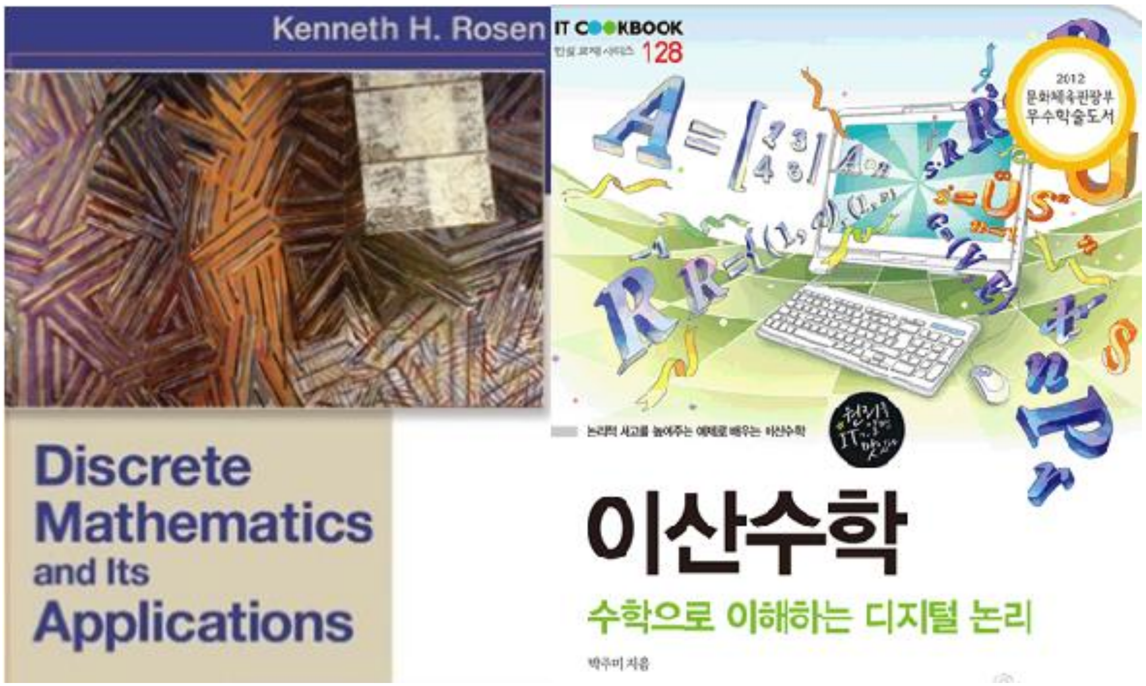
이산수학
Discrete Mathematics



Chapter 10:
이산 확률

Soongsil University : Kim Chang Wook

Lecture Note : 이산 수학 수학으로 이해하는 디지털논리, 한빛 아카데미, 박주미
Discrete Mathematics and Its **Applications**, 7E By Kenneth H. Rosen

6.1 확률 소개

P. S. Laplace
(1749-1827)

❖Probability of an Event

- 18세기 프랑스 수학자 Laplace는 사건 확률을 정의
  어떤 사건의 확률 = 성공 결과 수 / 가능한 모든 결과의 수

❖사건 확률 (Probability) $p(A)$

- 표본공간 S 중에서 특정 사건 A가 발생할 가능성

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

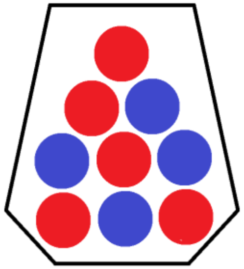
$A \subseteq S$ 이고, $0 \le |A| \le |S|$ 이므로 $0 \le p(E) \le 1$ $p(\varnothing)=0$, $|E|/|S|=p(E)$, $p(S)=1$

❖표본 공간 (Sample Space) S

- 어떤 시행을 했을 때 일어날 수 있는 모든 경우.
- 전체 사건이라고도 함

예) 주사위 던져 홀수 나올 확률 $P(\text{odd})$: 주사위는 균일한 정육면체 가정
P(odd) = (홀수 나올 결과 수 1, 3, 5)/(모든 결과 수 1,2,3,4,5,6) = 3/6=1/2

예) 항아리에 파란 공 4, 빨간 공 5개가 있다.
한 개의 공을 꺼냈을 때 파란 공이 나올 확률은?



- 9개의 가능한 결과가 있고, 이 중에서 파란 공이 4개이므로 파란 공이 선택될 확률은 4/9 (성공 결과 수/가능한 모든 결과의 수) 이다.

예제 10-31

주사위 두 개를 던질 때, 다음 질문에 답하라.

(1) 표본공간과 표본공간의 원소의 수를 구하라.

(2) 사건 A가 두 주사위의 합이 7 이하가 나오는 사건일 때, 확률을 구하라. $P(A) = \frac{|A|}{|S|}$

(3) 사건 B가 두 수의 곱이 짝수가 나오는 사건일 때, 확률을 구하라.

풀이

(1) 각 주사위를 던질 때 발생하는 모든 경우는 $S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}, S_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$

$|S_1| = 6$, $|S_2| = 6$ $\therefore |S| = |S_1| \times |S_2| = 6 \times 6 = 36$ 곱집합으로 표본공간 구할 수 있다.

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

(2) 사건 A : 순서쌍의 합이 7 이하인 원소를 표본공간 S 에서 뽑아낸다.

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (6,1)\}$$

$|A| = 21$ $\therefore \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

(3) 사건 B : 순서쌍의 곱이 짝수가 나오는 원소를 표본공간 S 에서 뽑아낸다.

$$A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$|B| = 27$ $\therefore \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

사건 조합의 확률

❖여사건(Complementary Event) $\bar{A}$ or A^c

여사건 : 어떤 사건 A가 일어나지 않는 경우

$p(\bar{A}) + p(A) = 1,\quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ $\quad\quad$ $p(\bar{A})$: A 가 발생하지 않을 확률

❖ **확률의 덧셈 정리**

사건 A또는B (또는 C)가 일어날 사건의 확률

(1) 두 사건 A , B가 동시에 일어나는 경우

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

세 사건 A, B, C가 동시에 일어나는 경우

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(2) 두 사건 A , B 가 동시에 일어나지 않는 경우(두 사건 A , B 가 배반사건)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

세 사건 A, B, C 가 동시에 일어나지 않는 경우(세 사건 A, B, C 가 배반사건)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

사건 조합의 확률

예제 10-34

1부터 10까지의 카드 중에서 뽑은 카드가 홀수거나 5보다 큰 수일 확률을 구하라.

풀이 10장 중 한 장을 꺼내는 표본공간의 경우의 수는 10이다.

① 홀수를 뽑은 경우 $A = \{1,3,5,7,9\}$. 홀수를 뽑을 확률 $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ 이다.

② 5보다 큰 수를 뽑을 경우 $B = \{6,7,8,9,10\}$ 5보다 큰 수를 뽑을 확률 $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

③ 홀수면서 5보다 큰 경우. 즉 $A \cap B = \{7,9\}$다. 이 경우의 확률은 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Ex) 100 이하 양의 정수 중에서 임의로 선택한 수가 2 또는 5로 나누어질 확률은 ?

풀이 :

Let E_1 : 선택된 수가 2로 나누어지는 사건, E_2 : 5로 나누어지는 사건,

그러면 $E_1 \cup E_2$: 선택된 수가 2 또는 5로 나누어지는 사건.

$E_1 \cap E_2$: 선택된 수가 2와 5로 모두 나누어지는 사건. 즉 10으로 나누어지는 사건.

$|E_1| = 50$, $|E_2| = 20$, $|E_1 \cap E_2| = 10$ 이므로

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = 50/100 + 20/100 - 10/100 = 3/5.$$

7.2 Probability Theory

Laplace 확률 정의는 모든 결과들이 동일하게 발생하는 것을 가정.

주사위가 평평하지 않는 것처럼 동일하게 발생하지 않는 경우가 많다.

Now we introduce a more general definition of probabilities that avoids this restriction.

❖확률의 할당(Assigning Probabilities)

- 유한한 결과를 갖는 표본 공간 S.

  각 결과 s에 확률 $p(s)$를 할당하는데 다음 두 조건이 만족 되어야 하다.

  1) 모든 $s \in S$ 에 대해서 $0 \le p(s) \le 1$: 각 결과 확률이 0이상 1이하 실수라는 것을 의미

  2) $\sum_{s \in S} p(s) = 1$: 가능한 모든 결과의 확률이 1이 된다는 것을 의미

- n 개의 가능한 결과 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 있을 때, 다음 조건이 만족되어야 한다.

  (1) $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대해서 $0 \le p(x_i) \le 1$ (2) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

  표본 공간 S의 모든 사건 집합에 대한 함수 p를 확률 분포(Probability Distribution).

  결과 s에 할당된 확률 $p(s)$는 s 발생 수를 실험 수로 나누어 그 실험 수가 무한대로 갈 때의 값과 같아야 한다.

Assigning Probabilities

Ex 1) 공평한 동전을 던졌을 때 H(앞)와 T(뒤)의 결과에 어떤 확률값을 할당해야 하는가? 동전이 공평하지 않아 H(앞)가 T(뒤) 보다 두배 많이 발생하는 경우, 어떤 확률 값을 할당해야 하는가?

풀이: i) 공평한 동전을 던졌을 경우 발생 가능성이 동일하므로 $p(H) = p(T) = 1/2$

ii) 공평하지 않은 동전일 경우 $p(H) = 2p(T)$.

$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$ 이므로 $p(H) + p(T) = 1$, it follows that $2p(T) + p(T) = 3p(T) = 1$.

$p(T) = 1/3$ and $p(H) = 2/3$.

❖원소가 n개인 집합 S, 균등 분포(Uniform Distribution)는 S의 각 원소에 확률 값 $1/n$ 을 할당. Ex) 균등한 주사위 경우 1/6

❖사건 E의 확률은 E의 결과들의 확률을 모두 합한 것이다.

$$p(E) = \sum_{s \in E} p(s)$$

- 사건 E에 n개의 결과가 있을 경우, 즉 $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$일 경우 $p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)$

  균일 분포는 라플라스 사건에 대한 확률의 정의로 사건에 같은 확률을 할당.

예) 주사위가 균일하지 않아 숫자 3이 다른 숫자보다 두배 많이 나오고 나머지 5개 숫자는 동일하게 발생. 이 주사위를 던졌을 때 홀수가 나올 확률은 ?

풀이 : 사건={1, 3, 5}확률을 구하면 된다. $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6) = 5p(1)+2p(1) = 1$

$p(1) = p(2) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/7$, $p(3)=2/7$ 이므로 $p(E) = p(1) + p(3) + p(5) = 4/7$

짝수가 나올 확률= $p(1) + p(3) + p(5) = 3/7$

조건부 확률

❖조건부 확률(conditional probability)　　$P(B|A)$

- 확률이 0인 아닌 두 사건 A, B에 대해 A가 일어났다고 가정했을 때, 사건 B가 일어날 확률

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

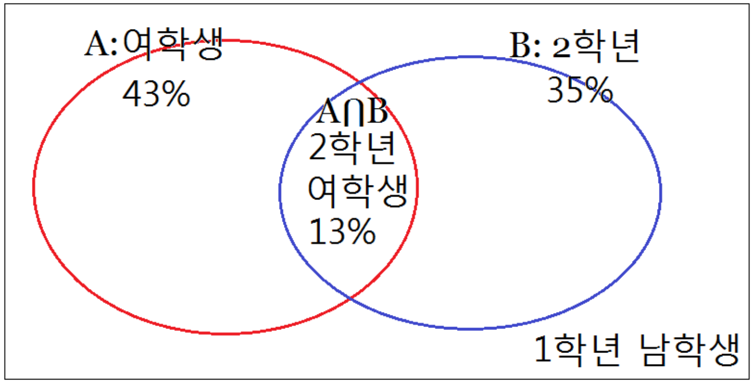
$P(A \cap B)$: 표본공간 S에서 A, B가 동시 발생할 확률
$P(B|A)$: 표본공간 A에서 B가 발생할 확률

예제 10-39

컴퓨터과학부 학생의 43%가 여학생이고,
컴퓨터과학부 학생의 35%가 2학년 학생이다.
그리고 2학년 여학생은 13%다.

(1) 임의로 여학생을 뽑았을 때,
그 학생이 2학년일 확률은 얼마인가?

(2) 2학년 학생 중 한 명을 뽑았을 때,
그 학생이 여학생일 확률은 얼마인가?



풀이

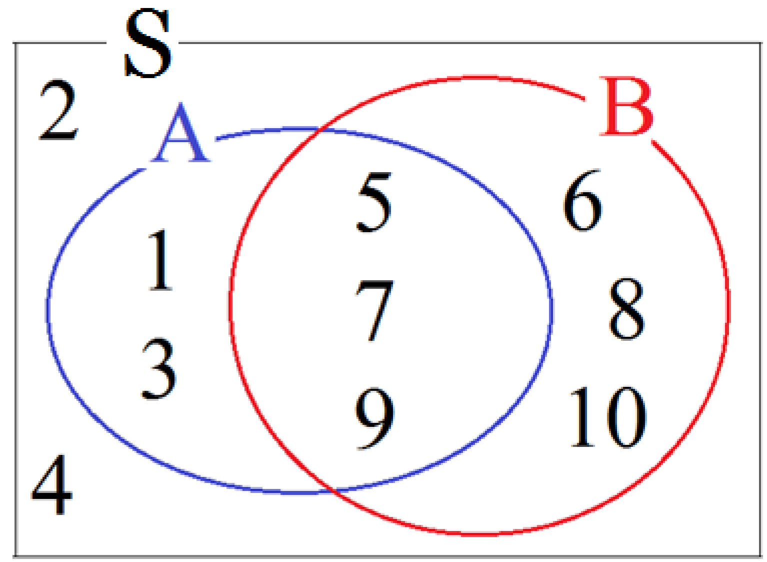
여학생일 사건을 A, 2학년 학생일 사건을B라고 하면, 2학년 여학생일 사건 $A \cap B$.
그러므로 $P(A) = \frac{43}{100}$, $P(B) = \frac{35}{100}$, $P(A \cap B) = \frac{13}{100}$이다.

(1) 여학생을 뽑았을 때 2학년 학생 ,
사건 A이 일어날 때 사건 B의 조건부확률　$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{13}{100}}{\frac{43}{100}} = \frac{13}{43}$

(2) 2학년 학생을 뽑았을 때 여학생 ,
사건 B가 일어났을 때 사건 A의 조건부 확률　$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{13}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{13}{35}$

조건부 확률

❖1부터 10까지 카드 중에서 S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
홀수를 뽑을 경우 A={1,3,5,7,9},
5보다 큰수를 뽑을 경우 B={5,6,7,8,9,10}
5보다 큰 홀 수 A∩B= {5, 7, 9}



❖풀이

p(A)=1/2 p(B)=6/10=3/5
p(AB)=3/10

$$p(B\,|\,A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{3/10}{1/2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$=\frac{3}{5}$$: 그림의 A에서 B가 발생할 확률

$$p(A\,|\,B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{3/10}{3/5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$: 그림의 B에서 A가 발생할 확률

독립(Independence)

❖사건 E와 F가 독립(independent)이면 $p(E \cap F) = p(E)\,p(F)$ 이다.

- E와 F가 독립이면, $P(B|A)= P(B)$, $P(A|B)= P(A)$,

$$p(B\,|\,A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) \;\Rightarrow\; p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

예) 임의로 생성되는 길이 4 비트 열이 1로 시작하는 사건을 E,
4 비트열이 짝수개의 1을 포함하는 사건을 F,
길이 4비트 열 16가지가 동일하게 발생할 수 있다면, E와 F는 독립사건인가?

풀이: 1로 시작하는 길이 4비트 열은 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 의 8개가 있고, 짝수개의 1을 포함하는 길이 4비트 열은 0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111로 역시 8개. 1로 시작하고 짝수개의 1을 포함하는 길이 4비트 열은 1001, 1010, 1100, 1111 의 4개가 있다.
길이 4인 비트열은 모두 16개있으므로

$p(E)$=8/16=1/2, $p(F)$=8/16=1/2, $p(E \cap F)$=4/16 = 1/4 성립

$p(E)\,p(F)$ =1/2 × 1/2=1/4 이므로 $p(E \cap F) = p(E)\,p(F)$ =1/4 $\therefore$ E와 F는 독립

두 개보다 많은 사건의 상호 독립

❖사건 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 이 짝으로 독립(*pairwise independent*)일 필요충분 조건은 $1 \le i \le j \le n$ 인 모든 정수 i, j 에 대하여 $p(E_i \cap E_j) = p(E_i)\,p(E_j)$이다.

이 사건들이 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$ 인 정수 i_j, $j=1,2,\ldots,m$ 에 대하여 $p(E_{i1} \cap \ldots \cap E_{im}) = p(E_{i1})\,p(E_{i2})\cdots p(E_{im})$이면 상호독립(*mutually independent*)이라 한다.

Bernoulli Trials

James Bernoulli
(1854 – 1705)

❖베르누이 시행

- 두 가지 결과만 존재하는 실험의 시행
- 일반적으로 베르누이 시행의 가능한 결과를 성공과 실패라 부른다.
- 성공 확률: p 실패 확률: q 라 하면 $p+q=1$ 이 된다.

예) 앞면이 나올 확률 2/3 인 동전이 있다. 동전을 던지는 것은 모두 독립적이라 가정하에, 동전을 7번 던져서 앞면이 4번 나올 확률은?

풀이)

동전을 7번 던지면 $2^7=128$ 가지 가능한 결과

7번 중 4번 앞면이 나오는 경우의 수는 C(7,4)

$C(n,r)=n!/(r!\,(n-r)!)=(7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)/\{(4\cdot3\cdot2\cdot1)(3\cdot2\cdot1)\}=7\cdot5=35$

동전 더지는 것은 독립적이므로 각각 확률은 $(2/3)^4$ $(1/3)^3$

4번만 앞면이 나올 확률은 : $C(7,4)\,(2/3)^4\,(1/3)^3=35\cdot16/3^7=560/2187$

5번 : $C(7,5)(2/3)^5(1/3)^2=21\cdot32/2187=42\cdot16/2187$

6번: $C(7,6)(2/3)^6(1/3)^1=7\cdot64/2187=28\cdot16/2187$

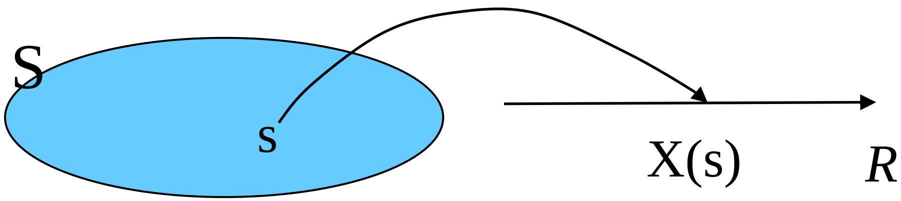
❖성공확률이 p이고, 실패확률이 q일 때, n번의 독립적인 베르누이 시행에서 정확히 k번 성공하는 확률은 $C(n,k)p^kq^{n-k}$ 이다.

- n번의 독립적인 베르누이 시행 결과는 n차원 벡터로 표시 가능. n 번의 시행은 독립적이므로 k번 성공과 n-k번 실패로 구성되는 결과들의 확률은 p^kq^{n-k} 이다. k개의 성공을 포함하는 n 차원 벡터의 수는 $C(n,k)$이므로 k번 성공하는 확률은 $C(n,k)p^kq^{n-k}$ 이다.

Random Variables(확률변수)

❖확률 변수(random variable)는
실험의 표본공간으로부터 실수의 집합으로의 함수이다.
즉 확률변수는 가능한 각각의 결과에 실수를 할당한다.

❖ In an experiment a number is often attached to each outcome.



$X: S \to R$

Sample space   Real numbers

Definition:
A **random variable** X is a function defined on S, which takes values on the real axis

Definition:
Let $X : S \to R$ be a discrete random variable.
The function f(x) is a **probabilty function** for X, if

1. $f(x) \geq 0$ for all x
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$,

   where $P(X=x)$ is the probability for the outcomes $s \in S : X(s) = x$.

Random Variables(확률변수)

Example: Flip three coins   X : # heads $X : S \rightarrow \{0,1,2,3\}$

Outcome	**Value of X**	**Probability fuinction**
TTT	X=0	$f(0) = P(X=0) = 1/8$
HTT, TTH, THT	X=1	$f(1) = P(X=1) = 3/8$
HHT, HTH, THH	X=2	$f(2) = P(X=2) = 3/8$
HHH	X=3	$f(3) = P(X=3) = 1/8$

Notice! The definition of a probability function is fulfilled:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum f(x) = 1$
3. $P(X=x) = f(x)$

Definition:

Let $X : S \rightarrow R$ be a discrete random variable with probability function f(x).

The cumulative distribution function for X, F(x), is defined by

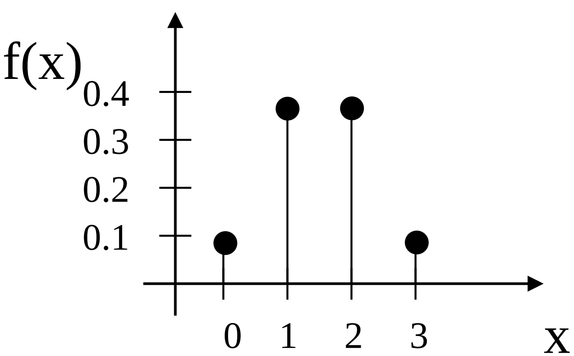
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad \text{for } -\infty < x < \infty$$

Random Variables(확률변수)

Example: Flip three coins X : # heads X : S → {0,1,2,3}

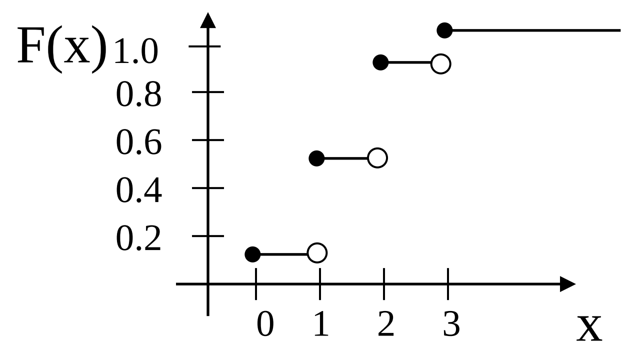
Outcome	**Value of X**	**Probability function**	**Cumulative dist. Func.**
TTT	X=0	f(0) = P(X=0) = 1/8	F(0) = P(X $\leq$ 0) = 1/8
HTT, TTH, THT	X=1	f(1) = P(X=1) = 3/8	F(1) = P(X $\leq$ 1) = 4/8
HHT, HTH, THH	X=2	f(2) = P(X=2) = 3/8	F(2) = P(X $\leq$ 2) = 7/8
HHH	X=3	f(3) = P(X=3) = 1/8	F(3) = P(X $\leq$ 3) = 1

Probability function:

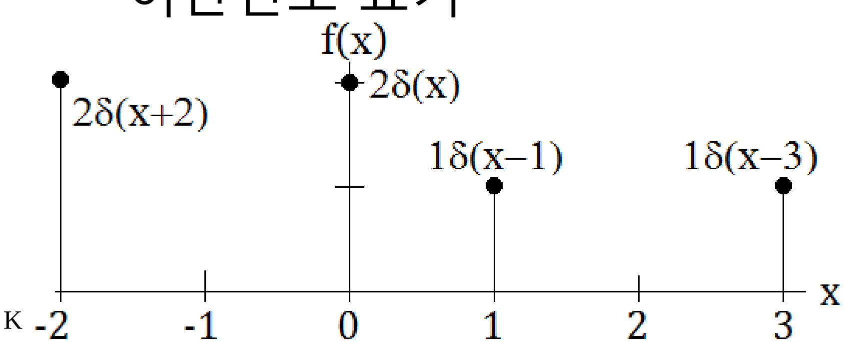


$$f(x)=1/8\cdot\delta(x-1)+3/8\cdot\delta(x-1)$$
$$+\ 3/8\cdot\delta(x-2)+1/8\cdot\delta(x-3)$$

Cumulative distribution function:



이산신호 표기



Random Variables(확률변수)

❖예) 주사위 두 개를 던져 나오는 숫자의 합을 X, 첫 번째 주사위 숫자 i, 두 번째 주사위 숫자 j일 때 36가지 가능한 결과(i, j)에 대한 확률변수의 값?

(풀이)

확률변수 X 값

$X((1,1))=2$

$X((1,2)) = X((2,1))= 3$

$X((1,3)) = X((2,2))= X((3,1))=4$

$X((1,4)) = X((2,3))= X((3,2))= X((4,1))=5$

$X((1,5)) = X((2,4))= X((3,3))= X((4,2))= X((5,1))=6$

$X((1,6)) = X((2,5))= X((3,4))= X((4,3))= X((5,2))= X((6,1))=7$

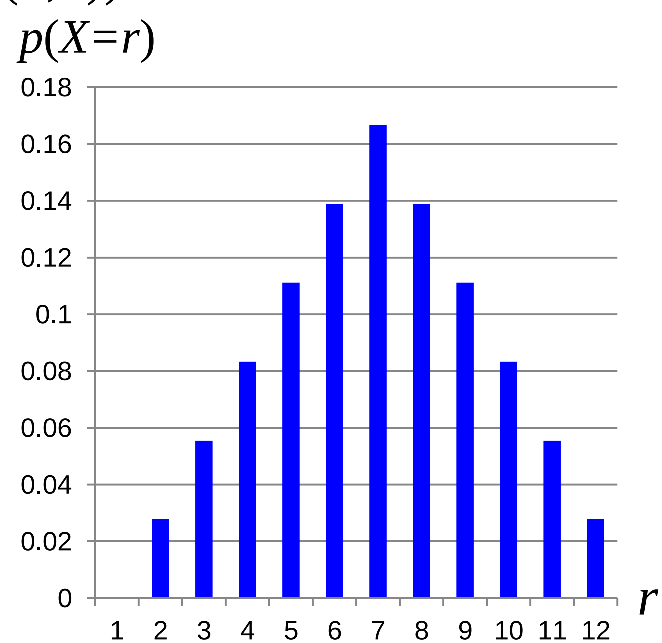
$X((2,6)) = X((3,5))= X((4,4))= X((5,3))= X((6,2))=8$

$X((3,6)) = X((4,5))= X((5,4))= X((6,3))=9$

$X((4,6)) = X((5,5))= X((6,4))=10$

$X((5,6)) = X((6,5))=11$

$X((6,6))=12$



확률변수의 분포 순서 쌍 $(r, p(X=r))$

(2, 1/36), (3, 2/36), (4, 3/36), (5, 4/36),
(6, 5/36), (7, 6/36), (8, 5/36), (9, 4/36),
(10, 3/36), (11, 2/36), (12, 1/36)

6.3 Bayes' Theorem

❖부분적으로만 알고 있는 정보를 근거로 어떤 특정한 사건이 일어날 확률에 대한 정보를 예측

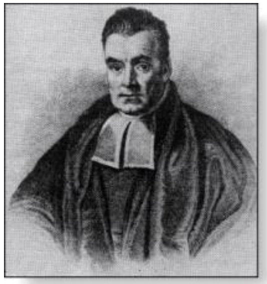
- 예) 스팸 메일의 비율을 안다고 가정, 메시지의 어떤 단어의 빈도로 메일이 스팸메일일 것 같은 가능성을 베이즈 정리로 알 수 있다.
  가능성을 결정하기 위해 스팸메시지 비율, 이러한 단어가 나타나는 스팸 메시지 비율, 이러한 단어가 나타나는 스팸메일이 아닌 메시지의 비율을 알아야 한다.
- 베이즈 정리는 의학, 법, 기계학습, 공학 등 다양한 분야에서 부분적인 정보에 기초한 확률을 추론하기 위하여 광범위하게 이용되고 있다.

❖베이즈 정리(Bayes' Theorem)

만약 E와 F가 표본공간 S에서의 사건으로
$p(E)\neq 0$ 이고 $p(F)\neq 0$ 이라고 할 때 다음과 같은 식이 성립

$$p(F\mid E)=\frac{p(E\mid F)\,p(F)}{p(E\mid F)\,p(F)+p(E\mid \overline{F})\,p(\overline{F})}$$

$p(E\mid F)$, $p(E\mid \overline{F})$, $p(F)$를 알면 조건부확률 $p(F\mid E)$을 알수있다.

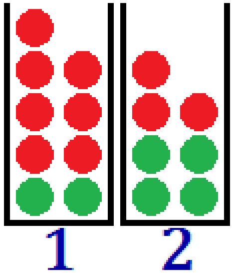


Thomas Bayes
(1702-1761)

$$p(B\mid A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)},\quad p(A\mid B)=\frac{p(B\cap A)}{p(B)}$$

$$p(B\mid A)\,p(A)=p(B\cap A)=p(A\mid B)\,p(B)\Rightarrow p(B\mid A)=\frac{p(A\mid B)\,p(B)}{p(A)}$$

Bayes' Theorem



예) 두 상자. 첫 번째: 녹색 공 2, 빨간 공 7, 두 번째: 녹색 공 4, 빨간 공 3,
먼저 임의로 상자를 선택하여 공하나 선택. 빨간 공을 선택하였다면
첫 번째 상자를 선택하였을 확률 $P(F|E)$?

(풀이)

E : 빨간 공을 선택한 사건, $\bar{E}$: 녹색 공을 선택한 사건

$F\ (\bar{F})$: 첫 (두) 번째 상자로부터 공을 선택하는 사건

조건부확률 $p(F\,|\,E) = p(E \cap F)/\,p(E)$

$p(E\,|\,F) = 7/9$, $p(E\,|\,\bar{F}) = 3/7$, 임의선택이므로 $p(F) = p(\bar{F}) = 1/2$,

$p(E\,|\,F) = p(E \cap F)/\,p(F)$ 이므로 $p(E \cap F) = p(E\,|\,F)\,p(F) = 7/9 \times 1/2 = 7/18$

$p(E\,|\,\bar{F}) = p(E \cap \bar{F})/\,p(\bar{F})$ 이므로 $p(E \cap \bar{F}) = p(E\,|\,\bar{F})\,p(\bar{F}) = 3/7 \times 1/2 = 3/14$

$E = (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F}) \Rightarrow p(E) = p(E \cap F) + p(E \cap \bar{F}) = 7/18 + 3/14 = 76/126 = 38/63$

조건부확률 $p(F\,|\,E) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(E)} = \dfrac{7/18}{38/63} = \dfrac{49}{76} \approx 0.645$ 이 결과를 베이즈정리

첫번째 상자로부터 공을 택하였을 확률은 아무런 정보가 없을 때의 확률은
1/2이나, 선택된 공이 빨간색이라는 것을 알면서 0.645로 증가하였다.

❖베이즈 정리(Bayes' Theorem)

E와 F가 표본공간 S에서의 사건,
$p(E) \neq 0$ 이고 $p(F) \neq 0$

$$p(F\,|\,E) = \frac{p(E\,|\,F)\,p(F)}{p(E\,|\,F)\,p(F) + p(E\,|\,\bar{F})\,p(\bar{F})}$$

Bayes' Theorem

❖베이즈 정리(Bayes' Theorem)

만약 E와 F가 표본공간 S에서의 사건으로 $p(E)\neq 0$ 이고 $p(F)\neq 0$ 이라고 할 때

다음과 같은 식이 성립 $$p(F \mid E)=\frac{p(E \mid F)\,p(F)}{p(E \mid F)\,p(F)+p(E \mid \overline{F})\,p(\overline{F})}$$

증명: 조건부 확률의 정의에서 $p(F|E)= p(E\cap F)/\,p(E)$, $p(E|F)= p(E\cap F)/\,p(F)$

$\Rightarrow$ $p(E\cap F) = p(F|E)\,p(E)$, $p(E\cap F) = p(E|F)\,p(F)$ $\Rightarrow$ $p(F|E)\,p(E) = p(E|F)\,p(F)$

양변을 $p(E)$ 로 나누면 $p(F|E) = p(E|F)\,p(F) \,/\, p(E)$

증명을 완성하기 위해서 $p(E)=p(E \mid F)\,p(F)+p(E \mid \overline{F})\,p(\overline{F})$

since $p(E) = p(E\cap F) + p(E\cap \overline{F})$

because $E = E\cap S = E\cap (F\cup \overline{F}) = (E\cap F)\cup (E\cap \overline{F})$

and $(E\cap F)\cap (E\cap \overline{F}) = \emptyset$

By the definition of conditional probability,

$$p(E) = p(E\cap F) + p(E\cap \overline{F}) = p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F})$$

Hence, $$p(F \mid E)=\frac{p(E \mid F)\,p(F)}{p(E)}=\frac{p(E \mid F)\,p(F)}{p(E \mid F)\,p(F)+p(E \mid \overline{F})\,p(\overline{F})}$$

Applying Bayes’ Theorem

❖예) 1,000명당 5명에게서 발생하는 질병을 검사하는데, 질병이 없는데 있다고 검사결과 나올 확률은 3%, 질병이 있는 데 없다고 검사결과 나올 확률은 1%라고 할 경우

1) 검사결과 질병이 있다고 나온 사람이 실제로 질병을 가지고 있을 확률 $p(F|E)$?

2) 검사결과 질병이 없다고 나타난 사람이 실제로 질병을 가지고 있지 않을 확률은?

풀이) F: 실제로 질병을 가지고 있는 사건, E: 검사결과 질병이 있다고 하는 사건

$p(F\mid E)$를 베이즈정리를 이용하여 구하기 위해

$$p(F)=5/1{,}000=0.005,\qquad p(\overline{F})=1-0.005=0.995,$$

$$p(E\mid F)=0.99,\qquad p(\overline{E}\mid F)=0.01,\qquad p(\overline{E}\mid \overline{F})=0.97,\qquad p(E\mid \overline{F})=0.03,$$

1) 검사결과 질병이있다고나타난 사람이실제로 질병을가질 확률은 $p(F\mid E)$

$$(F\mid E)=\frac{p(E\mid F)\,p(F)}{p(E\mid F)\,p(F)+p(E\mid \overline{F})\,p(\overline{F})}=\frac{0.99\times 0.005}{0.99\times 0.005+0.03\times 0.995}\simeq 0.1422\simeq 14.2\%$$

2) 검사결과 질병이없다고나타난 사람이실제로도 질병이없을확률은 $p(\overline{F}\mid \overline{E})$

$$(\overline{F}\mid \overline{E})=\frac{p(\overline{E}\mid \overline{F})\,p(\overline{F})}{p(\overline{E}\mid \overline{F})\,p(\overline{F})+p(\overline{E}\mid F)\,p(F)}=\frac{0.97\times 0.995}{0.97\times 0.995+0.01\times 0.005}\simeq 0.999948\simeq 99.995\%$$

결과적으로 검사결과 질병이 있다고 나타난 사람이 실제로 질별을 가지고 있을 확률은 약14.2% 이고, 검사 결과 질병이 없다고 나타난 사람이 실제로도 질병을 가지고 있지 않을 확률은 약 99.995%이다.

6.4 Expected Value and Variance(기대값과 분산)

❖확률변수의 기대값 (Expected Value)은 확률변수가 취하는 값에 대한 예측값으로서, 표본공간의 모든 원소에 대해서 원소의 확률과 그 원소의 확률변수값과의 곱을 모두 더한 값으로서 확률변수 값의 가중평균이다. 분산은 확률변수 값이 얼마나 퍼져 있는지를 알 수 있다.

❖표본공간 S에서의 확률변수 X의 기대값(Expected Value), 혹은 평균값

$$E(X) = \sum_{s \in S} p(s)X(s)$$

X의 $s \in S$ 에서의 편차(Deviation)는 $X(s) - E(X)$: X 값과 X 평균과의 차.

- 표본공간 S가 n개의 원소, $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$일 때는 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)X(x_i)$

예) 주사위 던져서 나오는 숫자를 X, X 의 기대값은?

풀이) 확률변수 X는 1,2,3,4,5,6을 1/6 확률로 취하므로

$E(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 21/6 = 7/2$

예) 동전을 3번 던져서 가능한 8가지 결과를 표본공간 S라 하고, 각 결과에 앞면의 수를 할당하는 확률변수를 X라 하자. X 의 기대값(평균값)은?

풀이) 동전은 평평하고 동전을 던지는 사건은 독립적이므로 각 결과의 확률은 1/8 즉 변수 X는 앞면의 수를 수를 할당하므로 다음 식과 같다.

$E(X) = 1/8[\,X(HHH) + X(HHT) + X(HTH) + X(HTT) + X(THH) + X(THT) + X(TTH) + X(TTT)\,]$

$= 1/8(3+2+2+1+2+1+1+0) = 12/8 = 3/2$ ∴3번 던졌을 때 확률변수 X의 기대값은 3/2

Expected Value

❖ X가 확률변수, $p(X=r)$ 이 $X=r$ 일 확률,

$p(X=r)=\sum_{s\in S,\ X(s)=r} p(s)$ 로 표현되면, 기대값은 다음과 같이 계산 가능하다.

$$E(X) = \sum_{r \in X(S)} p(X=r)r$$

증명 : X는 치역이 $X(S)$ 인 확률변수이고 $P(X=r)$은 확률변수 X 가 r값을 가지는 확률이라 하자. $P(X=r)$은 $X(s)=r$ 인 s의 확률을 모두 합한 것이므로 다음 수식이 성립.

$$E(X) = \sum_{r \in X(S)} p(X=r)r$$

예) 공평한 주사위 두 개를 던졌을 때 나오는 숫자 합의 기대값은?

풀이 : 숫자 합을 할당하는 확률변수를 X.

실험은 36가지 결과 나오며, X 치역은 $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$이며, 각 확률

$p(X=2) = p(X=12) = 1/36$

$p(X=3) = p(X=11) = 2/36=1/18$

$p(X=4) = p(X=10) = 3/36=1/12$

$p(X=5) = p(X=9) = 4/36=1/9$

$p(X=6) = p(X=8) = 5/36$

$p(X=7) = 1/6$

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{1}{18} + 4\cdot\frac{1}{12} + 5\cdot\frac{1}{9} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{1}{6} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{1}{9} + 10\cdot\frac{1}{12} + 11\cdot\frac{1}{18} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

Linearity of Expectations

❖기대값은 선형성을 가져, 확률변수 합의 기대값은 각각의 기대값의 합

❖Linear $H[ax_1 + bx_2] = ay_1 + by_2$ additivity(가합성), homogeneity(동질성)

$H[x_1 + x_2] = y_1 + y_2$: additivity $H[2x_1] = 2[x_1] = 2y_1$: homogeneity

정리3: 양의 정수 n에 대하여 X_i, i=1,2,…,n 이 S에서 정의된 확률변수이고 a와 b가 실수이면 아래 식이 성립

(i) $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

(ii) $E(aX + b) = aE(X) + b$

증명 :

(i)에서 $n = 2$ 일 때는 직접 증명 가능

$$E(X_1 + X_2) = \sum_{s\in S} p(s)(X_1(s) + X_2(s)) = \sum_{s\in S} p(s)X_1(s) + \sum_{s\in S} p(s)X_2(s) = E(X_1) + E(X_2)$$

(ii)를 증명 :

$$E(aX + b) = \sum_{s\in S} p(s)(aX(s) + b) = a\sum_{s\in S} p(s)X(s) + b\sum_{s\in S} p(s) = aE(X) + b \qquad \left(\sum_{s\in S} p(s) = 1\right)$$

예4) 두 개의 주사위를 던졌을 때 나오는 숫자의 합의 기대값을 구하라.

풀이: X_1: 첫 번째 주사위에서 나온 숫자 X_2: 두 번째 주사위에서 나온 숫자

$E(X_1)$ 과 $E(X_2)$는 각각 (1+2+3+4+5+6)/6=21/6=7/2 $E(X_1) = E(X_2)$ =7/2

두 개의 주사위를 던졌을 때 나오는 숫자의 합은 $X_1 + X_2$

$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ =7/2 + 7/2 =7

Independent Random Variables

❖표본공간에서 정의된 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족하면 독립.

$$p\,(X=r_1 \text{ and } Y=r_2\,) = p\,(X=r_1)\cdot p\,(Y=r_2\,)$$

실수 r_1과 r_2에 대해서 $X(s)=r_1$ 이고 $Y(s)=r_2$ 일 확률이 $X(s)=r_1$ 일 확률과 $Y(s)=r_2$ 일 확률의 곱과 같으면 독립적이 된다.

예11) 두 개의 주사위를 던졌을 때 첫 번째 주사위 숫자는 X_1, 두 번째 주사위 숫자는 X_2 일 때, 확률변수 X_1과 X_2는 독립인가?

풀이: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, $i\in S$, $j\in S$,

두 주사위를 던질 때 36개 가능한 결과 발생하므로 $p\,(X_1 = i \text{ and } X_2 = j\,) = 1/36$,

첫 번째 주사위에 i가 나올 확률과 두 번째 주사위에 j가 나올 확률은 동일하게 1/6이므로 $p(X_1 = i\,) = p(\,X_2 = j\,) = 1/6$

$p\,(X_1 = i \text{ and } X_2 = j) = 1/36$ and $p(X_1 = i)\cdot p(\,X_2 = j) = 1/6\cdot 1/6=1/36$ X_1과 X_2는 독립

정리5 : X와 Y가 표본공간 S에서 정의된 확률변수이면 $E(XY) = E\,(X)\cdot E\,(Y\,)$

증명 : 기대값 정의 및 X와 Y가 독립적 확률변수

$$E(XY) = \sum_{r\in XY(S)} r\cdot p(XY=r) = \sum_{r_1\in X(S),\, r_2\in Y(S)} r_1 r_2\cdot p(X=r_1 \text{ and } Y=r_2) \quad \text{:정리1, } XY=r\text{을 분할}$$

$$= \sum_{r_1\in X(S)}\sum_{r_2\in Y(S)} r_1 r_2\cdot p(X=r_1 \text{ and } Y=r_2) = \sum_{r_1\in X(S)}\sum_{r_2\in Y(S)} r_1 r_2\cdot p(X=r_1)\cdot p(Y=r_2) \quad \text{:}X\text{와}Y\text{ 독립}$$

$$= \sum_{r_1\in X(S)} r_1\cdot p(X=r_1)\cdot \sum_{r_2\in Y(S)} r_2\cdot p(Y=r_2) = E(X)E(Y)$$

Variance(분산)

❖확률변수 분산은 확률변수가 얼마나 넓게 분포하는가에 대해 알려준다.

❖X가 표본공간 S에서 정의된 확률변수. X의 분산 $V(X)$ 는 다음과 같다.

$$V(X)=\sum_{s\in S}\left(X(s)-E(X)\right)^2 p(s)$$

$V(X)$는 X의 편차의 제곱에 대한 가중치 평균.

X의 표준편차(standard deviation) $\sigma(X)$는 $\sqrt{V(X)}$로 정의된다.

❖X가 표본공간 S에서 정의된 확률변수이면, X의 분산 : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.

증명:$V(X)=\sum_{s\in S}\left(X(s)-E(X)\right)^2 p(s)=\sum_{s\in S}X(s)^2 p(s)-2E(X)\sum_{s\in S}X(s)p(s)+E(X)^2\sum_{s\in S}p(s)$

$=E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$ $\sum_{s\in S}p(s)=1$ 적용

❖X가 표본공간 S에서 정의된 확률변수이고, $E(X)=\mu$이면, $V(X)=E((X-\mu)^2)$.

증명: X가 $E(X)=\mu$인 확률변수이면

$E((X-\mu)^2)=E(X^2-2\mu X+\mu^2)=E(X^2)-E(2\mu X)+E(\mu^2)$:전개, 선형성적용

$=E(X^2)-2\mu^2+\mu^2=E(X^2)-\mu^2$: μ는 상수, $E(X)=\mu$, 간단히 하면

$=E(X^2)-E(X)^2=V(X)$: $\mu=E(X)$, $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ 적용하면

Variance

예14) p가 성공확률, q가 실패확률인 베르누이 시행에서 성공이면 $X(t)=1$, 실패면 $X(t)=0$인 확률 변수 X의 분산은?

풀이: X는 0과 1 값만 가지므로 $X^2(t)=X(t)$. 아래 식이 성립.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq \qquad (p + q = 1)$$

예15) 주사위를 던져서 나오는 숫자가 확률변수 X 일 때, 이 확률변수 X 의 분산은?

풀이: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ 이다.

예1)에서 $E(X)=7/2$,

$E(X^2)$을 계산하기 위해서 X^2은 $i=1,2,\ldots,6$에 대해서 각각 1/6 확률로 i^2의 값을 갖게 되므로

$$E(X^2) = 1/6(1^2 + 2^2 +,\ldots,+ 6^2)=91/6 ,$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 91/6 - (7/2)^2 = 35/12$$

Variance

Bienaymé
(1796-1878)

- Bienayme's 공식 : 두 독립적 확률변수의 합의 분산은 각각의 분산의합이다.

❖ X와 Y가 표본공간 S에서 정의된 두 개의 독립적 확률변수라면

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. 또한 $i=1,2,\ldots,n$ (n은 양의 정수)에 대해서 X가 둘씩 짝으로 독립적 확률변수일 때 $V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$ 성립.

증명: $V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X)+E(Y))^2$

$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$ X와 Y 독립 $E(XY)= E(X)E(Y)$

$V(X+Y) = E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(Y) - E(Y)^2$

$= (E(X^2) - E(X)^2) + (E(Y^2) - E(Y)^2) = V(X) + V(Y)$

예17) 주사위를 던져서 첫 번째 숫자가 i, 두 번째 숫자가 j 일 때 확률변수 $X((i, j))= i + j$ 의 분산?

풀이: X_1과 X_2는 $X_1((i, j)) = i$, $X_2((i, j)) = j$로 정의. $X=X_1+X_2$,

X_1과 X_2는 독립적이므로 $V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.

$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 91/6 - (7/2)^2 = 35/12$ $V(X_2) = 35/12$

$V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 35/12 + 35/12 = 35/6$

$\sigma(X) = \sqrt{35/6}$