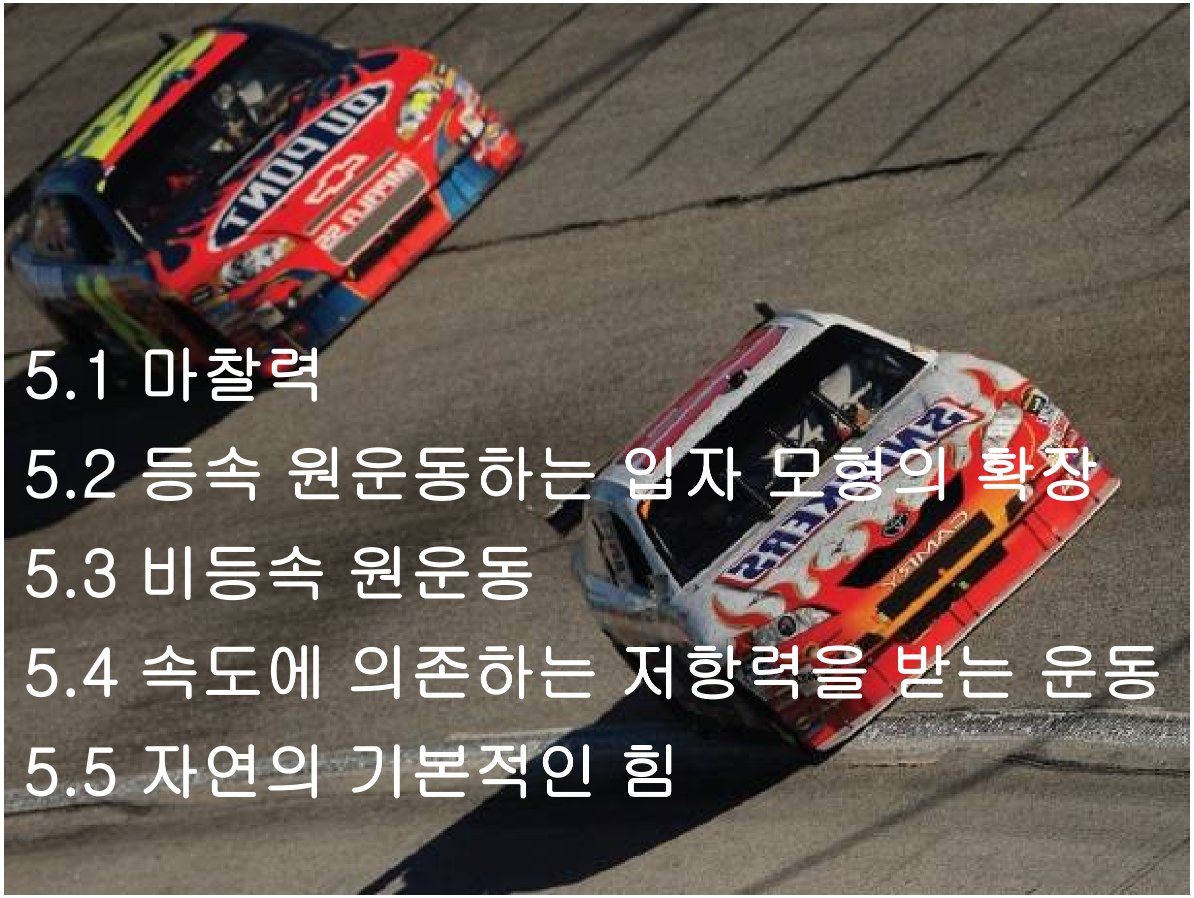
5장. 뉴턴 법칙의 응용



5.1 마찰력

5.2 등속 원운동하는 입자 모형의 확장

5.3 비등속 원운동

5.4 속도에 의존하는 저항력을 받는 운동

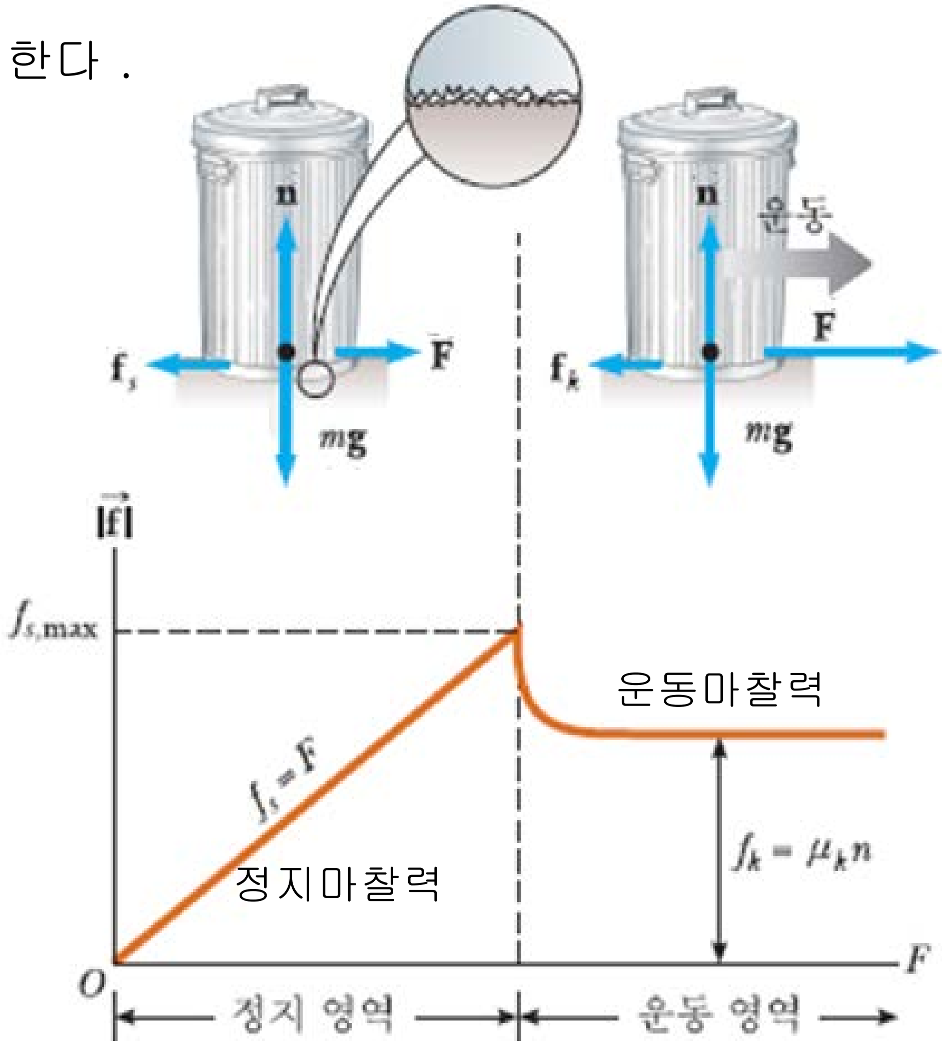
5.5 자연의 기본적인 힘

5.1 마찰력 Force of Friction)

마찰력(force of friction) :

물체가 주위와의 상호 작용 때문에 운동하는 데 받는 저항.

마찰력은 수직항력에 비례한다 .



정지 마찰력

$$f_s \le \mu_s n$$

μ_s : 정지마찰계수

운동 마찰력

$$f_k = \mu_k n$$

μ_k : 운동마찰계수

표 5.1 마찰계수

	μ_s	μ_k
콘크리트 위의 고무	1.0	0.8
강철 위의 강철	0.74	0.57
강철 위의 알루미늄	0.61	0.47
유리 위의 유리	0.94	0.4
강철 위의 구리	0.53	0.36
나무 위의 나무	0.25−0.5	0.2
젖은 눈 위의 왁스칠한 나무	0.14	0.1
마른 눈 위의 왁스칠한 나무	−	0.04
금속 위의 금속(윤활유를 칠한 경우)	0.15	0.06
테플론 위의 테플론	0.04	0.04
얼음 위의 얼음	0.1	0.03
인체의 관절	0.01	0.003

주의 : 모든 값은 근사값이다. 어떤 경우에는 마찰계수가 1.0을 넘기도 한다.

•마찰계수는 접촉면의 면적과 거의 무관하다

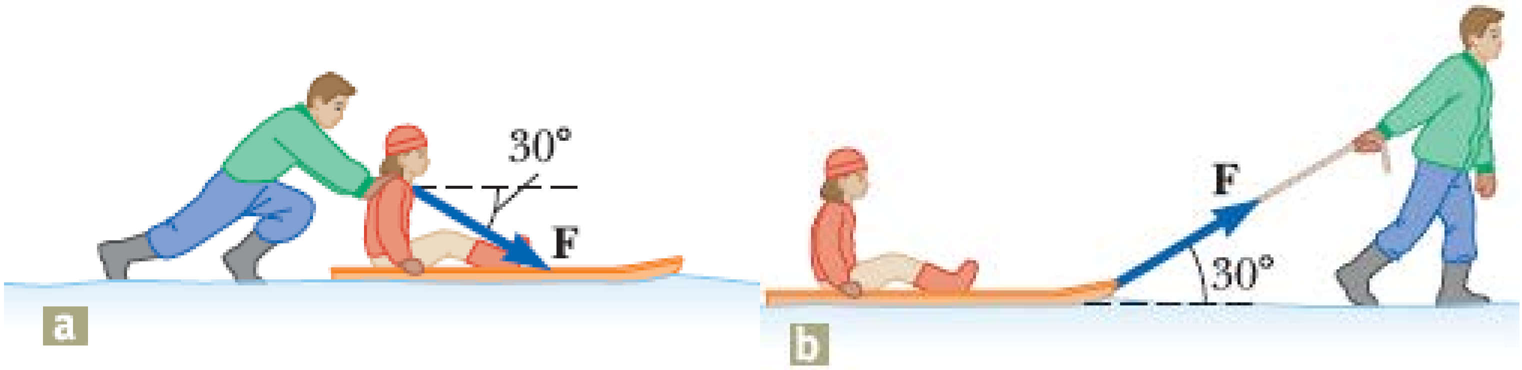
퀴즈 물리 책을 벽에 대고 누른다고 하자. 이때 책에 수직으로 수직항력이 작용한다. 벽이 책에 작용하는 마찰력은 어느 방향인가?

(a) 아래쪽 (b) 위쪽 (c) 벽에서 나오는 방향 (d) 벽을 향한 방향

퀴즈 아빠가 수평인 눈썰매장에서 딸의 썰매를 끌 때 다음 중 어느 것이 더 쉬울까?

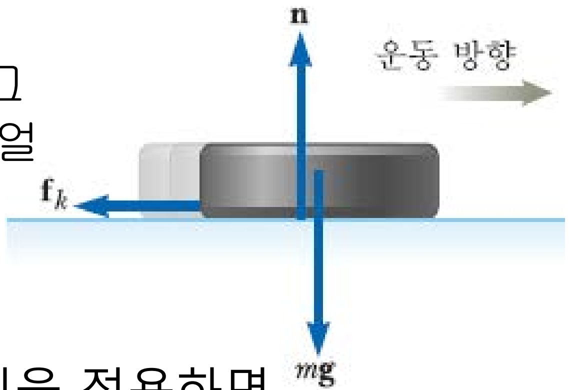
(a) 그림 a처럼 딸의 뒤에서 어깨를 수평과 30° 아래 방향으로 민다.

(b) 그림 b처럼 썰매에 줄을 묶어 수평과 30° 위 방향으로 끌어당긴다.



예제 5.1 미끄러지는 하키 퍽

얼음 위에 있는 하키 퍽의 처음 속력이 20.0 m/s이다. (A) 그 퍽이 얼음 위에서 115 m를 미끄러진 후 정지한다면, 퍽과 얼음 사이의 운동 마찰 계수를 구하라. (B) 퍽의 처음 속력이 위에서의 값의 반이라면, 도달거리는 얼마나 되는가?



(A) 수평 방향의 가속도를 *a*라 하자. 퍽에 뉴턴의 제2 법칙을 적용하면

$$\Sigma F_x = -f_k = ma$$

$$\Sigma F_y = n - mg = 0$$

$$f_k = \mu_k n$$

$$f_k = \mu_k mg$$

$$-\mu_k mg = ma$$

$$a = -\mu_k g$$

등가속도 운동을 하는 입자 모형의 식 $2a(x_f - x_i) = v_f^2 - v_i^2$ 를 이용하면

$$2(-\mu_k g)(x_f - 0) = 0^2 - v_i^2 \quad \Rightarrow \boxed{\mu_k = \frac{v_i^2}{2gx_f}} = \frac{(20\text{m/s})^2}{2(9.8\text{m/s}^2)(115\text{m})} = \boxed{0.177}$$

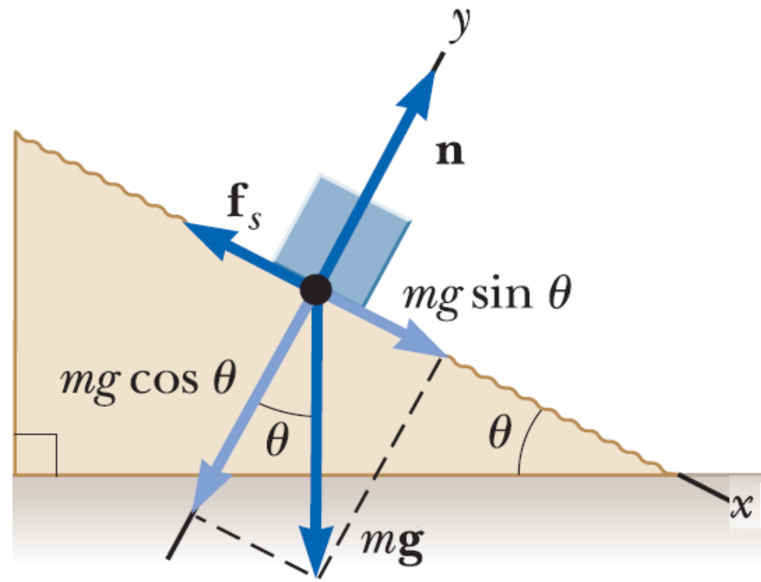
(B) (A)의 결과에서 나중 위치는 처음 속도의 제곱에 비례한다. $x_f \propto v_i^2$

$$x_f : v_i^2 = x_f' : v_i'^2, \quad v_i' = \frac{1}{2} v_i$$

$$\boxed{x_f' = \frac{1}{4} x_f}$$

예제 5.2 실험으로 μ_s 와 μ_k 결정하기

그림 같이 수평면에 대해 기울어진 비탈면에물체를 둔다. 이때 비탈면의 경사를 수평에서 물체가 막 미끄러질 때까지 서서히 증가시키자. 물체가 미끄러지기 시작할 때의 측정해서 μ_s 를 얻을 수 있음을 보여라.



경사면에 놓인 물체에 뉴턴의 제2 법칙을 적용하면

$$\Sigma F_x = mg\sin\theta - f_s = 0$$

$$\Sigma F_y = n - mg\cos\theta = 0 \rightarrow mg = n/\cos\theta$$

$$\rightarrow f_s = \left(\frac{n}{\cos\theta}\right)\sin\theta = n\tan\theta$$

$$f_s \le \mu_s n \qquad f_s = n\tan\theta \le \mu_s n$$

임계각 θ_c에 대해 $$\mu_s = \tan\theta_c$$

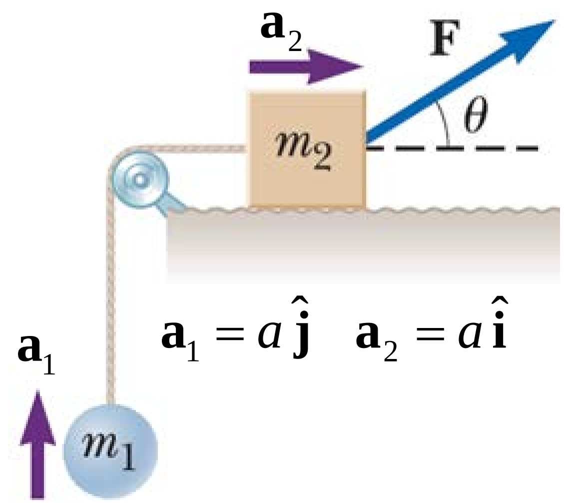
$\theta > \theta_c$ 이면 물체는 아래로 가속, 이때의 운동 마찰력은 $f_k = \mu_k mg\cos\theta$

경사각 θ 를 줄여 나가면, 물체가 평형 상태의 입자로서 등속 운동을 하는 각도 θ_c'를 구할 수 있다. 정지마찰계수를 구하는 과정에서 f_s를 f_k로 바꾸면

$$\mu_k = \tan\theta_c'$$

예제 5.3 마찰이 있는 경우 연결된 두 물체의 가속도

거친 수평면 위에 질량 m_1인 블록이 가볍고 마찰없는 도르래에 걸쳐진 가벼운 줄에 의해 질량 m_2 인 구와 연결되어 있다. 수평과 이루는 각이 θ인 방향으로 블록에 힘 F가 작용해서 오른쪽으로 미끄러지고 있다. 블록과 표면 사이의 운동마찰계수는μ_k이다. 두 물체의 가속도의 크기를 구하라.

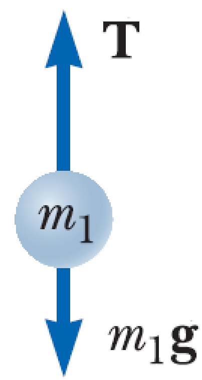


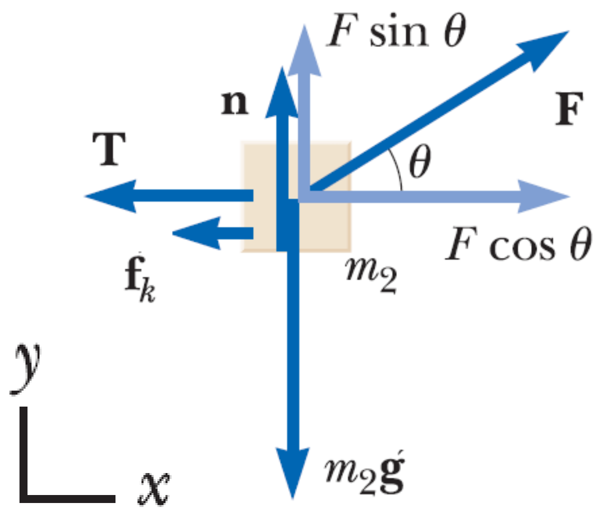
블럭에 대해

$$x\text{성분}: \; m_2 a = F\cos\theta - \mu_k n - T$$

$$y\text{성분}: \; n + F\sin\theta - m_2 g = 0$$

$$\boxed{m_2 a = F\cos\theta - \mu_k (m_2 g - F\sin\theta) - T}$$





구에 대해

$$y\text{성분}: \boxed{m_1 a = T - m_1 g}$$

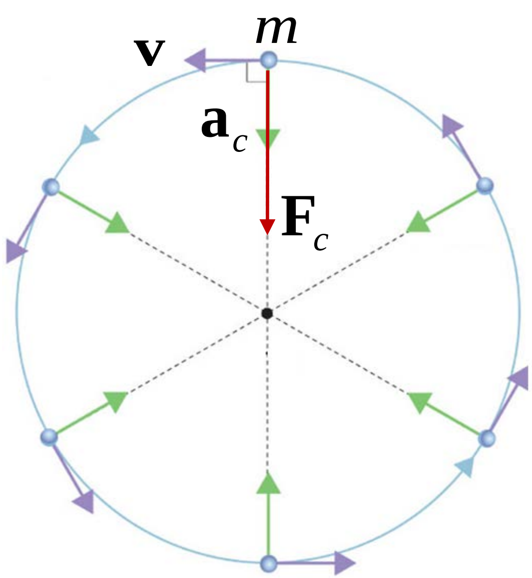
두 식을 더하면

$$(m_1 + m_2)a = F\cos\theta - \mu_k (m_2 g - F\sin\theta) - m_1 g$$

$$\therefore a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k \sin\theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g}{m_1 + m_2}$$

5.2 등속 원운동하는 입자 모형의 확장
Extending the Particle in Uniform Circular Motion Model

등속 원운동의 구심 가속도와 구심력



r :원의 반지름

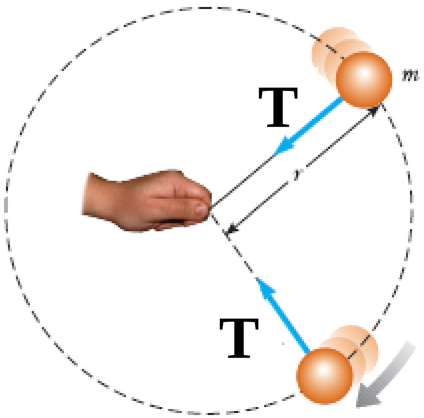
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_c$$

$$\mathbf{F}_c = m\mathbf{a}_c$$

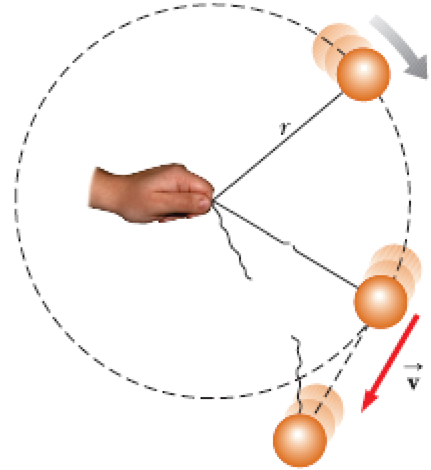
$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

수평면에서 실에 묶여 원 운동하는 물체



구심력 : 실의 장력

실이 끊기면



예제 5.4 얼마나 빨리 돌 수 있나?

질량 0.500 kg인 퍽이 길이 1.50 m인 밧줄 끝에 붙어 있다. 이 퍽은 수평면 위의 원을 따라 돌고 있다. 밧줄이 50.0 N의 최대 장력을 버틸 수 있다면, 밧줄이 끊어지지 않고 돌 수 있는 퍽의 최대 속력은 얼마인가? 줄은 운동의 전 과정에서 수평으로 유지된다고 가정한다.

줄의 장력이 구심력이 된다.

$$T = m\frac{v^2}{r} \quad \le T_{\max} = 50.0\mathrm{N}$$

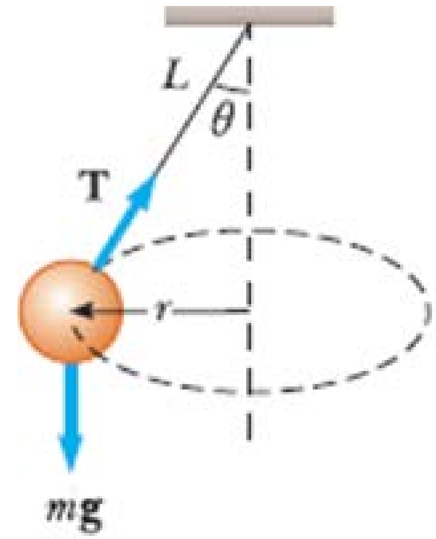
$$v \le \sqrt{\frac{rT_{\max}}{m}}$$

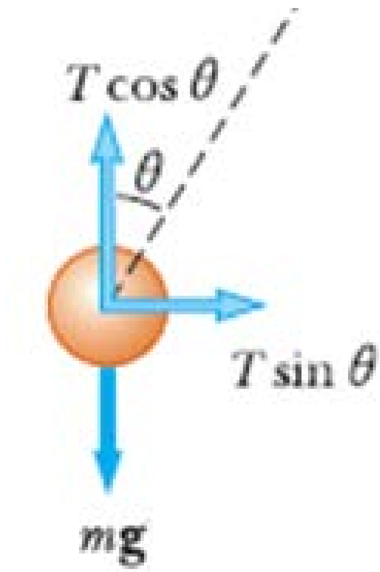
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{rT_{\max}}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1.5\mathrm{m})(50\mathrm{N})}{0.500\mathrm{kg}}} = 12.2\mathrm{m/s}$$

예제 5.5 원뿔 진자

질량 m인 작은 공이 길이 L인 끈에 매달려 있다. 그림처럼 이 공은 수평면에서 반지름 r인 원 위를 일정한 속력 v로 돌고 있다. 진자의 속력 v에 대한 식을 구하라.





$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta &= mg \\ T\sin\theta &= \frac{mv^2}{r} \end{aligned}\right\} \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore v = \sqrt{rg\tan\theta} \xrightarrow{r = L\sin\theta} v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}$$

예제 5.6 자동차의 최대 속력은 얼마인가?

1500 kg의 자동차가 평탄하고 수평인 곡선 도로에서 커브를 돌고자 한다커브의 **곡률 반지름이 35.0 m**이고 바퀴와 건조한 노면 사이의 **정지 마찰 계수가 0.523**일 때, 자동차가 길에서 안전하게 커브를 돌 수 있는 최대 속력을 구하라.

구심력은 타이어와 자동차의 접촉에 의한 마찰력이다.
이 마찰력이 없다면 타이어는 노면으로부터 미끄러지게 되고 자동차는 직선운동을 할 것이다. 따라서 자동차의 곡선 경로를 유지하는 힘은 **정지 마찰력**이다.

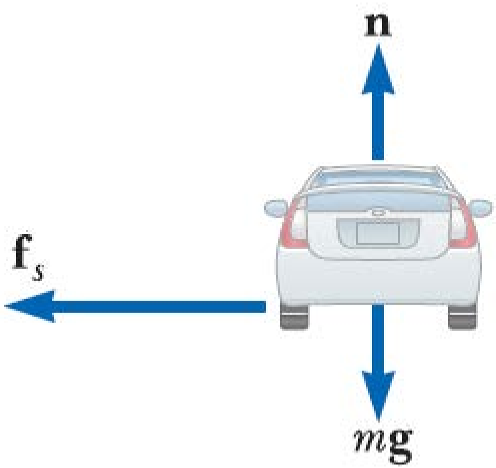
구심(지름) 방향에 대해

$$f_s = m\frac{v^2}{r} \qquad f_s \le \mu_s n$$

연직 방향에 대해

$$\Sigma F_y = n - mg = 0$$

$$m\frac{v^2}{r} \le \mu_s mg \qquad v^2 \le \mu_s gr$$



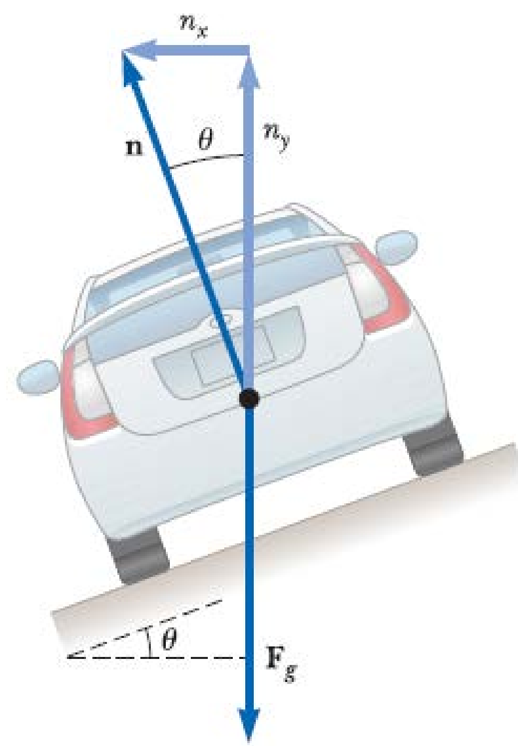
$$v_{\max} = \sqrt{\mu_s gr}$$

$$= \sqrt{(0.523)(9.80\text{m/s}^2)(35\text{m})} = 13.4\text{m/s}$$

예제 5.7 옆으로 경사진 길

도로가 미끄러워도 곡선 길을 안전하게 달릴 수 있는 경사진 도로를 설계 하고자 한다. 이런 길의 설계 속력이 13.4 m/s이고 곡선 도로의 곡률 반지름이 35.0 m라 할 때 이 길은 얼마나 안쪽으로 기울어져야 하는가?

마찰이 없다고 가정하자. 경사진 도로에서 수직항력의 수평성분 n_x가 구심력이 된다



$$n_x = n\sin\theta$$

구심(지름) 방향에 대해

$$n\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

연직 방향에 대해

$$\Sigma F_y = n\cos\theta - mg = 0$$

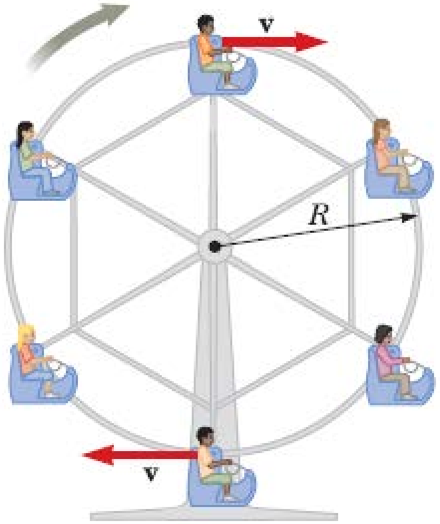
$$n\cos\theta = mg$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{gr}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(13.4\mathrm{m/s})^2}{(9.80\mathrm{m/s^2})(35.0\mathrm{m})}\right) = 27.6^{\circ}$$

예제 5.8 회전식 관람차

질량 m인 어린이가 그림처럼 회전식 관람차를 타고 있다. 어린이는 반지름이 10.0 m인 연직 원 위를 3.00 m/s의 일정한 속력으로 운동한다. (A)관람차가 연직 원의 궤도의 맨 아래에 있을 때 / (B) 맨 꼭대기에 있을 때 좌석이 이 어린이에게 작용하는 힘을 구하라.



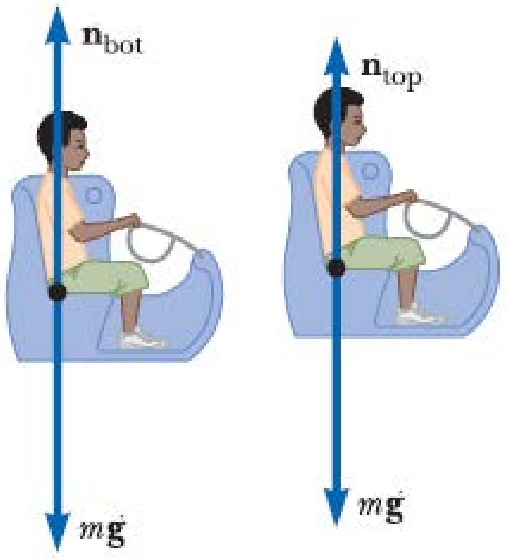
(A) $$\Sigma F = n_{bot} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$n_{bot} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left(1+\frac{v^2}{gr}\right)$$

$$n_{bot} = mg\left(1+\frac{(3.0\mathrm{m/s})^2}{(9.80\mathrm{m/s^2})(10.0\mathrm{m})}\right) = 1.09mg$$

(B) $$\Sigma F = mg - n_{top} = m\frac{v^2}{r}$$

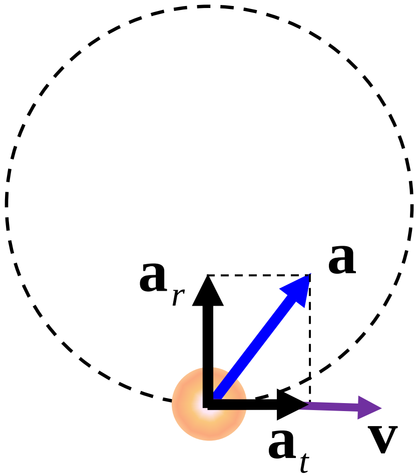
$$n_{top} = mg - m\frac{v^2}{r} = mg\left(1-\frac{v^2}{gr}\right) = 0.91mg$$



5.3 비등속 원운동
Nonuniform Circular Motion

일정하지 않은 속력의 로 원형궤도를 그리는 원운동의 가속도:
지름 성분 외에 접선 성분 존재

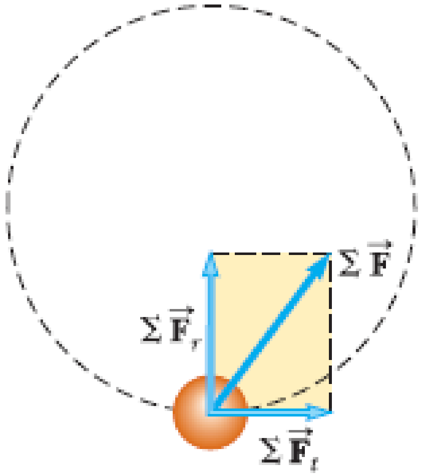
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$



$$a_r = -\frac{v^2}{r}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}$$

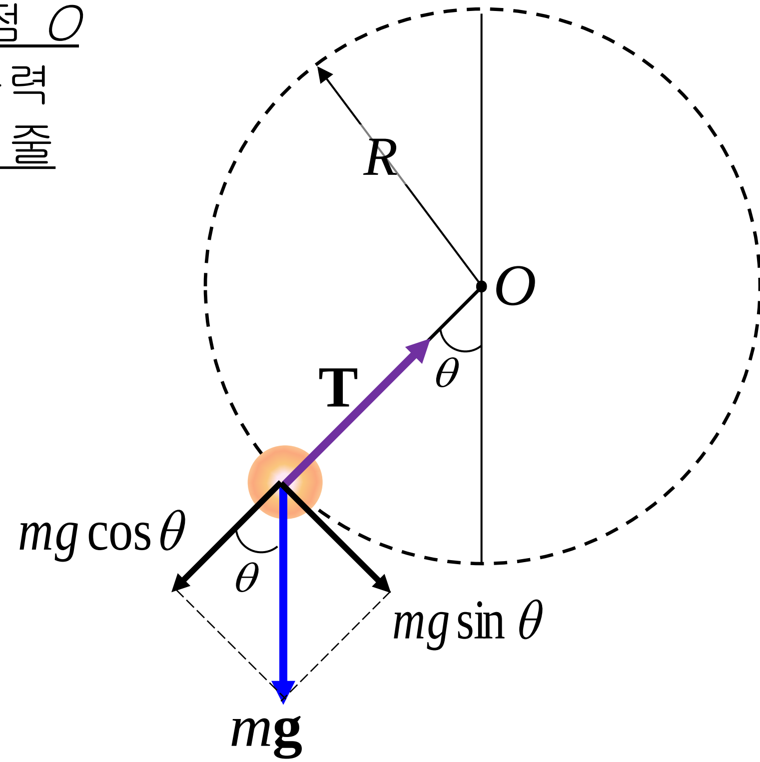
$$m\mathbf{a} = m\sum \mathbf{F}$$

$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_r + \sum \mathbf{F}_t$$



예제 5.9 공에 주목

m인 작은 구가 길이 R의 줄 끝에 매달려 고정된 점 O를 중심으로 수직 원운동을 하고 있다. 이 구의 속력이 v이고 줄이 수직 방향과 각 θ를 이루고 있을 때 줄의 장력을 구하라.



접선 방향에 대해

$$\Sigma F_t = mg\sin\theta = ma_t$$

$$a_t = g\sin\theta$$

지름 방향에 대해

$$\Sigma F_r = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = mg\left(\frac{v^2}{Rg} + \cos\theta\right)$$

$$T_{top} = mg\left(\frac{v_{top}^2}{Rg} - 1\right)$$

$$T_{bot} = mg\left(\frac{v_{bot}^2}{Rg} + 1\right)$$

5.4 속도에 의존하는 저항력을 받는 운동
Motion in the Presence of Velocity-Dependent Resistive Forces

유체(액체 또는 기체) 안에서 물체가 움직이면 유체는 그 안에서 움직이는 물체에 저항력(resistive force)을 작용한다.

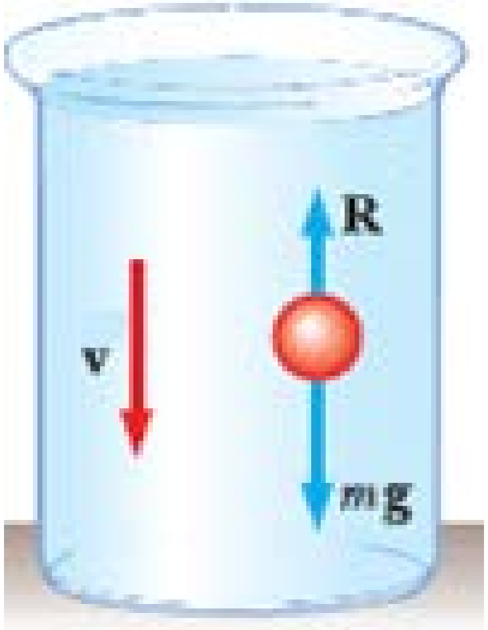
저항력의 방향은 언제나 물체의 매질에 대한 상대적인 운동 방향과 반대이고, 크기는 속력에 따라 복잡한 방식으로 변한다.

모형 1: 물체의 속도에 비례하는 저항력
(Model 1: Resistive Force Proportional to Object Velocity)

액체나 기체 속을 운동하는 물체에 작용하는 저항력이 물체의 속도에 비례하는 경우

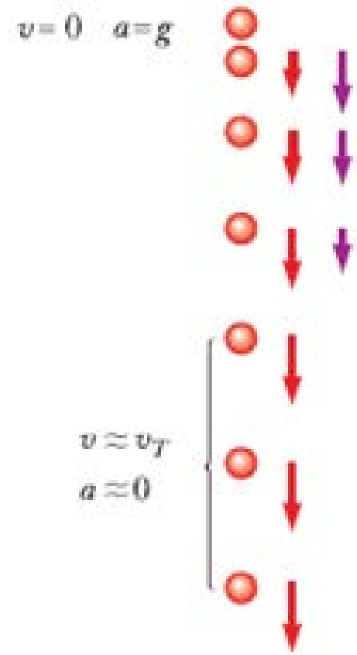
$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$$

b: 물체의 모양과 크기 그리고 매질의 성질에 의존하는 상수
$\mathbf{v}$: 물체의 매질에 대한 상대 속도



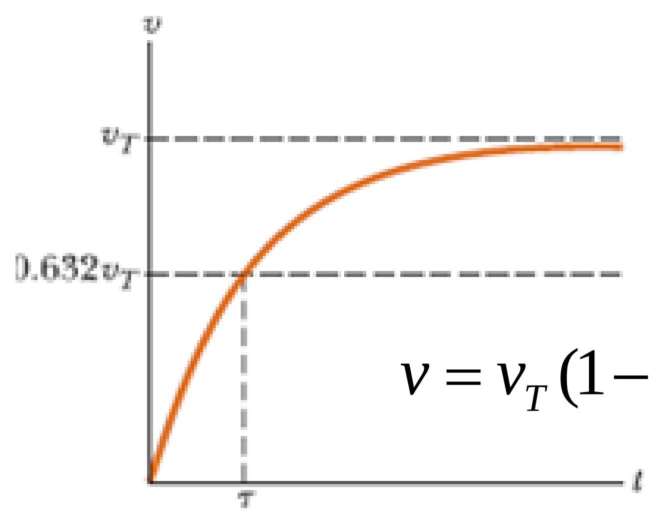
$$mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$



$$t >> \frac{m}{b} \quad \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} \to 0,\ \ v \to v_T$$:종단 속력 (terminal speed)

$$mg - bv_T = 0 \qquad \therefore v_T = \frac{mg}{b}$$



$$v = v_T(1 - e^{-bt/m})$$

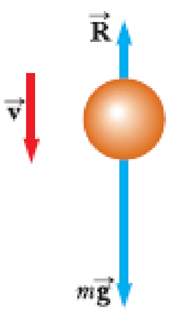
모형 2: 물체 속력의 제곱에 비례하는 저항력
(Model 2: Resistive Force Proportional to Object Speed Squared)

비행기, 스카이다이버, 자동차 또는 야구공처럼 공기 속에서 빠른 속력으로 운동하는 물체들에 대해서, 저항력이 속력의 제곱에 비례하는 것으로 비교적 잘 모형화할 수 있다.

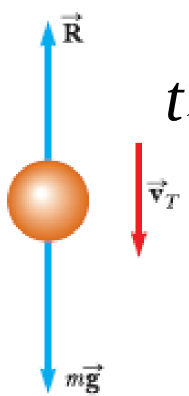
$$R = cv^2 \qquad\qquad c = \tfrac{1}{2} D\rho A$$

D(끌림 계수): 경험적으로 얻어지는 차원이 없는 양 $\quad$ ρ: 공기의 밀도
A: 운동하는 물체의 속도(운동 방향)에 수직인 평면에서 측정한 물체의 단면적

질량 m인 물체가 정지 상태에서 자유 낙하하는 경우



$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv^2 \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2$$



t가 매우 큰 경우 $\Rightarrow$ $a = \dfrac{dv}{dt} \to 0, \;\; v \to v_T$

$$g - \frac{c}{m}v_T^2 = 0 \qquad \therefore v_T = \sqrt{\frac{mg}{c}} = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}$$

5.5 자연의 기본적인 힘
The Fundamental Forces of Nature

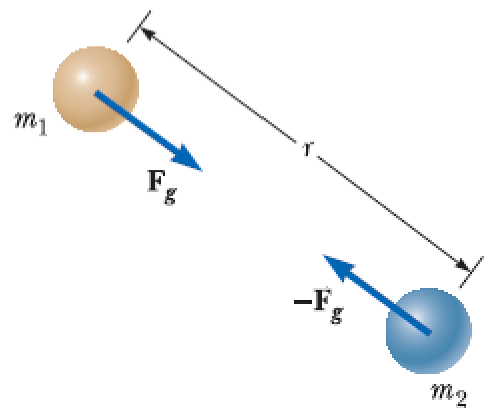
중력 (Gravitational force):

- 우주의 모든 두 물체 사이의 상호작용하는 인력
- 본질적으로 모든 기본적인 힘들 중 가장 약한 상호작용
  - 원자에서 전자와 양성자의 상호작용 살펴보면

    중력~10^{-47}N , 전자기력 ~~10^{-7}N

- 뉴턴의 만유인력의 법칙(Newton's law of universal gravitation)

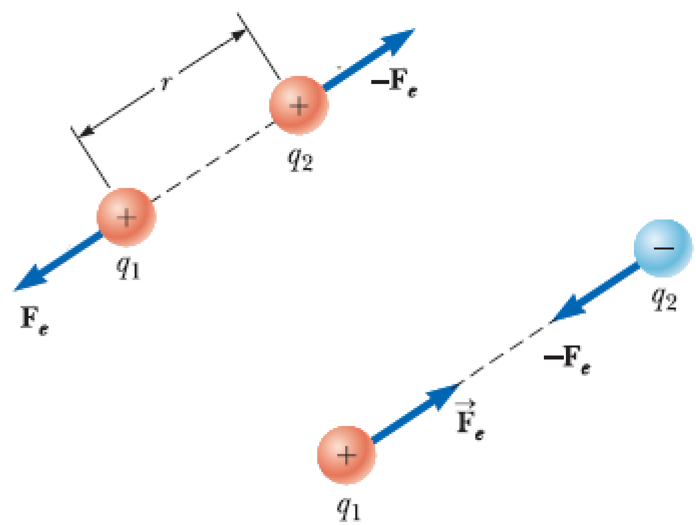
$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



전자기력(Electromagnetic force):

- 원자와 분자를 결합시켜 보통 물질을 형성
- 두 가지 형태의 입자(양전하와 음전하)와 관련되는 힘, 인력과 척력
- 거시적인 세계에서 중력을 제외한 모든 힘은 본질적으로는 전자기력으로 나타남
  - 마찰력, 접촉력, 장력과 늘어난 용수철의 힘은 가까이 있는 전하를 띤 입자 사이의 전자기력에 기인
- 거리 r 만큼 떨어진 점전하 q_1, q_2 사이의 정전기력은 **쿨롱의 법칙** (Coulomb's law)에 의해 기술됨

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



- 자기력은 움직이는 전하 사이에 존재

- **전하**
  - 자연에서 발견되는 고립된 전하의 가장 작은 양은 양성자와 전자의 전하 $+e$, $-e$
  - 양성자와 중성자를 구성 하는 쿼크(quark)의 전하: $+2e/3$, $-e/3$
  - 쿼크와 같은 입자의 실험적 증거는 발견됐으나 자유 쿼크(분리된 쿼크)는 아직 발견되지 않았음.

강력(Strong force):

- 핵자를 결합해서 핵을 구성하는 핵력(nuclear)의 근원
- 핵력은 쿼크 사이의 힘인 강력(strong force)으로 인해 나타남.
- 인력의 형태
- 매우 짧은 거리에서만 나타나는 근거리 힘
  - 10^{-14} m 이상의 거리에서는 무시됨

약력(Weak force):

- 핵의 불안정성을 주는 근거리 힘
  - 방사능 붕괴에 중요한 역할
- 중력보다 약 10^{34}배 강함
- 전자기력 보다 약 10^{3}배 약함

기본적인 힘의 현대적 관점

- 물리 현상을 기술하는 데 필요한 기본적인 힘들의 수를 줄일 수 있는 단순한 이론 체계 찾고 자 하는 노력
  - 전자기력과 약력을 전기약력(electroweak)의 단일 힘으로 통합 (이론 1967) (실험 1984)
  - 핵력은 쿼크들 사이 강력의 2차적 효과
- 자연의 기본적인 힘들은 우주의 기원과 관련이 있음