

Modelação de Sistemas Físicos

12ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 8 Oscilações: Caos

Oscilador não harmónico forçado. Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Oscilador de Lorenz.

Resolução de problemas.

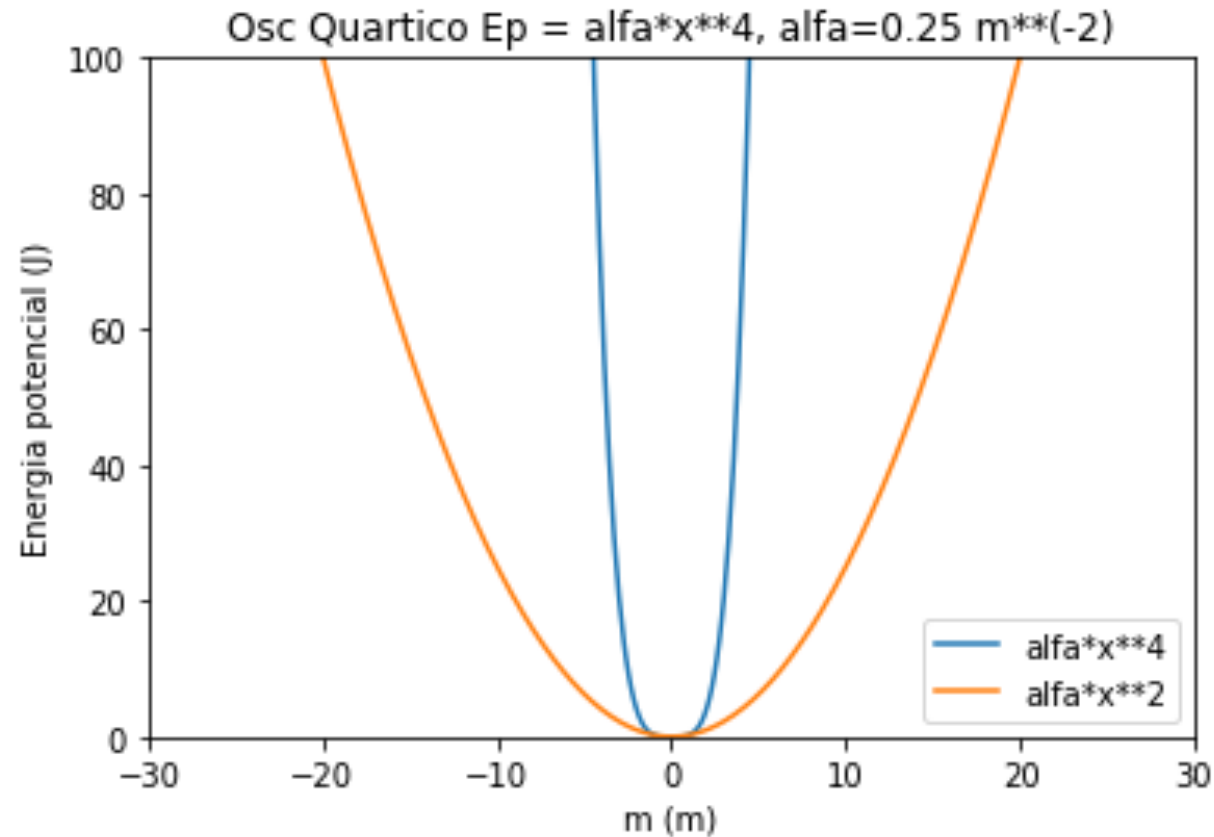
Bibliografia:

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$E_p = \alpha x^4$$

$$\alpha = 0.25 \text{ m}$$

$$F_x = -4\alpha x^3$$



Oscilador extremamente não linear
(força não é proporcional a x , caso do oscilador harmónico)

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Cálculo Numérico:

$$E_p = \alpha x^4$$

$$x(t = 0) = 3.0000 \text{ m}$$

$$v_x(t = 0) = 0$$

$$k = 1 \text{ N/m};$$

$$m = 1 \text{ kg}; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

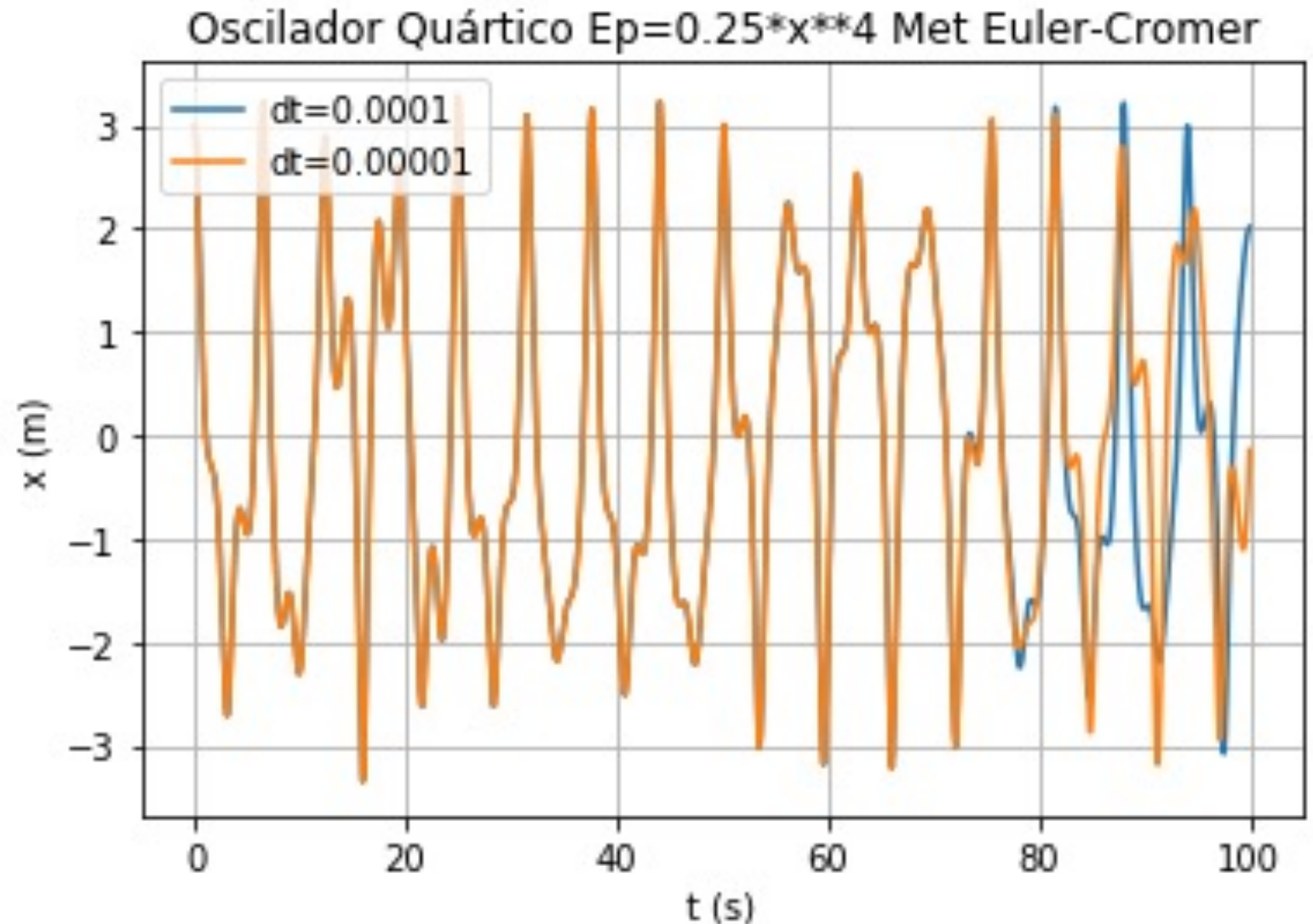
$$\alpha = 0.25 \text{ m}^{-2}$$

$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

Método de Euler-Cromer

Solução não converge!



Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$E_p = \alpha x^4$$

$$x(t = 0) = 3.0000 \text{ m}$$

$$v_x(t = 0) = 0$$

$$k = 1 \text{ N/m};$$

$$m = 1 \text{ kg}; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

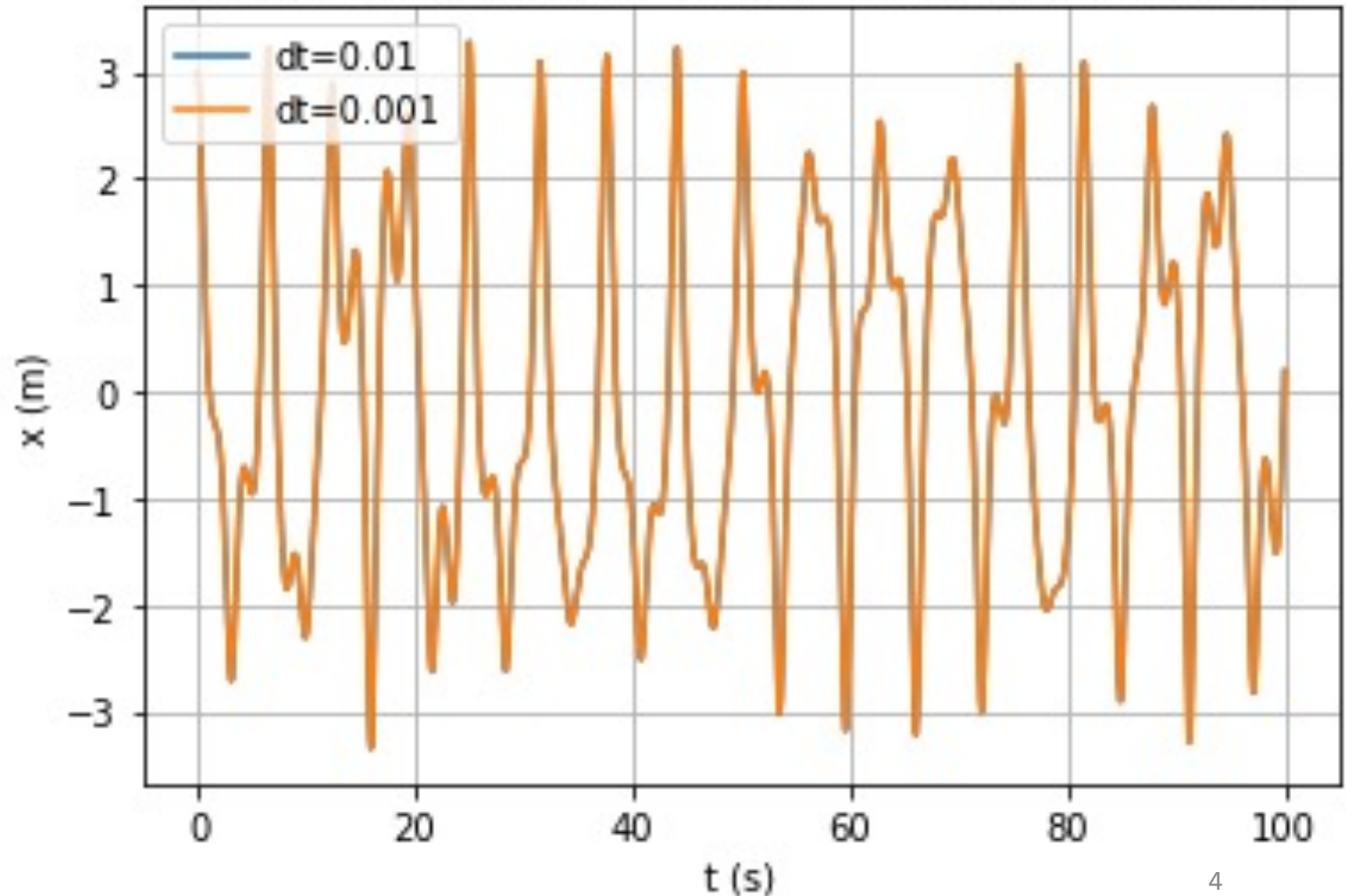
$$\alpha = 0.25 \text{ m}^{-2}$$

$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

Solução converge!

Oscilador Quártico $E_p = 0.25 \cdot x^4$ Met Runge-Kutta 4



Equação diferencial de 2ª ordem de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t = 0) = v_{x0} \\ x(t = 0) = x_0 \end{cases}$$

Exemplo: $a_x(t, x, v_x) = \frac{F_x(t, x, v_x)}{m} - \frac{b}{m} \frac{dx}{dt}$

É transformada em 2 equações diferenciais de 1ª ordem

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t = 0) = v_{x0} \\ x(t = 0) = x_0 \end{cases}$$

E aplica-se a cada equação diferencial o método numérico conveniente

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t = 0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Euler

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t, v_x(t)) \times \delta t$$

ou,
$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + c_1 \times \delta t$$

$$c_1 = a_x(t, v_x(t))$$

Erro global $\mathcal{O}(\delta t)$

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

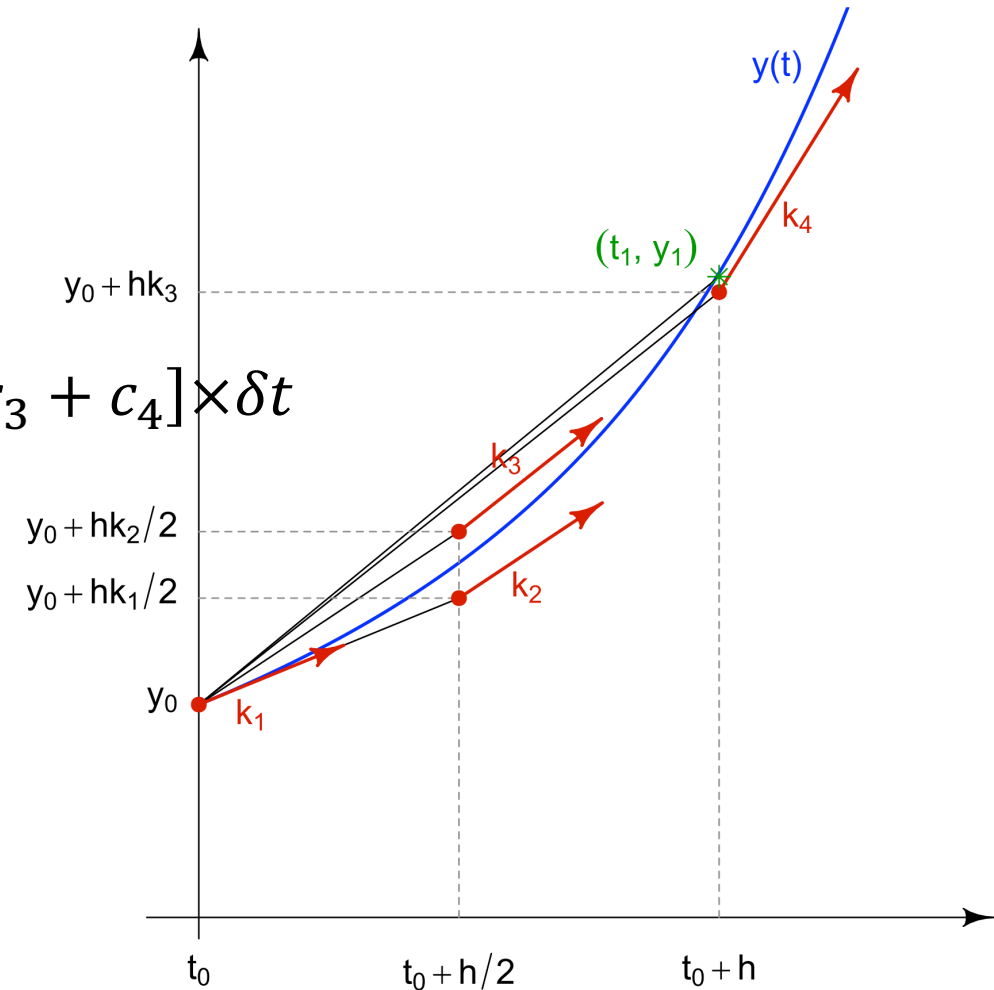
Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6} [c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= a_x(t, v_x(t)) \\ c_2 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_3 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_4 &= a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3 \delta t) \end{aligned}$$

Erro global $\mathcal{O}(\delta t^4)$



Problema 8.5:

Implemente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular a velocidade com que um volante de badmington atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} |v_y| v_y .$$

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei $v_y(t) = v_T \tanh(\frac{g t}{v_T})$.

R: 6.75747944 m/s

No e-learning está a função

```
def rk4(t,vx,acelera,dt):
```

```
    """
```

```
    Integração numérica de equação diferencial de 2ª ordem:
```

```
        dvx/dt = ax(t,vx)    de valor inicial
```

```
    Erro global:  proporcional a dt**4
```

```
    accelera=dvx/dt=Força(t,vx)/massa    : accelera é uma FUNÇÃO
```

```
    input:    t = instante de tempo
```

```
             vx(t) = velocidade
```

```
             dt = passo temporal
```

```
    output:  vxp = vx(t+dt)
```

```
    """
```

```
    global g,vt
```

```
    def accelera(t,vx):
```

```
        ax=g-g/vt**2*np.abs(vx)*vx
```

```
        return ax
```


Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$E_p = \alpha x^4$$

$$x(t = 0) = 3.0000 \text{ m}$$

$$v_x(t = 0) = 0$$

$$k = 1 \text{ N/m};$$

$$m = 1 \text{ kg}; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

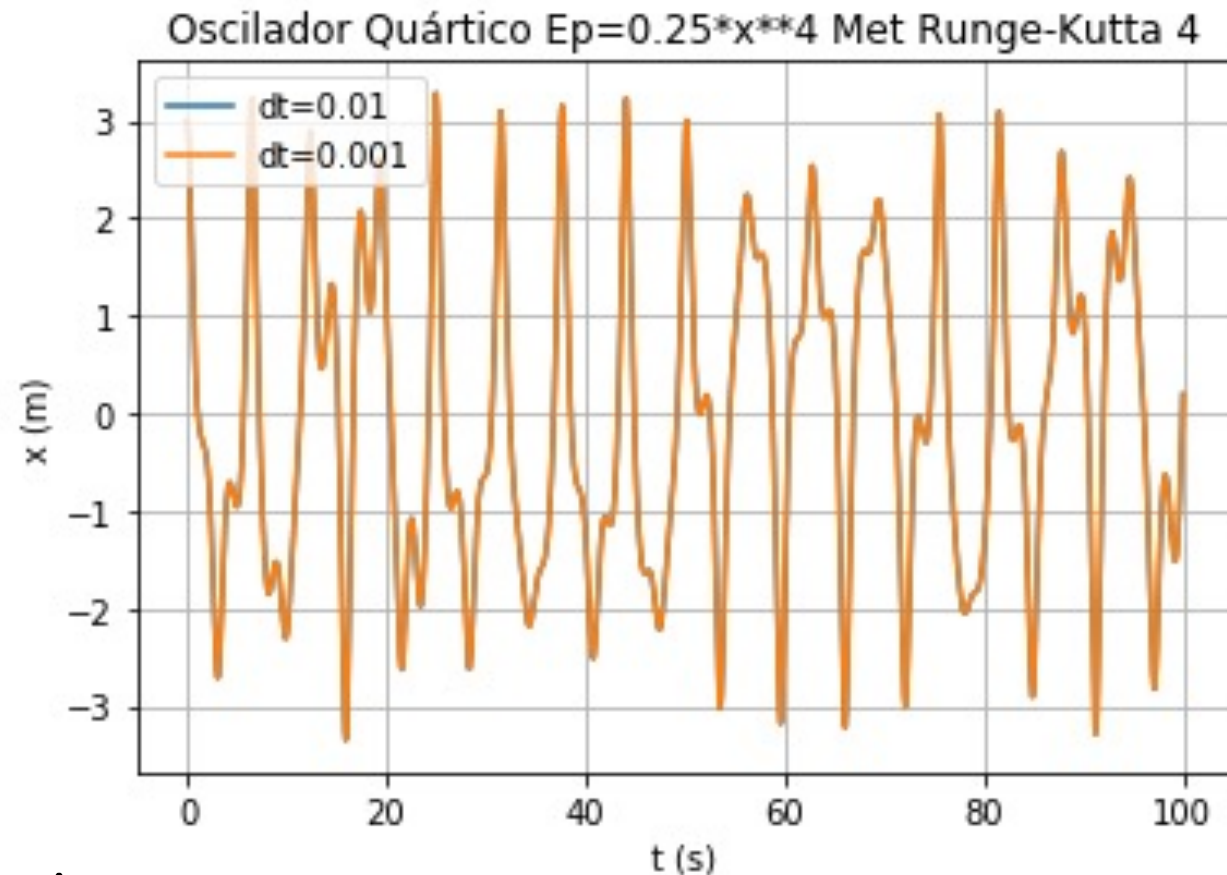
$$\alpha = 0.25 \text{ m}^{-2}$$

$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Solução converge!



Caraterísticas:

- * A amplitude (posição máxima e mínima) não se mantêm constante
- * O período (intervalo de tempo entre dois máximos de amplitude) não se mantêm constante

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$E_p = \alpha x^4$$

$$x(t = 0) = 3.0000 \text{ m}$$

$$v_x(t = 0) = 0$$

$$k = 1 \text{ N/m};$$

$$m = 1 \text{ kg}; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

$$\alpha = 0.25 \text{ m}^{-2}$$

$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

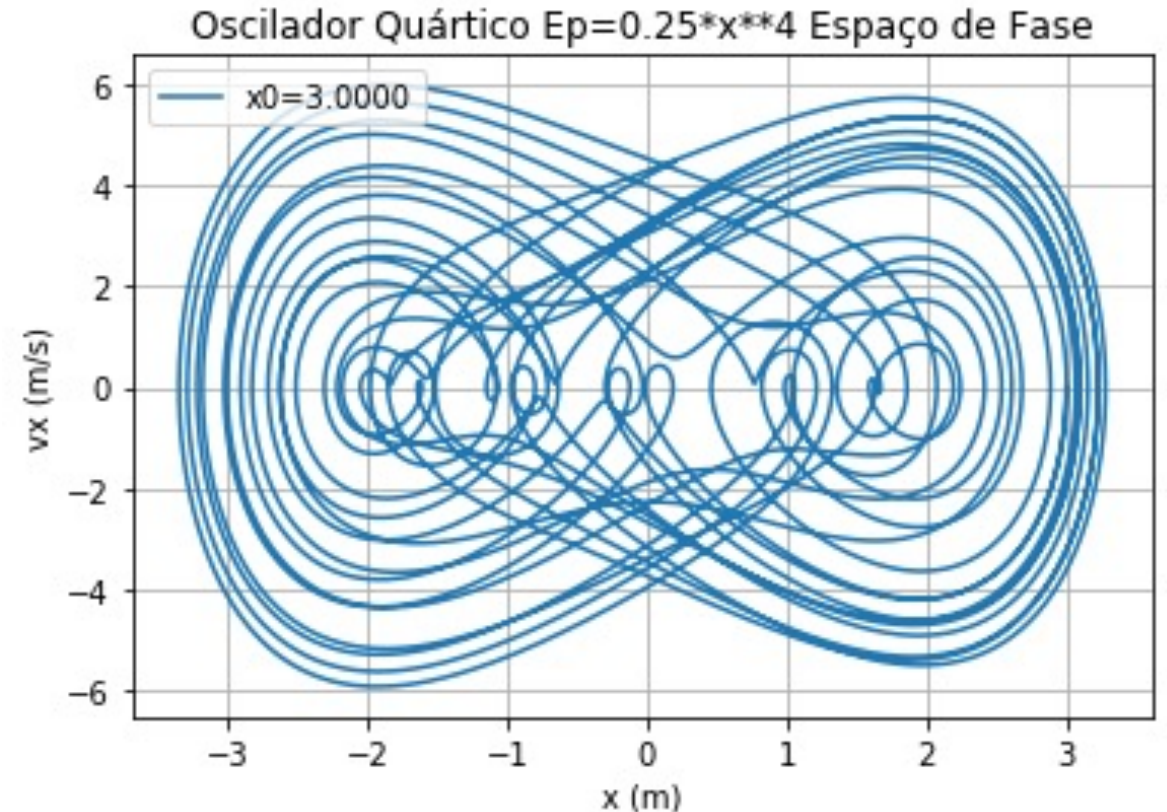
Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Solução converge!

Caraterísticas:

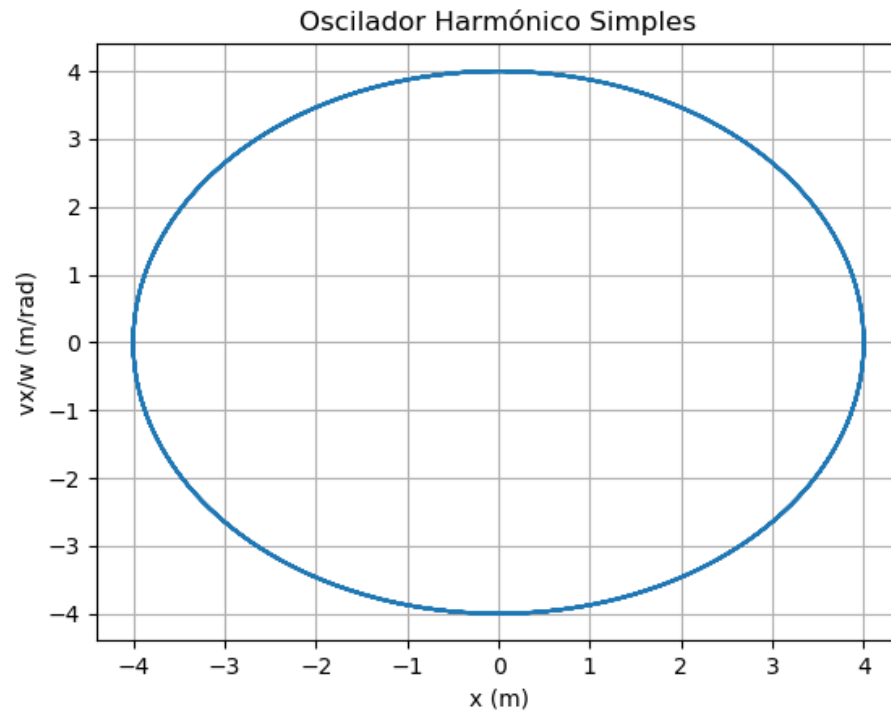
* A figura no espaço de fase é muito complexa

Espaço de Fase:

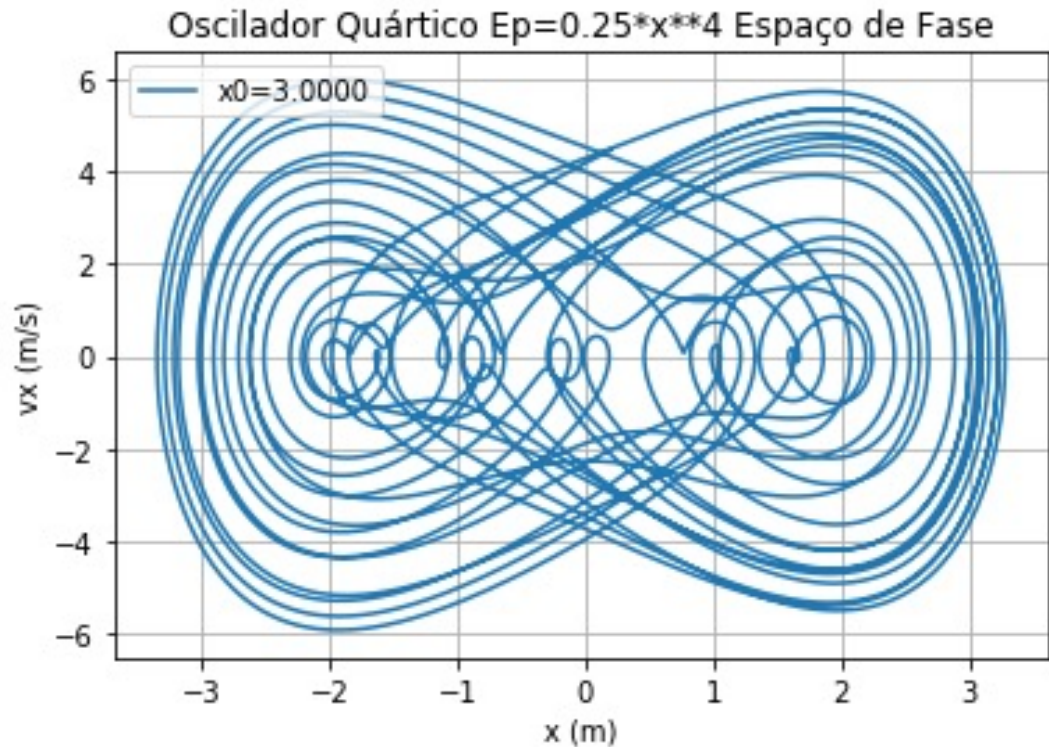


Espaço de fase

Oscilador Harmónico Forçado e Amortecido



Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado e Amortecido



As duas trajetórias no espaço das fases contrastam imenso!

Harmónico: Trajetória fechada (parte estacionária)

Quártico: A trajetória nunca se fecha!

- Cap. 7 Oscilações: Condições iniciais **extramente próximas**

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$E_p = \alpha x^4$$

$$x(t = 0) = 3.0000 \text{ m} \text{ e } 3.0003 \text{ m}$$

$$v_x(t = 0) = 0$$

$$k = 1 \text{ N/m};$$

$$m = 1 \text{ kg}; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

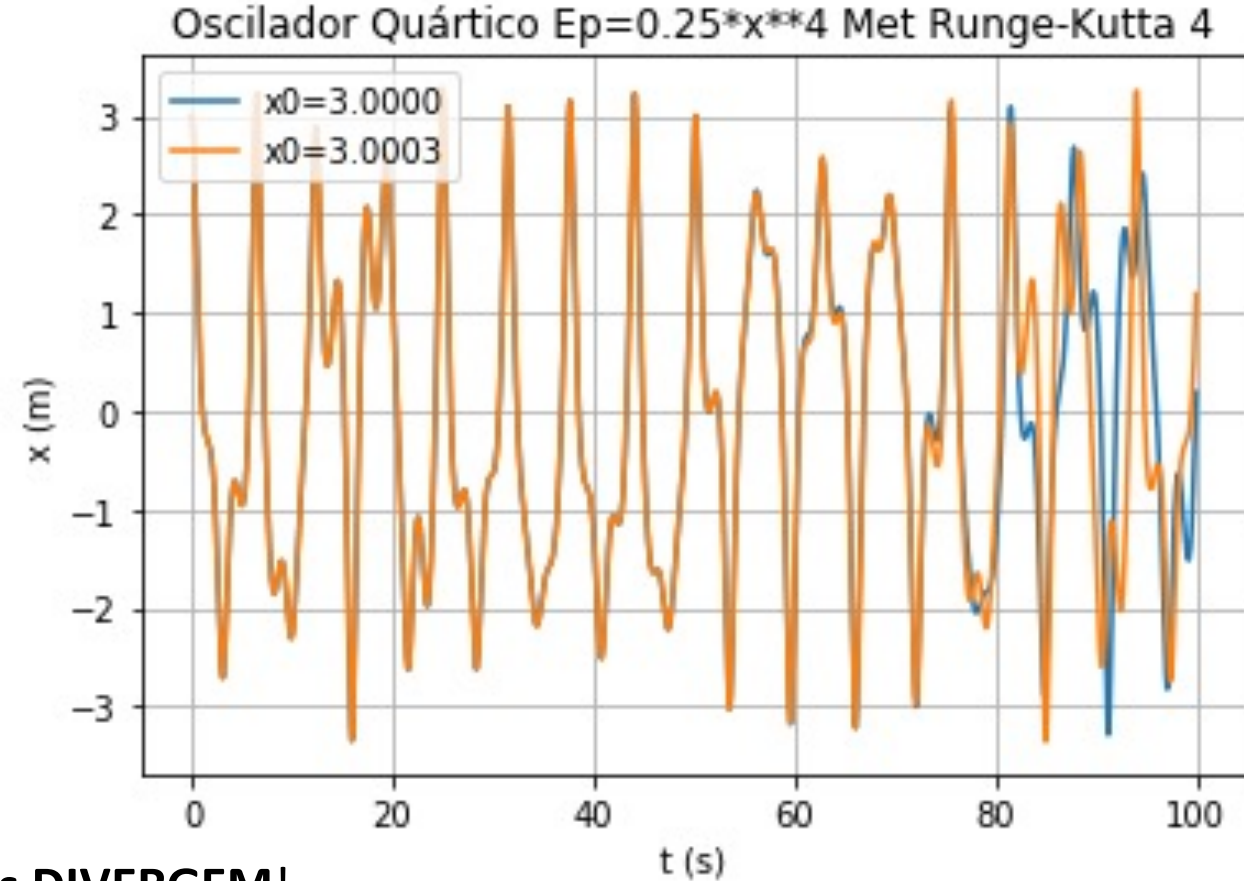
$$\alpha = 0.25 \text{ m}^{-2}$$

$$F_0 = 7.5 \text{ N}$$

$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Solução converge!



Caraterísticas:

- Soluções com condições iniciais **extramente próximas DIVERGEM!**
- A diferença entre condições iniciais pode ser **menor que o erro experimental de cada condição inicial**
- **Apesar de a solução ser ÚNICA (para uma condição inicial), não se consegue calcular (prever) a evolução a médio prazo - CAOS -**

Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \sigma (y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \\ x(t = 0) = x_0 \\ y(t = 0) = y_0 \\ z(t = 0) = z_0 \end{array} \right.$$

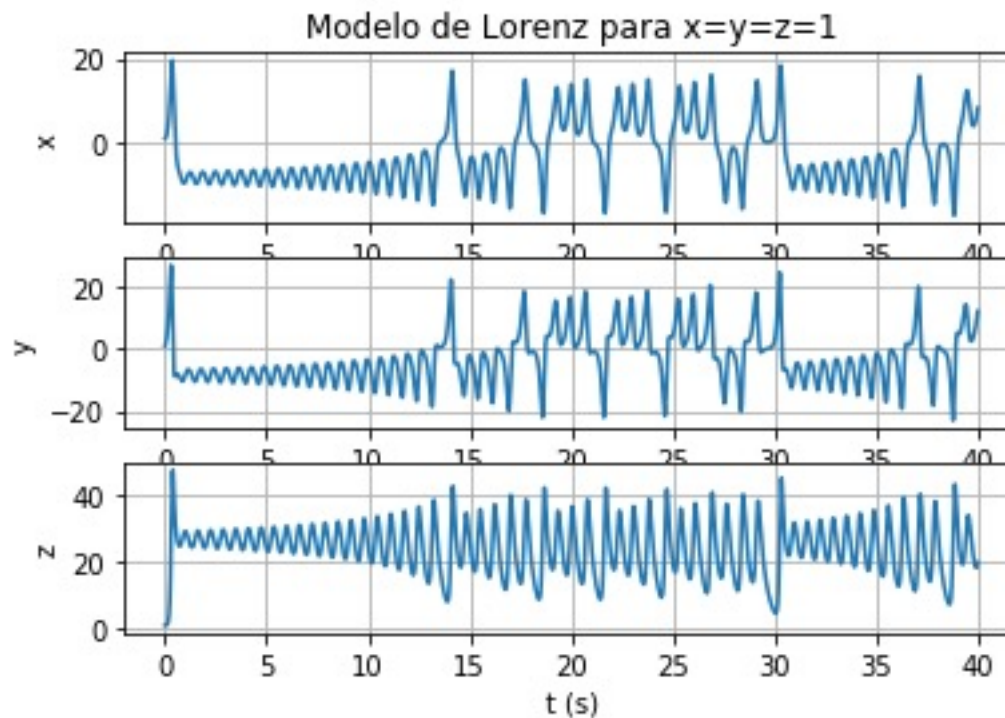
As variáveis x , y e z não possuem significado físico direto.

Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

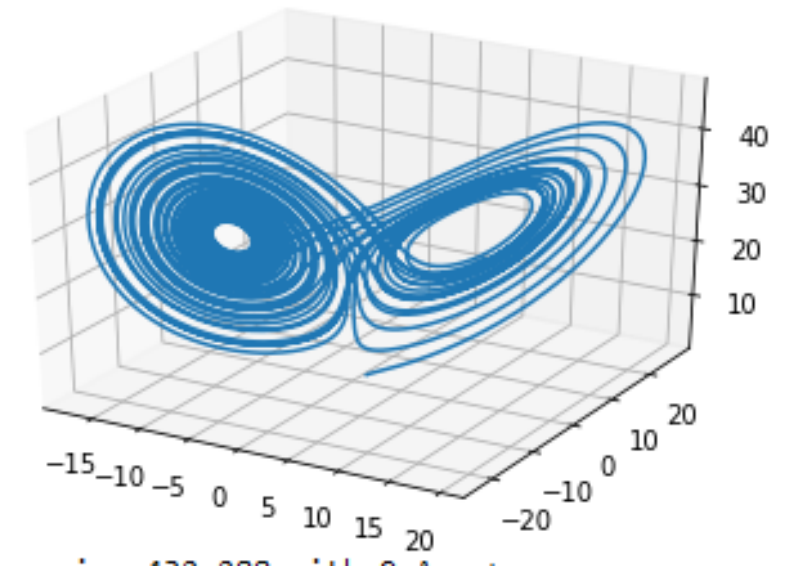
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma (y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \\ x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

$$\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; r = 28;$$



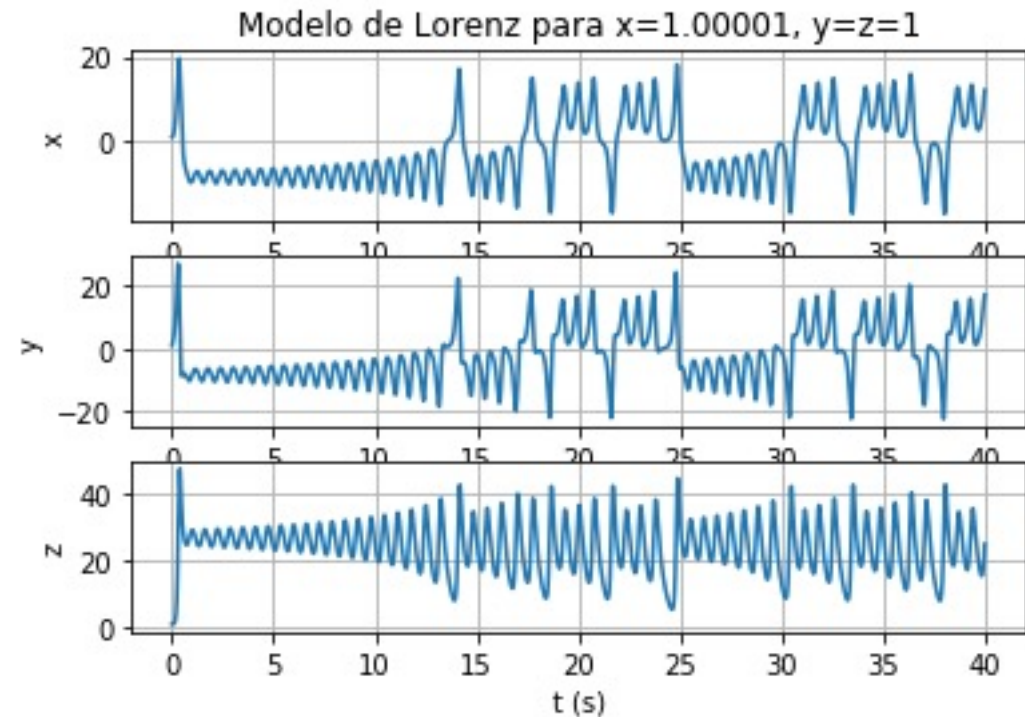
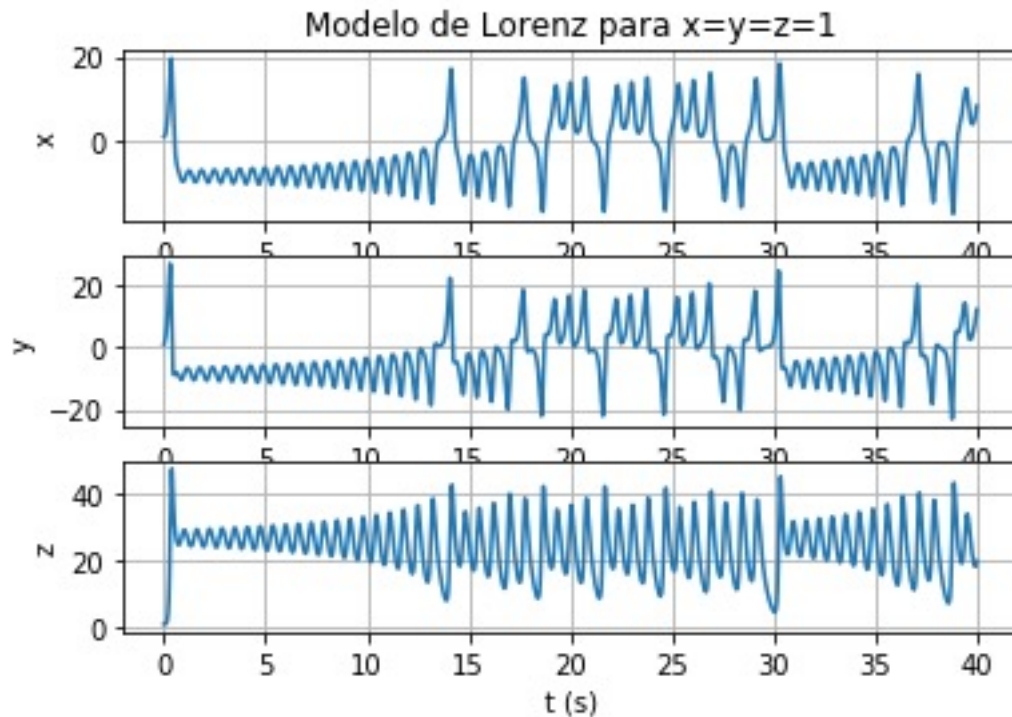
Solução não periódica e irregular

Espaço de fase



Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.



Estas equações de Lorenz possuem uma extrema sensibilidade às condições iniciais:
= CAOS

Edward Norton Lorenz (1917-2008)



Fundador da teoria do caos.

Contribuições muito importantes dadas às ciências da atmosfera.

Lorenz foi professor de meteorologia no MIT, tendo sido em matemática a sua formação inicial, obtida na Universidade de Harvard.

Por João Corte-Real, Universidade de Évora

Caos

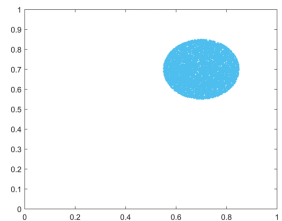


“Quando o presente determina o futuro, mas o presente aproximado não determina aproximadamente o futuro.”

Definição de Sistema caótico:

1. Extrema sensibilidade às condições iniciais
2. Não periódico
3. Topologicamente transitivo
trajetórias eventualmente passam em qualquer região do espaço

Nota: sempre movimento determinístico



Osciladores Forçados:

- Os. Harmónico Amortecido e Forçado no regime estacionário:
Insensíveis às condições iniciais
- para alguns parâmetros do Osc. Quártico Amortecido e Forçado, ou seja para Forças não lineares:
Extrema sensibilidade às condições iniciais – CAOS

Teorema de Poincaré-Bendixon:

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Note: as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ não dependem do tempo, a variável independente.

Teorema de Poincaré-Bendixon:

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Não é o caso das (3) equações de Lorenz

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma (y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \\ x(t = 0) = x_0 \\ y(t = 0) = y_0 \\ z(t = 0) = z_0 \end{cases}$$

e do Osc. Quártico Amortecido e Forçado?

são 2 equações **não autónomas**

(Amortecimento depende de velocidade)

podem ser escritos como 3 autónomas com $dt/dt=1$