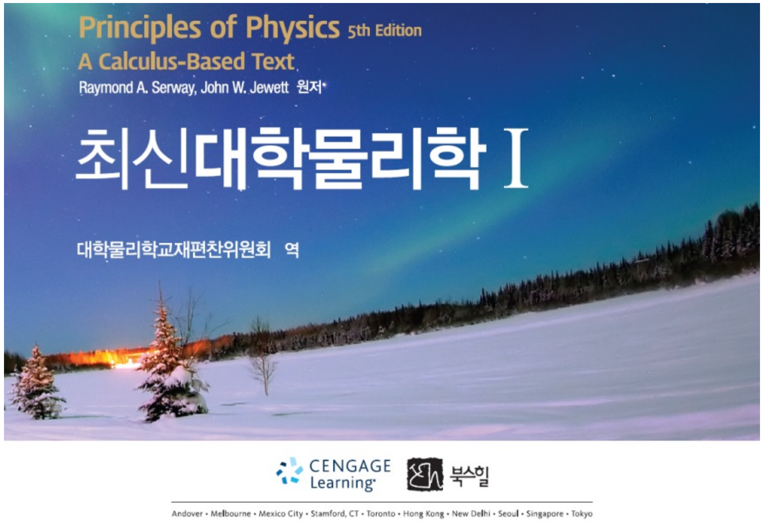

Principles of Physics 5th Edition
A Calculus-Based Text
Raymond A. Serway, John W. Jewett 원저
최신대학물리학 I
대학물리학교재편찬위원회 역
CENGAGE Learning
북스힐
Andover • Melbourne • Mexico City • Stamford, CT • Toronto • Hong Kong • New Delhi • Seoul • Singapore • Tokyo

제10장 회전운동

제10장 회전운동

10.1 각위치, 각속력, 각가속도
(Angular Position, Speed and Acceleration)

바퀴처럼 부피를 갖는 물체가 한 축을 중심으로 회전할 때는, 물체를 하나의 입자로 취급하여 그 운동을 분석할 수 없다.

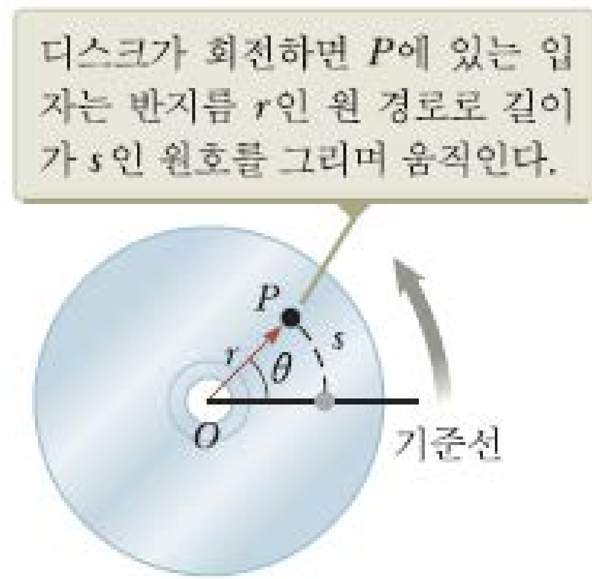
회전하는 물체를 다룰 때 그 물체가 강체라고 가정하면 분석이 아주 단순화된다. 강체(rigid body)는 변형이 없는 물체를 말한다.

오른쪽 그림에서

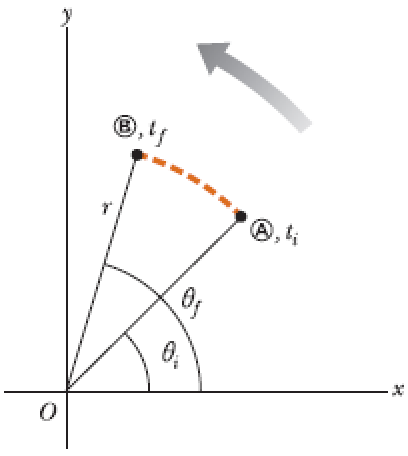
$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$ 단위: 라디안(radian)

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ}\theta(\text{deg})$$



기준선으로부터 각 θ만큼 이동하면 강체에 속한 모든 다른 입자들도 같은 각도 θ만큼 회전한다. 각 입자와 마찬가지로 전체 강체에 각 θ를 부여할 수 있으므로, 회전하는 강체의 각위치(angular position)를 정의할 수 있다. 이 때 각변위는



$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

평균 각속력:
(average angular speed)

$$\omega_{avg} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

순간 각속력:
(instantaneous angular speed)

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

단위는 모두 rad/s 또는 s^{-1} 이다. 라디안은 차원이 없다.

평균 각가속도
(average angular acceleration)

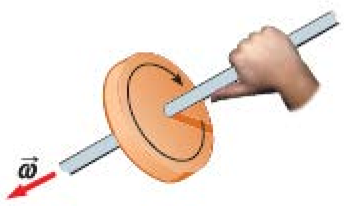
$$\alpha_{\text{avg}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

순간 각가속도
(instantaneous angular acceleration)

$$\boxed{\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}}$$

강체가 고정축에 대하여 회전할 때, 물체 위의 모든 입자는 주어진 시간 간격 동안에 같은 각만큼 회전하고 같은 각속력과 같은 각가속도를 갖는다.

보다 일반적인 회전 운동에서 각속도와 각가속도는 벡터량이다. 동일한 강체가 회전축이 바뀌면 회전 운동의 형태고 바뀌기 때문이다.



10.2 분석 모형: 각가속도가 일정한 강체

(Analysis Model: The Rigid Object Under Constant Angular Acceleration)

고정축을 중심으로 회전하는 강체의 운동은 각가속도가 일정한 경우가 많다. 따라서 각속도가 일정한 강체라고 하는 회전 운동에 대한 분석 모형을 만들자. 이 모형은 등가속도 운동의 경우와 유사하다.

각가속도 α가 일정한 경우

$$\omega_f = \omega_i - \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

표 10.1 가속도가 일정한 회전 운동과 선운동의 운동 방정식

고정축에 대한 회전 운동	선운동
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

예제 10.1 회전 바퀴

바퀴가 3.50rad/s^{2}의 일정한 각가속도로 회전하고 있다.
(A) 만일 t =0 에서 바퀴의 각속력이 2.00rad/s라면, 2.00초 동안 이 바퀴가 회전한 각변위를 구하라.

풀이

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

t=2.00s일 때 $\Delta\theta = (2.00\text{rad/s})(2.00\square\ ) + \tfrac{1}{2}(3.50\text{rad/s}^2)(2.00\text{초})^2$

$$= 11.0\,\text{rad} = (11.0\text{rad})(57.3^\circ/\text{rad}) = 630^\circ$$

(B) 이 시간 간격 동안에 바퀴는 몇 바퀴 회전하였는가?

$$\Delta\theta = 630^\circ\left(\frac{1\,\text{rev}}{360^\circ}\right) = 1.75\text{rev}$$

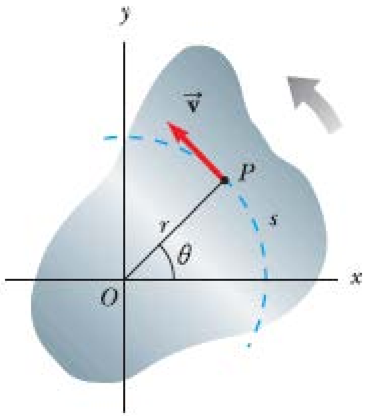
(C) t =2.00s에서 바퀴의 각속력을 구하라.

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 2.00\text{rad/s} + (3.50\text{rad/s}^2)(2.00\text{초})$$

$$= 9.00\text{rad/s}$$

10.3 회전 운동과 병진 운동의 물리량 관계

고정축에 대해서 회전할 때 강체의 모든 입자들이 회전축을 중심으로 원운동을 한다.

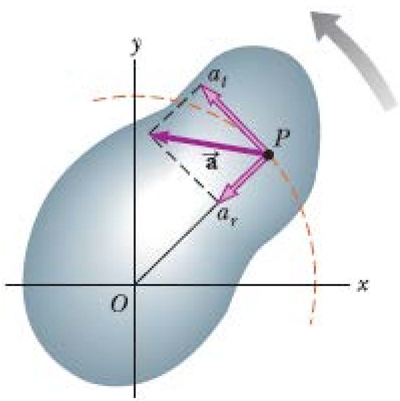


$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = r\omega$$

속도에 대한 식을 미분하면

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_t = r\alpha}$$

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$

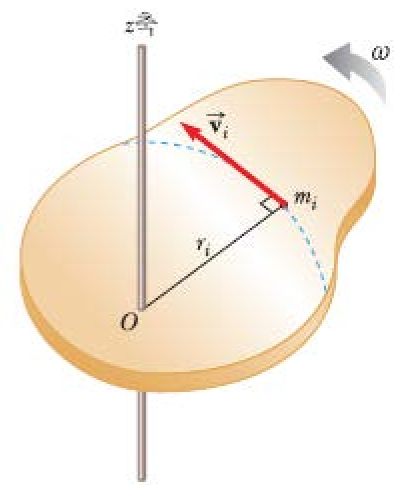


$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

10.4 회전 운동 에너지(Rotational Kinetic Energy)

강체를 작은 입자들의 집합으로 생각하고, 이 강체가 고정된 *z*축을 중심으로 각속력 ω로 회전한다고 가정하자. 질량을 m_i*인 입자가 회전축으로부터* r_i *떨어진 점에서* 접선 속력 v_i*로 운동하는 경우*

$$K_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$



전체 운동 에너지는

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \tfrac{1}{2} \left(\sum_i m_i v_i^2 \right) \omega^2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2$$

$$\boxed{K_R = \tfrac{1}{2} I \omega^2}$$

◀ 회전 운동 에너지

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

◀ 관성 모멘트

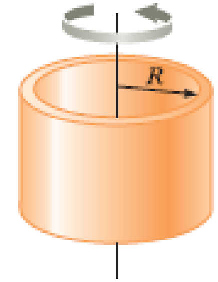
회전 운동 에너지는 새로운 형태의 에너지는 아니다. 강체를 이루는 입자들의 각각의 운동 에너지의 합으로부터 유도하였으므로 일반적인 운동 에너지이다.

또는 $\rho = m/V$의 관계를 사용

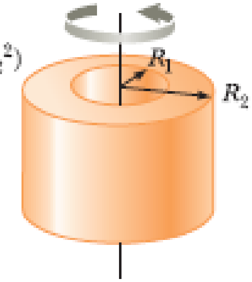
$$I = \int \rho r^2 \, dV$$

표 10.2 | 여러 가지 모양의 균일한 강체의 관성 모멘트

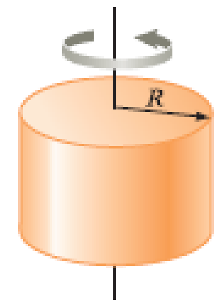
굴렁쇠나 얇은 원통
$I_{CM} = MR^2$



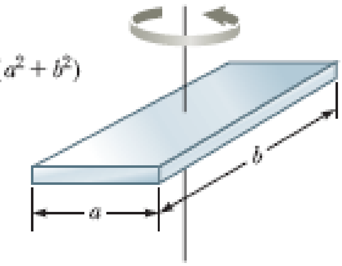
속이 빈 원통
$I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$



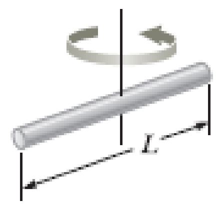
속이 꽉 찬 원통
또는 원판
$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$



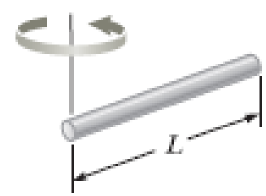
사각형 판
$I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



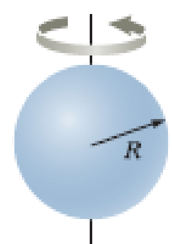
회전축이 중심을
지나는 길고
가는 막대
$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$



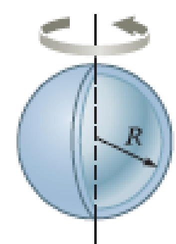
회전축이 끝을
지나는 길고
가는 막대
$I = \frac{1}{3}ML^2$



속이 꽉 찬 구
$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$



속이 빈 구껍질
$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$



예제 10.2 산소 분자

이원자 산소 분자 O_2를 살펴보자. 이 산소 분자가 xy 평면에서 그 분자의 길이에 수직이고 중심을 지나는 z축을 중심으로 회전하고 있다. 산소 원자 한 개의 질량은 2.66×10^{26} kg이고 상온에서 두 산소 원자 간의 평균 거리는 $d = 1.21\times10^{-10}$ m이다.

(A) z축에 대한 분자의 관성 모멘트를 구하라.

풀이

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{2}$$

$$= \frac{(2.66\times10^{-26}\ \text{kg})(1.21\times10^{-10}\ \text{m})^2}{2}$$

$$= \boxed{1.95\times10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

(B) 분자의 전형적인 각속력은 4.60×10^{12} rad/s이다. 산소 분자가 z축에 대해 이런 각속력으로 회전한다면, 회전 운동 에너지는 얼마인가?

풀이 회전 운동 에너지를 구한다

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(1.95 \times 10^{-46}\,\mathrm{kg \cdot m^2})(4.60 \times 10^{12}\,\mathrm{rad/s})^2$$

$$= \boxed{2.06 \times 10^{-21}\,\mathrm{J}}$$

예제 10.3 회전하는 네 개의 물체

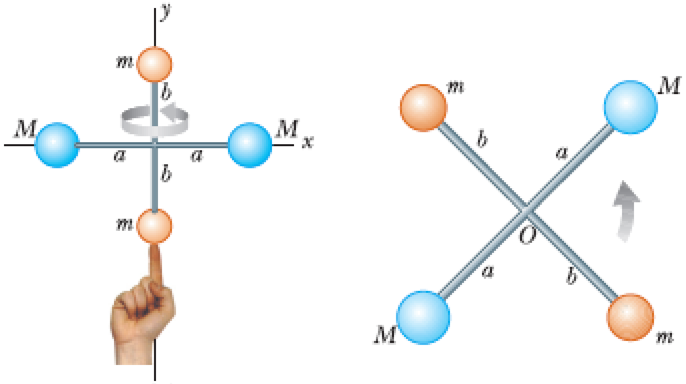
네 개의 작은 구가 xy 평면에서 질량을 무시할 수 있는 두 막대의 끝에 묶여 있다. 구의 반지름은 막대기의 크기에 비해 아주 작다고 가정한다.
(A) 계가 y 축을 중심으로 ω의 각속력으로 회전할 때, 이 축에 대한 관성 모멘트와 회전 운동 에너지를 구하라.

풀이

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2$$

$$= \boxed{2Ma^2}$$

$$K_R = \tfrac{1}{2} I_y \omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = \boxed{Ma^2\omega^2}$$



(a) (b)

(B) 그림과 같이 이 계가 O를 관통하는 축(z축)을 중심으로 xy 평면에서 회전한다고 가정하자. 이 축에 대한 관성 모멘트와 회전 운동 에너지를 구하라.

z축에 대한 관성 모멘트

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = \boxed{2Ma^2 + 2mb^2}$$

회전운동에너지

$$K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = \boxed{(Ma^2 + mb^2)\omega^2}$$

예제 10.4 균일한 강체 막대

그림과 같이 길이가 L이고, 질량이 M인 균일한 강체 막대가 있다. 막대에 수직이고 질량 중심을 지나는 축(y축)에 대한 관성모멘트를 구하라.

풀이

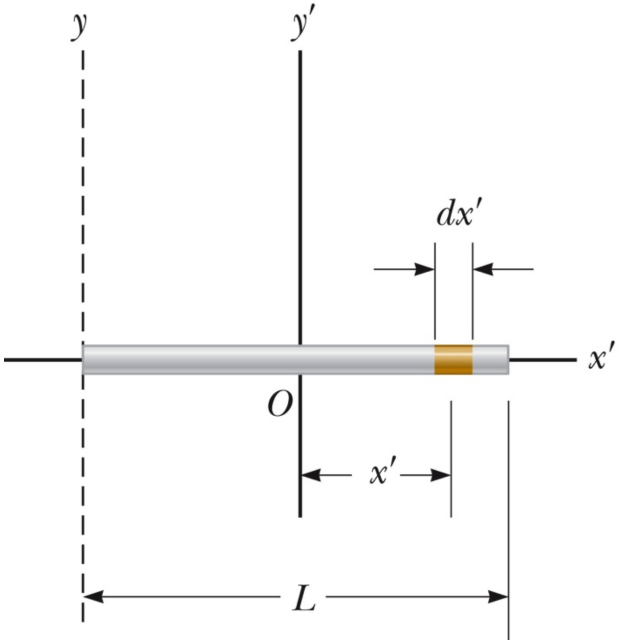
dm을 dx'의 함수로 나타낸다.

$$dm = \lambda\, dx' = \frac{M}{L}\, dx'$$

적분식에 대입한다.

$$I_y = \int r^2\, dm = \int_{-L/2}^{L/2} (x')^2 \frac{M}{L}\, dx' = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} (x')^2\, dx'$$

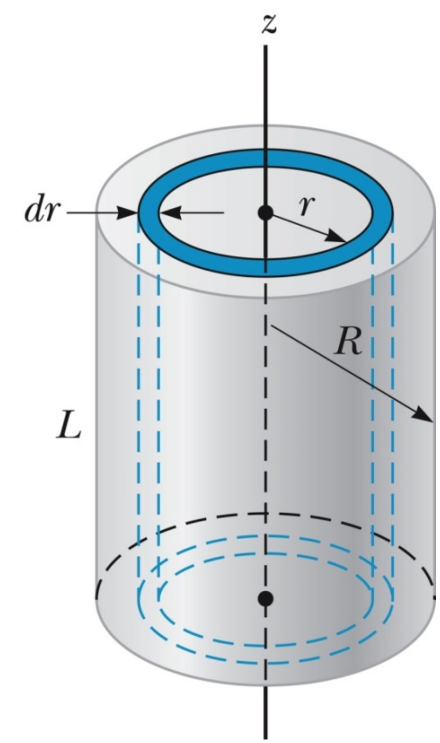
$$= \frac{M}{L}\left[\frac{(x')^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \boxed{\frac{1}{12}ML^2}$$



예제 10.5 속이 찬 균질한 원통

반지름은 R, 질량이 M, 길이가 L인 속이 찬 균일한 원통이 있다.
중심축(그림 에서 z축)에 대한 관성 모멘트를 구하라

풀이



dm을 dr의 함수로 나타낸다.

$$dm = \rho\, dV = \rho L(2\pi r)\, dr$$

적분식에 대입한다.

$$I_z = \int r^2\, dm = \int r^2[\rho L(2\pi r)\ dr] = 2\pi\rho L \int_0^R r^3\, dr = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

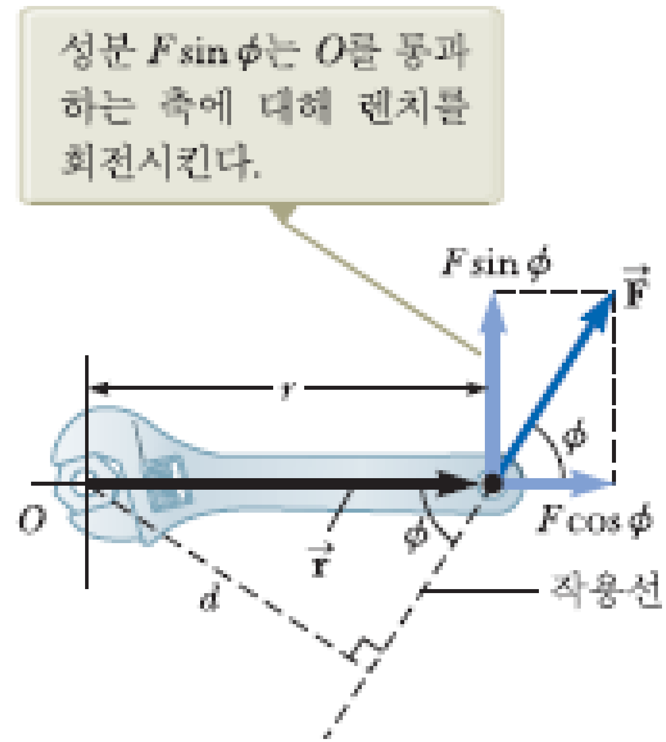
10.5 토크와 벡터곱 (Torque and the Vector Product)

토크 τ 는 어떤 축에 대해 힘이 물체를 회전시키려는 경향이고,

회전 운동을 일으키는 원인이다.

위치 벡터와 ϕ 의 각으로 힘이 작용할 때 토크의 크기는

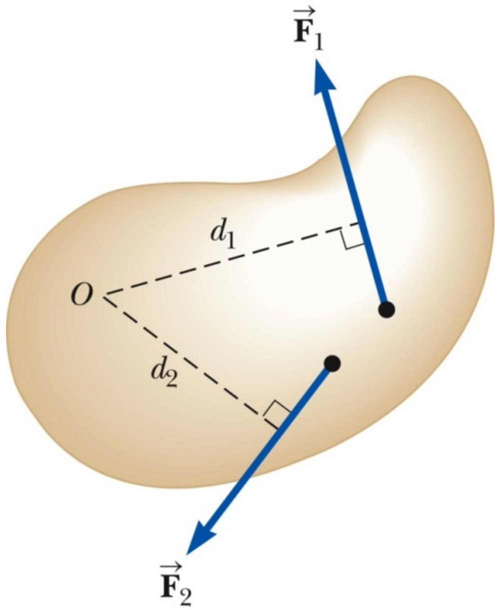
$$\tau \equiv rF\sin\phi$$



단위는 N·m 이다. 그렇지만 Joule 은 아님.

- 토크가 정의되기 위해서는 기준축이 주어져야 한다. 그 후에 그 축으로부터의 거리 r가 정해진다.
  - 그림에서 모멘트 팔 d는 회전축으로부터 힘의 방향선에 수직하게 그은 거리이다. 따라서

$$d = r\sin\phi$$



- 어떤 하나의 강체에 두 개 이상의 힘이 작용하면 각각의 힘은 O에 있는 고정점에 대해 회전을 일으킨다

  힘에 의한 회전이 반시계방향 일 때, 토크를 양(+)으로 한다.

  시계방향 일때는 음(-)으로 한다.

- 토크는 힘의 크기와 작용점에 의해 결정된다.

- 토크는 두 벡터의 벡터곱 또는 크로스곱이다:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

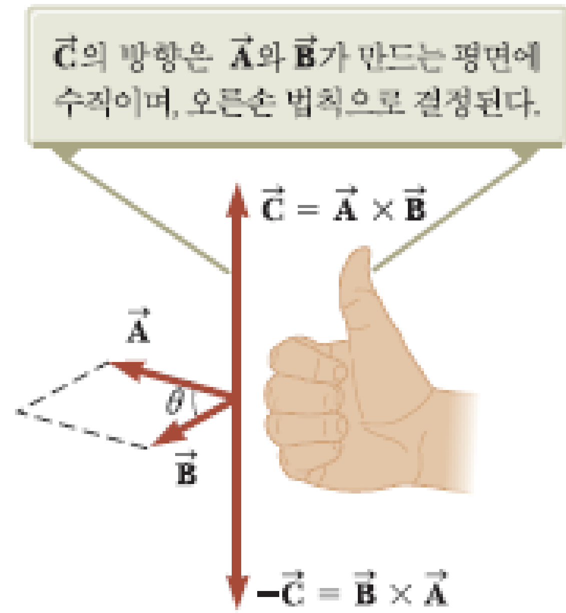
- 두 벡터의 벡터곱은 제3의 벡터를 만든다.

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

그 제3의 벡터의 크기는

$$C = |\vec{\mathbf{C}}| \equiv AB\sin\theta$$

이고 방향은 오른손법칙으로 정해진다.



- 벡터곱에서 교환법칙은 성립하지 않는다.

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

· $\vec{A}$와 $\vec{B}$가 평행하면 $(\theta = 0° \text{ or } \theta = 180°)$, $\vec{A} \times \vec{B} = 0$이므로, $\vec{A} \times \vec{A} = 0$가 된다.

· $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$가 수직하면, $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB$

- 벡터곱에서 분배법칙이 성립한다.

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$$

- t 에 대한 도함수는 다음과 같다:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$$

- 단위벡터의 벡터곱은 다음과 같이 된다.

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

- 부호의 위치는 바뀔 수 있다. 예를 들어,

$$\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{j}}) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{k}}.$$

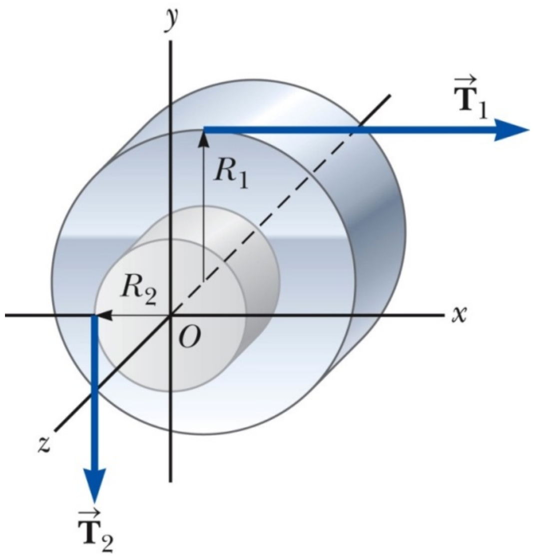
예제 10.6 원통에 작용하는 알짜 토크

그림과 같이 큰 원통에서 가운데 부분이 튀어나온 2단 원통이 있다. 원통은 그림에서 보이듯이 중심 z축에 대해 자유롭게 회전하고 있다. 반지름 R_1인 원통에 감긴 밧줄에는 원통의 오른쪽 방향으로 $\vec{T}_1$의 힘이 작용하고, 반지름 R_2의 원통에 감긴 밧줄에는 원통의 아래쪽 방향으로 힘 $\vec{T}_2$가 작용한다.

(A) 회전축에 대해 원통에 작용하는 알짜 토크를 구하라.

풀이 두 힘이 원통을 각각 시계 방향과 반시계 방향으로 회전시키려 하므로 토크의 방향도 반대 방향이다. 시계 방향을 (+)방향으로 정하면

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = \boxed{R_2 T_2 - R_1 T_1}$$



(B) T_1=5.0 N, R_1=1.0 m, T_2=15 N, R_2=0.50 m**라고 하자. 회전축에 대한 알짜 토크를 구하라. 그리고 정지 상태에서 시작했다면 어느 방향으로 원통이 회전하는가?**

풀이 주어진 값들을 대입한다.

$$\sum \tau = (0.50\text{ m})(15\text{ N}) - (1.0\text{ m})(5.0\text{ N}) = \boxed{2.5\text{ N}\cdot\text{m}}$$

토크의 결과가 +이므로 반시계방향으로 회전한다.

예제 10.7 벡터곱

xy 평면에 놓인 두 벡터 $\vec{\mathbf{A}}=2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}$ 와 $\vec{\mathbf{B}}=-\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}$ 가 있다. $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$ 를 계산하고, $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=-\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{A}}$임을 보여라

풀이

두 벡터의 크로스곱을 쓰면 다음과 같다. $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=(2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}})\times(-\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}})$

곱셈을 계산하면 $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=2\hat{\mathbf{i}}\times(-\hat{\mathbf{i}})+2\hat{\mathbf{i}}\times 2\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{j}}\times(-\hat{\mathbf{i}})+3\hat{\mathbf{j}}\times 2\hat{\mathbf{j}}$

항을 정리하면 $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=0+4\hat{\mathbf{k}}+3\hat{\mathbf{k}}+0=\boxed{7\hat{\mathbf{k}}}$

곱하는 순서를 바꾸어서 계산하면 $\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{A}}=(-\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}})\times(2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}})$

$$\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{A}}=(-\hat{\mathbf{i}})\times 2\hat{\mathbf{i}}+(-\hat{\mathbf{i}})\times 3\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{j}}\times 2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}\times 3\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{A}}=0-3\hat{\mathbf{k}}-4\hat{\mathbf{k}}+0=\boxed{-7\hat{\mathbf{k}}}$$

위의 두 결과는 방향이 반대로 나타난다. 즉, $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=-\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{A}}$ 이다.
따라서 벡터곱셈은 교환법칙이 성립하지 않는다.

10.6 분석 모형: 평형 상태의 강체 (Rigid Object in Equilibrium)

- 토크가 균형을 이루고 있는 강체를 **평형상태의 강체**라 한다.
  - 알짜 외력은 영이어야 한다:

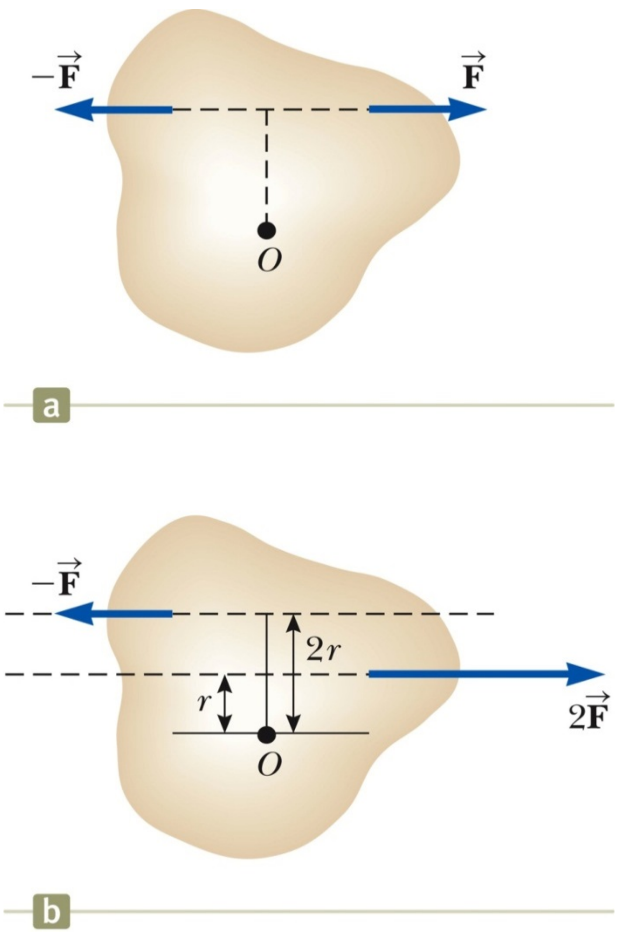
$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0$$

  - 알짜 외부토크는 임의의 축에 대해서도 영이어야 한다:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = 0$$

  - 성분식:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum \tau_z = 0$$



예제 10.8 수평 막대 위에 서 있기

길이가 l=8.00 m이고 무게가 W_b=200 N인 균일한 수평 막대가 벽에 경첩으로 연결되어 있다. 막대의 한쪽 끝은 줄에 연결되어 있으며 줄과 막대는 ø =53.0°의 각을 이루고 있다(그림). 무게가 W_p=600 N인 사람이 벽으로부터 d=2.00 m 떨어진 곳에 서 있다. 줄의 장력과 벽이 막대에 작용하는 힘의 크기와 방향을 구하라.

풀이

힘의 벡터합이 영이어야 한다:

$$(1)\ \sum F_x = R\cos\theta - T\cos\phi = 0$$

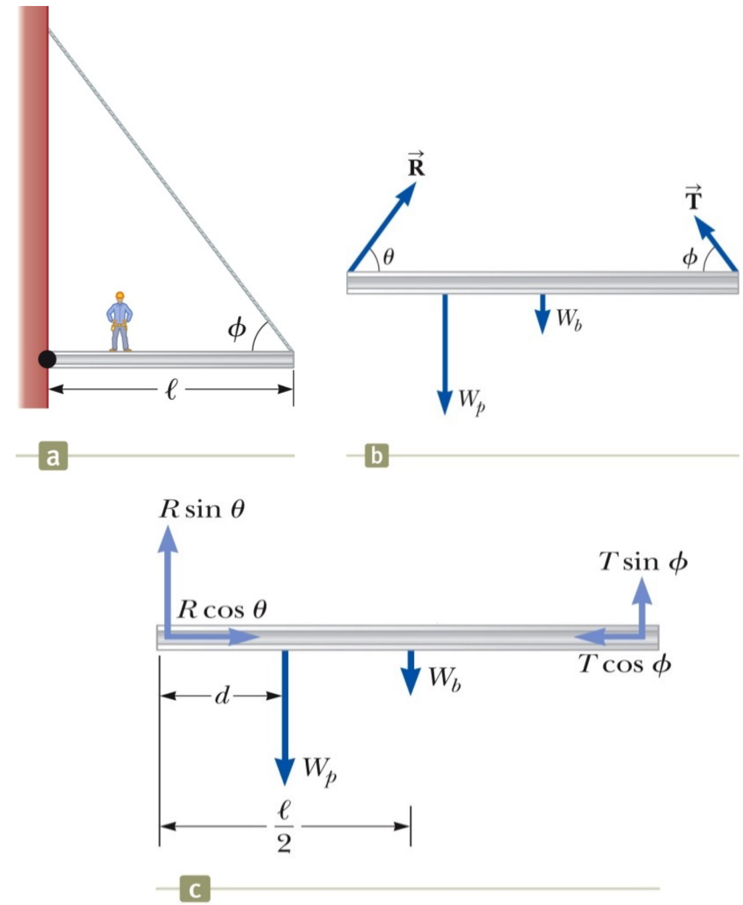
$$(2)\ \sum F_y = R\sin\theta + T\sin\phi - W_p - W_b = 0$$

한 점에 대한 토크의 합이 영이어야 한다:

$$\sum \tau_z = (T\sin\phi)(\ell) - W_p d - W_b\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

수치값을 대입하여 T 에 대해 푼다:

$$T = \frac{W_p d + W_b(\ell/2)}{\ell\sin\phi} = \frac{(600\text{ N})(2.00\text{ m}) + (200\text{ N})(4.00\text{ m})}{(8.00\text{ m})\sin 53.0°} = 313\text{ N}$$



– 식(1)과 (2)를 정리하여 나눈다:

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = \frac{W_p + W_b - T\sin\phi}{T\cos\phi}$$

– θ 에 대해 풀고 수치를 대입한다:

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = \frac{W_p + W_b - T\sin\phi}{T\cos\phi}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{W_p + W_b - T\sin\phi}{T\cos\phi}\right)$$

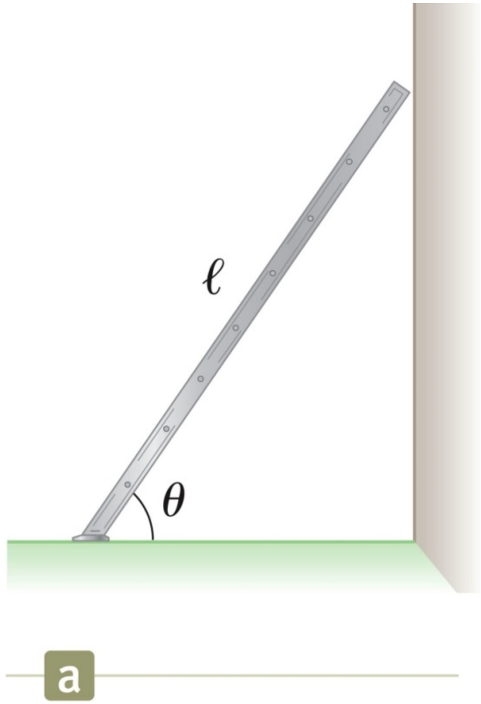
– R 에 대해 푼 다음 수치를 대입한다:

$$R = \frac{T\cos\phi}{\cos\theta} = \frac{(313\ \text{N})\cos 53.0^\circ}{\cos 71.1^\circ} = \boxed{581\ \text{N}}$$

예제 10.9 벽에 기대 놓은 사다리

매끈한 수직 벽에 길이 L 인 균일한 사다리를 기대 세웠다. 그림과 같이 사다리의 질량이 m이고, 사다리와 지면 사이의 정지 마찰 계수가 μ_s= 0.40이라고 할 때, 사다리가 미끄러지지 않을 최소 각도 θ_{min} 을 구하라.

풀이



- 사다리에 평형 제1조건을 적용한다:

$$(1) \quad \sum F_x = f_s - P = 0$$

$$(2) \quad \sum F_y = n - mg = 0$$

- (1)식을 P 에 대해 푼다:

$$(3) \quad P = f_s$$

- (2)식을 n 에 대해 푼다:

$$(4) \quad n = mg$$

- 사다리가 미끄러지기 시작할 때 정지마찰력이 최대가 된다:

$$(5) \quad P = f_{s,\text{max}} = \mu_s n = \mu_s mg$$

- O 를 지나는 축에 대한 토크를 사용하여 사다리에 평형 제2조건을 적용한다:

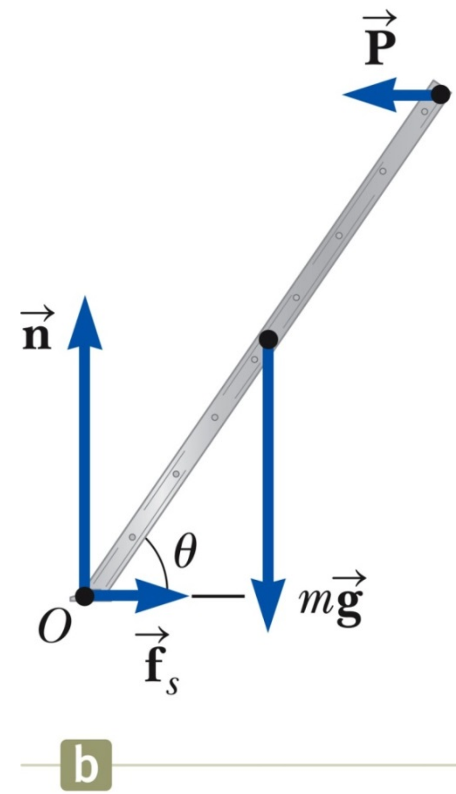
$$\sum \tau_O = P\ell \sin\theta_{\min} - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_{\min} = 0$$

- $\tan\theta_{\min}$ 에 대해 푼 다음 앞에서 구한 P 값을 대입한다:

$$\frac{\sin\theta_{\min}}{\cos\theta_{\min}} = \tan\theta_{\min} = \frac{mg}{2P} = \frac{mg}{2\mu_s mg} = \frac{1}{2\mu_s}$$

- 각에 대해 푼다:

$$\theta_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu_s}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{1}{2(0.40)}\right] = \boxed{51°}$$



10.7 알짜 토크를 받는 강체(The Rigid Object Under a Net Torque)

- 강체에 작용하는 알짜 토크가 영이 아니면 각가속도의 원인이 된다.

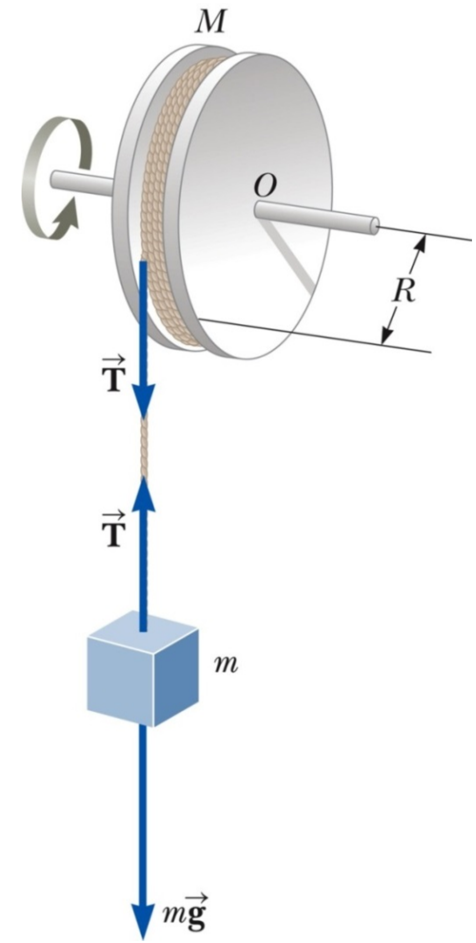
따라서 알짜토크를 받는 강체에 대해서는 회전운동에서의 뉴턴의 제2법칙

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$

를 사용하여야 한다.

예제 10.10 줄이 감긴 바퀴의 각가속도

반지름 R, 질량 M, 관성 모멘트 I인 바퀴가 그림 처럼 마찰이 없는 수평축에 설치되어 있다. 바퀴에 감긴 가벼운 줄에 질량 m인 물체가 달려 있다. 바퀴를 놓으면, 물체는 아래 방향으로 가속하고 줄은 바퀴에서 풀리며, 바퀴는 각가속도를 갖고 회전한다. 바퀴의 각가속도, 물체의 병진 가속도, 줄에 걸린 장력을 구하라.



풀이

- 바퀴의 각가속도, 물체의 병진가속도, 줄의 장력을 구한다:
  - 회전운동에 관한 뉴턴의 제2법칙을 적용한다:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$

  - α에 대해 풀고 알짜토크를 대입한다:

$$(1)\ \alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{TR}{I}$$

뉴턴의 제2법칙을 적용한다.

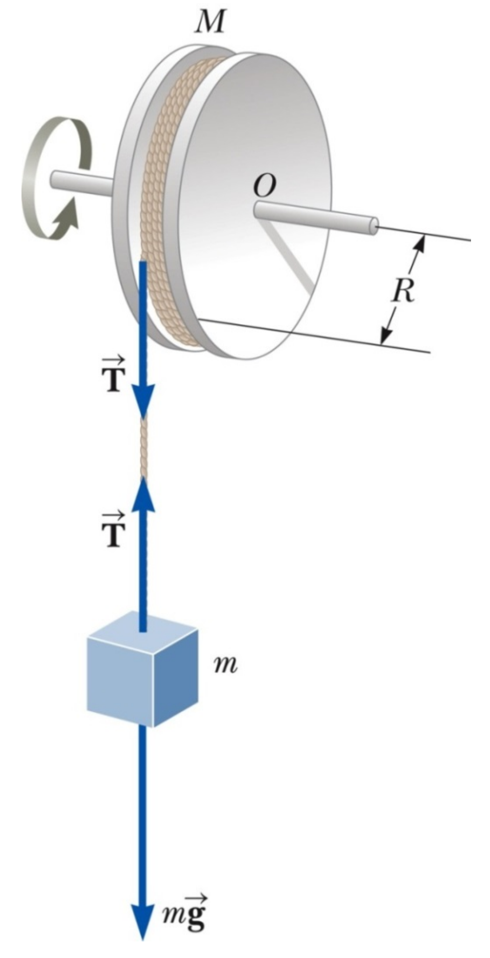
$$\sum F_y = mg - T = ma$$

가속도에 대해 푼다:

$$(2)\ a = \frac{mg - T}{m}$$

a = Rα 이므로

$$(3)\ a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$



위의 세 식에서 장력에 대해 푼다.

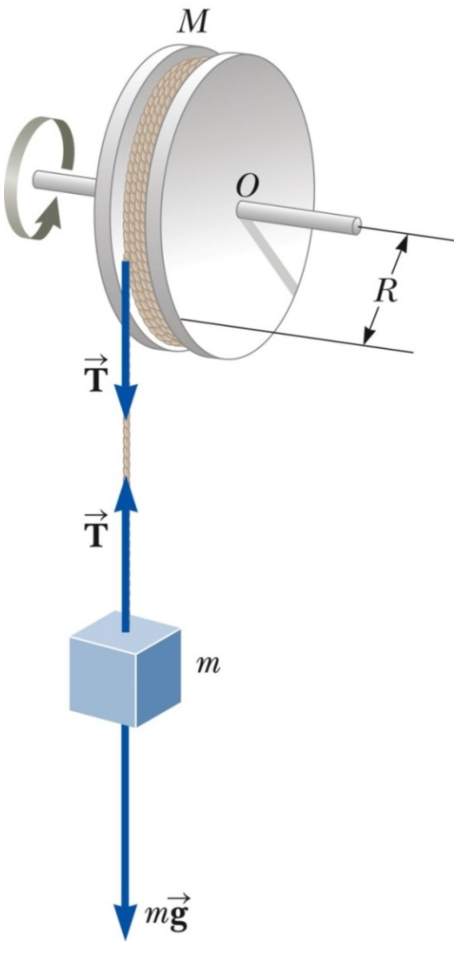
$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

이것을 대입하고 a 에 대해 푼다:

$$a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$

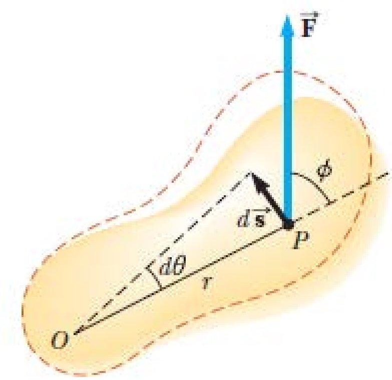
α 에 대해 푼다.

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$$



10.8 회전 운동에서의 에너지 고찰Energy Considerations in Rotational Motion)

회전 운동의 에너지의 관점에서 접근해보자. 힘 F가 작용하여 회전축 O에 대해 작은 거리 $ds=rd\theta$ 만큼 회전시킬 때 한 일은



$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = (F\sin\phi)rd\theta$$

$F\sin\phi r = \tau$이므로 $\boxed{dW = \tau\, d\theta}$

$$\frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} \qquad \mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$

대칭성 있는 물체가 고정축에 대해 회전할 때, 외부 힘이 한 일이 회전 운동 에너지의 변화와 같다.

$$\sum\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

$$\sum \tau d\theta = dW = I\omega\, d\omega$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega\, d\omega$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} I\omega_f^{\,2} - \frac{1}{2} I\omega_i^{\,2} = \Delta K_R}$$

회전 운동에 관한 일-운동 에너지 정리
(work-kinetic energy theorem for rotational motion)

고정축에 대해 회전하는 물체의 일률: $\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$

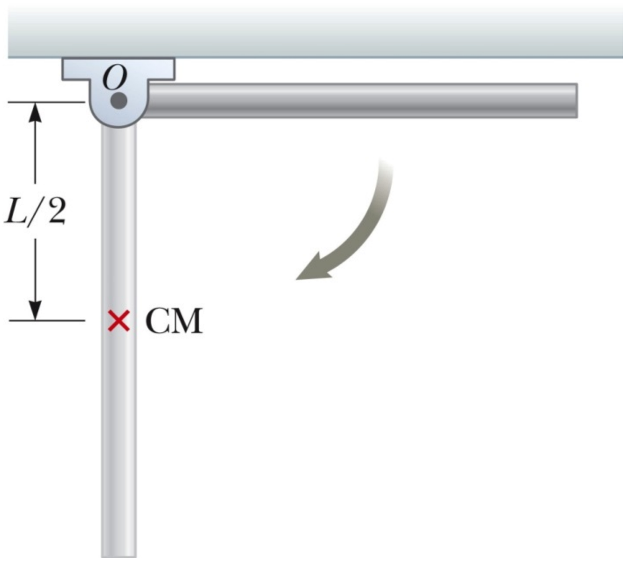
$d\theta/dt = \omega$ 이므로: $P = \tau\omega$

이것은 선운동에서의 $P = Fv$ 와 비슷한 식이다.

예제 10.11 회전하는 막대 다시 보기

길이가 *L*이고 질량이 *M*인 균일한 막대의 한쪽 끝이 통과하는 마찰이 없는 핀을 중심으로 회전하고 있다. 정지 상태에 있던 이 막대를 수평 위치에서 놓는다.
(A) 막대가 가장 낮은 위치에 도달했을 때 각속력을 구하라.

풀이 에너지 보존 법칙에 따라



$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2} I\omega^2 + 0 = 0 + Mg(\tfrac{1}{2}L)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

(B) 수직 위치에 있는 경우, 질량 중심의 접선 속력과 막대의 가장 낮은 점의 접선 속력을 구하라.

$$v_{\mathrm{CM}} = r\omega = \tfrac{L}{2}\omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

$$v = 2v_{\mathrm{CM}} = \sqrt{3gL}$$

10.9 분석 모형: 비고립계(각운동량)(Non-isolated system[Angular Momentum])

입자의 순간 각운동량

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$

단위: kg·m²/s

L 의 크기와 방향은 **r** 과 **p**로 이루어진 평면에 수직한 방향으로 오른손 법칙을 따른다.

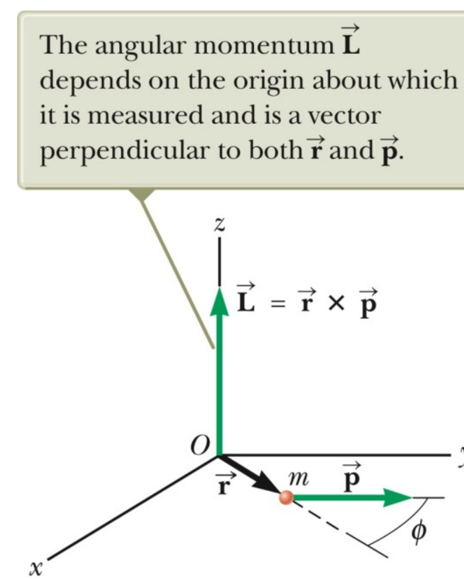
L의 크기는 $L = mvr \sin\Phi$

◈입자계의 각운동량 (Angular Momentum of a System of Particles)

$$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \cdots + \mathbf{L}_n = \sum_i \mathbf{L}i$$

$$\frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$$

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} \qquad \left(\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}_{tot}}{dt} \right)$$



– 토크 $$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

– 이것을 시간에 대해 미분하면:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

첫 항은 영이 되므로

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

따라서;

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}}$$

알짜 외부토크가 있을 때만 입자의 각운동량이 변하므로

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt}$$

입자계 전체의 각운동량을 구하기 위해서는 각 입자의 각운동량을 모두 더해준다.

$$L = \sum_i m_i v_i r_i = \sum_i m_i (r_i \omega) r_i = \left(\sum_i m_i {r_i}^2\right)\omega$$

괄호 속의 양은 관성모멘트이므로:

$$L = I\omega$$

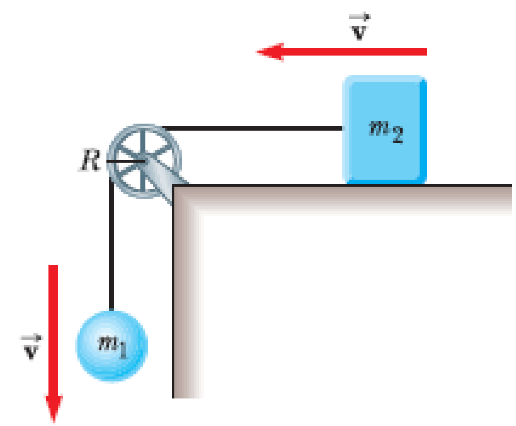
표 10.3 | 회전 운동과 병진 운동에서의 식의 비교

	고정축에 대한 회전 운동	병진 운동
운동 에너지	$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$	$K = \frac{1}{2} mv^2$
평 형	$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$	$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = 0$
뉴턴의 제2법칙	$\sum \vec{\tau}_{ext} = I\alpha$	$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = m\vec{\mathbf{a}}$
비고립계	$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{tot}}{dt}$	$\vec{\mathbf{F}}_{ext} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{tot}}{dt}$
운동량	$L = I\omega$	$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$
고립계	$\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f$	$\vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f$
일 률	$P = \tau\omega$	$P = Fv$

예제 10.12 끈으로 연결된 두 물체

질량이 m_1인 구와 질량이 m_2인 상자가 도르래를 통해 가벼운 끈으로 연결되어 있다. 도르래의 반지름은 R이고 테의 질량은 M이며, 도르래 살의 무게는 무시할 수 있다. 상자가 마찰이 없는 수평면에서 미끄러진다고 할 때, 각운동량과 토크의 개념을 이용하여 두 물체의 선가속도를 구하라.

풀이 도르래 회전축에 대해 각운동량을 계산하면



$$(1) \quad L = m_1 vR + m_2 vR + MvR$$

$$= (m_1 + m_2 + M)vR$$

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt} \text{ 에 따라서}$$

$$m_1 gR = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2 + M)vR]$$

$$(2) \quad m_1 gR = (m_1 + m_2 + M)R\frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$

10.9 분석 모형: 고립계(각운동량)(Isolated system[Angular Momentum])

$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{tot} = \text{상수 또는 } \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$$

계에 작용하는 알짜 외부 토크가 영일 때, 즉 계가 고립되어 있으면 계의 전체 각운동량은 크기와 방향 모두 일정하다.

각운동량 보존(conservation of angular momentum)

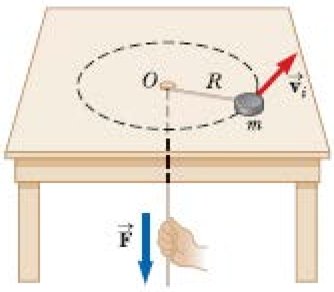
$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constant}$$

고립계에서

- $E_i = E_f$ (에너지 전달이 없는 경우)
- $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ (알짜 외력이 0인 경우)
- $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$ (알짜 외부 토크가 0인 경우)

예제 10.13 마찰 없는 수평면 위에서 회전하는 퍽

마찰 없는 수평 테이블 위에 질량이 m인 퍽이 줄에 연결되어 있고 그 줄의 다른 끝은 테이블 중심에 있는 구멍을 통해 아래로 늘어져 있다. 퍽은 회전 속력이 v_i일 때 반지름 R을 그리면서 원운동을 한다



(A) 테이블 밑으로 늘어진 줄을 당겨서 퍽의 회전 반지름이 r로 줄어들 때, 퍽의 나중 속력 v_f에 대한 식을 구하라.

풀이 처음각운동량과 나중 각운동량이 같다:

$$L = mv_i R = mv_f r$$

나중 속력에 대해 푼다:

$$v_f = \boxed{\frac{v_i R}{r}}$$

이 결과 r가 감소함에 따라 v가 증가함을 알 수 있다.

(B) 이 과정에서 퍽의 운동 에너지는 보존되지 않음을 증명하라.

풀이 처음 운동 에너지에 대한 나중 운동 에너지의 비를 구한다:

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}m{v_f}^2}{\frac{1}{2}m{v_i}^2} = \frac{1}{{v_i}^2}\left(\frac{v_i R}{r}\right)^2 = \frac{R^2}{r^2}$$

이 비가 **1**이 아니기 때문에 에너지는 보존되지 않는다.

예제 10.14 중성자 별의 탄생

어떤 별이 그 중심을 지나는 축에 대해 30일의 주기로 회전한다. 주기는 별의 적도 상의 한 점이 회전축에 대해 완전히 1회전하는 데 걸리는 시간이다. 별이 초신성 폭발을 한 후, 반지름이 1.0104 km인 중심핵이 반지름이 3.0 km인 중성자별로 응축된다. 중성자별의 회전 주기를 구하라.

풀이

각운동량 보존식을 적용: $$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

처음과 나중의 주기를 써서 다시 쓰면: $$I_i\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = I_f\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

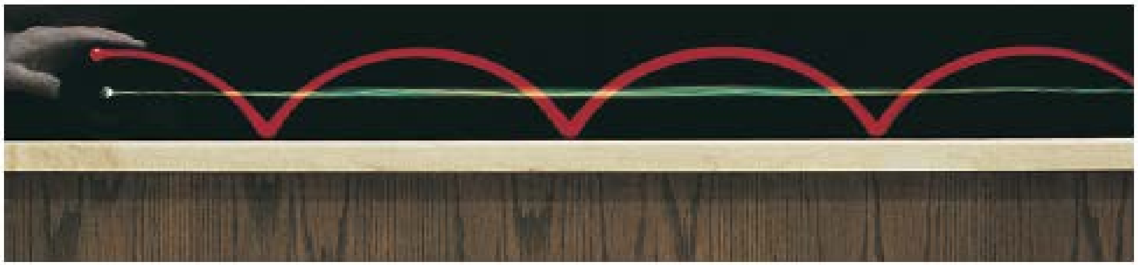
관성모멘트를 대입: $$kMR_i^2\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = kMR_f^2\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

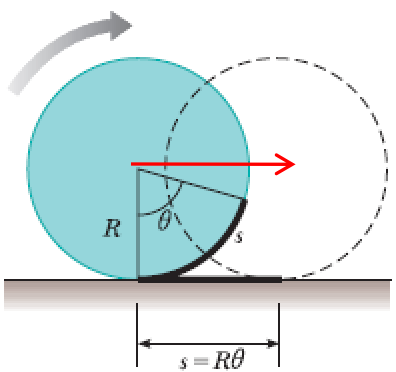
주기에 대해 푼다: $$T_f = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 T_i$$

수치를 대입하여 계산하면: $$T_f = \left(\frac{3.0\text{ km}}{1.0\times 10^4\text{ km}}\right)^2(30\text{ days}) = 2.7\times 10^{-6}\text{ days} = \boxed{0.23\text{ s}}$$

10.11 강체의 굴림 운동(Rolling Motion of a Rigid Object)

회전 운동과 병진 운동을 동시에 하는 경우



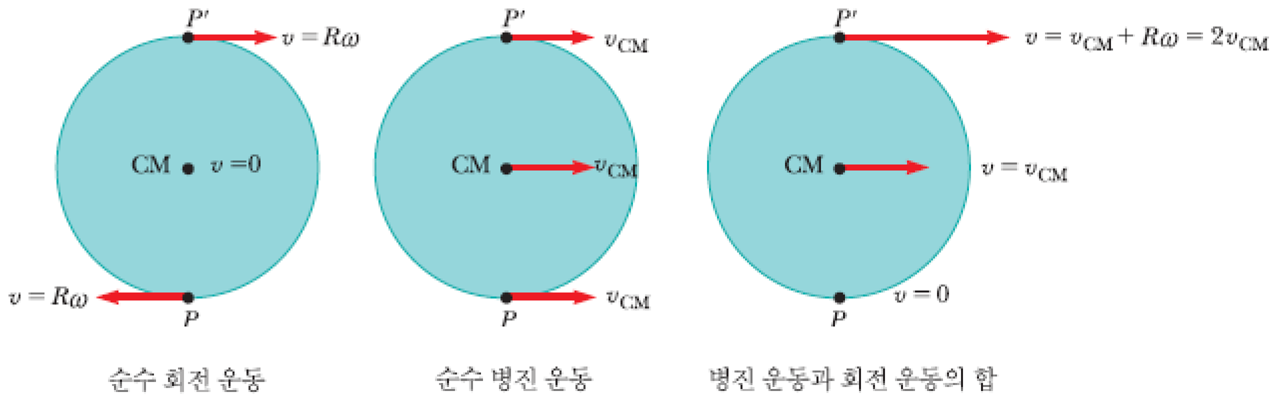


미끄러지지 않고 수평면 위에서 굴러가고 있는 반지름 R의 원통을 고려하면

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{dv_{\mathrm{CM}}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

속력 v_{CM}으로 구르는 물체를 따라 움직이고 있다고 가정하면, 물체의 질량 중심은 마치 정지해 있는 것 같다.



마지막 그림에서 물체는 P점을 중심으로 회전 운동하는 것으로 생각할 수 있으므로

$$K = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2$$

$I_P = I_{CM} + MR^2$이므로

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2\omega^2$$

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

전체운동에너지=회전운동에너지 + 병진운동에너지

평행축 정리(parallel axis theorem)

물체의 질량 중심을 지나는 축과 평행한 임의의 축에 대한 관성 모멘트를 I_p로 나타낼 수 있다.

$$I_p = I_{\mathrm{CM}} + MD^2$$

I_{CM} : 질량중심을 지나는 축에 대한 관성모멘트

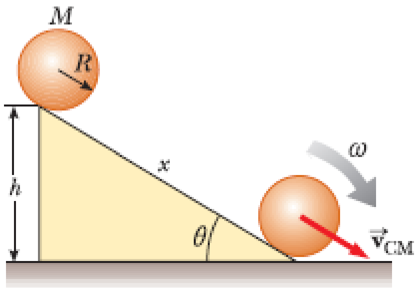
D: 질량중심 축에서 회전축까지의 거리

평행축 정리를 써서 회전하면서 병진운동 하는 물체의 총에너지를 다시쓰면,

$$K = \frac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{\mathrm{CM}} + MR^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_p \omega^2$$

구르면서 병진운동하는 물체와 **구르지 않고 병진운동**하는 물체의 속력 비교

순수 굴림 운동의 경우 $v_{CM}=R\omega$ 이므로



$$K = \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{R} \right)^2 + \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{CM}}^2$$

$$K = \tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{\mathrm{CM}}}{R^2} + M \right) v_{\mathrm{CM}}^2$$

구가 경사면 바닥에 있을 때 중력 위치 에너지가 영이라고 하면

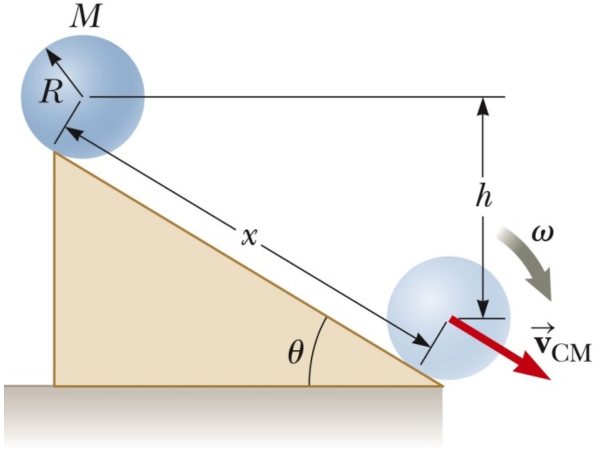
$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2} \left(\frac{I_{\mathrm{CM}}}{R^2} + M \right) v_{\mathrm{CM}}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

$$\therefore v_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{2gh}{1 + (I_{\mathrm{CM}} / MR^2)} \right)^{1/2}$$

구르지 않고 미끄러지는 경우보다 느리다!

예제 10.15 경사면을 굴러내려가는 구

속이 찬 구가 그림에서처럼 경사면을 따라 굴러내려 간다. 경사면 맨 아래에서 질량 중심의 **병진 속력**과 **병진 가속도**의 크기를 구하라.



풀이

구의 질량중심의 속력은:

$$(1)\quad v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1+\left(\frac{2}{5}MR^2/MR^2\right)}\right]^{1/2} = \boxed{\left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}}$$

h를 x로 나타내어 쓰면: $v_{CM}{}^2 = \frac{10}{7}gx\sin\theta$

일정가속도 공식을 사용: $v_{CM}{}^2 = 2a_{CM}x$

가속도를 구한다: $a_{CM} = \boxed{\frac{5}{7}g\sin\theta}$