

8장. 운동량과 충돌



8.1 선운동량

8.2 분석 모형: 고립계 (운동량)

8.3 분석 모형: 비고립계 (운동량)

8.4 일차원 충돌

8.5 이차원 충돌

8.6 질량 중심

8.7 입자계 운동

8.8 연결 주제: 로켓 추진

8.1 선운동량 Linear Momentum

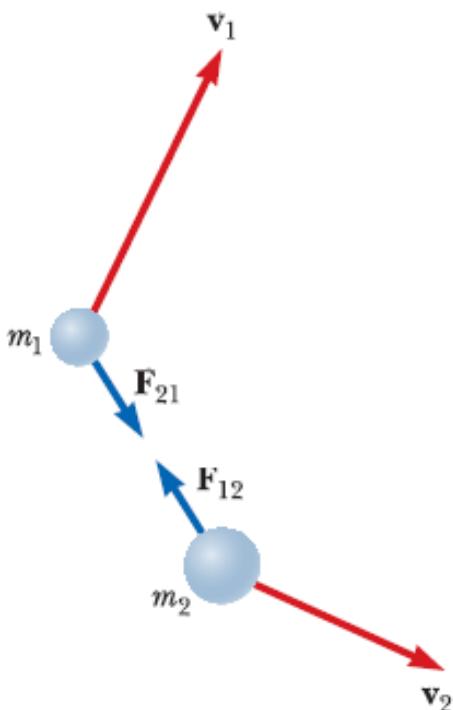
두 입자 계

뉴턴의 제3법칙

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} = 0 \quad m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0$$

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0 \quad \frac{d(m_1 \mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = 0$$



$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{일정} \quad \text{보존되는 양}$$

속도 v 로 움직이는 질량 m 인 입자나 물체의 선운동량(linear momentum)

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$$

(벡터량)

단위: kg · m/s

뉴턴은 이 양을 운동의 양(quantity of motion)이라고 표현
운동을 멈추게 하기 어려운 정도

입자의 선운동량과 입자에 작용하는 힘 사이의 관계

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

(제2법칙의 일반화된 형태)

8.2 분석 모형: 고립계 (운동량) Analysis Model: Isolated System(Momentum)

두 입자 계에서

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$$
$$\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{일정}$$

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}$$

전체 운동량이 보존되므로 각 성분별로도 보존된다.

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \quad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \quad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}$$

선운동량 보존 법칙

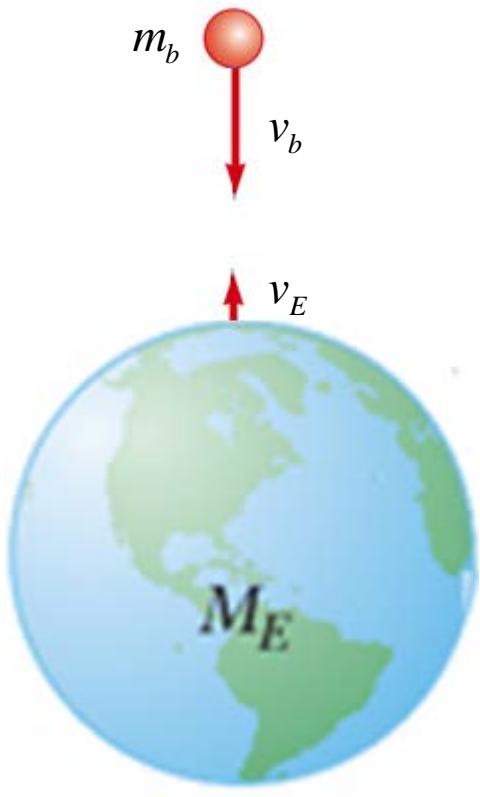
고립된 계에 있는 두 입자 혹은 더 많은 입자가 상호 작용할 때, 이들 계의 전체 운동량은 항상 일정하게 유지된다.

예제 8.1

지구의 운동 에너지를 실제로 무시할 수 있는가?

6.6절에서 지구와 낙하하는 공으로 구성된 계의 에너지를 생각할 때 지구의 운동 에너지는 무시할 수 있다고 주장했다. 이 주장을 증명하라.

$$M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg} \sim 10^{25} \text{ kg}, m_b \sim 1 \text{ kg}.$$



지표면으로 정지 해있던 공이 떨어진다고 상상하자.

공이 어떤 거리 동안 떨어진 후의 지구와 공의 속력: v_E, v

공의 운동 에너지에 대한 지구의 운동 에너지 비

$$\frac{K_E}{K_b} = \frac{\frac{1}{2} M_E v_E^2}{\frac{1}{2} m_b v_b^2} = \frac{M_E}{m_b} \left(\frac{v_E}{v_b} \right)^2$$

운동량 보존 법칙에 의해

$$m_E v_E + m_b v_b = 0 \quad \frac{v_E}{v_b} = -\frac{m_b}{M_E}$$

$$\frac{K_E}{K_b} = \frac{M_E}{m_b} \left(\frac{m_b}{M_E} \right)^2 = \frac{m_b}{M_E} \sim \frac{1 \text{ kg}}{10^{25} \text{ kg}} = 10^{-25}$$

예제 8.2

활 쏘는 사람

$m_1=60\text{ kg}$ 의 궁수가 마찰이 없는 얼음 위에 서서 $m_1=0.50\text{ kg}$ 의 화살을 수평 방향으로 50m/s 로 쏘았다. 화살을 쏜 후에 반대 방향으로 궁수가 얼마의 속도로 얼음 위에서 미끄러지는가?

$$m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{1f} &= -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_{2f} = -\left(\frac{0.50\text{kg}}{60\text{kg}}\right)(50\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}) \\ &= -0.42\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}\end{aligned}$$



만일 화살을 수평선상에서 각 θ 인 방향으로 쏘았다면 궁수의 반동 속도는 어떻게 될까?

x 방향에서 운동량 보존을 고려하면

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \cos \theta = 0$$

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} \cos \theta$$

8.3 분석 모형: 비고립계 (운동량)

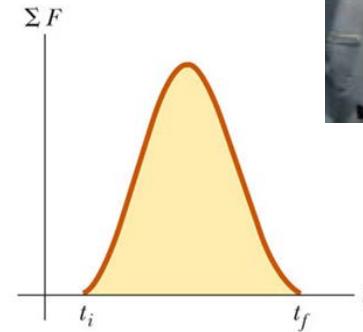
Analysis Model: Nonisolated System (Momentum)

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{p} = \Sigma \mathbf{F} dt$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \mathbf{F} dt$$

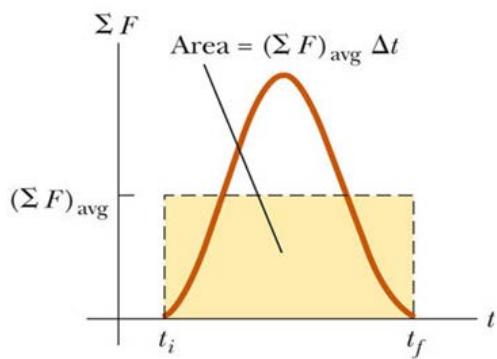
충격량(Impulse)

$$I \equiv \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \mathbf{F} dt$$



충격량-운동량 정리

$$\Delta \mathbf{p} = I$$



$$(\Sigma \mathbf{F} dt)_{avg} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \mathbf{F} dt \quad I = (\Sigma \mathbf{F} dt)_{avg} \Delta t$$

작용하는 힘이 일정한 경우

$$I = \Sigma \mathbf{F} \Delta t$$

8.4 일차원 충돌 Collisions in One Dimension

탄성 충돌(elastic collision)



계의 운동 에너지 보존

비탄성 충돌(inelastic collision)

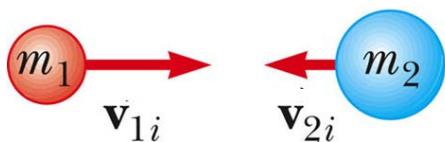


계의 운동 에너지 비보존

◆완전 비탄성 충돌(Perfectly Inelastic Collisions)

충돌한 후 서로 붙어서 함께 운동

Before collision

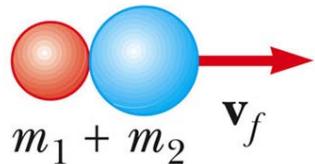


운동량 보존 법칙에 의해

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_f$$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

After collision



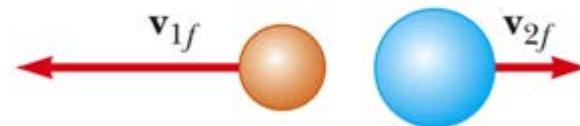
$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

◆ 탄성 충돌(Elastic Collisions)

Before collision



After collision



운동량 보존 법칙에 의해

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \Leftrightarrow m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

탄성 충돌 \Rightarrow 운동 에너지도 보존

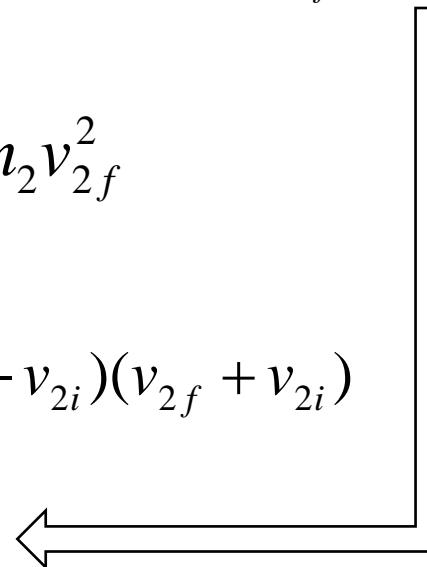
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\downarrow \\ m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

$$\downarrow \\ v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1f} - v_{2f} = -(v_{1i} - v_{2i})$$



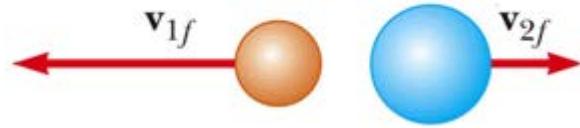
$$\begin{cases} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \\ v_{1f} - v_{2f} = -(v_{1i} - v_{2i}) \end{cases} \quad \therefore v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

Before collision



After collision



$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

특별한 경우로서, m_2 가 정지해 있던 경우 ($v_{2i}=0$)

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

A) $m_1 = m_2$ 인 경우, $v_{1f} = 0$ $v_{2f} = v_{1i}$

B) $m_1 \gg m_2$ 인 경우, $v_{1f} \cong v_{1i}$ $v_{2f} \cong 2v_{1i}$

C) $m_1 \ll m_2$ 인 경우, $v_{1f} \cong -v_{1i}$ $v_{2f} \cong 0$

예제 8.5 완전 비탄성 충돌에서 운동 에너지

충돌에서 처음 운동 에너지가 다른 에너지 형태로 변환되는 부분이 최대가 되는 경우는 완전 비탄성 충돌이라고 한다. 이런 주장을 두 입자 일차원 충돌 문제에서 수학적으로 증명하라.



운동량 보존 법칙에 의해

$$m_1 u + m_2 v = m_1 u' + m_2 v' \quad (1)$$

충돌 전에 대한 충돌후의 운동 에너지 비

$$\begin{aligned} f &= \frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}m_1 u'^2 + \frac{1}{2}m_2 v'^2}{\frac{1}{2}m_1 u^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2} \\ &= \frac{m_1 u'^2 + m_2 v'^2}{m_1 u^2 + m_2 v^2} \end{aligned}$$

최대 에너지 변환에 대해 $df / du' = 0$.

$$\frac{df}{du'} = \frac{2m_1 u' + 2m_2 v' (dv' / du)}{m_1 u^2 + m_2 v^2} = 0$$

$$m_1 u' + m_2 v' \frac{dv'}{du'} = 0 \quad (2)$$

식 (1)의 양변을 u' 에 대해 미분하면

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 + m_2 \frac{dv'}{du'} \\ \frac{dv'}{du'} &= -\frac{m_1}{m_2} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하면

$$m_1 u' + m_2 v' \left(-\frac{m_1}{m_2} \right) = 0$$

$$\therefore u' = v'$$

예제 8.6 자동차 충돌 사고

신호등 앞에 정지해 있던 질량 **1,800 kg**인 대형 차를 뒤에서 질량 **900 kg**인 차가 들이받았다. 두 자동차는 엉겨붙어서 처음 움직이던 자동차와 같은 방향으로 움직였다. 만일 소형차가 충돌 전에 **20.0 m/s**로 움직였다면, 충돌 후에 엉겨붙은 자동차들의 속도를 구하라

$$m_1 = 900\text{kg}, m_2 = 1,800\text{kg}, v_{1i} = 20.0\text{m/s}, v_{2i} = 0, v_f = v_{1f} = v_{2f}$$

운동량 보존 법칙에 의해 $m_1 v_{1i} + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) v_f$

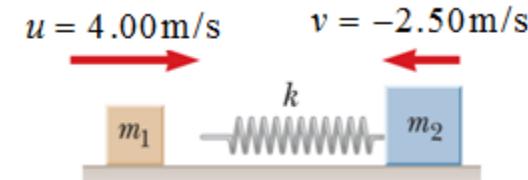
$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{900\text{kg}}{1800\text{kg} + 900\text{kg}} (20.0\text{m/s}) = 6.67\text{m/s}$$

예제 8.8 용수철이 개입된 두 물체의 충돌

마찰이 없는 수평면에서 오른쪽으로 4.00 m/s 의 속력으로 움직이는 질량 $m_1=1.60 \text{ kg}$ 인 물체 1이 왼쪽으로 2.50 m/s 의 속력으로 움직이는 용수철이 달린 질량 $m_2=2.10 \text{ kg}$ 인 물체 2와 충돌한다. 용수철 상수는 $k=600 \text{ N/m}$ 이다.

(A) 충돌 후 두 물체의 속도를 구하라

용수철 힘이 보존력이기 때문에 이 충돌은 탄성 충돌



운동량 보존

$$\begin{aligned} m_1 u + m_2 v &= m_1 u' + m_2 v' \\ m_1(u - u') &= m_2(v' - v) \end{aligned} \quad (1)$$

운동 에너지 양 보존

$$\frac{1}{2}m_1u^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}m_1u'^2 + \frac{1}{2}m_2v'^2$$

$$m_1(u^2 - u'^2) = m_2(v'^2 - v^2) \quad (2)$$

식 (2)를 (1)로 나누면

$$u + u' = v' + v \quad (3)$$

식 (1)과 (3)을 정리하면

$$\begin{cases} m_1u' + m_2v' = m_1u + m_2v \\ u' - v' = -u + v \end{cases}$$

연립해서 풀면

$$\begin{cases} u' = \frac{(m_1 - m_2)u + 2m_2v}{m_2 + m_1} \\ v' = \frac{(m_2 - m_1)v + 2m_1u}{m_2 + m_1} \end{cases}$$

$$u' = \frac{(1.6 - 2.1)(4) + 2(2.1)(-2.5)}{1.6 + 2.1} \text{ m/s}$$

$$= -3.38 \text{ m/s}$$

$$v' = \frac{(2.1 - 1.6)(-2.5) + 2(1.6)(4)}{1.6 + 2.1} \text{ m/s}$$

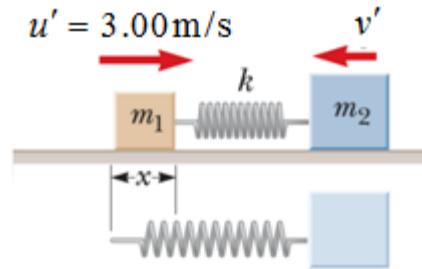
$$= 3.12 \text{ m/s}$$

. (B) 충돌 도중 물체 1이 오른쪽으로 속도 3.00 m/s로 움직이는 순간 물체 2의 속도를 구하라.

운동량 보존으로 부터

$$m_1 u + m_2 v = m_1 u' + m_2 v' \quad v' = \frac{m_1 u + m_2 v - m_1 u'}{m_2}$$

$$v' = \frac{(1.60\text{kg})(4.00\text{m/s}) + (2.10\text{kg})(-2.5) - (1.60\text{kg})(3.00\text{m/s})}{2.10\text{kg}} \\ = -1.74 \text{ m/s}$$



(C) 그 순간 용수철이 압축된 거리를 구하라.

계에 대해 역학적 에너지 보존으로부터

$$\frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} k 0^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2}(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2.10 \text{ kg})(2.50 \text{ m/s})^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}(1.60 \text{ kg})(3.00 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2.10 \text{ kg})(1.74 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(600 \text{ N/m})x^2$$

$$x = 1.7 \text{ m}$$

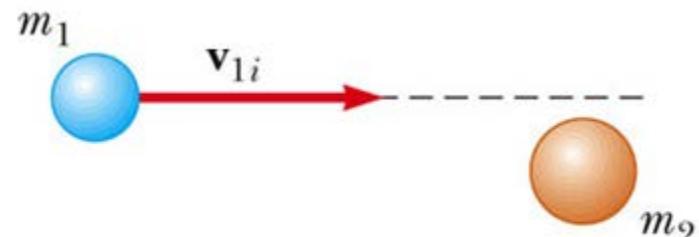
8.5 이차원 충돌 Collisions in Two Dimensions

2차원에서 충돌과 운동량 보존

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f}$$

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$



Before the collision

m_2 가 초기에 정지해있는 경우

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi$$

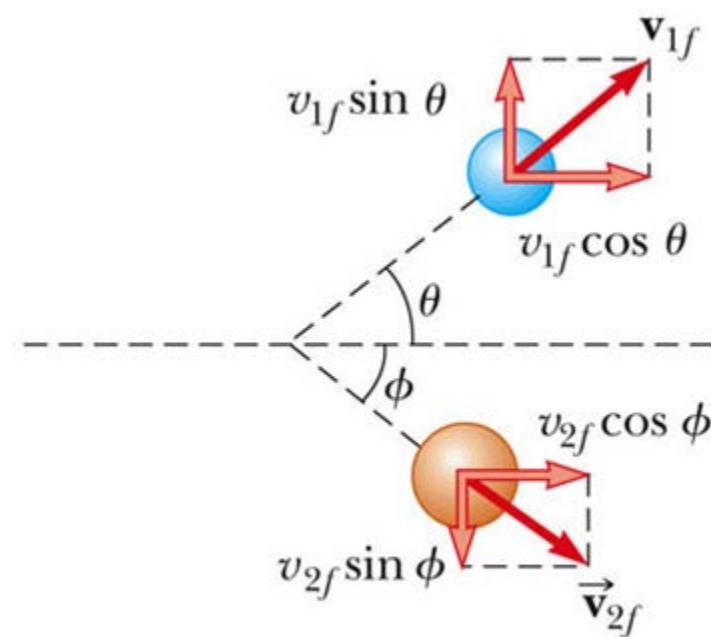
$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi$$

충돌이 탄성충돌인 경우

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$m_1 = m_2$ 일 때

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \quad \therefore \theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

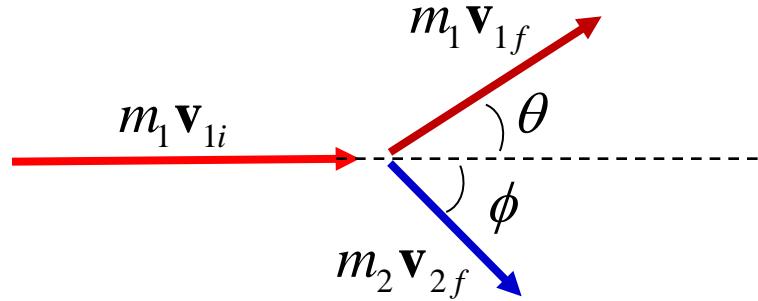


After the collision

표적 구가 정지해있고 $m_1 = m_2$ 일 때 충돌이 탄성충돌인 경우

$$m_1 \mathbf{v}_{1i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f}$$

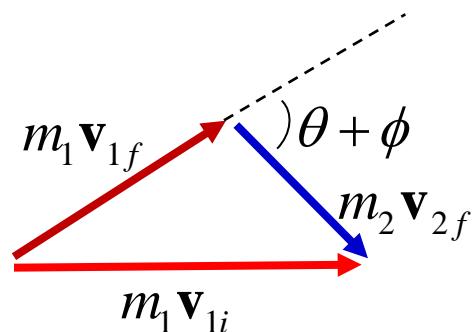
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$



$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

$$\therefore \theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$



예제 8.10

교차로에서의 충돌

1500 kg의 승용차가 **25.0 m/s**의 속력으로 동쪽으로 달리다가 북쪽으로 **20.0m/s**의 속력으로 달리는 **2500kg**의 밴과 교차로에서 충돌하였다. 충돌 후 잔해물의 방향과 속도에 대한 크기를 구하라. 두 대의 자동차는 충돌 후에 서로 붙어 있다고 가정한다.

완전비탄성충돌이므로

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \cos \theta$$

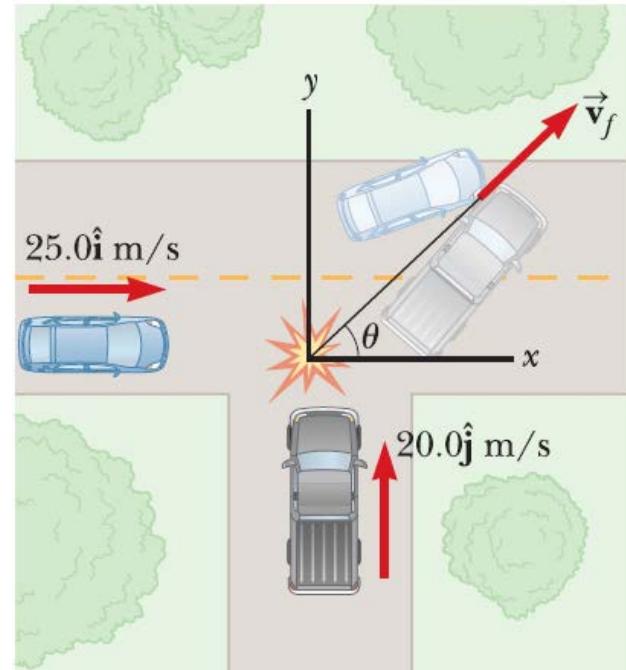
$$m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \sin \theta$$

$$\sum p_{xi} = (1500\text{kg})(25.0\text{m/s})$$

$$= 3.75 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\sum p_{xf} = (4000\text{kg})v_f \cos \theta$$

$$(1) \quad 3.75 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s} = (4000\text{kg})v_f \cos \theta$$



$$\sum p_{yi} = (2500\text{kg})(20.0\text{m/s}) = 5.00 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\sum p_{yf} = (4000\text{kg})v_f \sin \theta$$

$$(2) \quad 5.00 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s} = (4000\text{kg})v_f \sin \theta$$

(2)식을 (1)식으로 나누면

$$\frac{(4000\text{kg})v_f \sin \theta}{(4000\text{kg})v_f \cos \theta} = \tan \theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\theta = 53.1^\circ$$

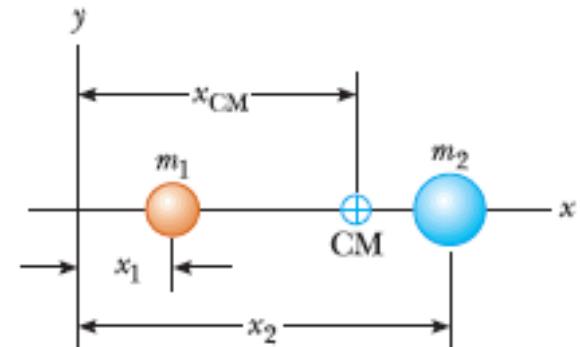
$$v_f = \frac{5.00 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}}{(4000\text{kg})\sin 53.1^\circ} = 15.6 \text{m/s}$$

8.6 질량 중심 The Center of Mass

질량 중심은 둘 이상의 입자로 이루어진 계를 하나의 입자로 다룰 수 있도록 해준다.

두 입자로 이루어진 1차원 계의 경우

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



여러 개의 입자로 이루어진 3차원 계의 경우

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

$$M = \sum_i m_i x_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

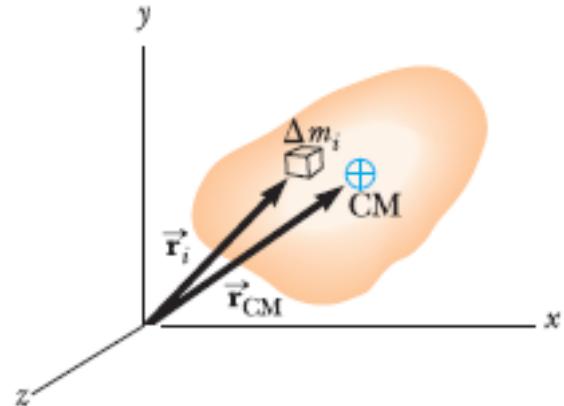
$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$$

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM} \hat{\mathbf{i}} + y_{CM} \hat{\mathbf{j}} + z_{CM} \hat{\mathbf{k}}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (\mathbf{r}_i \equiv x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}})}$$



질량의 분포가 연속적인 경우

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i$$

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int x dm$$

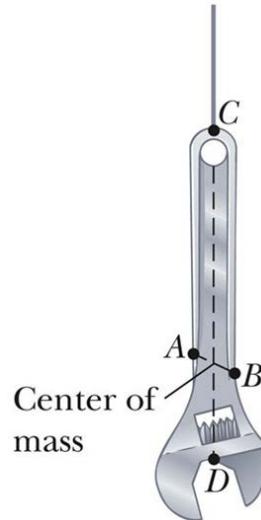
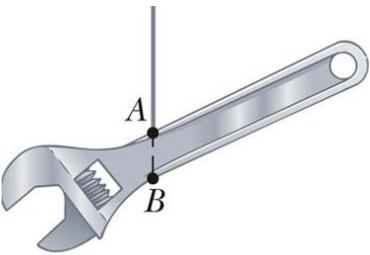
$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \int z dm$$

$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm}$$

대칭성을 갖고 있는 물체의 질량 중심은 대칭축
과 대칭면 위에 놓인다.



물체에 작용하는 중력의 알짜 효과는 무게 중심(center of gravity)이라 하는 한 점에 작용하는 단일 힘 Mg 의 효과와 같다.

g 가 위치에 무관하게 일정하다면, 중력 중심은 질량 중심과 일치한다.

예제 8.11

세 입자의 질량 중심

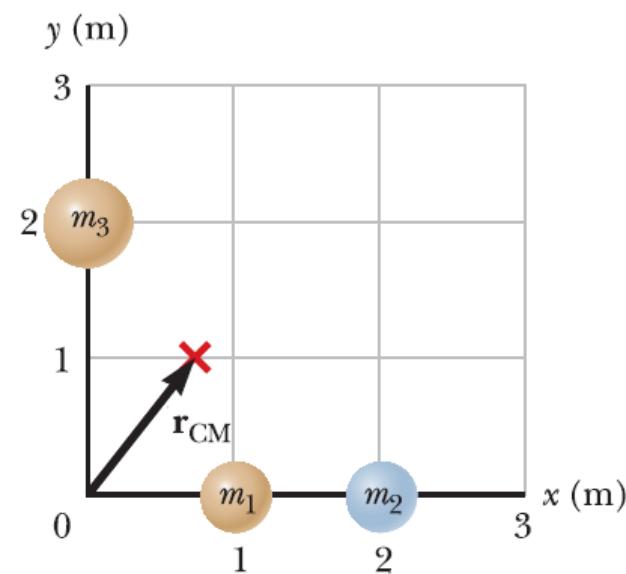
계는 그림과 같이 위치하는 세 입자로 이루어져 있다.

계의 질량 중심을 구하라. $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$, $m_3 = 3\text{kg}$

$$\begin{aligned}x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\&= \frac{(1.0\text{kg})(1.0\text{m}) + (1.0\text{kg})(2.0\text{m}) + (2.0\text{kg})(0)}{1.0\text{kg} + 1.0\text{kg} + 2.0\text{kg}} \\&= \frac{3.0\text{kg} \cdot \text{m}}{4.0\text{kg}} = 0.75\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\&= \frac{(1.0\text{kg})(0) + (1.0\text{kg})(0) + (2.0\text{kg})(2.0\text{m})}{4.0\text{kg}} \\&= \frac{4.0\text{kg} \cdot \text{m}}{4.0\text{kg}} = 1.0\text{m}\end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} = (0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\text{m}$$



예제 8.12

막대의 질량 중심

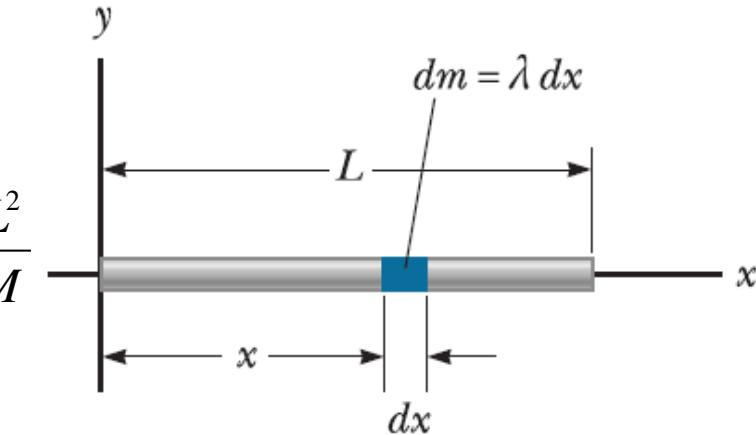
(A) 질량이 M 이고, 길이가 L 인 막대의 질량 중심은 양 끝 사이의 중간에 있음을 보여라. 단, 막대의 단위 길이당 질량이 균일하다고 가정한다.

연속적인 질량 분포의 경우이므로

$$dm = \lambda dx \quad \lambda = M / L$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M} \left(\frac{M}{L} \right) = \frac{L}{2}$$



(B) 단위 길이당 질량이 $\lambda = ax$ (a 는 상수)로 변할 때, 질량 중심의 좌표를 구하라.

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L ax dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx = \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2 / 2} = \frac{2}{3} L$$

8.7 입자계 운동 Motion of a System of Particles

질량 M 의 입자계의 질량 중심 $\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$

질량 중심의 속도

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

입자계의 전체 선운동량

$$\mathbf{P}_{tot} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{CM}$$

입자계의 가속도

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

↓

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$$

$$M \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

계의 한 입자에 작용하는 힘

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

계의 내부로부터 작용하는 힘

계의 외부로부터 작용하는 힘

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

\downarrow 뉴턴의 제3법칙에 의해 내력은 쌍으로 서로 상쇄됨

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM}$$

알짜 외력을 받아 운동하는 전체 질량 M 인 계의 질량 중심의 궤적은 같은 힘을 받는 질량 M 인 입자 한 개의 궤적과 동일하다.

계에 작용하는 알짜 외력이 0이면

$$M\mathbf{a}_{CM} = M \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = 0 \Rightarrow M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_{tot} = \text{상수}$$

입자계에 작용하는 알짜 외력이 없다면 입자계의 전체 선운동량은 보존된다.

예제 8.13

로켓의 폭발

로켓이 수직으로 발사되어 고도 1000m, 속력 300 m/s에 도달했을 때 같은 질량을 갖는 세 조각으로 폭발하였다. 폭발 후에 한 조각이 450 m/s의 속력으로 위쪽으로 움직이고, 다른 한 조각은 폭발후 동쪽으로 240 m/s의 속력으로 움직인다면, 폭발 직후 세 번째 조각의 속도를 구하라. (폭발 직후 또는 중력 무시)

폭발 전의 운동량

$$\mathbf{P}_i = M\mathbf{v}_i = M(300\hat{\mathbf{j}}\text{m/s})$$

폭발 후의 운동량

$$\mathbf{P}_f = \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\text{m/s}) + \frac{M}{3}\mathbf{v}_f$$

운동량 보존 법칙에 의해

$$M(300\hat{\mathbf{j}}\text{m/s}) = \frac{M}{3}\mathbf{v}_f + \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\text{m/s})$$

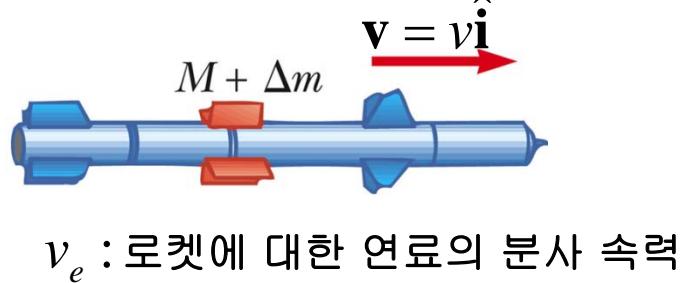
$$\therefore \mathbf{v}_f = (-240\hat{\mathbf{i}} + 450\hat{\mathbf{j}})\text{m/s}$$

8.8 연결 주제: 로켓 추진

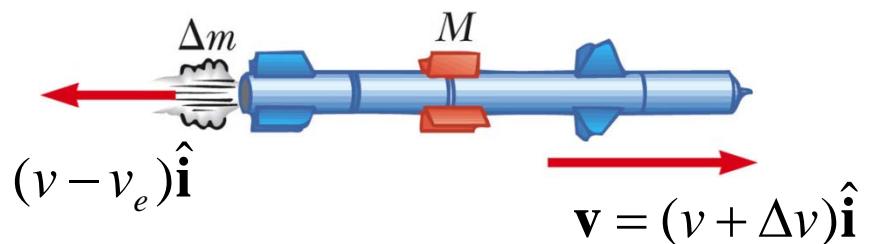
Context Connection: Rocket Propulsion

우주 공간 또는 관성계에서의 추진을 고려하자.

@ $t = 0$



@ $t = \Delta t$



운동량 보존 법칙에 의해

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$M\Delta v = v_e \Delta m \quad \Delta m = -\Delta M \quad (\Delta M < 0)$$

$$M\Delta v = -v_e \Delta M$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \quad \therefore v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

로켓의 추진력

$$\therefore M \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dM}{dt}$$

예제 8.14 우주 공간에서의 로켓

우주공간에서 로켓이 지구에 대해 $3.0 \times 10^3 \text{ m/s}$ 의 속력으로 날고 있다. 엔진을 켜서 로켓의 운동과 반대 방향으로 로켓에 대해 $5.0 \times 10^3 \text{ m/s}$ 의 상대 속력으로 연료를 분사한다.

(A) 로켓의 질량이 점화하기 전 질량의 반이 되었을 때, 지구에 대한 로켓의 속력은 얼마인가?

$$\begin{aligned}v_f &= v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \\&= 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} + (5.0 \times 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{M_i}{0.5M_i}\right) \\&= 6.5 \times 10^3 \text{ m/s}\end{aligned}$$

(B) 로켓이 50 kg/s 의 비율로 연료를 연소하면 로켓에 가해지는 추진력은 얼마인가?

$$\begin{aligned}\text{추진력} &= \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = (5.0 \times 10^3 \text{ m/s})(50 \text{ kg/s}) \\&= 2.5 \times 10^5 \text{ N}\end{aligned}$$