Home

guião

```python
# As seguintes librarias serão necessárias para resolver o
# O numpy permite efetuar cálculos de forma eficiente
# sobre vários números (arrays)
import numpy as np
# O matplotlib e o seu módulo pyplot oferecem
# uma interface simples para gerar gráficos
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercício 1

Um vetor a 2 dimensões tem as coordenadas (3, 4).

a) Qual a sua intensidade ou comprimento?

$$|(3,4)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

b) Qual o vetor unitário correspondente?

Para calcular o vetor unitário, precisamos de multiplicar o vetor pelo o inverso da intensidade.

$$\frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

c) Qual o vetor $2 \times (3,4)$? Qual o seu comprimento ou módulo?

$$2 \times (3,4) = (6,8)$$

$$|(6,8)| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

ou

$$|2 \times (3,4)| = 2\,|(3,4)| = 2 \times 5 = 10$$

Exercício 2

Dois vetores são (1, 2) e (-2, 3). Qual o seu produto escalar e qual o ângulo entre os dois vetores?

$$(1,2) \cdot (-2,3) = 1 \times -2 + 2 \times 3 = -2 + 6 = 4$$

Para calcular o ângulo

$$\begin{aligned}\cos\theta = \frac{(1,2)\cdot(-2,3)}{|(1,2)|\,|(-2,3)|} &\Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{(1,2)\cdot(-2,3)}{|(1,2)|\,|(-2,3)|}\\ &\Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\\ &\Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{65}} \approx 1.0517\ (\text{rad.})\end{aligned}$$

Exercício 3

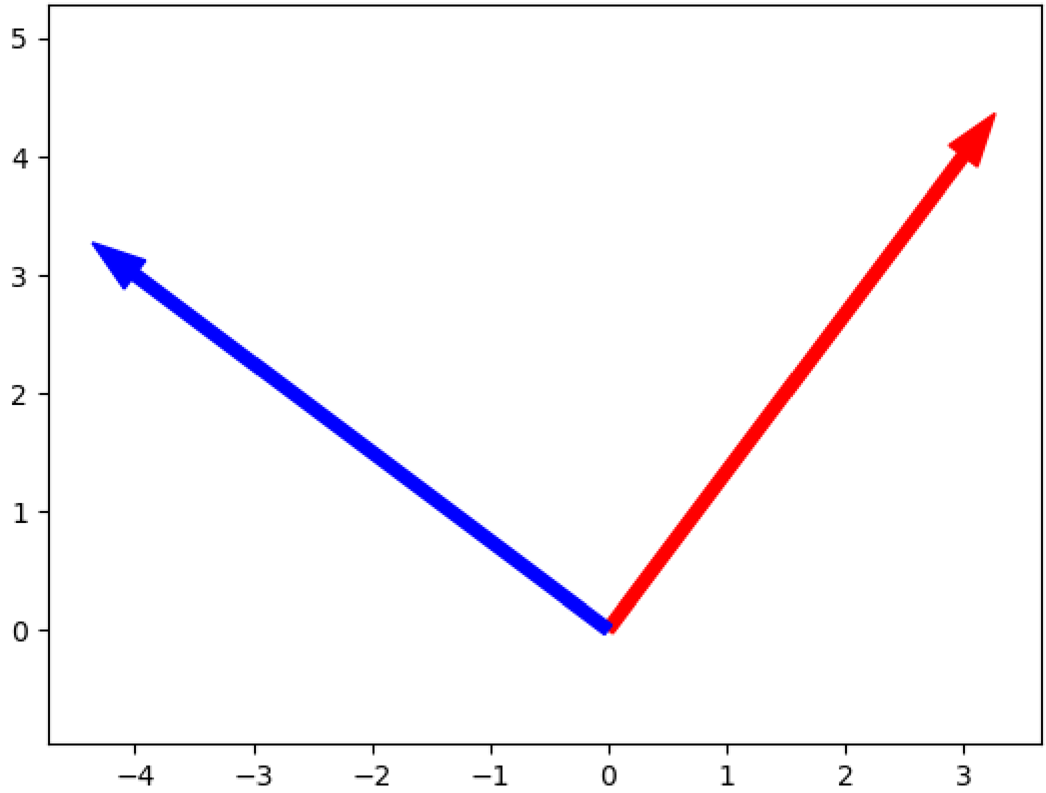
Encontre um vetor perpendicular ao vetor (3, 4), no espaço a 2D. Note que o produto escalar de dois vetores perpendiculares é nulo.

Sabemos que um vetor perpendicular a outra têm entre eles um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos, logo se substituírmos no produto escalar obtemos os vetores perpendiculares.

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{(3,4)\cdot(a,b)}{|(3,4)|\,|(a,b)|} &\Leftrightarrow 0 = \frac{3a+4b}{5\sqrt{a^2+b^2}}\\ &\Leftrightarrow 0 = 3a+4b\\ &\Leftrightarrow -3a = 4b\\ &\Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}b\end{aligned}$$

Logo desde que a igualdade se mantenha o vetor é perpendicular a (3, 4). Usando por exemplo $b = 3$, ficamos com (-4, 3) que é perpendicular a (3, 4).

```
plt.arrow(0, 0, 3, 4, color="r", width=0.1)
plt.arrow(0, 0, -4, 3, color="b", width=0.1)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

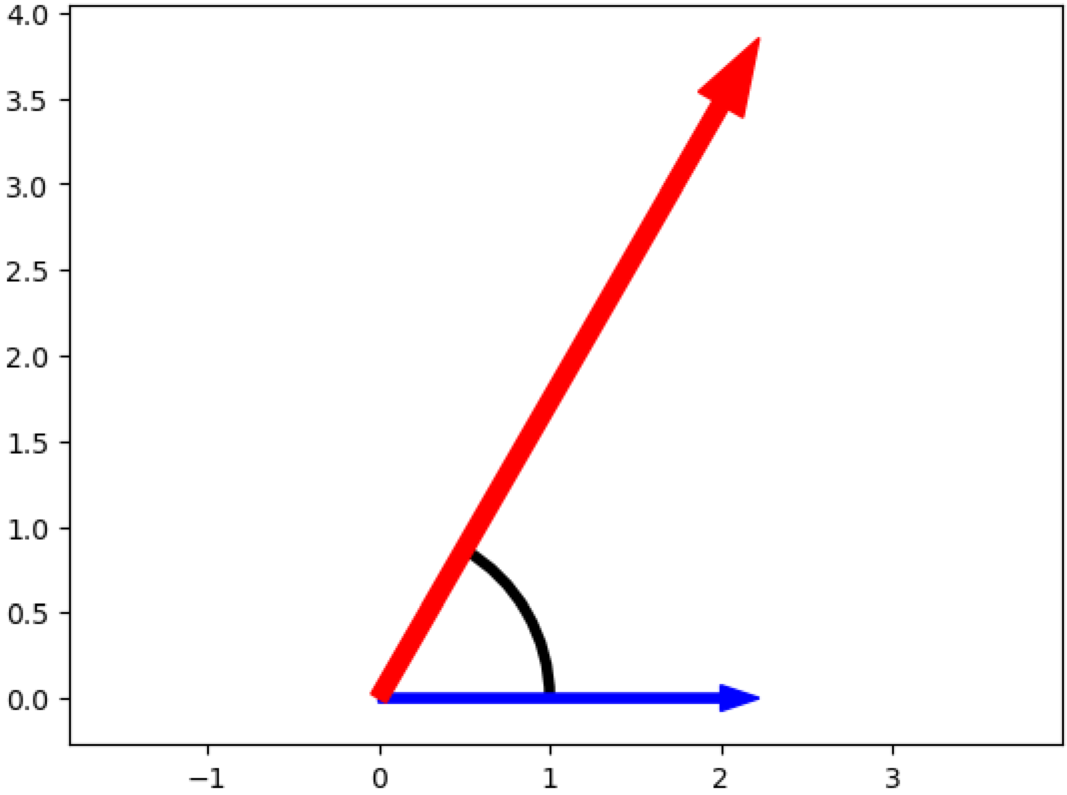


Exercício 4

Uma força tem como coordenada segundo OX $F_x = 2.0N$ e faz um ângulo de 60º com o eixo dos OX. Qual a intensidade (ou módulo) da força?

Como F_x têm coordenada de $x = 2.0N$ e sabemos o ângulo que a força faz com o eixo, podemos através do $\cos$ calcular a intensidade da força, pois esta será a hipotenusa de um triângulo retângulo formado entre as coordenadas de x e as de y.

$$
\begin{aligned}
\cos 60^\circ = \frac{2}{|F|} &\Leftrightarrow |F| = \frac{2}{\cos 60^\circ} \\
&\Leftrightarrow |F| = \frac{2}{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow |F| = 4
\end{aligned}
$$



Exercício 5

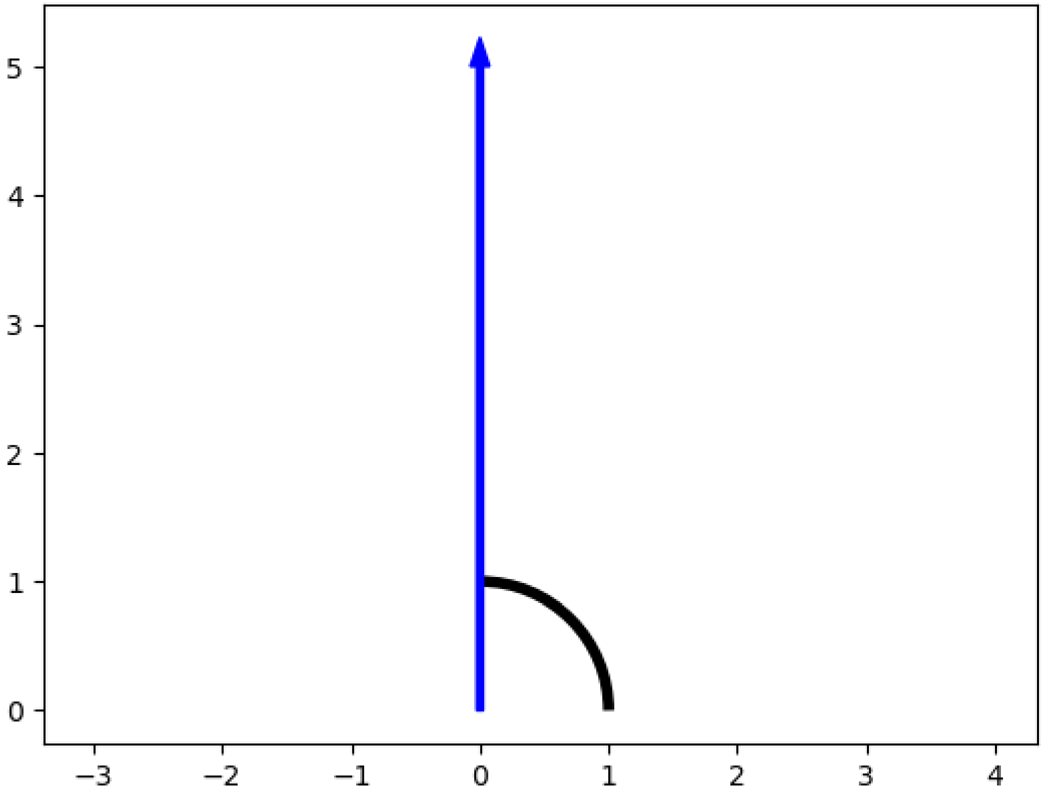
Uma força de intensidade $|\vec{F}| = 5.00N$ faz um ângulo θ com o eixo positivo OX. Quais as coordenadas (F_x, F_y) da força, quando o ângulo for:

As coordenadas de uma força podem ser calculadas utilizando as seguintes expressões:

$$
\begin{aligned}
F_x &= |\vec{F}| \cos\theta \\
F_y &= |\vec{F}| \sin\theta
\end{aligned}
$$

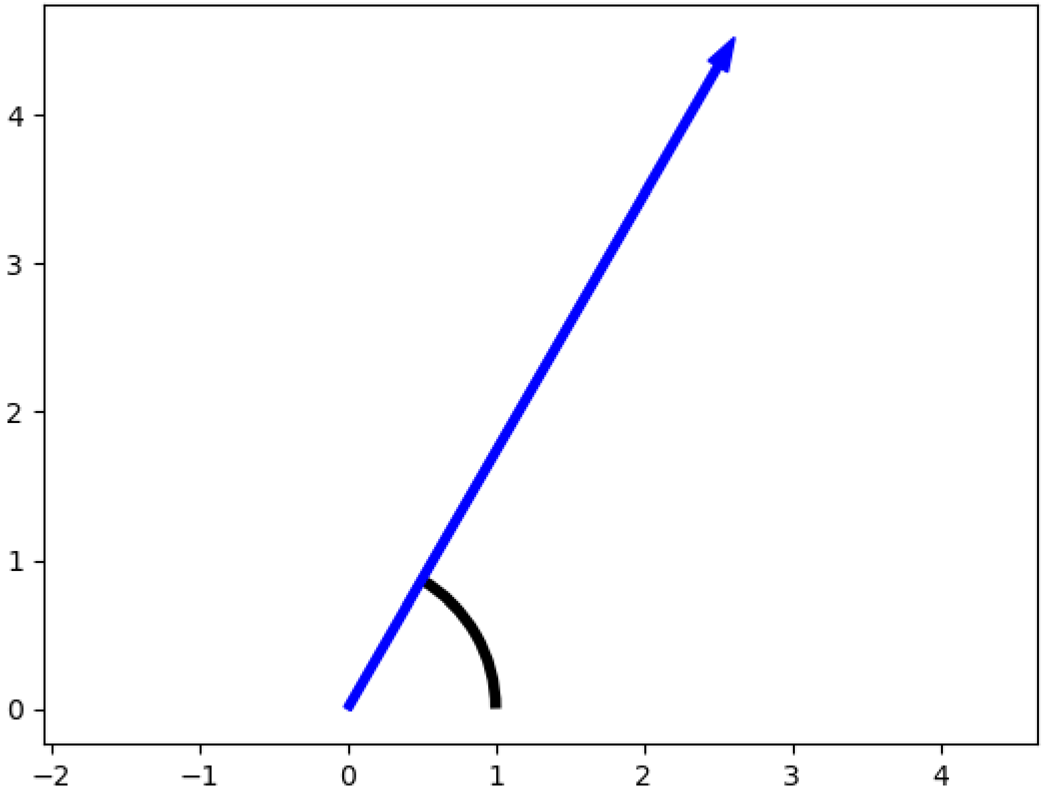
a) $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$F_x = |\vec{F}| \cos \frac{\pi}{2} = 5 \times 0 = 0$$
$$F_y = |\vec{F}| \sin \frac{\pi}{2} = 5 \times 1 = 5$$



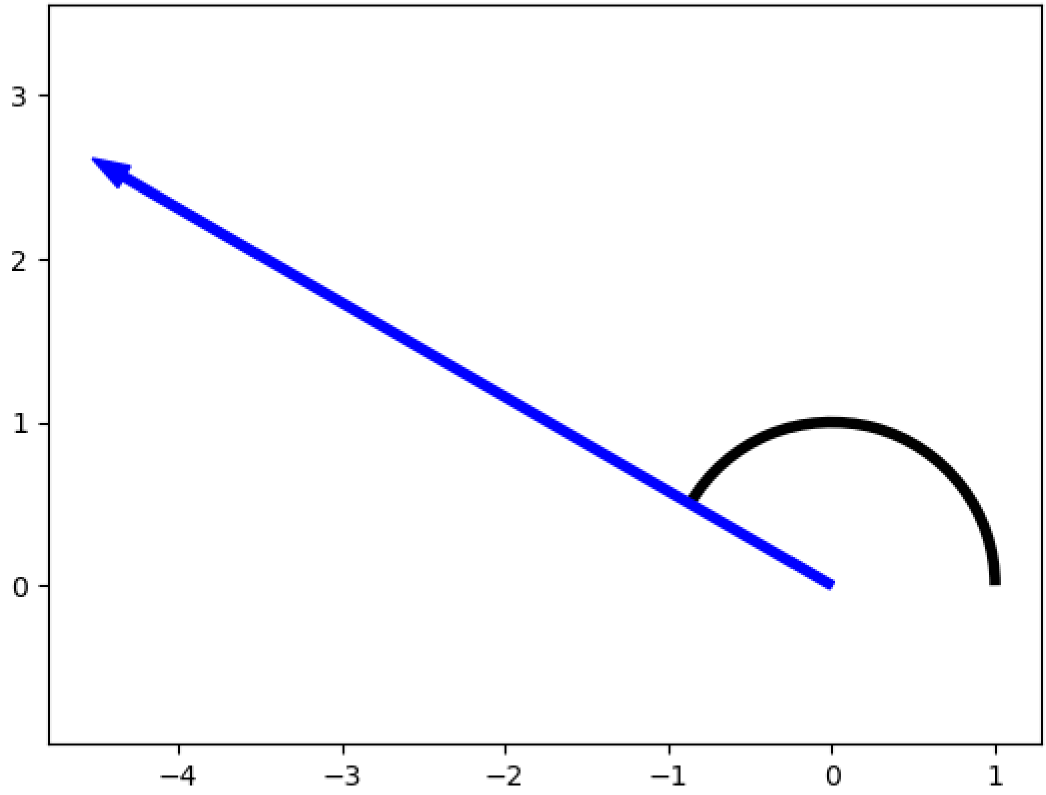
b) $\theta = 60^\circ$

$$F_x = |\vec{F}| \cos 60^\circ = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$$
$$F_y = |\vec{F}| \sin 60^\circ = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$



c) $\theta = \frac{-7\pi}{6}$

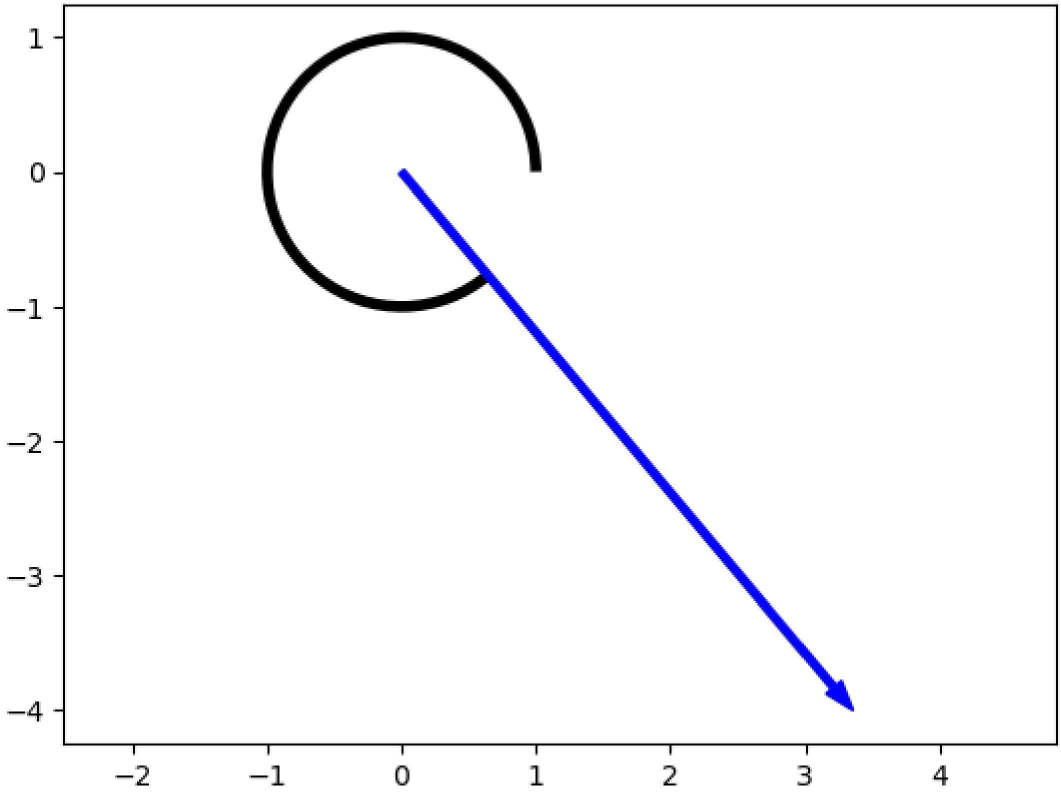
$$F_x = |\vec{F}| \cos \frac{-7\pi}{6} = 5 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$$
$$F_y = |\vec{F}| \sin \frac{-7\pi}{6} = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$$



d) $\theta = 310^\circ$

$$F_x = |\vec{F}|\cos 310^\circ = 5 \times \cos\left(\frac{5}{18}\pi\right) \approx 3.21393805$$

$$F_y = |\vec{F}|\sin 310^\circ = 5 \times -\sin\left(\frac{5}{18}\pi\right) \approx -3.83022222$$

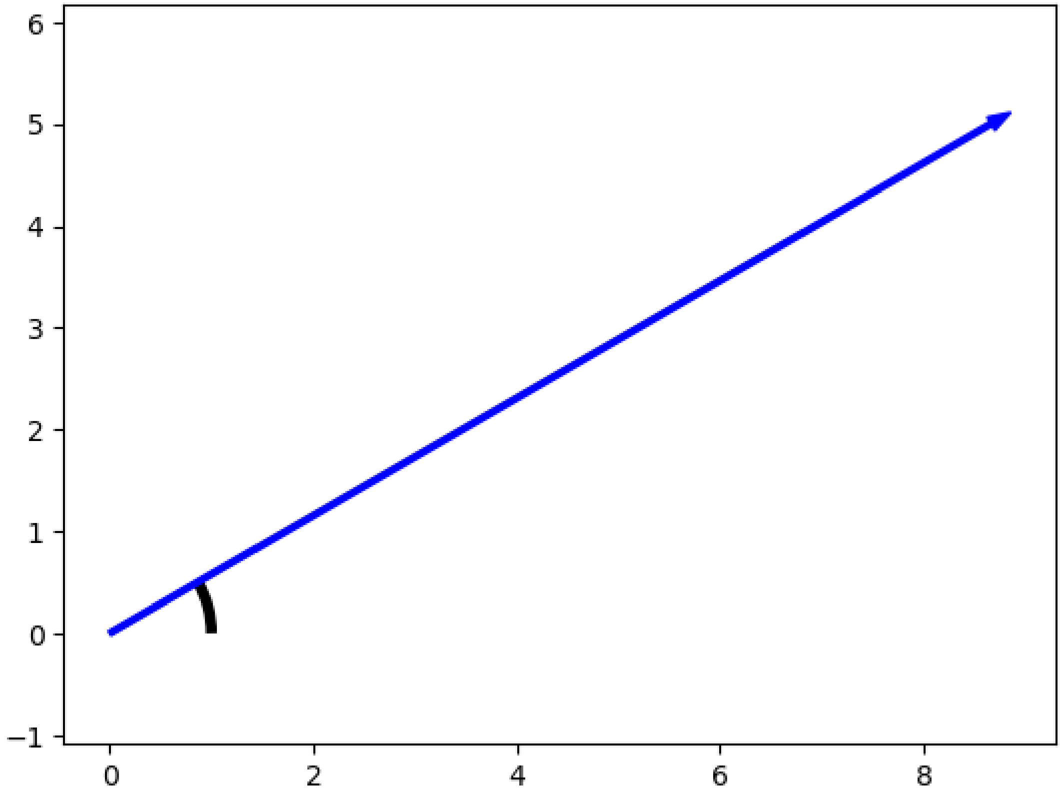


Exercício 6

Uma força tem intensidade $|\vec{F}| = 10.0N$. Quais as coordenadas (F_x, F_y) da força, quando o ângulo for:

a) 30° com a parte positiva do eixo OX

$$F_x = |\vec{F}| \cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$
$$F_y = |\vec{F}| \sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$



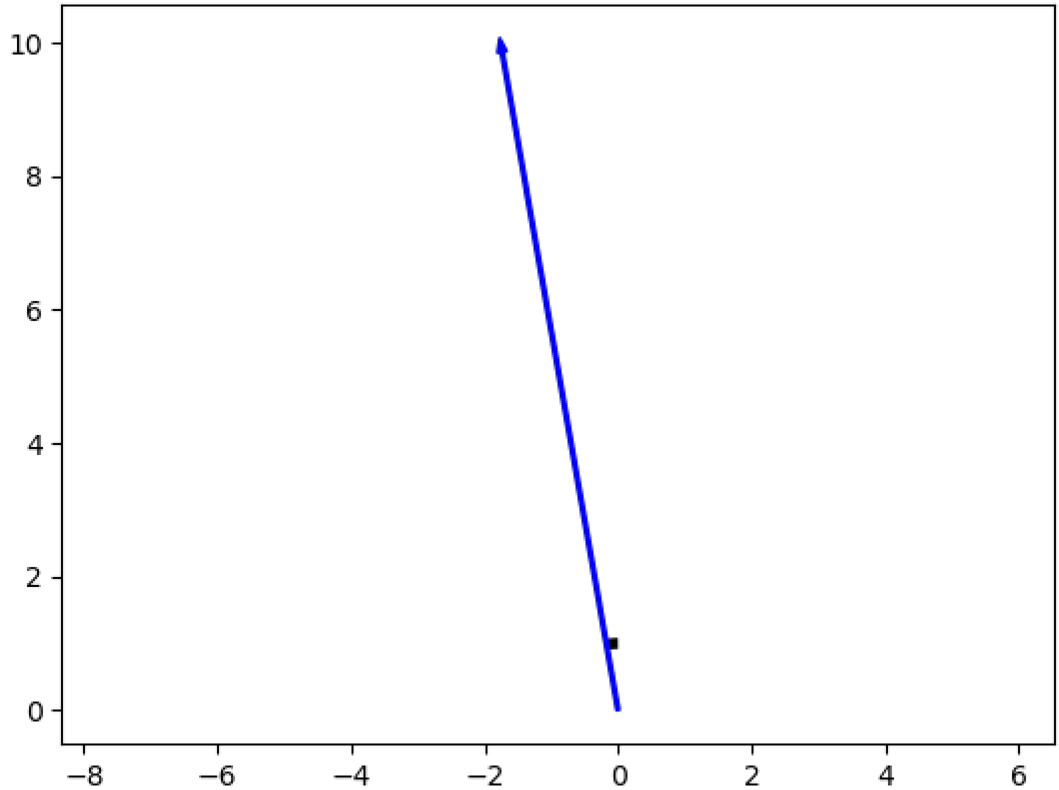
b) 10° com a parte positiva do eixo OY

Como estamos a fazer o ângulo relativamente ao eixo OY positivo, temos que adicionar $\frac{\pi}{2}$ (ou 90°) ao ângulo.

$$F_x = |\vec{F}|\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -|\vec{F}|\sin\theta$$
$$F_y = |\vec{F}|\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = |\vec{F}|\cos\theta$$

Substituindo pelo ângulo.

$$F_x = -|\vec{F}|\sin 10^\circ = -10\sin\frac{\pi}{18} \approx -0.17364818$$
$$F_y = |\vec{F}|\cos 10^\circ = 10\cos\frac{\pi}{18} \approx 0.98480775$$



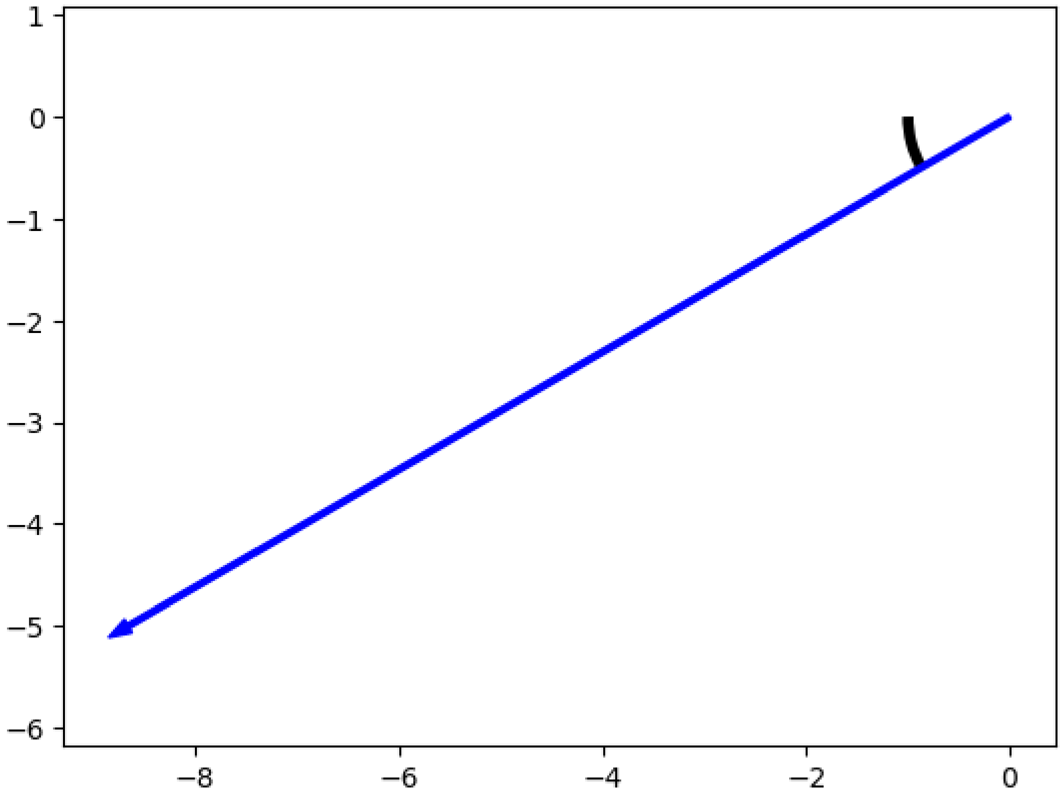
c) 30° com a parte negativa do eixo OX

Como estamos a fazer o ângulo relativamente ao eixo OX negativo, temos que adicionar π (ou 180°) ao ângulo.

$$F_x = |\vec{F}|\cos(\theta + \pi) = -|\vec{F}|\cos\theta$$
$$F_y = |\vec{F}|\sin(\theta + \pi) = -|\vec{F}|\sin\theta$$

Substituindo pelo ângulo.

$$F_x = -|\vec{F}|\cos 30^\circ = -10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3}$$
$$F_y = -|\vec{F}|\sin 30^\circ = -10 \times \frac{1}{2} = -5$$



Exercício 7

A lei do movimento de um objeto de massa 1 kg é $\vec{r} = (2t, t^2)\ m$

a) Calcule a lei da velocidade.

A lei da velocidade pode ser calculada através da derivada, a derivada de um vetor é igual as derivadas do seus componentes, logo a lei da velocidade é dada por:

$$\vec{v} = \vec{r}' = \left((2t)', \left(t^2\right)'\right) = (2, 2t)$$

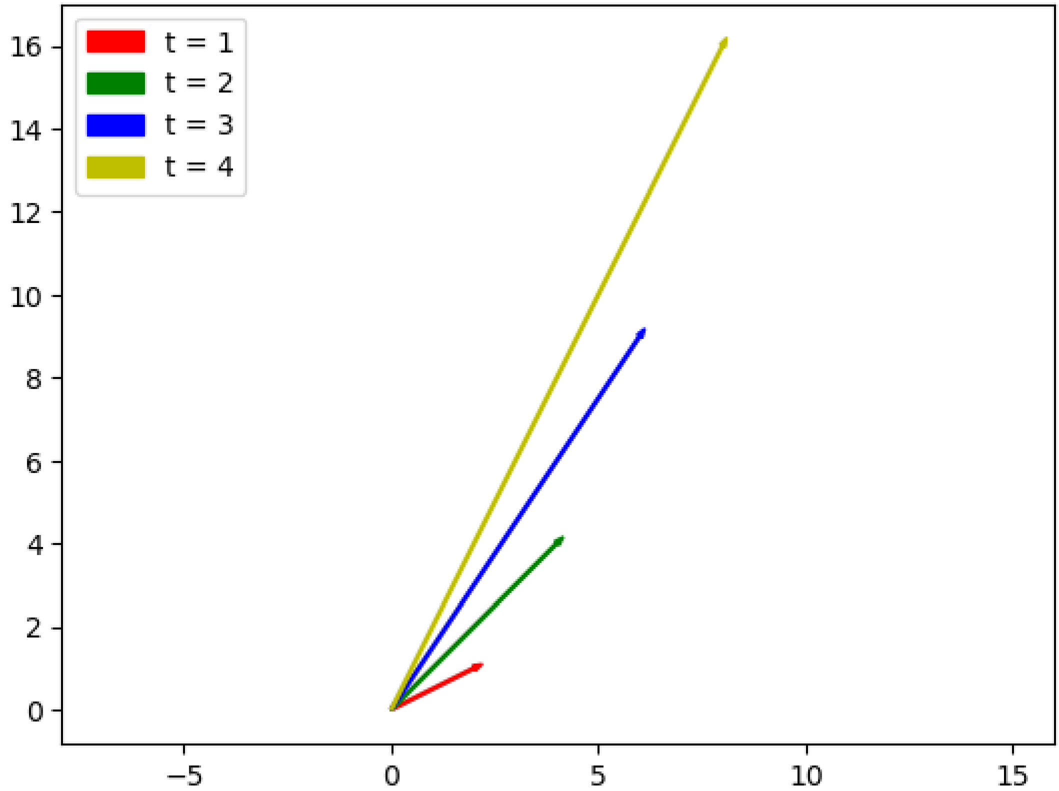
b) Represente graficamente (no `python`) o vetor $\vec{r}$ para os tempos $t = 1, 2, 3, 4$

```
colors = {1: "r", 2: "g", 3: "b", 4: "y" }

for t in range(1, 5):
    plt.arrow(
        0, 0, # start
        2*t, t**2, # end
```

```
        color=colors[t], width=0.05,
        label=f"t = {t}"
    )

plt.legend(loc="upper left")
plt.axis('equal')
plt.show()
```



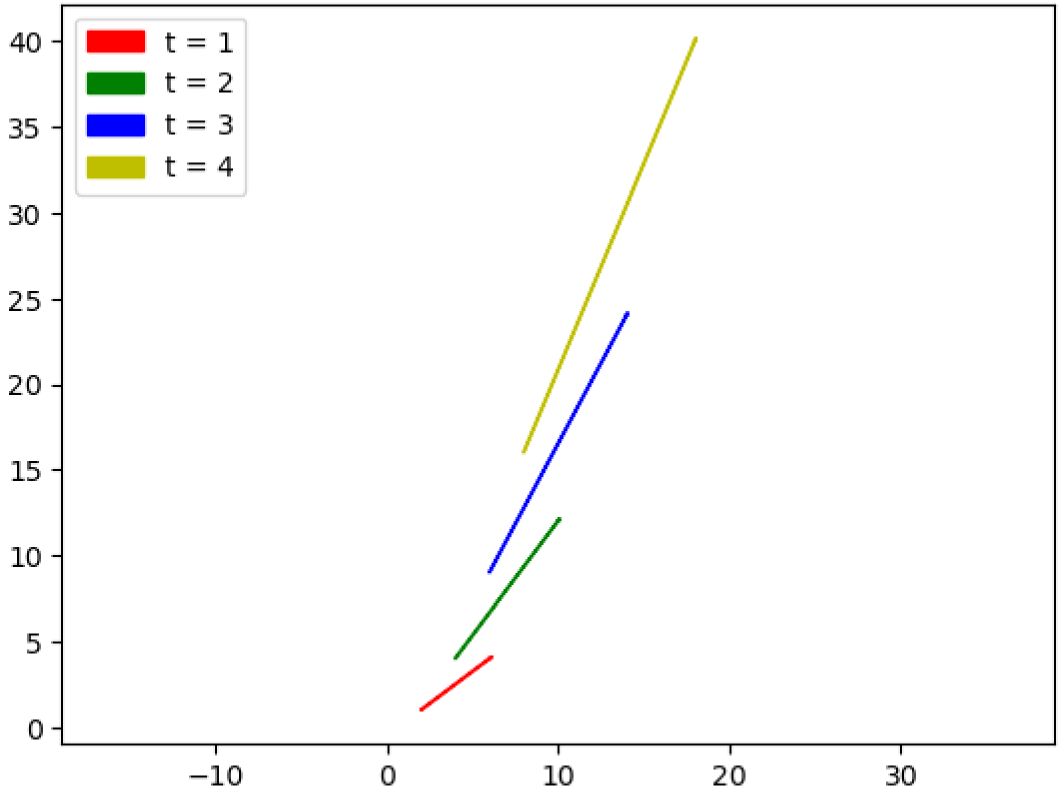
c) Represente graficamente o vetor de velocidade nos mesmos momentos. O posicionamento deve ser tal que o ponto inicial do vetor de velocidade coincide com a posição da massa.

```
colors = {1: "r", 2: "g", 3: "b", 4: "y" }

for t in range(1, 5):
    x = 2 * t
    y = t**2

    plt.arrow(
        x, y, # start
        x + 2, y + 2 * t, # end
        color=colors[t], width=0.05,
        label=f"t = {t}"
    )
```

```
plt.legend(loc="upper left")
plt.axis('equal')
plt.show()
```



Exercício 8

Uma bola de futebol é pontapeada de modo que roda sobre si própria, o que resulta adicionar a força de Magnus às outras forças. A força de Magnus resulta de o escoamento do ar ser diferente nos dois lados opostos da bola.

Se a rotação for descrita pelo vetor $\vec{w} = (0, 0, 10)$ rad/s e a velocidade for $\vec{v} = (0, 1, 0)$ m/s, qual a força de Magnus, se for definida por $\vec{F}_{\text{Magnus}} = \frac{1}{2} A \rho_{\text{ar}} r \vec{w} \times \vec{v}$?

$A = \pi r^2$ é a área da secção de corte da bola, r o raio da bola e $\rho_{\text{ar}} = 1.225\ \text{kg}/\text{m}^3$ a massa volúmica do ar. O raio da bola de futebol é 11 cm.

Faça o cálculo analiticamente, e depois verifica utilizando a função `numpy.cross()`

Começamos por calcular a área.

$$A = (0.11)^2\pi = 0.0121\pi$$

De seguida calculamos o produto vectorial.

$$\vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10\vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Magnus}} &= \frac{1}{2} \times 0.0121\pi \times 1.225 \times 0.11 \times -10\vec{i} \\ &= \frac{1}{2} \times 0.0121\pi \times 1.225 \times 0.11 \times -10\vec{i} \\ &= 0.0008152375 \times -10\vec{i}\pi \\ &= -0.008152375\pi\vec{i} \approx -0.02561144\vec{i} \end{aligned}$$

```python
r = 11 / 100
w = np.array([0, 0, 10])
v = np.array([0, 1, 0])
P_ar = 1.225

A = np.pi * r**2

w_v_cross = np.cross(w, v)

F_magnus = 1/2 * A * P_ar * r * w_v_cross
```

$$\vec{F}_{\text{Magnus}} = (-0.02561144, 0.00000000, 0.00000000)$$