Home

guião

```
# As seguintes librarias serão necessárias para resolver os
# O numpy permite efetuar cálculos de forma eficiente
# sobre vários números (arrays)
import numpy as np
# O matplotlib e o seu módulo pyplot oferecem
# uma interface simples para gerar gráficos
import matplotlib.pyplot as plt
# O sympy traz cálculo simbólico ao python
import sympy
```

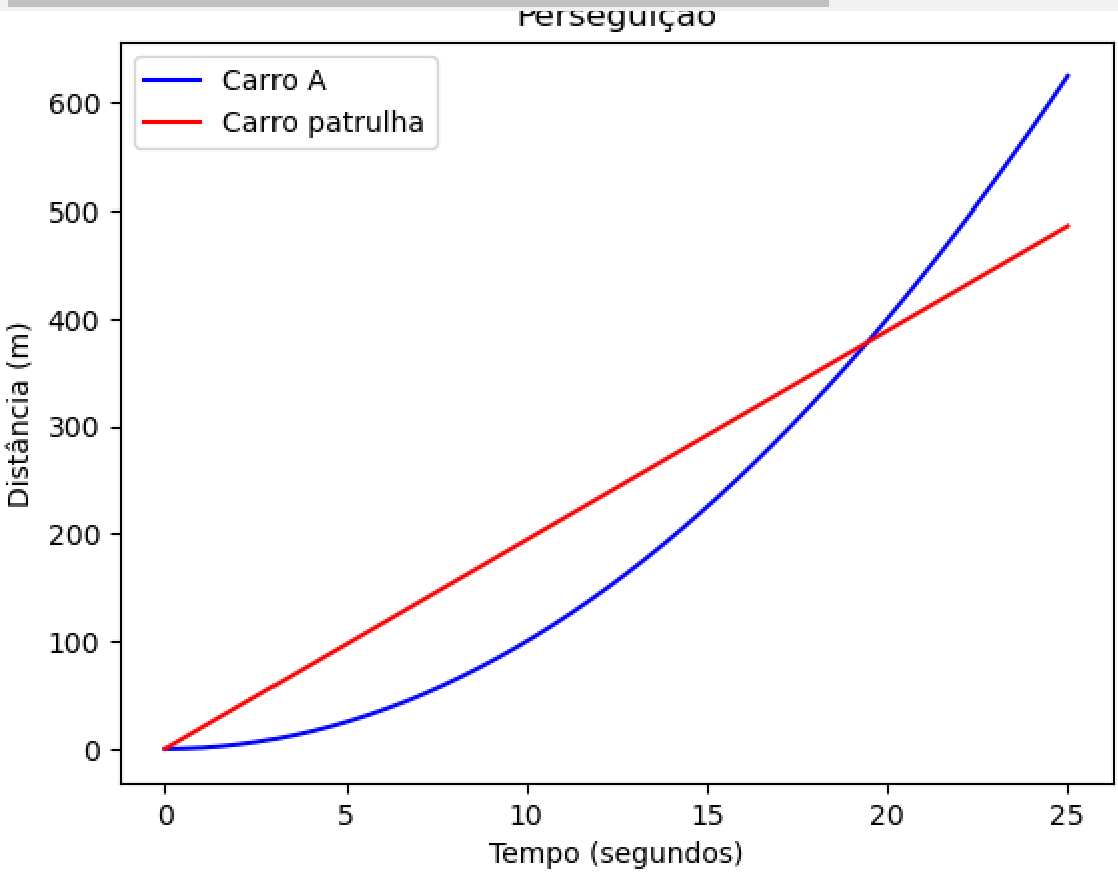
Exercício 1

Um carro A segue numa estrada à velocidade constante de 70 km/h onde o limite de velocidade é de 40 km/h. Ao passar por um carro patrulha, este último parte em sua perseguição à aceleração constante de 2,0 $\mathrm{m/s}^2$.

a) Faça o gráfico da lei do movimento do carro A e do carro patrulha, $x = x(t)$.

```
VELOCIDADE_CARRO = 70 * (1000 / 3600) # Convert from km/h
ACELERACAO_POLICIA = 2.0

# Gerar o eixo do tempo, o valor máximo foi encontrado de
# que o ponto de interseção dos dois carros apareça no grá
t = np.linspace(0, 25)

# Utilizamos a fórmula de aceleração uniforme para calcula
plt.plot(t, 1 / 2 * ACELERACAO_POLICIA * t**2, "b", label=
plt.plot(t, VELOCIDADE_CARRO * t, "r", label="Carro patrul
```

```
plt.xlabel("Tempo (segundos)")
plt.ylabel("Distância (m)")
plt.legend(loc="upper left")
plt.title("Perseguição")
plt.show()
```



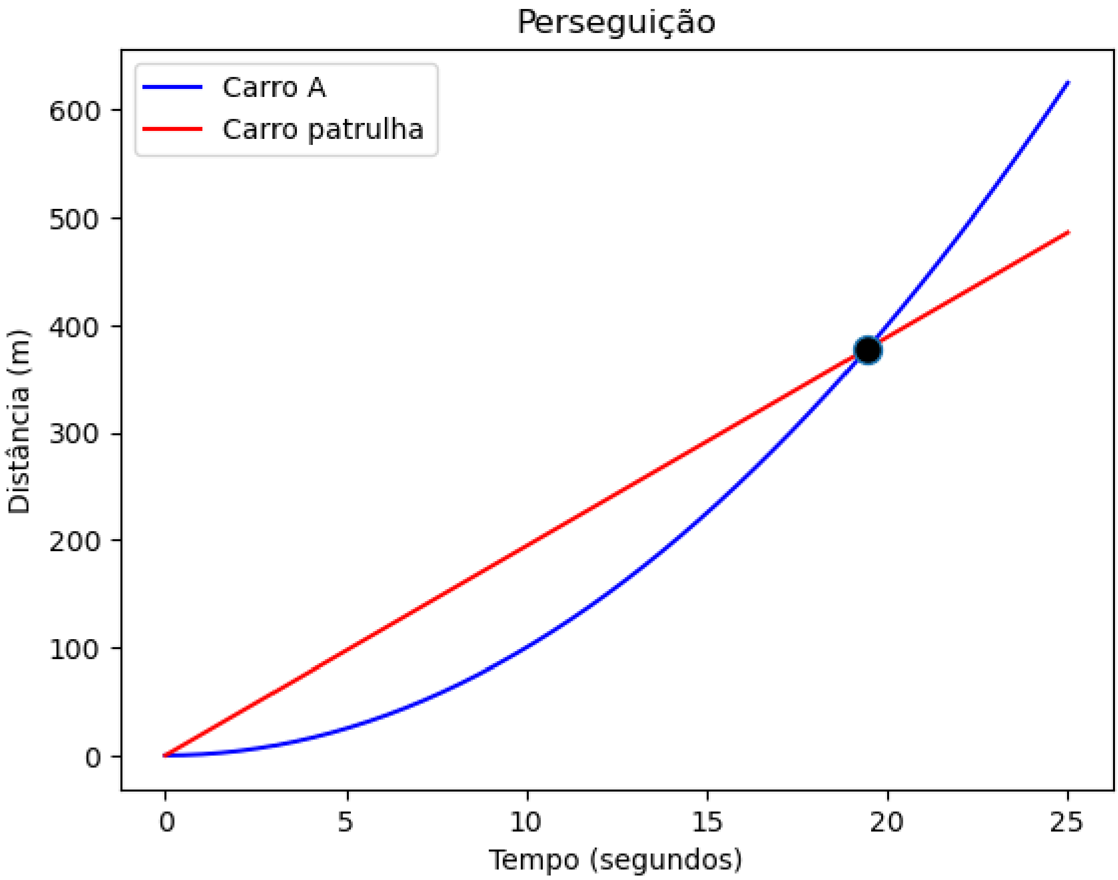
b) Em que instante e qual a distância percorrida pelo carro patrulha quando este último alcança o carro em infração?

Começamos por calcular o instante em que se intersetam, dado que um têm velocidade constante e outro têm aceleração uniforme, podemos usar a seguinte fórmula para calcular o instante de interseção.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}at^2 = vt \Leftrightarrow \frac{1}{2}at^2 - vt = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{v \pm \sqrt{v^2}}{2 \times \frac{1}{2} \times a} \\
&\Leftrightarrow t = \frac{v \pm \sqrt{v^2}}{a} \\
&\Leftrightarrow t = \frac{v \pm v}{a} \\
&\Leftrightarrow t = 0 \lor t = \frac{2v}{a}
\end{aligned}
$$

De seguida podemos só multiplicar esse instante pela velocidade do carro para calcular a distância a origem.

```
# Instante de interseção
tIntersect = (2 * VELOCIDADE_CARRO) / ACELERACAO_POLICIA

plt.plot(t, 1 / 2 * ACELERACAO_POLICIA * t**2, "b", label=
plt.plot(t, VELOCIDADE_CARRO * t, "r", label="Carro patrul
# Marcar o ponto de interseção
plt.plot(
    tIntersect,
    VELOCIDADE_CARRO * tIntersect,
    marker="o",
    markersize=10,
    markerfacecolor="black",
)
plt.xlabel("Tempo (segundos)")
plt.ylabel("Distância (m)")
plt.legend(loc="upper left")
plt.title("Perseguição")
plt.show()
```



$$t = 19.44444444$$

$$d = 378.08641975$$

Exercício 2

Um volante de badmington foi largado de uma altura considerável. A lei do movimento é

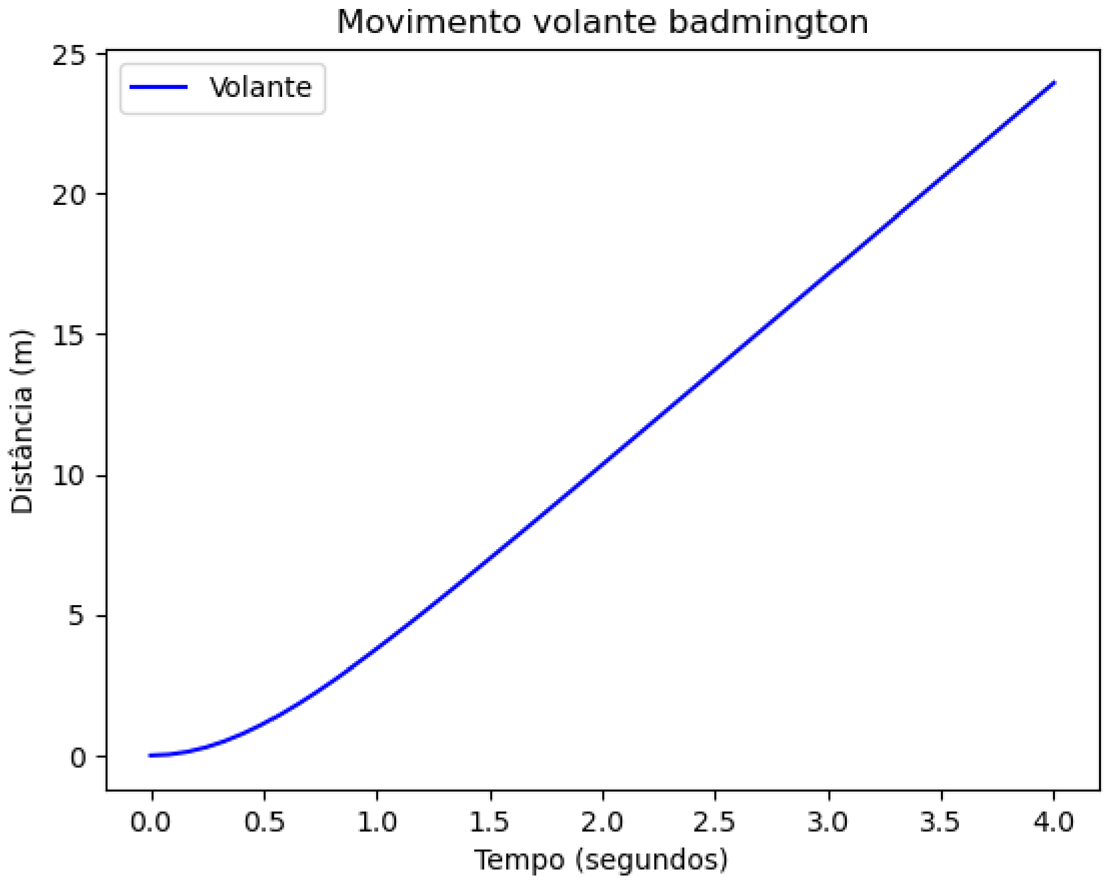
$$y(t) = \frac{v_T^2}{g} log \left[cosh \left(\frac{gt}{v_T} \right) \right]$$

em que a terminal do volante v_T é 6.80 m/s.

a) Faça o gráfico da lei do movimento $y(t)$ de 0 a 4.0 s.

```
VELOCIDADE_TERMINAL = 6.8
ACELERACAO_GRAVITICA = 9.8

# sympy.symbols define as variavéis que vamos usar na
# nossa equação.
```

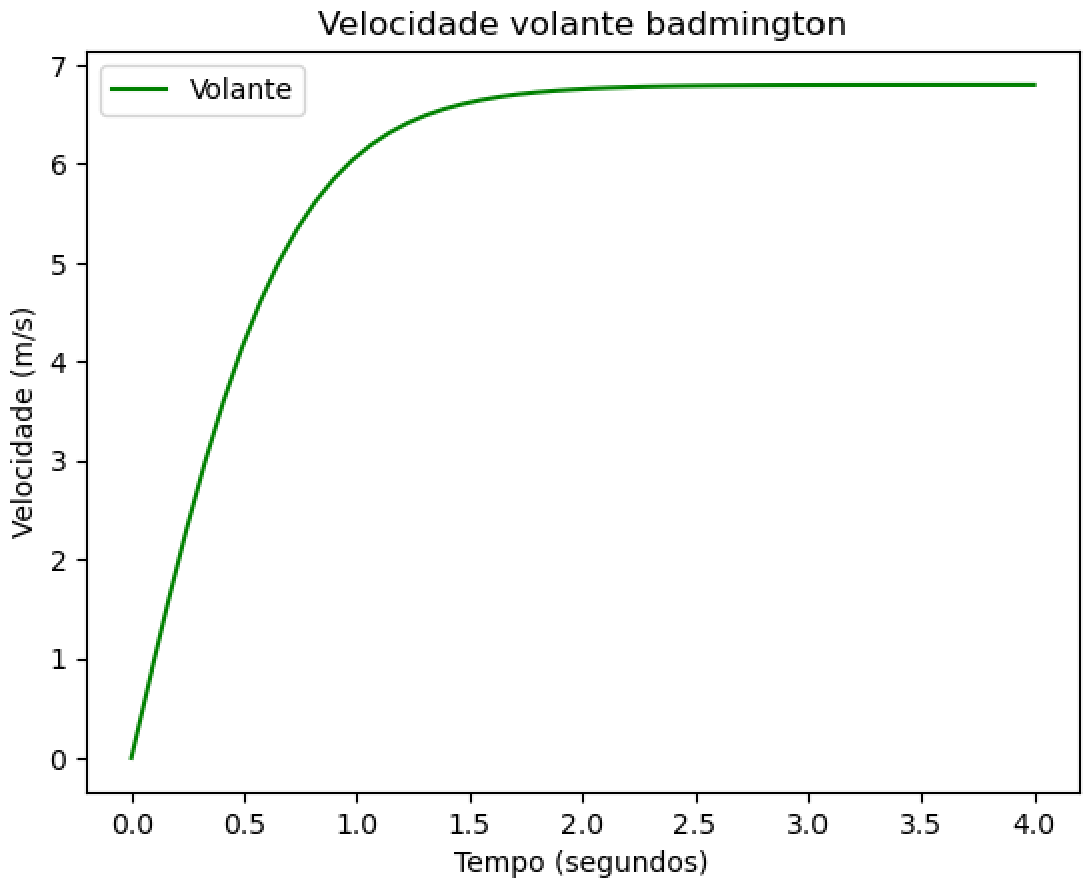
```
vT, g, t = sympy.symbols("vT, g, t")
# A fórmula do movimento com as variavéis
y = (vT**2 / g) * sympy.log(sympy.cosh(g * t / vT))

# expr.subs([var, value]+) troca todas as variáveis pelo
# valor associado a elas na expressão.
y2 = y.subs([(vT, VELOCIDADE_TERMINAL), (g, ACELERACAO_GRAV

# sympy.lambdify(args, expr) transforma uma expressão `expr
# matemática numa função python com `args` argumentos.
# "numpy" significa que o sympy vai usar os tipos do numpy
# para implementar a função.
y_lam = sympy.lambdify(t, y2, "numpy")

# A reta real
x = np.linspace(0, 4)

plt.plot(x, y_lam(x), "b", label="Volante")
plt.xlabel("Tempo (segundos)")
plt.ylabel("Distância (m)")
plt.legend(loc="upper left")
plt.title("Movimento volante badmington")
plt.show()
```



b) Determine a velocidade instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. Faça o gráfico da velocidade em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

Para obter a velocidade a partir da posição, utilizando cálculo simbólico, basta obtermos a derivada da expressão da posição.

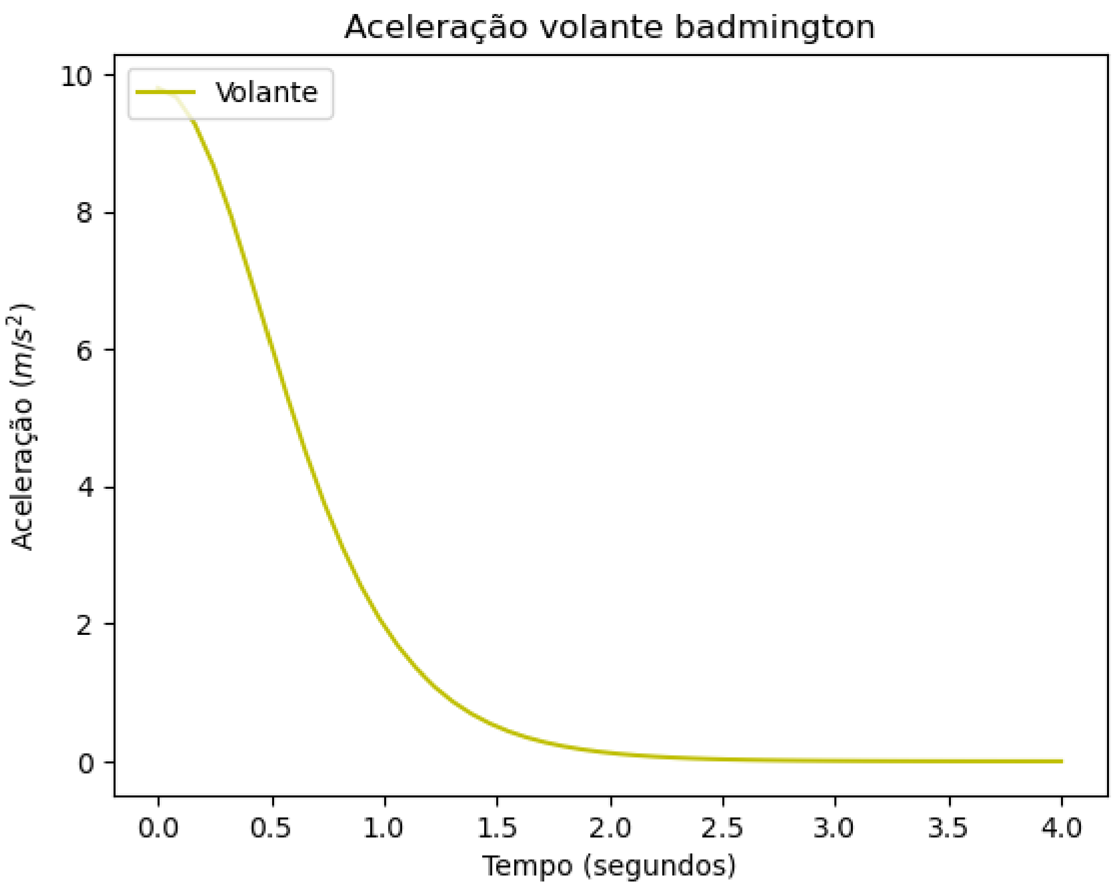
```
# sympy.diff calcula a derivada da expressão passada
# com base na variável passade em segundo argumento (`t`)
diff_y = sympy.diff(y2, t)
diff_y_lam = sympy.lambdify(t, diff_y, "numpy")

plt.plot(x, diff_y_lam(x), "g", label="Volante")
plt.xlabel("Tempo (segundos)")
plt.ylabel("Velocidade (m/s)")
plt.legend(loc="upper left")
plt.title("Velocidade volante badmington")
plt.show()
```



c) Determine a aceleração instantânea em função do tempo, usando cálculo simbólico. Faça o gráfico da aceleração em função do tempo de 0 a 4 s, usando o pacote matplotlib.

Para obter a aceleração a partir da posição, utilizando cálculo simbólico, basta obtermos a derivada da velocidade, que por sua vez é a derivada da posição, ou seja a aceleração é a derivada de segunda ordem da posição.

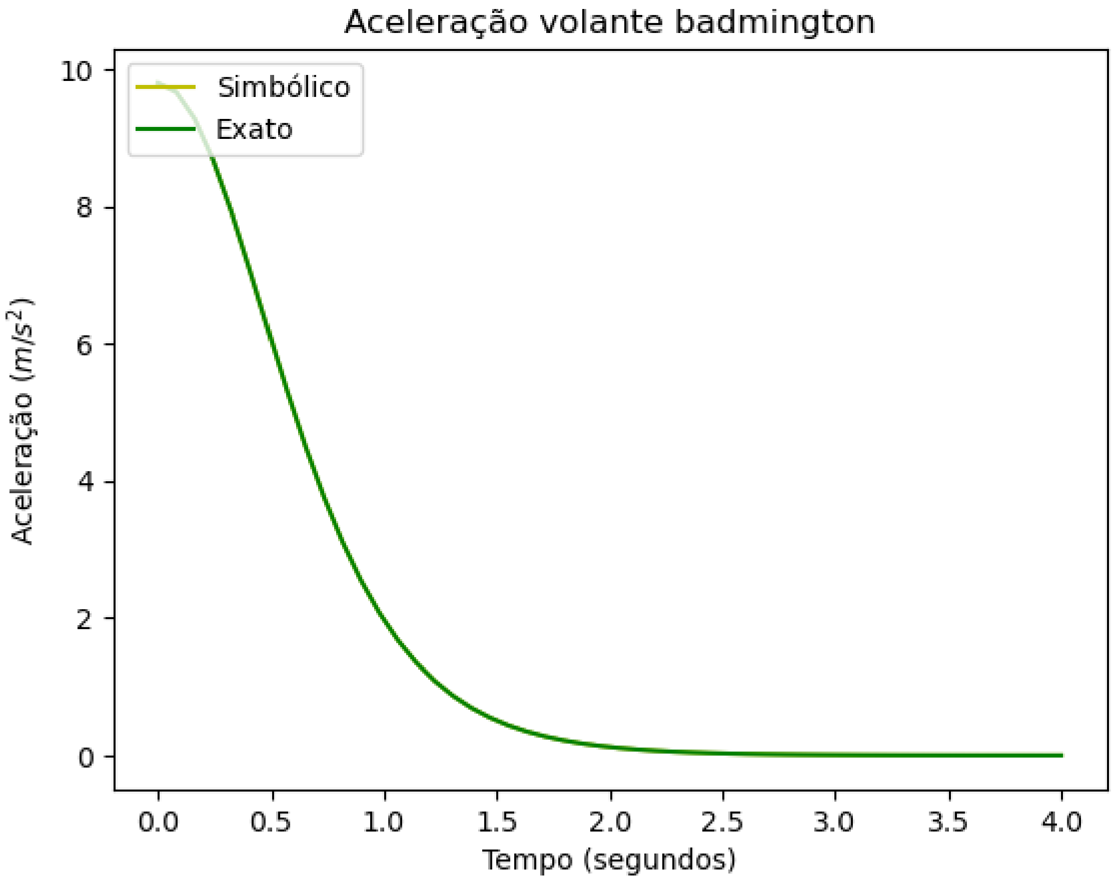
```
# Calcular a derivada da velocidade (2a ordem da posição)
diff2_y = sympy.diff(diff_y, t)
diff2_y_lam = sympy.lambdify(t, diff2_y, "numpy")

plt.plot(x, diff2_y_lam(x), "y", label="Volante")
plt.xlabel("Tempo (segundos)")
plt.ylabel("Aceleração ($m/s^2$)")
plt.legend(loc="upper left")
plt.title("Aceleração volante badmington")
plt.show()
```



d) Mostre que a aceleração $a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} v_y |v_y|$ é igual à calculada na alínea anterior.

Podemos verificar se são iguais desenhando os dois gráficos e verificando que se sobrepõe.

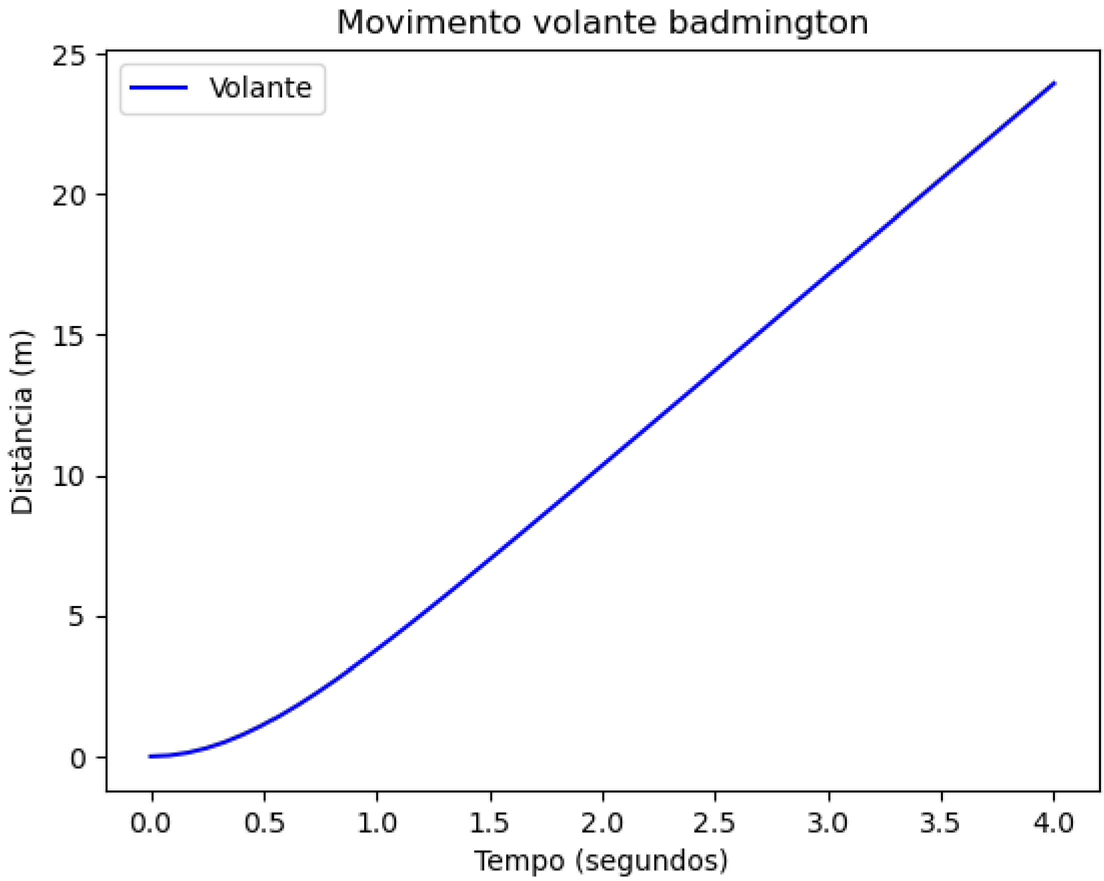
```
acel = g - (g / vT**2) * diff_y * sympy.Abs(diff_y)
acel2 = acel.subs([(vT, VELOCIDADE_TERMINAL), (g, ACELERAC
acel_lam = sympy.lambdify(t, acel2, "numpy")

plt.plot(x, diff2_y_lam(x), "y", label="Simbólico")
plt.plot(x, acel_lam(x), "g", label="Exato")
plt.xlabel("Tempo (segundos)")
plt.ylabel("Aceleração ($m/s^2$)")
plt.legend(loc="upper left")
plt.title("Aceleração volante badmington")
plt.show()
```



e) Se o volante for largado de uma altura de 20 m, quanto tempo demora a atingir o solo? Compare com o tempo que demoraria se não houvesse resistência do ar.

Para calcularmos quanto tempo o volante demora a bater no chão podemos usar o método `sympy.nsolve`, este método calcula os zeros da função, como queremos calcular $y = 20$, temos que utilizar a expressão $y - 20$.

Outra coisa que o `nsolve` precisa é de uma aproximação inicial do resultado, este pode ser obtido olhando para o gráfico e ver aproximadamente onde $y = 20$.



O valor do $y = 20$ encontra-se perto de $x = 3.5$ por isso vamos utilizá-lo como a nossa aproximação inicial.

```
tIntersect = sympy.nsolve(y2 - 20, t, 3.5)
```

$$t = 3.42209964$$

Para calcular sem resistência do ar, podemos usar a lei do movimento uniformemente acelerado:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Como o volante é largado de uma altura de 20 m, sabemos que as variáveis têm os seguintes valores: $y_0 = 20$, $v_0 = 0$, $a = -9.8$ (Aceleração gravítica).

Logo a expressão fica:

$$y(t) = 20 - 4.9t^2$$

Podemos calcular diretamente quando $y(t) = 0$ (quando o volante bate no chão:

$$\begin{aligned} y(t) = 0 &\Leftrightarrow 20 - 4.9t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4.9t^2 = 20 \\ &\Leftrightarrow 4.9t^2 = 20 \\ &\Leftrightarrow t^2 = \frac{200}{49} \\ &\Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{200}{49}} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{10\sqrt{2}}{7} \approx 2.02030509 \text{ s} \end{aligned}$$

f) Nas condições da alínea anterior, qual o valor da velocidade e da aceleração quando o volante chega ao solo?

Com resistência do ar

```
# np.float64 converte um float do python num float do numpy
# necessário pois as funções geradas pelo sympy com o módu
# aceitam tipos do numpy.
vIntersect = diff_y_lam(np.float64(tIntersect))
aIntersect = diff2_y_lam(np.float64(tIntersect))
```

$$v = 6.79929244$$

$$a = 0.00203935$$

Sem resistência do ar

Sem resistência do ar, a aceleração mantém se constante e é igual a aceleração gravítica (utilizamos $9.8\ m/s^2$) e a velocidade é calculada pela seguinte expressão:

$$v(t) = at$$

Substituindo:

$$v\left(\frac{10\sqrt{2}}{7}\right) = 9.8\frac{10\sqrt{2}}{7} \approx 19.79898987\ m/s$$