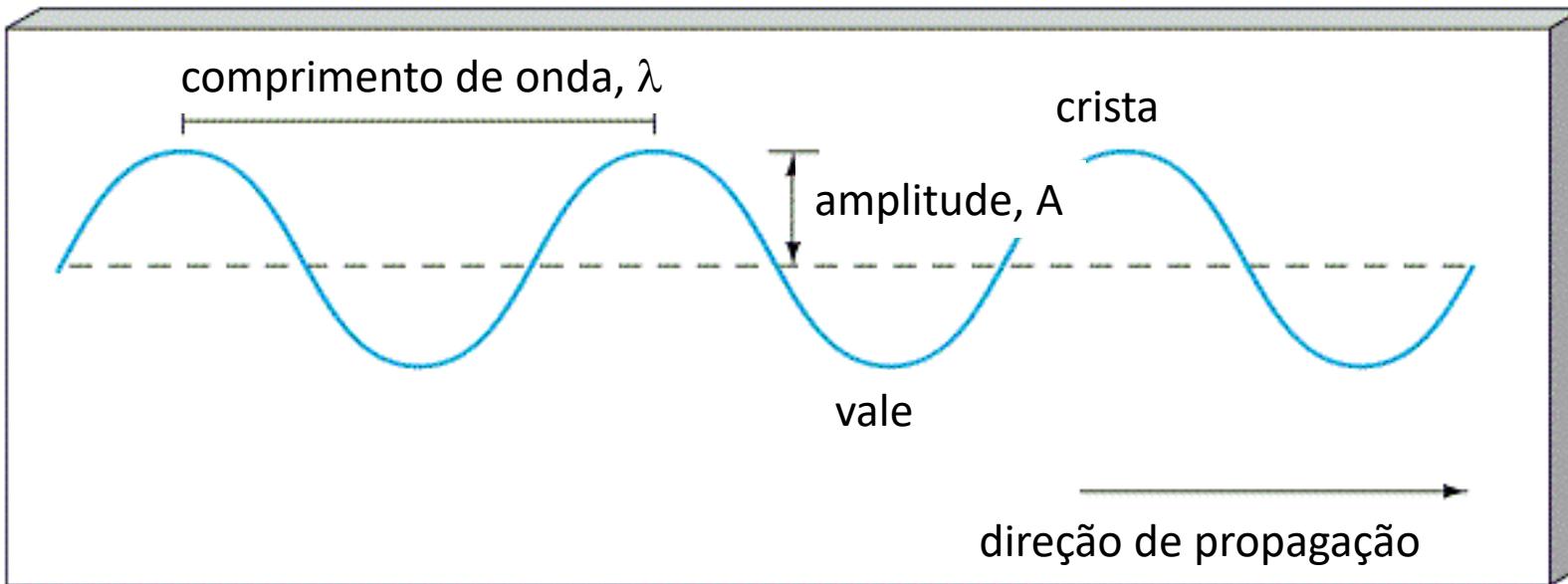
# MODOS NORMAIS

50 osciladores acoplados: modo normal 41º



Como varia a oscilação em cada oscilador? Ou como varia no espaço?  
Seno ou cosseno!

# Onda



**Repetição no tempo**

$$f = \frac{1}{T}$$
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

**Repetição no espaço**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{número de onda}$$

**Velocidade de propagação**

$$v = \lambda f$$