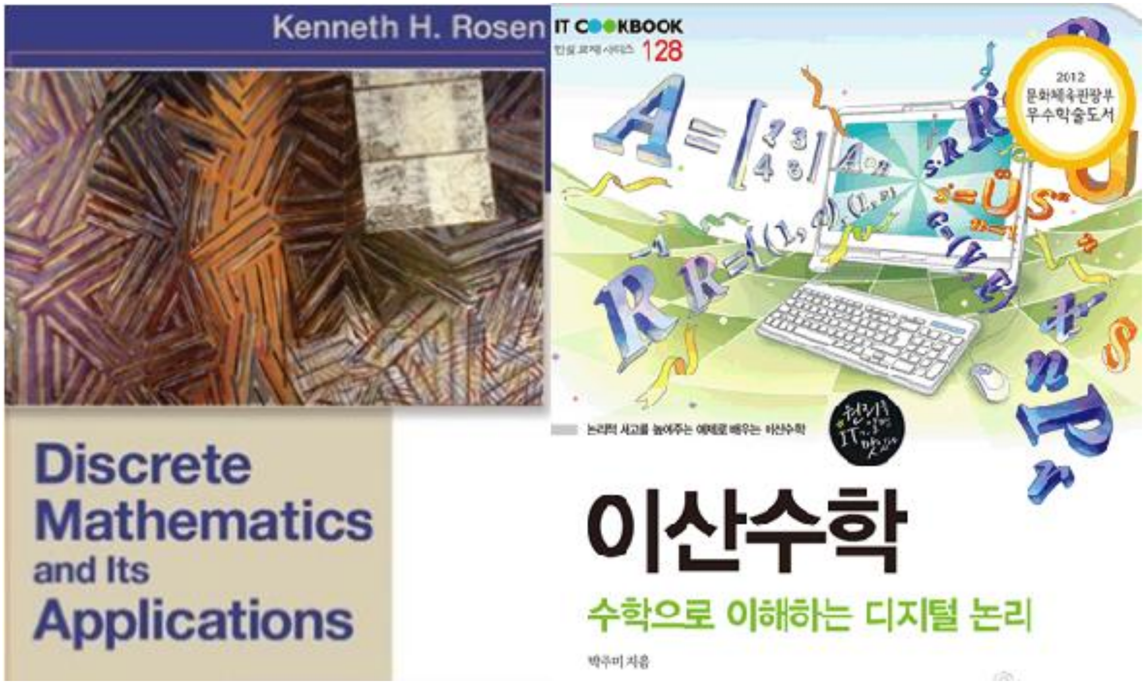
이산수학
Discrete Mathematics



Chapter 02:
증명

Soongsil University : Kim Chang Wook

증명의 정의

❖증명이란 어떤 수학적 진술의 참됨을 입증하는 정당한 논증이다.

- 증명은 증명하고자 하는 정리의 가정들, 참이라고 가정된 공리들, 그리고 그 전에 증명된 정리들을 사용할 수 있다.
- 이와 같은 구성요소들과 추론 규칙들을 사용하여 증명의 마지막 단계는 증명하고자 하는 진술이 참임을 밝히는 것이다.

❖증명 방법들은

- 수학적 정리들을 증명하는데 사용
- 컴퓨터 과학 분야에 많이 응용
  컴퓨터 프로그램이 틀림이 없음을 증명
  운영체제가 안전한지 증명
  인공지능 분야에서 추론을 수행
  시스템 명세들이 서로 배치되지 않음을 증명
- 증명에서 사용되는 여러 가지 방법들은
  수학과 컴퓨터과학 분야에서 필수적

공리, 정의, 정리, 증명

❖공리(Axiom)

- 별도의 증명 없이 참(T)으로 이용되는 명제

  예) $a = b$ 이면, $a + c = b + c$ 다.

❖정의(Definition)

- 논의의 대상을 보편화하기 위해 사용하는 용어 또는 기호의 의미를 확실하게 규정한 문장이나 식

  예) 한 내각의 크기가 직각인 삼각형을 직각삼각형이라 한다.

❖정리(Theorem)

- 공리와 정의를 통해 참으로 확인된 명제

  예) 피타고라스의 정리 : 직각삼각형은 (빗변)^2=(밑변)^2 + (높이)^2

- 보조정리(lemma) : 결과를 증명하는데 도움이 되는 약간 덜 중요한 정리.

❖증명(Proof)

- 하나의 명제가 참임을 확인하는 과정
  - 명제가 참인지 확인하기 위해 공리, 정리들을 활용.

❖가설 (Conjecture)

- 어떤 부분적 증거나 휴리스틱한 논거 또는 전문가의 직감에 근거하여 참이라고 주장되는 문장. 가설이 증명되면 가설은 정리가 된다.
  많은 경우 가설은 거짓으로 판명되며, 이 경우 정리가 될 수 없다.

직접증명법

❖직접증명법(Direct Proof)

- 함축명제 $p \to q$가 참이 됨을 증명하는 방법
- 직접증명법은 명제를 변형하지 않고 증명하는 방법
  주어진 명제를 참이라고 가정하고,
  정리와 공리를 이용하여 명제가 참이 됨을 증명

예제 2-1

두 홀수의 곱이 홀수임을 증명하라.

풀이

p : 두 수 m, n은 홀수다. q : m, n의 곱은 홀수다.

$p \to q$: 두 홀수 m, n의 곱은 홀수다.

두 정수 k, l 이 있을 때, 홀수 m 과 n 은 각각 $m = 2k+1$, $n = 2l+1$ 로 표현할 수 있다.

m과 n의 곱을 표현하면 $m \times n = (2k+1) \times (2l+1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$

$2kl + k + l$을 변수 a로 대치하면 $m \times n = 2a + 1$로 홀수가 된다.

$\therefore$ 명제 $p \to q$ "두 홀수 m, n 의 곱은 홀수다"는 참이다.

예제 2-2

모든 정수 n 에 대해 n 이 짝수면, n^2 도 짝수임을 증명하라.

풀이

p : 정수 n 은 짝수다. q : n^2 .

$p \to q$: 정수 n 이 짝수면, n^2 도 짝수다.

정수 k 가 있을 때, 짝수 n 은 $n = 2k$ 로 표현 가능. $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k)^2$

$\therefore$ 명제 $p \to q$ "정수 n 이 짝수면, n^2 도 짝수다"는 참이다.

직접증명법

예제 2-4

정수는 짝수와 홀수로 구성된다. 모든 정수 x에 대해 x^2-x는 짝수임을 증명하라.

풀이

모든 정수에 대해 성립하는 것이므로 x가 짝수든 홀수든 x^2-x는 짝수가 된다.

$p : x$는 짝수다. $q : x$는 홀수다. $r : x^2-x$는 짝수다.

주어진 명제 "모든 정수 x에 대해 x^2-x는 짝수" $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$로 표현.

- $p \rightarrow r$: x가 짝수면, x^2-x는 짝수다. x가 짝수이므로 $2k$ (k는 정수)로 표현.
  $x^2-x= (2k)^2-2k = 4k^2-2k = 2(2k^2-k)$ 이므로 x^2-x는 짝수다.
  ∴ 명제 $p \rightarrow r$: "x가 짝수면, x^2-x는 짝수다" 는 참이다.
- $q \rightarrow r$: x가 홀수면, x^2-x는 짝수다. x가 홀수이므로 $x=2k+1$로 표현.
  $x^2-x = (2k+1)^2-(2k+1)= 4k^2+4k+1-2k-1 = 4k^2+2k = 2(2k^2+k)$이므로
  x^2-x는 짝수다. 따라서 명제 $q \rightarrow r$: "x가 홀수면, x^2-x는 짝수다" 는 참이다.

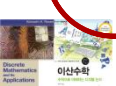
∴ 명제 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$: "x가 짝수면 x^2-x는 짝수고, x가 홀수면 x^2-x는 짝수다"는 참.

∴ "모든 정수 x에 대해 x^2-x는 짝수다"는 참이다.

진리표

$(p \vee q) \rightarrow r$
$\equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T



간접증명법

❖간접증명법(Indirect Proof)

간접증명법은 증명해야 할 명제를 논리에 어긋나지 않는 범위 내에에서 변화시켜 증명하기 쉽게 만드는 방법

- 함축명제 $p \rightarrow q$를 다양한 형태로 변형하여 증명하는 방법
- 대우증명법, 모순증명법, 반례증명법이 이에 속함

❖대우증명법(Proof by Contraposition)

대우명제는 본 명제와 같은 진리값을 갖기 때문에,
대우명제가 참임을 증명하면 본명제도 참임을 증명 가능

- 함축명제 $p \rightarrow q$ 가 $\neg q \rightarrow \neg p$ 와 동치임을 이용하여 본명제 증명하는 방법

예제 2-10

두 정수 m, n 의 곱이 홀수면, m, n 은 모두 홀수임을 증명하라. (예제 2-1 참고)

풀이

p : 두 정수 m, n 의 곱이 홀수다. q : 두 정수 m, n 은 홀수다.

$\neg p$: 두 정수 m, n 의 곱은 홀수가 아니다(짝수다).

$\neg q$: 두 정수 m, n 은 홀수가 아니다(짝수다).

$\neg q \rightarrow \neg p$: 두 정수 m, n이 짝수면, mn은 짝수다.

m, n 이 짝수이므로, $m = 2k(k \in Z)$, $n = 2l\ (l \in Z)$ 가 되고, $mn = (2k)(2l) = 4kl = 2(2kl)$ 이므로 짝수다. 따라서 $\neg q \rightarrow \neg p$ "두 정수 m, n 이 짝수면, mn 은 짝수다"는 참이다.

$\therefore$ 명제 $p \rightarrow q$ "두 정수 m, n 의 곱이 홀수면, m, n 은 모두 홀수다"는 참이다.

대우증명법

예제 2-11

모든 정수 n에 대해 n^2 이 짝수면, n 도 짝수임을 증명하라. ([예제 2-2] 참고)

풀이

p : 모든 정수 n에 대해 n^2 은 짝수다. q : 정수 n 은 짝수다.

$\neg p$: 모든 정수 n에 대해 n^2 은 짝수가 아니다(홀수다).

$\neg q$: 정수 n 은 짝수가 아니다(홀수다).

$\neg q \rightarrow \neg p$: 정수 n이 홀수면, n^2 은 홀수다.

n이 짝수가 아니므로 $n=2k+1$, $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$이므로 n^2 역시 홀수.

따라서 $\neg q \rightarrow \neg p$ "정수 n 이 홀수면, n^2은 홀수다"는 참이다.

$\therefore$ 명제 $p \rightarrow q$ "모든 정수 n 에 대해 n^2이 짝수면, n 도 짝수다"는 참이다.

예제 2-13

x^2-x가 짝수면, x 는 짝수거나 x는 홀수임을 증명하라. ([예제 2-4] 참고)

풀이

p : x^2-x 는 짝수다.

q : x 는 짝수거나 x는 홀수다 $\equiv$ (x 는 짝수다)$\vee$(x 는 홀수다)

$\neg p$: x^2-x 는 홀수다.

$\neg q$: x 는 짝수고, x 는 홀수다.

$\because$ $\neg$((x 는 짝수다)$\vee$(x는 홀수다))$\equiv$(x는 홀수다)$\wedge$(x는 짝수다)

$\neg q \rightarrow \neg p$: x 는 홀수고 x 는 짝수면, x^2-x 는 홀수다.

대우명제 $\neg q \rightarrow \neg p$ 에서 조건((x 는 홀수다) $\wedge$ (x 는 짝수다))는 항상 거짓(F)이다.

조건명제에서 조건이 거짓(F)인 경우, 조건명제는 항상 참(T)이다.

따라서 $\neg q \rightarrow \neg p$ "x 는 짝수고 x는 홀수면 x^2-x는 홀수다"는 참이다.

$\therefore$ 명제 $p \rightarrow q$ "x^2-x 가 짝수면, x 는 짝수거나 x는 홀수다"는 참이다.

❖모순증명법(Proof by Contradiction)

모순증명법은 본명제 $p \rightarrow q$에 대한 부정이 거짓임을 증명하여 본 명제가 참임을 증명하는 방식. 본명제를 부정한 명제가 참이면 본명제가 거짓이 되고,
본명제를 부정한 명제가 거짓이 되면 본명제가 참이 된다.

- 함축명제 $p \rightarrow q$ 가 $\neg(p \wedge \neg q)$ 와 동치임을 이용하여 증명하는 방법
  - 함축명제 $p \rightarrow q$ 가 $\neg(p \wedge \neg q)$ 와 동치라는 것을 다음과 같이 증명

$$\neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg p \vee \neg(\neg q) \quad \because \text{드모르간의 법칙}$$
$$\equiv \neg p \vee q \quad \because \text{이중부정의 법칙}$$
$$\equiv p \rightarrow q \quad \because \text{함축법칙}$$

주어진 명제 $p \rightarrow q$ 에서 q를 부정하여 p가 참일 때 $\neg q$가 거짓이면 $p \wedge \neg q$가 거짓이므로 , 본 명제 $p \rightarrow q$는 참이 된다.

예제 2-19

두 홀수의 곱은 홀수가 됨을 증명하라. ([예제 2-1], [예제 2-10] 참조)

풀이

p : 두 정수 m, n 은 홀수다. q : m, n 의 곱은 홀수다.
$\neg q$: m, n 의 곱은 홀수가 아니다(짝수다).
$p \wedge \neg q$: 두 정수 m, n 은 홀수고 m, n 의 곱은 짝수다.

두 홀수 m 과 n 은 각각 $m=2k+1(k \in Z)$, $n=2l+1(l \in Z)$로 정의할 수 있다.
$mn=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1=2(2kl+2k+2l)+1$ 이므로 mn 은 홀수이지 짝수가 아니다.
따라서 $p \wedge \neg q$: "두 홀수 m, n의 곱은 짝수다"는 거짓이다.
$\therefore$ 명제 $p \rightarrow q$: "두 홀수의 곱은 홀수다"는 참이다. ($p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ 이용)

모순증명법

예제 2-20

모든 정수 n 에 대해 n이 짝수면, n^2도 짝수임을 증명하라. ([예제 2-2] 참고)

풀이

p : 모든 정수 n 에 대해 n은 짝수다.

q : 정수 n^2은 짝수다.

$\neg q$: 정수 n^2은 짝수가 아니다(홀수다).

$p \wedge \neg q$: 모든 정수 n 에 대해 n은 짝수고 n^2 홀수다.

$\neg q \rightarrow \neg p$: 정수 n이 홀수면, n^2은 홀수다.

n이 짝수이므로 $n=2k$, $n^2=(2k)^2 = 4k^2 =2(2k^2)$ 이므로 n^2은 홀수가 아니다.

따라서 명제 $p \wedge \neg q$ "정수 n이 짝수고, n^2은 홀수다"는 거짓이다.

$\therefore$ 명제 $p \rightarrow q$ "모든 정수 n에 대해 n이 짝수면, n^2도 짝수다"는 참이다.

예제 2-23

정수 n이 3의 배수면, n^3도 3의 배수임을 증명하라 ([예제 2-5], [예제 2-14] 참고)

풀이

p : 정수 n 이 3의 배수다.

q : n^3이 3의 배수다.

$\neg q$: n^3은 3의 배수가 아니다.

$p \wedge \neg q$: 정수 n이 3의 배수고 n^3은 3의 배수가 아니다.

n 이 3의 배수므로, $n=3k(k \in Z)$가 되고, $n^3 = (3k)^3 = 27k^3 = 3(9k^3)$ 이므로 n^3 은 3의 배수이다.
따라서 명제 $p \wedge \neg q$: "정수 n 이 3의 배수이면 n^3 은 3의 배수가 아니다." 는 거짓이다.

$\therefore$ 명제 $p \rightarrow q$ "n이 3의 배수 이면, n^3은 3의 배수이다"는 참이다. $(p \rightarrow q \equiv \neg (p \wedge \neg q))$ 이용)

반례증명법

❖반례증명법(Proof by Counter-Example) $\exists x\, \neg p(x)$

- 주어진 명제에 모순이 되는 예를 찾아 증명하는 방법
- 명제를 거짓으로 만드는 예가 한 가지라도 존재하면 그 명제는 거짓이 된다.

예제 2-30

모든 소수 n에 대해 n +4 도 소수인지 증명하라.

풀이

소수는 1을 제외한 어떠한 약수도 갖지 않는 수를 말한다. 예를 들어 2, 3, 5, 7, 11, 13, …
등이다. 각 소수에 4를 더하면 각각 "6, 7, 9, 11, 15, 17, …"이 되는데, 이때 모든 수가
소수가 되는 것은 아니다. 즉 n=2 인 경우, $n + 4 = 6$ 이므로 소수가 아니다.

∴ 모든 소수 n 에 대해 n +4 도 소수인 것은 아니다.

예제 2-31

모든 실수 x,y 에 대해 $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 인지 증명하라.

풀이

x=0, y= -1인 경우, 0 >-1 이므로 $x > y$ 이지만, $(0)^2<(-1)^2$ 이므로 $x^2 > y^2$은 성립하지 않는다.

∴ 모든 실수 x,y 에 대해 $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 인 것은 아니다.

예제 2-32

모든 실수 a에 대해 $(a+1)^2 \geq a^2$ 가 성립하는지 증명하라.

풀이

a =-1인 경우, $(-1+1)^2 = 0 \geq (-1)^2 = 1$ 로 이 식이 성립하지 않는다.

∴ 모든 실수 a 에 대해 $(a+1)^2 \geq a^2$ 가 성립하는 것은 아니다.

❖존재증명법(Existence Proof) ∃x $p(x)$

- 주어진 명제가 참(T)이 되는 예를 찾아 증명하는 방법
- 명제를 참으로 만드는 예가 한 가지라도 존재하면 그 명제는 참이 된다.

예제 2-33

어떤 소수 n에 대해 n +4 도 소수인지 증명하라. ([예제 2-30] 참고)

풀이

소수는 1을 제외한 어떠한 약수도 갖지 않는 수를 말한다. 예를 들어 2, 3, 5, 7, 11, 13, … 등이다. 각 소수에 4를 더하면 각각 "6, 7, 9, 11, 15, 17, …"이 되는데, 이때 7(3+4), 11(7+4), 17(13+4) 의 경우를 통해 n +4를 소수로 만드는 n이 있음을 알 수 있다.

∴ 어떤 소수 n 에 대해 n +4 도 소수임이 성립한다.

예제 2-34

어떤 실수 x,y 에 대해 $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 인지 증명하라. ([예제 2-31] 참고)

풀이

x=2, y= -1인 경우, 2>-1이므로 $x > y$.

∴ 어떤 실수 x, y 에 대해 $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 이 성립한다.

예제 2-35

어떤 실수 a에 대해 $(a+1)^2 \geq a^2$ 가 성립하는지 증명하라. (예제 2-32 참고)

풀이

a =3인 경우, $(3+1)^2 = 16 \geq (3)^2 = 9$ 로 이 식이 성립한다.

∴ 어떤 실수 a 에 대해 $(a+1)^2 \geq a^2$ 가 성립한다.

수학적 귀납법

❖수학적 귀납법(Mathematical Induction)

- 0을 포함하는 자연수에 관한 명제를 증명하는데 유용한 방법.
- 자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대해 만족하는 것을 다음 세 단계의 과정으로 증명하는 방법
  - 기본가정 : p (논의영역의 초기값)가 참(T)임을 증명
  - 귀납가정 : 임의의 k에 대해 $p(k)$가 참 (T)이라고 가정
  - 귀납단계 : 기본가정과 귀납가정을 이용해 $k + 1$에 대해 $p(k + 1)$이 참 (T) 임을 증명

예제 2-36

$n \geq 1$ 인 자연수에 대해 다음 식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하라.

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

풀이 $p(n) = 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 일 때,

기본가정) 이 연산식은 $n \geq 1$ 인 자연수에 대한 식이므로 초기값이 1임을 알 수 있다.

$$\therefore p(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$ 로 성립한다.

귀납가정) $p(k) = 1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$가 성립한다고 가정한다.

수학적 귀납법

예제 2-36

귀납단계) 위의 두 가정을 이용해 $p(k+1) = 1+2+\ldots+\ k\ +\ (k\ +\ 1) = \dfrac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}$

가 성립하는지 증명한다.

$$p(k+1) = 1+2+\ldots+\ k\ +\ (k\ +\ 1) = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

귀납과정에서 $1+2+\ldots+\ k = = \dfrac{k(k+1)}{2}$이 성립한다고 가정했으므로,

$$\begin{aligned} p(k+1) &= 1+2+\ldots+\ k\ +\ (k\ +\ 1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{(k+1)+2(k+1)}{2} \quad k^2 \\ &= \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)+(k+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore\ p(k+1) = 1+2+\ldots+\ k\ +\ (k\ +\ 1) = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}$$

$\therefore$ 기본가정과 귀납가정에 의해 $p(k+1)$ 은 참이다.

예제 2-37

$n \geq 3$인 자연수에 대해 $n^2 > 2n+1$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하라.

풀이

$p(n)$: $n^2 > 2n+1$ 일 때,

기본가정) $n \geq 3$인 자연수에 대한 식이므로 초기값은 3임을 알 수 있다.

$\therefore p(3) : 3^2 = 9 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$이므로 성립한다.

귀납가정) $p(k)$: $k^2 > 2k + 1$ 이 성립한다고 가정한다.

귀납단계) $p(k+1)$: $(k+1)^2 > 2(k+1)+1$ 이 참임을 증명한다.

$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2(k+1)+1 = 2k+3$ ………………… ①

귀납가정에서 $k^2 > 2k+1$이라고 했으므로 귀납가정의 양변에 $2k+1$을 더하면

$k^2 + 2k + 1 > 2k+1 + 2k+1$ $(= 4k+2)$ ………………… ②

$p(k)$ 는 $k \geq 3$인 자연수에 대해서만 성립하므로 ②의 $4k+2$는 ①의 $2k+3$보다 크다.

($\because$ 4x3+2=14, 2x3+3=9). 따라서 $k^2 + 2k + 1 > 4k+2 > 2k+3$ 이다.

$\therefore (k+1)^2 > 2k+3$ $(= 2(k+1)+1)$

$\therefore k \geq 3$인 자연수에 대해 $p(k+1)$: $(k+1)^2 > 2(k+1)+1$은 참이다.