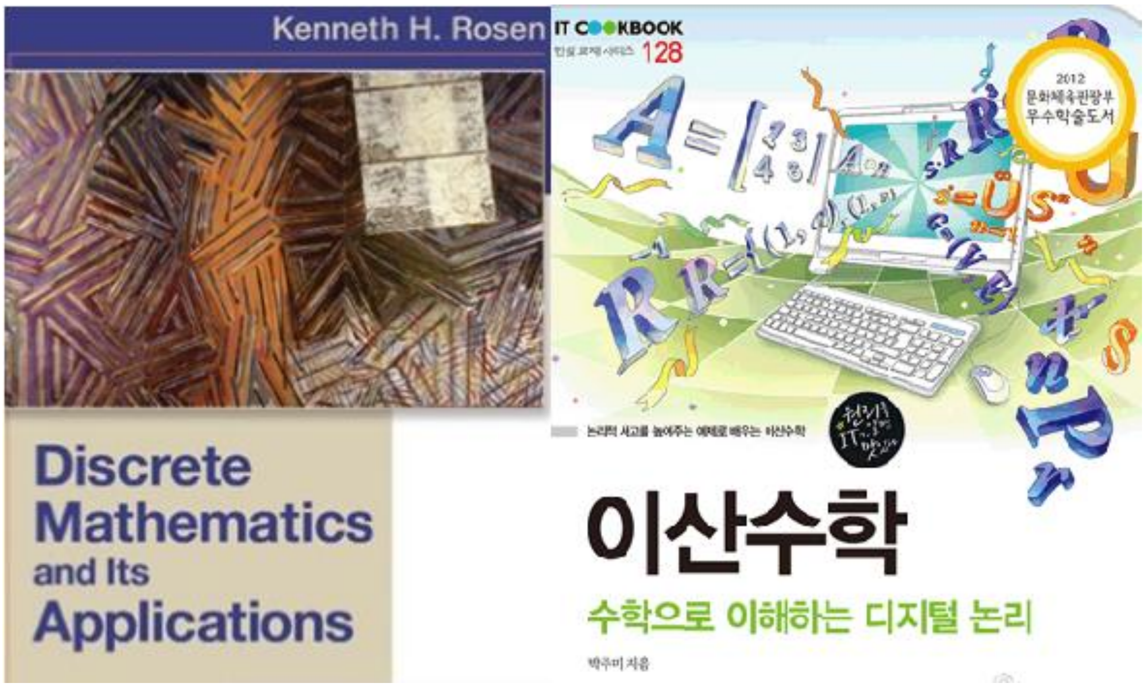
이산수학
Discrete Mathematics



Chapter 03:
집합

Soongsil University : Kim Chang Wook

Lecture Note : 이산 수학 수학으로 이해하는 디지털논리, 한빛 아카데미, 박주미
Discrete Mathematics and Its **Applications**, 7E By Kenneth H. Rosen

집합의 개념

❖집합(Set) : 명확한 기준에 의해 분류되어 공통의 성질을 가지며 중복되지 않고 순서를 고려하지 않은 개체(object)의 모임이다. 집합에 속한 개체는 원소(element) 또는 구성원(member) 이라 한다.

❖집합의 표기 형식 (집합은 보통 대문자, 집합의 원소는 소문자로 표기 V={a, b}

- 원소나열법 : 집합에 포함되는 원소를 일일이 나열하는 방법 예) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

  – 원소수가 유한할 때 일반적으로 사용. 원소들이 일정 규칙을 가지는 경우, … 이용하여 생략

- 조건제시법 : 집합에 포함되는 원소의 공통적인 성질을 조건식으로 제시하는 방법

  예) $A= \{x \mid 0 < x \leq 7,\ x\text{는 정수}\}$

  – 표기방식은 "|" 왼쪽에는 원소를 대표하는 변수,

  오른쪽에는 원소들의 공통된 특징에 대한 식이나 설명

예제 3-1

원소가 0,5,10,15,20,25,30,35,40인 집합 A를 원소나열법과 조건제시법으로 표기하라.

풀이
- 원소나열법은 집합의 원소들을 콤마(,)로 구분하여 나열하는 방법.

  A= { 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 }

- 조건제시법은 집합 원소의 공통적인 특징을 식으로 표현하는 방법.

  $A= \{x \mid x=5k,\ 0 \leq k \leq 8,\ k \in Z\}$

❖이산수학에서 사용하는 수의 종류에 따른 집합 문자

N={~~0,~~ 1, 2, 3, …} 자연수의 집합

Z={ … , -2, -1, 0, 1, 2, …} 정수의 집합

Z^+ = {1, 2, 3, …} 양의 정수의 집합

Q={ $p/q \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0$} 유리수의집합 예) 1/3, 2/3,

I, 무리수의 집합 예) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$

R, 실수의 집합

R^+, 양의 실수의 집합

C, 복소수의 집합

❖실수에 있어서 어떤 구간, 즉 범위를 나타내는 표기법. a와 b가 실수이면

- $[a, b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$ $[a, b) = \{ x \mid a \le x < b \}$ $(a, b] = \{ x \mid a < x \le b \}$ $(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$

  $[a, b]$ = 닫힌 구간(Closed interval) (a, b) = 열린 구간(Open interval)

❖집합과 원소의 포함관계

- a가 집합 A의 원소다 $a \in A$ a element of A
- a가 집합 A의 원소가 아니다 $a \notin A$

집합과 원소

예제 3-4

집합 A={0, 3, 6, 9, 12, 15}에 대해 2, 6, 9, 11의 집합 A에 대한 원소 포함관계를 표기하라.

풀이 : 6, 9는 각각 집합 A의 원소이므로 $6 \in A$, $9 \in A$로 표기한다.

2, 11은 각각 집합 A에 포함되지 않으므로 $2 \notin A$, $11 \notin A$로 표기한다.

❖기수 (or 크기) (Cardinality) | A | : 집합 A 가 포함하는 원소의 수

예제

집합 $A=\{ x | -4 \le x \le 4,\ x$는 정수$\}$의 기수를 구하라

풀이 : 집합 A 원소는 원소나열법으로 표시하면 A={-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}

A 집합에 포함된 원소개수는 9, |A|=9

❖유한집합(Finite Set) : 집합 A에 포함되는 원소의 개수가 유한한 집합

❖무한집합(Infinite Set) : 지합 A에 포함되는 원소의 개수가 무한한 집합

❖상등(Equal) $A=B$ $A \subseteq B$ 동시에 $B \subseteq A$

- 두 집합 A,B 에 속하는 원소가 동일한 경우
- “두 집합 A와 B는 서로 같다” 또는 “두 집합 A와 B가 상등이다”

예제 3-7

집합 $A=\{ x | x \le 4,\ x$는 양의 정수$\}$이고, B={1,2,3,4}일 때 집합 A와 B는 어떤 관계인가?

풀이

집합 A를 원소나열법으로 표현하면, A={1,2,3,4}이다.

집합 A에 포함되는 원소와 B에 포함된 원소가 모두 같다.

∴집합 A와 집합 B는 상등이다.

집합의 종류

❖전체집합(Universal Set) : U

- 논의 대상이 되는 원소 전체를 포함하는 집합 $A=\{x \mid x > 13, x \in N\}$

❖공집합(Empty Set or null set) : ∅ 또는 { }

- 하나의 원소도 포함하지 않는 집합 | ∅ | =0

❖부분집합(Subset) : A⊆B (A는 B의 부분집합)

- 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 포함되는 경우, |A| ≤ |B|

❖진부분집합(Proper Subset) : A⊂B

- 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 포함되지만,
  집합 A와 B가 상등이 아닌 경우 | A | < | B |

❖ 부분집합은 상등의 개념을 포함 : |A| ≤ |B|
진부분집합은 상등의 개념을 배제 : |A| < |B|

❖ ∈ : 원소와 집합간의 포함 관계
⊂ : 집합과 집합간의 포함관계

집합 간의 포함관계

(1) 모든 집합 A에 대해 $A \subseteq A$

: 집합 A에 속하는 모든 원소 a 에 대해 $a \in A$ 이므로 $A \subseteq A$가 성립한다.

(2) 모든 집합 A에 대해 $\varnothing \subseteq A$

: $\varnothing \subseteq A$ 임을 증명하기 위해 $a \in \varnothing \rightarrow a \in A$ 임을 증명한다.

공집합에는 원소가 존재할 수 없기 때문에 $a \in \varnothing$ 는 거짓이다.

조건이 거짓인 함축명제는 항상 참이므로 $a \in \varnothing \rightarrow a \in A$ 는 참이다.

$\therefore \varnothing \subseteq A$는 참이다. $\therefore$ 공집합(∅)은 모든 집합의 부분집합이다.

(3) 모든 집합 A에 대해 $A \subseteq U$

: $A \subseteq U$ 임을 증명하기 위해 $a \in A \rightarrow a \in U$을 증명한다.

집합 U는 전체집합이므로 논의영역의 모든 원소를 포함하고 있다.

그러므로 $a \in A$ 이면, $a \in U$가 성립한다. $\therefore A \subseteq U$ 는 참이다.

(4) 집합 A,B,C 에 대해 $A \subseteq B$이고 $B \subseteq C$ 이면 $A \subseteq C$

: $x \in A$ 이면, $A \subseteq B$ 에 의해 $x \in B$ $x \in B$ 이면, $B \subseteq C$ 에 의해 $x \in C$

결국 $x \in A$ 이면 $x \in C$ $\therefore A \subseteq C$ 는 참이다.

(5) 집합 A, B 에 대해 $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

: 어떤 원소 x에 대해 $A \subseteq B$ 인 것은 $x \in A$이면 $x \in B$인 것이다.

또한 $B \subseteq A$인 것은 $x \in B$이면 $x \in A$인 것이다.

어떤 원소 x가 집합 A의 원소이면서 집합 B의 원소이므로

$\therefore A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ 는 참이다.

집합의 종류

예제 3-9

집합 $D=\{\, x \mid -5\le x \le 5,\, x$ 는 정수$\}$일 때 다음 집합이 집합 D 에 포함되는지 판별하라.

(1) $A=\{\, x \mid -5< x <5,\, x$ 는 정수$\}$

(2) $B=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(3) $C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(4) $\emptyset=\{\}$

풀이

(1) $A=\{\, x \mid -5< x < 5,\, x$ 는 정수$\}=\{-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$이므로 집합 D에 포함은 되지만 상등은 아니다.

∴ 집합 A는 D의 진부분집합 : $A\subset D$

(2) 집합 D를 원소나열법으로 표시하면 $D=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

집합 B의 원소들을 모두 포함하면서 집합B와 상등이다.

∴ 집합 B는 집합 D의 부분집합 : $B\subseteq U$

(3) 집합 C에는 집합 D 에 포함되는 원소($\{3, 4, 5\}$)도 있으나 포함되지 않는 원소 ($\{6, 7, 8, 9\}$)도 있다. $D \nsubseteq C$ 또는 $D \not\supset C$ 또는 $D \not\subset C$ 또는 $D \nsupseteq C$

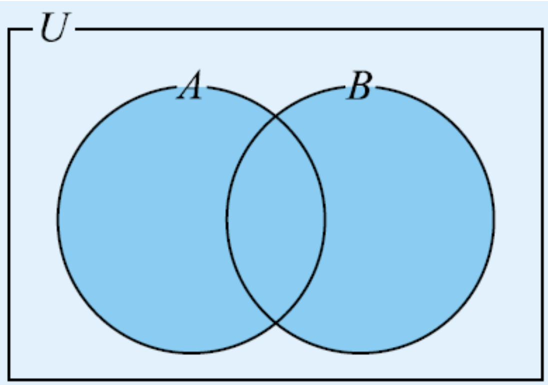
∴ 집합 C와 집합 D는 아무 관계도 아니다.

(4) [정리 3-1]의 정리 (2) ∴ $\emptyset\subset D$

집합의 연산

❖합집합(Union) A∪B

- 집합 A, B가 있을 때, 집합 A와 B에 모두 속하거나 두 집합 중 한 집합에 속하는 원소들로 구성되는 집합
- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$



[그림 3-2] 합집합 벤 다이어그램

❖벤다이어그램

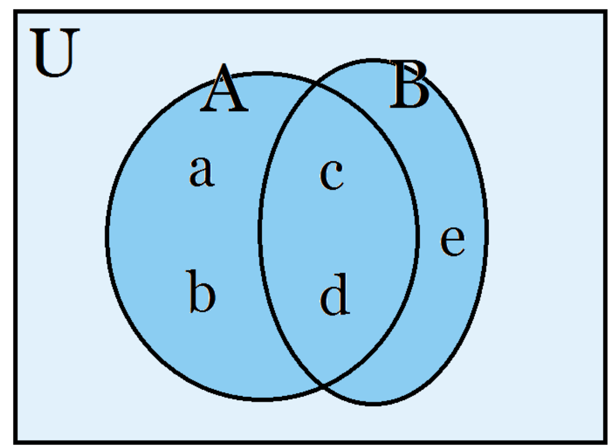
- 집합 사이의 관계를 도식적으로 표시.
- 모든 고려 대상이 되는 개체들을 포함하는 전체집합 U가 사각형으로 표시.

예제 3-12

$A=\{a, b, c, d\}$ $B=\{c, d, e\}$ 일 경우 A∪B ?

풀이 : A∪B는 A에만 속하거나, B에만 속하거나, 혹은 A,B모두에 속하는 원소들로 구성.
단, 중복되는 원소(c,d)는 한 번만 쓴다.

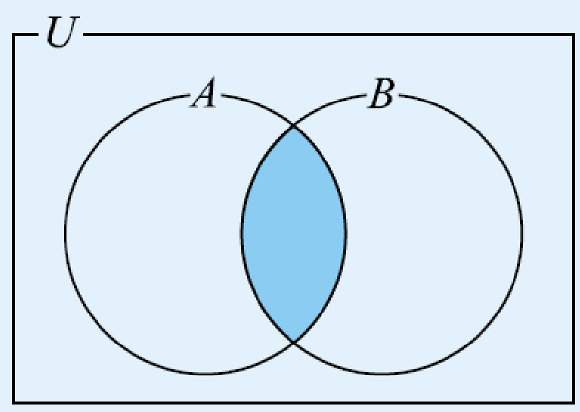
$\therefore A \cup B=\{a, b, c, d, e\}$



집합의 연산

❖교집합(Intersection) : $A \cap B$

- 집합 A,B 가 있을 때, 집합 A와 B 모두 속하는 원소로 구성되는 집합
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge x \in B\}$
- $A = B \Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B)$



[그림 3-3] 교집합 벤 다이어그램

예제 3-13

다음과 같은 집합들에 대해 답하시오

A=$\{a, b, c, d\}$ B=$\{d, e, f, g, h\}$ c=$\{c, d, e\}$

(1) $A \cap C$ (2) $A \cap B \cap C$

풀이

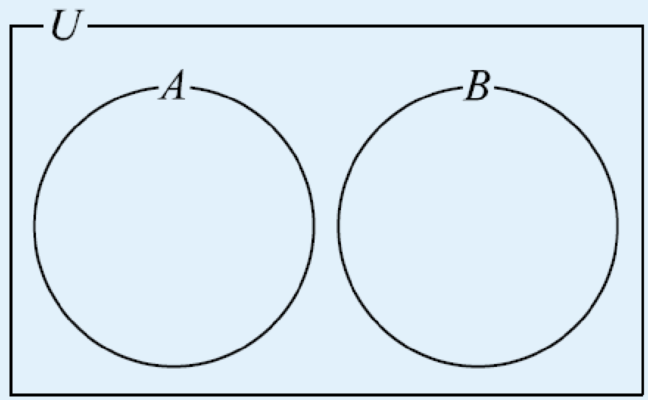
(1) $A \cap C$는 모두에 속하는 원소들로만 구성된다. $\therefore A \cap C = \{c, d\}$

(2) $A \cap B \cap C$ 는 A,B,C 모두에 속하는 원소들로 구성된다. $\therefore A \cap B \cap C = \{d\}$

집합의 연산

❖서로소(Disjoint)

- 집합 A,B 가 있을 때, 집합 A와 B 모두에 공통으로 속하는 원소가 하나도 없는 경우
- $A \cap B = \varnothing$



[그림 3-4] 서로소 벤 다이어그램

예제 3-14

집합 A,B가 A={1, 2, 3, 4, 5},   B={6, 7, 8} 일 때, 두 집합 사이에는 어떤 관계가 있는가?

풀이

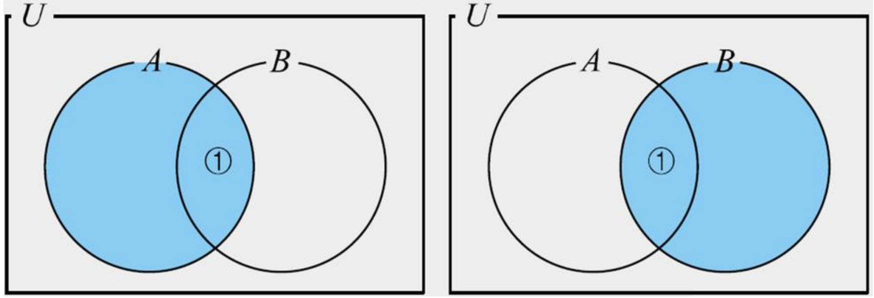
두 집합 간에 공통으로 존재하는 원소가 없으므로 $A \cap B = \varnothing$이다.

∴ 집합 A,B는 서로소 관계다.

합집합과 교집합의 기수

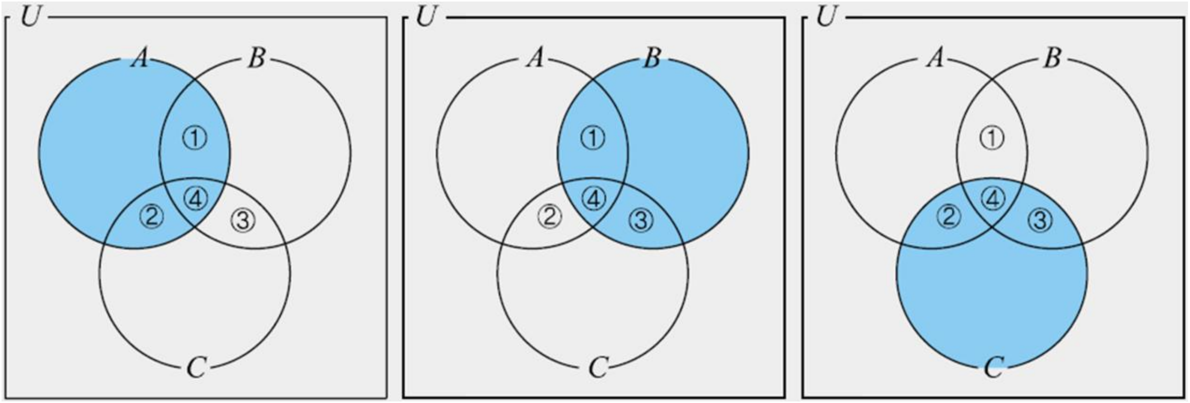
(1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$　　　　$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

∴ 벤 다이어그램에서 $|A| + |B|$를 하게 되면, ①이 두 번 더해진다.
그러므로 $|A| + |B|$결과에서 $|A \cap B|$를 한번 빼서 $|A \cup B|$를 구하는 것이다.



(2) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

∴ $|A|+|B|+|C|$를 구하면　$|A \cap B|$ 에 해당되는 영역 ①,　$|A \cap C|$ 에 해당되는 영역 ②,
$|B \cap C|$ 에 해당되는 영역 ③이 두 번씩 더해진다.
그래서 한 번씩 다시 빼주는 것이다. 이렇게 한 번씩 교집합 영역들을 빼고 나면
$|A \cap B \cap C|$에 해당되는 영역 ④는 기수의 연산에서 제외되므로 한 번 더해 준다



합집합과 교집합의 기수

예제 3-15

집합 A={a, b, c, d, e, f, g}, B={e, f, g, h, i, j, k, l}, C={k, l, m, n} 일 때, 다음을 구하라.

(1) $|A \cup B|$ (2) $|A \cap C|$ (3) $|A \cup B \cup C|$

풀이 : $|A|=7$, $|B|=8$, $|C|=4$

(1) $A \cap B$ = {e, f, g}이므로 $|A \cap B|=3$ 이다. $\therefore |A \cup B| == |A|+|B|-|A \cap B|=7+8-3=12$

(2) $A \cap C=\emptyset$ 이다. $\therefore |A \cap C| = 0$

(3) $|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 0$, $|B \cap C| = 2$, ($\because B \cap C$={k,l}), $|A \cap B \cap C|=0$ ($\because A \cap B \cap C=\emptyset$)

$\therefore |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 7 + 8 + 4 - 3 - 0 -2 +0 = 14$

예제 3-17

컴퓨터과학과에서 졸업 프로젝트 수행을 위해 학생 150명을 대상으로 관심분야 설문조사를 하였다. 설문조사 결과 네트워크(N) 56명, 보안(S) 30명, 게임(G) 63명, 네트워크와 보안 (N ∩S) 22명, 네트워크와 게임 (N ∩G) 17명, 보안과 게임 (S ∩G) 9명, 어느 분야도 선택하지 않은 사람은 45명이었다. 세 분야를 모두 선택한 학생은 몇 명인가?

풀이

$|N| = 56$, $|S| = 30$, $|G| = 63$, $|N \cap S| = 22$, $|N \cap G| = 17$, $|S \cap G| = 9$

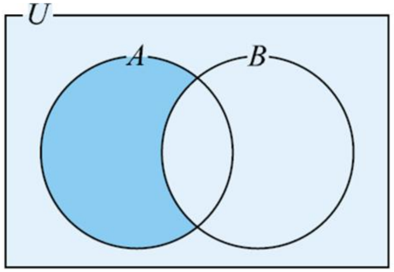
- |어느 분야도 선택 하지 않은 학생|= |전체 컴퓨터과학과 학생| - |관심분야를 선택한 학생|
  $= 150 - |N \cup S \cup G| = 45$ $\therefore |N \cup S \cup G| = 150 - 45 = 105$
- $|N \cup S \cup G| = |N| + |S| + |G| - |N \cap S| - |N \cap G| - |S \cap G| + |N \cap S \cap G|$
  $105 = 56 + 30 + 63 - 22 - 17 - 9 + |N \cap S \cap G|$

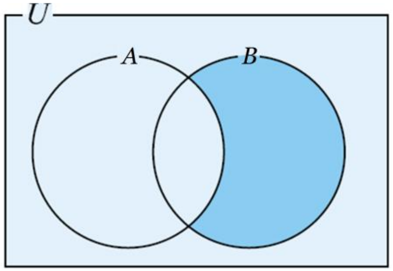
$\therefore |N \cap S \cap G| = 4$ ∴ 세 분야를 모두 관심분야로 선택한 학생 수 : 4명

집합의 연산

❖차집합(Difference) : $A - B$

- 집합 A, B에서 집합 A에는 속하지만, B에는 속하지 않는 원소로 구성되는 집합
- $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$:
  집합 A에만 속하는 원소의 집합
- $A–B \neq B–A$ 교환법칙이 성립하지 않는다.
  $B–A$는 집합 B에만 속하는 원소의 집합





예제 3-18

집합 A, B 에서 $A - B$ 와 $B - A$ 를 구하라.

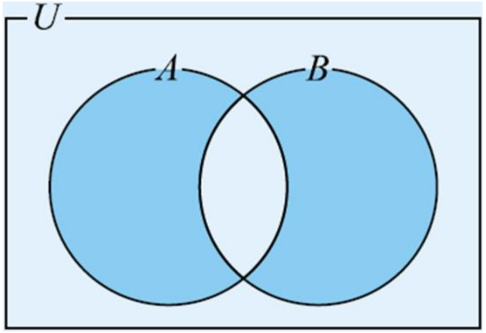
$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $B=\{g, h, i, j, k, l, m, n\}$

풀이 (1) 집합 A에만 속하고 B에는 속하지 않는 원소로 구성. $\therefore A - B = \{a, b, c, d, e, f\}$

(2) 집합 B에만 속하고 A에는 속하지 않는 원소로 구성. $\therefore B - A = \{k, l, m, n\}$

❖대칭차집합(Symmetric Difference) : $\oplus$

- 집합 A, B에 대하여 집합 $A - B$에 속하거나, $B–A$ 에 속하는 원소로 구성되는 집합
- $A \oplus B = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} = \{x | (x \in A - B) \vee (x \in B - A)\}$



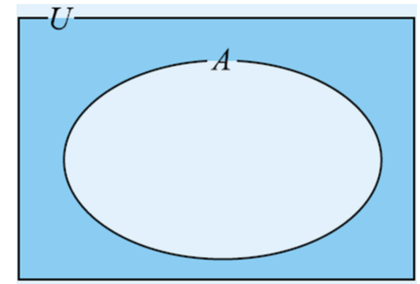
예제 3-19

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $B = \{g, h, i, j, k, l, m, n\}$일 때, $A \oplus B$를 구하라.

풀이 : $A \oplus B = \{a, b, c, d, e, f, k, l, m, n\}$

집합의 연산

❖여집합 또는 보집합 (Complement) : $\bar{A}$ 또는 A'



- 집합 U에는 속하지만,
  집합 A에는 속하지 않는 원소들로 구성되는 집합
- $\bar{A} = A' = \{x|x \in U \wedge x \notin A\} = U - A$:

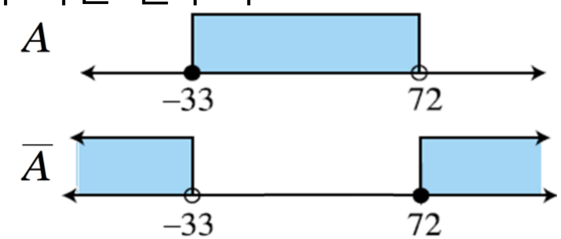
예제 3-20

$A = \{x \mid -33 \le x < 72,\ x \in R\}$ 일 때 A 의 여집합 $\bar{A}$ 을 구하라.

풀이 : 집합 A 의 원소 x는 -33보다 크거나 같고 72 보다 작은 실수다.

집합 A 의 여집합 $\bar{A}$ 은 -33보다 작거나

72 보다 크거나 같은 실수다.



$\therefore \bar{A} = \{x \mid x < -33 \vee x \ge 72,\ x \in R\}$

❖곱집합(Cartesian Product) : $A \times B$

- 집합 A, B에 대하여 $a \in A, b \in B$일 때,
  순서쌍 (a, b)의 집합
- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

예제 3-21

$A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$일 때, 곱집합 $A \times B$, 기수$|A \times B|$?

풀이 : $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$

$|A|=2$, $|B|=3$, $|A \times B|=6$

❖멱집합(Power Set) : $P(A)$

- n개의 원소를 갖는 집합 A에 대하여 집합 A의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합
- $P(A) = \{B | B \subseteq A\}$ $|P(A)| = 2^n$
- 예) 집합 $A=\{1, 2\}$의 멱집합과 멱집합의 기수? $P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $|P(A)| = 2^2 = 4$

집합의 대수법칙

TABLE 1 Set Identities.

Identity		*Name*
$A \cap U = A$	$A \cup \emptyset = A$	Identity laws (항등)
$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws (지배)
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotent laws (멱등)
$\overline{(\overline{A})} = A$		Complementation law (보원)
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Commutative laws (교환)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws (결합)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws (분배)
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's laws(드모르간)
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws (흡수)
$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws (보)

집합의 대수법칙

예제 3-24

드모르간의 법칙 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 를 증명하라.

풀이

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

예제 3-25

대수법칙을 이용해 흡수법칙 $A \cap (A \cup B) = A$ 를 증명하라.

풀이 : $A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$ ∵ 항등법칙

$= A \cup (\emptyset \cap B)$ ∵ 분배법칙 $\qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$= A \cup \emptyset$ ∵ 지배법칙

$= A$ ∵ 항등법칙

예제 3-27

분배 법칙 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$)를 증명하라.

풀이

- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$임을 보이기 위해, $A \times (B \cap C) \Leftrightarrow (A \times B) \cap (A \times C)$를 증명.

$A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$ ∵ 곱집합의 정의

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$ ∵ 교집합의 정의

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$ ∵ 논리연산의 분배법칙

$\Leftrightarrow [(x, y) \in A \times B] \wedge [(x, y) \in A \times C]$ ∵ 곱집합의 정의

$\Leftrightarrow (x. y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ ∵ 교집합의 정의

집합의 분할

❖분할(Partition)

- 공집합이 아닌 임의의 집합 A를, 서로소이면서 공집합이 아닌 부분집합으로 나누는 것
- 분할의 성질
  - 집합 A가 있을 때, $i = 1, 2, \ldots, k$ 에 대하여

    (1) $A_i \neq \emptyset$ (2) $A_i \subseteq A$

    (3) $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ (4) $i \neq j$이면, $A_i \cap A_j = \emptyset$
- 집합류(A_i)
  - 집합 A에 대한 분할의 성질을 가지고 있는 집합 A에 대한 부분집합의 집합

예제 3-29

집합 $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$일 때 $P=\{\{a, c, f\}, \{b, d\}, \{e, g\}, \{h\}\}$가 집합 A의 분할?

풀이 : $P_1=\{a,c,f\}, P_2=\{b,d\}, P_3=\{e, g\}, P_4=\{h\}$라고 할 때,

① $P_1 \neq \emptyset, P_2 \neq \emptyset, P_3 \neq \emptyset, P_4 \neq \emptyset$ ② $P_1 \subset A, P_2 \subset A, P_3 \subset A, P_4 \subset A$

③ $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = \{a,c,f\} \cup \{b,d\} \cup \{e, g\} \cup \{h\} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} = A$

④ $P_1 \cap P_2 = \{a, c, f\} \cap \{b,d\} = \emptyset$ $P_1 \cap P_3 = \{a, c, f\} \cap \{e, g\} = \emptyset$

$P_1 \cap P_4 = \{a, c, f\} \cap \{h\} = \emptyset$ $P_2 \cap P_3 = \{b, d\} \cap \{e, g\} = \emptyset$

$P_2 \cap P_4 = \{b, d\} \cap \{h\} = \emptyset$ $P_3 \cap P_4 = \{e, g\} \cap \{h\} = \emptyset$

∴ 집합류를 포함하는 집합 P는 집합 A의 분할이다.