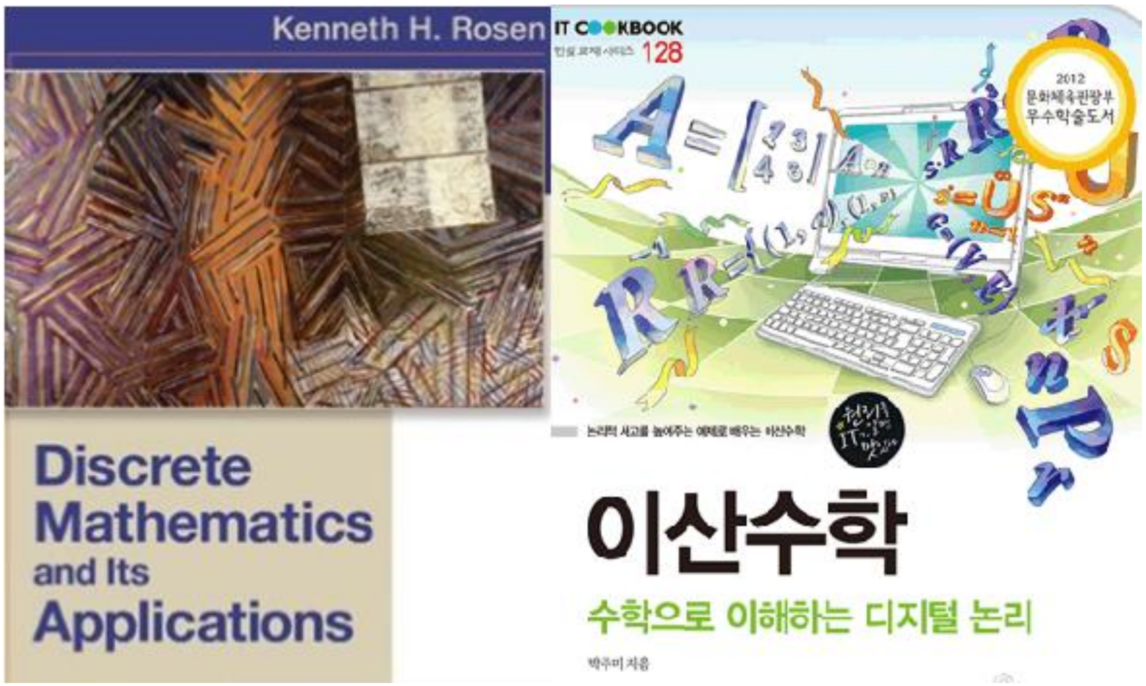
이산수학
Discrete Mathematics



Chapter 05:
행렬

Soongsil University : Kim Chang Wook

행렬

행렬(Matrix) : $n \times m$

- m과 n이 양의 정수일 때, n행(row), m열(column)으로 나열된 실수의 2차원 배열

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

- i번째 행 : $[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{im}]$
- j번째 열 : $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$

예제 5-1

다음 행렬 A에 대해 다음을 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 12 & 14 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 두 번째 행 (2) 첫 번째 열

(3) a_{24} (4) a_{33}

풀이

(1) $[10 \quad 8 \quad 6 \quad 4]$ (2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$ (3) $a_{24} = 4$ (4) $a_{33} = 13$

행렬의 연산

행렬의 덧셈과 뺄셈

- 두 행렬 A, B에서 같은 자리에 있는 원소끼리 더하거나 뺀다.
- 단, 두 행렬의 크기가 같아야 덧셈이나 뺄셈 연산을 할 수 있다.
- 즉, A 행렬이 $\boldsymbol{n \times m}$ 이면, B 행렬도 $\boldsymbol{n \times m}$ 이어야 한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

- 덧셈 표현 : A+B $= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$
- 뺄셈 표현 : A–B $= \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1m}-b_{1m} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2m}-b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \cdots & a_{nm}-b_{nm} \end{bmatrix}$

행렬의 연산

행렬의 곱셈

- $m \times n$ 행렬 A와 $r \times s$ 행렬 B가 있고, $n = r$ 일 때, $m \times s$ 행렬

  행렬 A의 열의 크기와 행렬 B의 행의 크기가 같아야 한다.
- A×B 또는 A B

연산

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{1s} + a_{12}b_{2s} + \cdots + a_{1m}b_{ms} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2m}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{1s} + a_{22}b_{2s} + \cdots + a_{2m}b_{ms} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nm}b_{m2} & \cdots & \boxed{a_{n1}b_{1s} + a_{n2}b_{2s} + \cdots + a_{nm}b_{ms}} \end{bmatrix}$$

행렬의 연산

예제 5-4

다음 행렬 문제를 연산하라.

(1) $A + B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 6 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & -2 \\ 9 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

풀이

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 6 & 1 \\ 8 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & -2 \\ 9 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 & 4 \\ -5 & 11 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 0 & 1 \\ 10 & 15 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) AB

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 9 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

풀이

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 9 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \times 1 + 6 \times 9 + 1 \times 4 & 0 \times 0 + 6 \times 3 + 1 \times 7 & 0 \times 2 + 6 \times 8 + 1 \times 5 \\ 3 \times 1 + 5 \times 9 + 2 \times 4 & 3 \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times 7 & 3 \times 2 + 5 \times 2 + 2 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 & 25 & 53 \\ 56 & 29 & 56 \end{bmatrix}$$

행렬의 종류

- **영행렬(Zero Matrix) : O**

  $n \times m$ 행렬 A=$[a_{ij}]$가 있을 때,
  모든 i, j 에 대하여 a_{ij}=0 인 행렬

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- **대각행렬 (Diagonal Matrix)**

  정사각행렬에서 대각원소 $a_{11} a_{22}, \dots, a_{nn}$
  이외의 모든 원소가 0인 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **n차 정방행렬 (n-Squar Matrix)**

  $n \times m$ 행렬 A=$[a_{ij}]$가 있을 때,
  $m = n$ 인 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **단위행렬 (Unit Matrix, Identity Matrix) : I**

  대각행렬에서 대각원소가 모두 1인 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- **전치행렬 (Transpose Matrix) : A^T**

  $m \times n$행렬 A=$[a_{ij}]$, 행과 열을 바꾼 $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- **대칭행렬 (Symmetric Matrix)**

  $m \times n$ 행렬 A=$[a_{ij}]$가 있을 때,
  $A^T = A$ 인 행렬

행렬의 종류

부울행렬 (Boolean Matrix, Zero-One Matrix)

- 행렬의 모든 원소 값이 0 또는 1로 구성된 행렬

[정리 5-2] 부울행렬 연산자

행렬 A=$[a_{ij}]$ 와 B=$[b_{ij}]$ 에 대해

(1) 합(join) : A∨B =$[a_{ij} \vee b_{ij}]$

(2) 교차(meet) : A∧B =$[a_{ij} \wedge b_{ij}]$

(3) 부울곱(boolean product) : A ⊙B

$m\times n$행렬 A=$[a_{ij}]$ 와 $r\times s$ 부울행렬 B=$[b_{ij}]$가 있을 때, $m\times s$ 부울 행렬 A ⊙B =$[c_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1j} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{mj} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij}=(a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \vee b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_{nj})$$

[정리 5-3] 부울행렬 연산의 특징

(1) $A \vee A = A, \quad A \wedge A = A$

(2) $A \vee B = B \vee A, \; A \wedge B = B \wedge A$

(3) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C), \; (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), \; A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

(4) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B)) \wedge (A \wedge C), \quad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

행렬의 종류

예제 5-5

행렬 $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -8 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ 와 단위행렬 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 를 연산하라.

(1) AI (2) IA

풀이

(1) $AI=\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -8 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -8 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 4\times 1+6\times 0+(-1)\times 0 & 4\times 0+6\times 1+(-1)\times 0 & 4\times 0+6\times 0+(-1)\times 1 \\ (-8)\times 1+3\times 0+2\times 0 & (-8)\times 0+3\times 1+2\times 0 & (-8)\times 0+3\times 0+2\times 1 \\ 2\times 1+8\times 0+4\times 0 & 2\times 0+8\times 1+4\times 0 & 2\times 0+8\times 0+4\times 1 \end{bmatrix}$$

(2) $IA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -8 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -8 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1\times 4+0\times(-8)+0\times 2 & 1\times 6+0\times 3+0\times 8 & 1\times(-1)+0\times 2+0\times 4 \\ 0\times 4+1\times(-8)+0\times 2 & 0\times 6+1\times 3+0\times 8 & 0\times(-1)+1\times 2+0\times 4 \\ 0\times 4+1\times(-8)+1\times 2 & 0\times 6+0\times 3+0\times 8 & 0\times(-1)+0\times 2+1\times 4 \end{bmatrix}$$

행렬의 종류

예제 5-6

다음 행렬 전치행렬을 구하고, 대칭행렬인지 구별하라.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\\ 4 & 8 & 12 & 16\end{bmatrix}$$

풀이

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\\ 4 & 8 & 12 & 16\end{bmatrix}$$

$A = A^{\mathrm{T}}$

대칭행렬이다.

다음을 연산하라.

(1) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

풀이

(1) $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\vee 1 & 1\vee 1 & 0\vee 1\\ 0\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 1\\ 0\vee 1 & 1\vee 0 & 1\vee 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\wedge 1 & 1\wedge 1 & 0\wedge 1\\ 0\wedge 0 & 1\wedge 0 & 1\wedge 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3) $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\vee 0\vee 0 & 1\vee 0\vee 0\\ 0\vee 1\vee 1 & 1\vee 1\vee 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

행렬식

- **행렬식 (Determinant) : |A| 또는 det(A)**
  - n차 정사각행렬에 대응하는 수를 구하는 식

$$|\mathbf{A}| = \det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 에 대한 행렬식

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ 에 대한 행렬식

$$\det(B)=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = (b_{11}b_{22}b_{33}+b_{12}b_{23}b_{31}+b_{13}b_{32}b_{21}) - (b_{13}b_{22}b_{33} + b_{23}b_{32}b_{11}+b_{33}b_{21}b_{12})$$

행렬식

소행렬 (Minor Matrix) : M_{rs}

- n차 정사각행렬에서 r번째 행과 s번째 열을 제거해서 얻은 $(n-1)\times(n-1)$ 행렬

소행렬식 : $\det(M_{rs})$

- n차 정사각행렬의 소행렬 M_{rs}에 대한 행렬식

예제 **5-9**

다음 행렬의 가능한 소행렬을 모두 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$$

풀이

$M_{11}=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix}$: 1행과 1열을 제외한 원소들로 구성

$M_{12}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix}$: 1행과 2열을 제외한 원소들로 구성

$M_{13}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix}$: 1행과 3열을 제외한 원소들로 구성

$M_{21}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{bmatrix}$: 2행과 1열을 제외한 원소들로 구성

$M_{22}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & 6\end{bmatrix}$: 2행과 2열을 제외한 원소들로 구성

$M_{23}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$: 2행과 3열을 제외한 원소들로 구성

$M_{31}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 4\end{bmatrix}$: 3행과 1열을 제외한 원소들로 구성

$M_{32}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$: 3행과 2열을 제외한 원소들로 구성

$M_{33}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}$: 3행과 3열을 제외한 원소들로 구성

행렬식

❖ 여인수(Cofactor) A_{ij} , 여인수행렬(Cofactor Matrix) $[A_{ij}]$

- n 차 정사각행렬 A=$[a_{ij}]$ 에서 원소 a_{ij}에 관련된 수와 그 수에 대한 소행렬

$$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{M}_{ij})$$

예제 5-10

[예제 5-9]에서 사용된 행렬의 각 원소에 대한 여인수를 구하여 여인수행렬을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix} \qquad \therefore [A_{ij}]=\begin{bmatrix}24 & -8 & 0\\ 3 & 27 & -14\\ -14 & -14 & 28\end{bmatrix}$$

풀이

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11})=\det(M_{11})=\begin{vmatrix}6 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}=6\times6-4\times3=24$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12})=-\det(M_{12})=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-(2\times6-4\times1)=-8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13})=\det(M_{13})=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 6\end{vmatrix}=2\times3-6\times1=0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\det(M_{21})=-\det(M_{21})=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-(1\times6-3\times3)=3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\det(M_{22})=\det(M_{22})=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 6\end{vmatrix}=5\times6-3\times1=27$$

$$A_{23}= (-1)^{2+3}\det(M_{23})=-\det(M_{23})=-\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(5\times3-1\times1)=-14$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\det(M_{31})=\det(M_{31})=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 6 & 4\end{vmatrix}=1\times4-6\times3=-14$$

$$A_{32}= (-1)^{3+2}\det(M_{32})=-\det(M_{32})=-\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-(5\times4-2\times3)=-14$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\det(M_{33})=\det(M_{33})=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix}=5\times6-1\times2=28$$

여인수를 이용한 행렬식

여인수를 이용한 행렬식

- $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$: j 열을 선택한 경우
  $= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$: i 행을 선택한 경우

예제 5-11

[예제 5-9]에서 사용된 행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$의 행렬식을 구하라.

$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 24 & -8 & 0 \\ 3 & 27 & -14 \\ -14 & -14 & 28 \end{bmatrix}$

여인수행렬 $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$

풀이. 1 행을 선택했을 경우

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 5 \cdot (-1)^{1+1}\det(M_{11}) + 1 \cdot (-1)^{1+2}\det(M_{12}) + 3 \cdot (-1)^{1+3}\det(M_{13})$$
$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 112$$

· 2 행을 선택했을 경우

$$\det(A) = 2 \cdot (-1)^{2+1}\det(M_{21}) + 6 \cdot (-1)^{2+2}\det(M_{22}) + 4 \cdot (-1)^{2+3}\det(M_{23})$$
$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 112$$

· 3 행을 선택했을 경우

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+1}\det(M_{31}) + 3 \cdot (-1)^{3+2}\det(M_{32}) + 6 \cdot (-1)^{3+3}\det(M_{33})$$

· 1 열을 선택했을 경우

$$\det(A) = 5 \cdot (-1)^{1+1}\det(M_{11}) + 2 \cdot (-1)^{2+1}\det(M_{21}) + 1 \cdot (-1)^{3+1}\det(M_{31})$$
$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 5(6 \cdot 6 - 4 \cdot 3) - 2(1 \cdot 6 - 3 \cdot 3) + (1 \cdot 4 - 3 \cdot 6) = 112$$

역행렬

❖역행렬(Inverse Matrix) : A^{-1}

- 정사각행렬 A에 대해 $AB=BA=I$ 를 만족하는 행렬 B $\quad AA^{-1} = A^{-1}A = I$

예제 **5-13**

행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$ 의 역행렬을 구하라.

풀이

행렬 A의 역행렬 $A^{-1}=\begin{bmatrix}w & x\\y & z\end{bmatrix}$라고 할때.

$$AA^{-1}=I \qquad \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w & x\\y & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w+2y & x+2z\\w+3y & x+3z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$w+2y=1,\ x+2z=0,\ w+3y=0,\ x+3z=1$$

$$(w+2y)-(w+3y)=1-0 \qquad \therefore\ y=-1, w=3$$

$$(x+2z)-(x+3z)=0-1 \qquad \therefore\ z=1, x=-2$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix} \qquad AA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$$

일반적인 방법이나 차수가 높아질수록 변수가 많아지는 단점.

❖행렬식을 이용한 역행렬 :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left[A_{ij}\right]^{T} \qquad (\text{단},\ \det(A)\neq 0)$$

수반행렬 $\left[A_{ij}\right]^{T}$:여인수(Cofactor)행렬 A_{ij}에 대한 전치(Tranpose)행렬

예제 5-14

행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$의 역행렬을 구하라.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[A_{ij}]^T$$

풀이

행렬 A의 행렬식을 구하기 위해 3행 선택

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^{3+1}\det(M_{31}) - (-1)^{3+3}\det(M_{33})$$
$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\big(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)\big) - (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2) = 20$$

여인수행렬 A_{ij}를 구하기 위해

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12}) = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\det(M_{21}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\det(M_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}\det(M_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\det(M_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}\det(M_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

여인수행렬$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$, 수반행렬 $[\boldsymbol{A_{ij}}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

역행렬

❖가역행렬 (Invertible Matrix 또는 Nonsingular Matrix)

- 역행렬이 존재하는 행렬

❖특이행렬 (Singular Matrix)

- 역행렬이 존재하지 않는 행렬

예제 5-15

다음 행렬이 역행렬을 구할 수 있는지 없는지 구분하라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

풀이

(1) $\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = A_{11} - A_{12} + 2A_{13}$

$= (-1)^{1+1}\det(M_{11}) - (-1)^{1+2}\det(M_{12}) + 2(-1)^{1+3}\det(M_{13})$

$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14$

$\therefore \det(A) \neq 0$ 이므로 역행렬을 구할 수 있다. 즉 가역행렬이다.

(2) $\det(B) = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) + 2(-1)^{1+2}\det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \det(A) = 0$ 이므로 역행렬을 구할 수 없다. 즉 특이행렬이다.

가우스 조르단 소거법을 이용한 역행렬

❖Let us suppose that some nonsingular matrix A is given.
combined matrix consisting of matrix $\mathbf{A}$ and the identity matrix $\mathbf{I}$ of he same size $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$
Using Gauss-Jordan transformations applied only to rows of combined matrix let us try to get an identity matrix in the left side of combined matrix. At the moment when identity matrix $\mathbf{I}$ in the left side will be obtained, the inverse matrix A^{-1} can be read in the right side of combined matrix $(\mathbf{I}\,|\mathbf{A}^{-1})$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \mathbf{A} & \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} & \mathbf{A}^{-1} \end{array}\right]$$

❖Example

1) Given matrix : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 2) Combined matrix : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Using Gauss-Jordan transformations we will try to get in the left side identity matrix.

3) Add to 2nd row a 1st row times (-2) : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

4) Add to 1st row 2nd row times (-2) : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Identity matrixv is obtained in the left side $\Rightarrow$ Inverse matrix : right side

5) Inverse matrix : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Check $AA^{-1} = I$ $\quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

예제 5-19

행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$의 역행렬을 구하라.

풀이

첨가 행렬 : $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

①1행× (−2) + 2행: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

②1행× (−3) + 3행: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

③2행× $\left(-\frac{1}{5}\right)$: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

④2행× (−2) + 1행: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

⑤2행× 6 + 3행: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \end{array}\right]$

⑥3행× $\left(-\frac{1}{4}\right)$: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{6}{20} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$

⑦3행× (−1) + 1행: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{6}{20} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$

⑧3행× (−1) + 2행: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{20} & -\frac{10}{20} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{20} & \frac{6}{20} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$

∴ 역행렬 $A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

연립1차방정식

해(solusion)

- 1차방정식의 미지수 $x_1=s_1,\ x_2=s_2, \ldots, x_n=s_n$를 만족하는 $s_1, s_2, \ldots, s_n$

연립1차방정식

- 1차 방정식 m개로 구성된 방정식 AX=B

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{m}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$A^{-1}AX=IX=A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdots \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

첨가행렬 (Augmented Matrix)

- 연립 1차 방정식의 계수행렬 A와 상수행렬 B를 다음과 같은 형태로 구성한 행렬

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

가우스조르단소거법

가우스 행렬의 계수행렬 부분을 단위행렬로 만들어 해를 얻는 방법

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 6z = 1 \\ 2x + 6y + 13z = 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right]$$

① 1행 ×(−1)+2행 $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right]$

② 1행 ×(−2)+3행 $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right]$

③ 2행 ×(−2)+3행 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

④ 2행 ×(−2)+1행 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

⑤3행 ×(3)+1행 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

⑥3행 ×(−3)+2행 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ $\begin{cases} x = 10 \\ y = -9 \\ z = 3 \end{cases}$

가우스 조르단 소거법

예제 5-17

[예제 5-16]에서 풀이한 연립 1차 방정식을 가우스 조르단 소거법으로 해를 구하라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

첨가 행렬 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$

풀이

① 1행 ×(−2)+2행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$

② 1행 ×(−3)+3행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$

③ 2행× $\frac{1}{2}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$

④ 2행 ×(−3)+3행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$

⑤ 3행 ×(−2) : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

⑥ 2행 ×(−1)+1행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

⑦ 3행× $(-\frac{11}{2})$ + 1행: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

⑧ 3행 × $\frac{7}{2}$+2행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$$\therefore x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$