

3장. 이차원에서의 운동

3.1 위치, 속도 및 가속도 벡터

3.2 이차원 등가속도 운동

3.3 포물체 운동

3.4 분석 모형: 등속 원운동하는 입자

3.5 접선 가속도와 지름 가속도

3.6 상대 속도와 상대 가속도

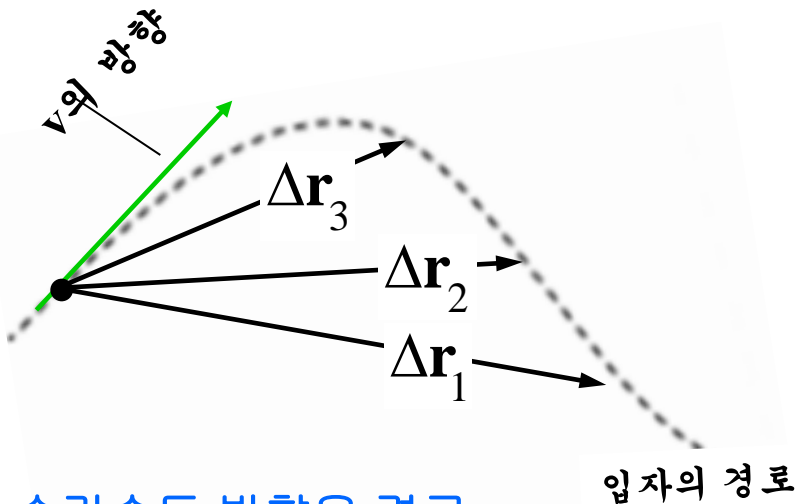
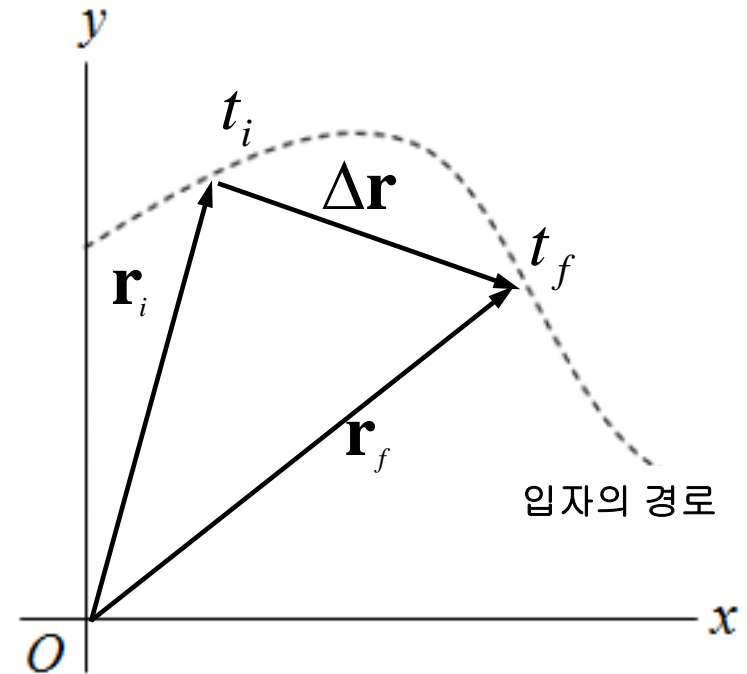
3.1 위치, 속도, 가속도 벡터

The Position, Velocity, and Acceleration Vectors

위치 벡터 $\mathbf{r} \equiv x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$

변위 $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$

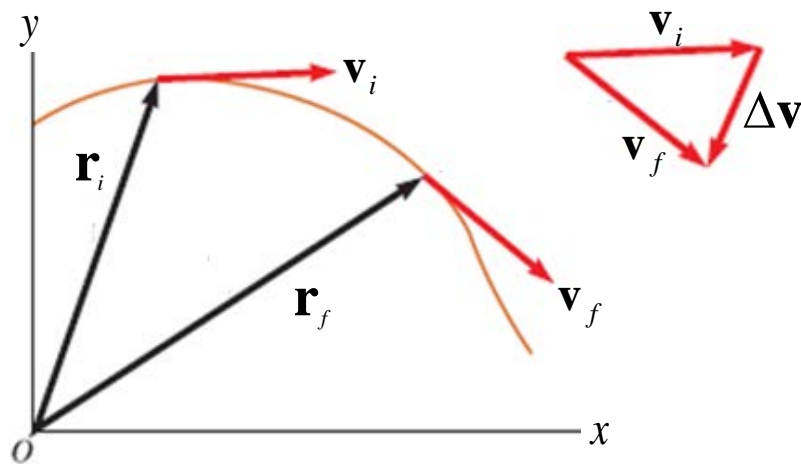
평균속도 $\mathbf{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$



순간속도 방향은 경로
에서 접선 방향

순간속도

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}}$$



평균가속도 $\mathbf{a}_{avg} \equiv \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

순간가속도 $\mathbf{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

3.2 이차원 등가속도 운동

Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration

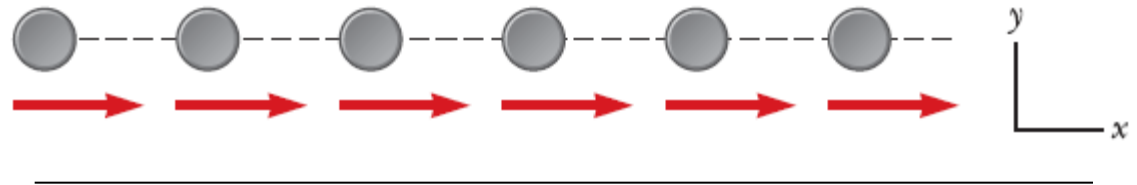
이차원 운동은 x 와 y 축 방향의 각각 독립된 두 개의 운동으로 기술될 수 있다.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

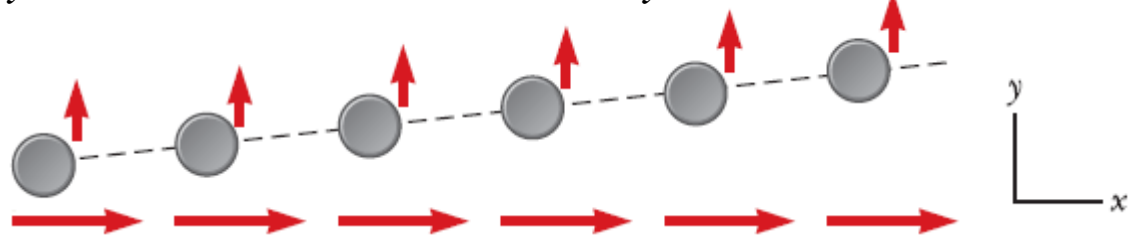
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

에어 테이بل을 가로질러 x 방향으로 등속 운동하는 하키 펙



y 방향으로 바람이 휩 분 후 펙은 y 성분의 속도를 얻는다.

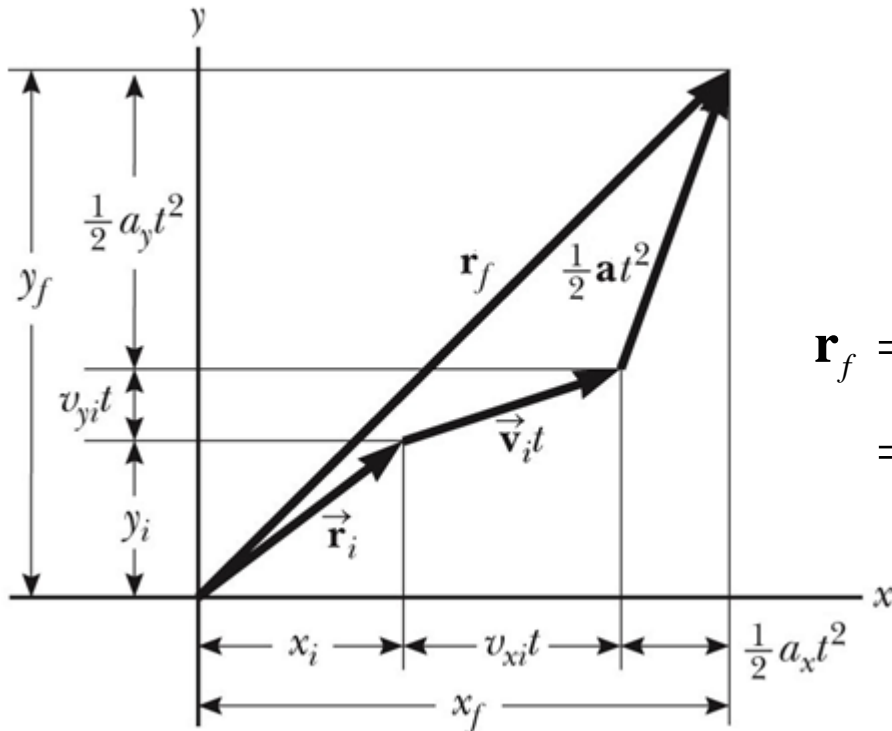
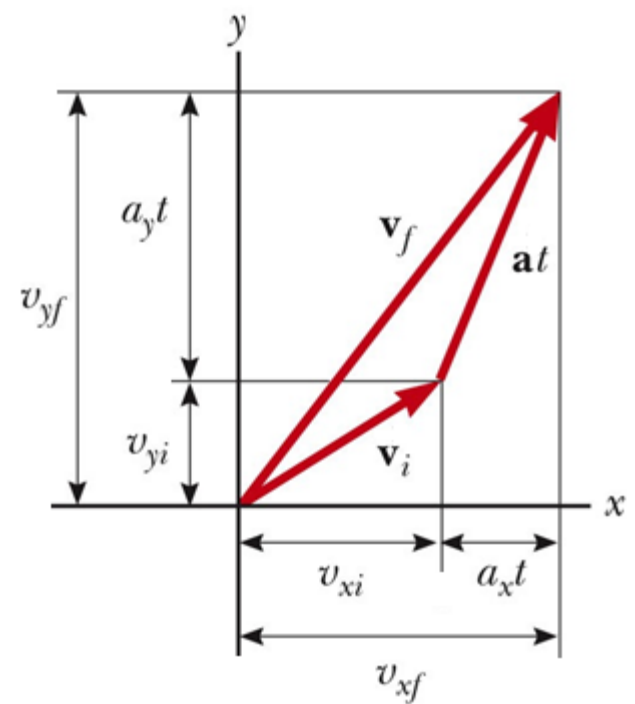


등가속도 운동의 경우

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f &= (v_{xi} + a_x t)\hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t)\hat{\mathbf{j}} \\ &= (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}}) + (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$



$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_f &= (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{\mathbf{i}} + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{\mathbf{j}} \\ &= (x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}}) + (v_{xi}\hat{\mathbf{i}} + v_{yi}\hat{\mathbf{j}})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}})t^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

예제 3. 1

평면에서의 운동

xy 평면에서 입자가 시간 $t = 0$ 일 때, x 성분은 **20 m/s**, y 성분은 **-15m/s**의 처음 속도로 원점에서 운동하기 시작한다. 이 입자는 x 성분의 가속도 a_x **4.0 m/s²**으로 운동한다. (A) 임의의 시간에서 전체 속도 벡터를 구하라. 시간 $t = 5.0$ s일 때 입자의 속도와 속력, 속도 벡터가 x 축과 이루는 각도를 구하라. (C) 임의의 시간 t 에서 입자의 x 및 y 좌표와 그 시간에서 입자의 위치 벡터를 구하라.

$$v_{xi} = 20 \text{ m/s}, v_{yi} = -15 \text{ m/s}, a_x = 4.0 \text{ m/s}^2, a_y = 0, x_i = y_i = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \mathbf{v}_f &= v_{xf} \hat{\mathbf{i}} + v_{yf} \hat{\mathbf{j}} \\ &= (v_{xi} + a_x t) \hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y t) \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

속도는 **m/s**, 시간은 **s**의 단위로 주어진 값들을 대입한다.

$$\mathbf{v}_f = (20 + 4.0t) \hat{\mathbf{i}} - 15 \hat{\mathbf{j}}.$$

$$\text{(B)} \quad t = 5.0 \text{ s일 때} \quad \mathbf{v}_f = 45 \hat{\mathbf{i}} - 15 \hat{\mathbf{j}}.$$

\mathbf{v}_f 와 x 가 이루는 각을 θ 라고 하면

$$\tan \theta = \frac{v_{yf}}{v_{xf}} = \frac{-15 \text{ m/s}}{40 \text{ m/s}} = -0.375$$

$$\theta = \tan^{-1}(-0.375) = -21^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} \quad x_f &= x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y_f &= y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned}$$

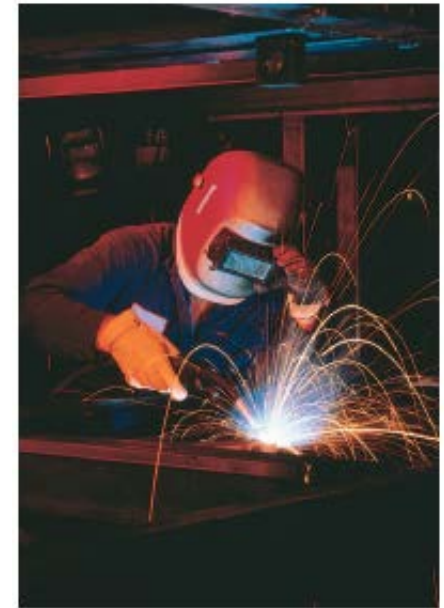
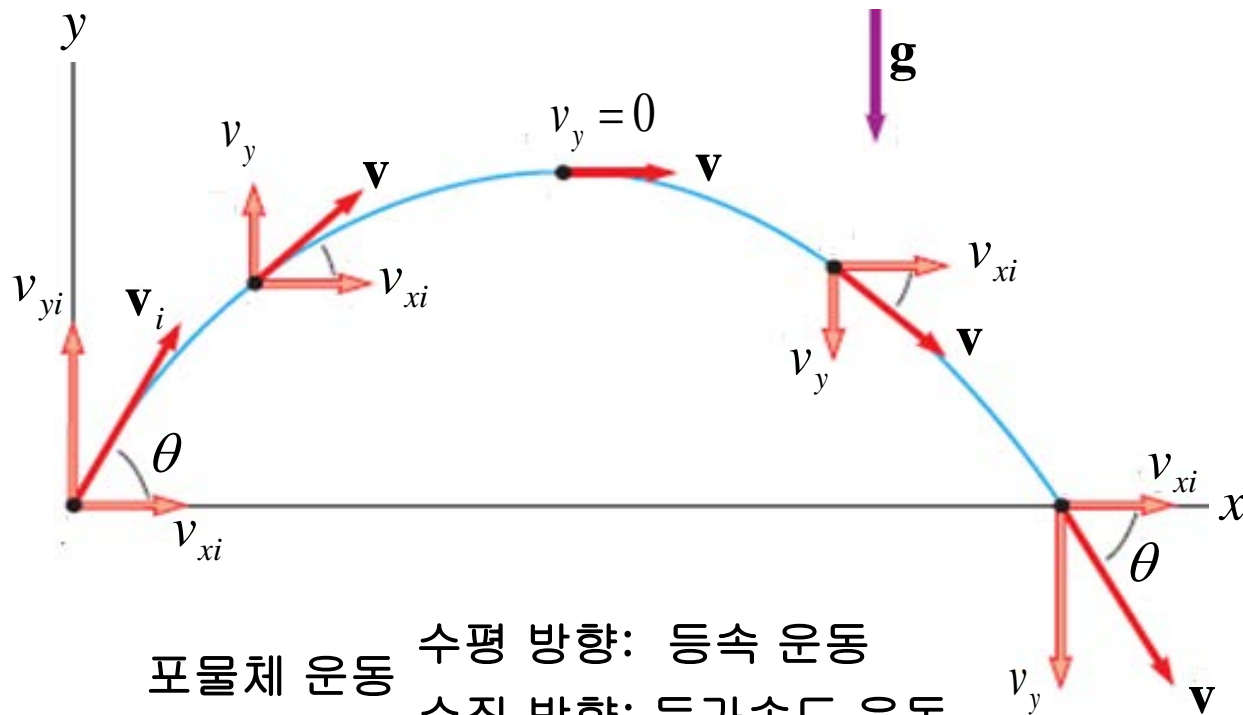
의 두식에 가속도는 **m/s²**, 속도는 **m/s**, 시간은 **s**의 단위로 주어진 값들을 대입한다.

$$x_f = 20t + 2.0t^2$$

$$y_f = -15t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_f &= x_f \hat{\mathbf{i}} + y_f \hat{\mathbf{j}} \\ &= (20t + 2.0t^2) \hat{\mathbf{i}} - 15t \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

3.3 포물체 운동 Projectile Motion



포물체 운동 수평 방향: 등속 운동
 수직 방향: 등가속도 운동

초기조건 : $t = 0$, $x_i = y_i = 0$, $v_{xi} = v_i \cos \theta$, $v_{yi} = v_i \sin \theta$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$v_x = v_i \cos \theta$$

$$v_y = v_i \sin \theta - gt$$

$$x = v_i \cos \theta \cdot t$$

$$y = v_i \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$$

최고점 도달 시간과 최대 높이

$$y = h, v_y = 0 \text{ @ } t = t_A$$

$$v_y = v_i \sin \theta - gt_A = 0$$

$$\therefore t_A = \frac{v_i \sin \theta}{g}$$

$$h = (v_i \sin \theta) \frac{v_i \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin \theta}{g} \right)^2 \quad \therefore h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

수평도달거리

$$x = v_i \cos \theta \cdot t$$

$$x = R, y = 0 \text{ @ } t = t_B$$

$$y = v_i \sin \theta \cdot t_B - \frac{1}{2} g t_B^2 = 0$$

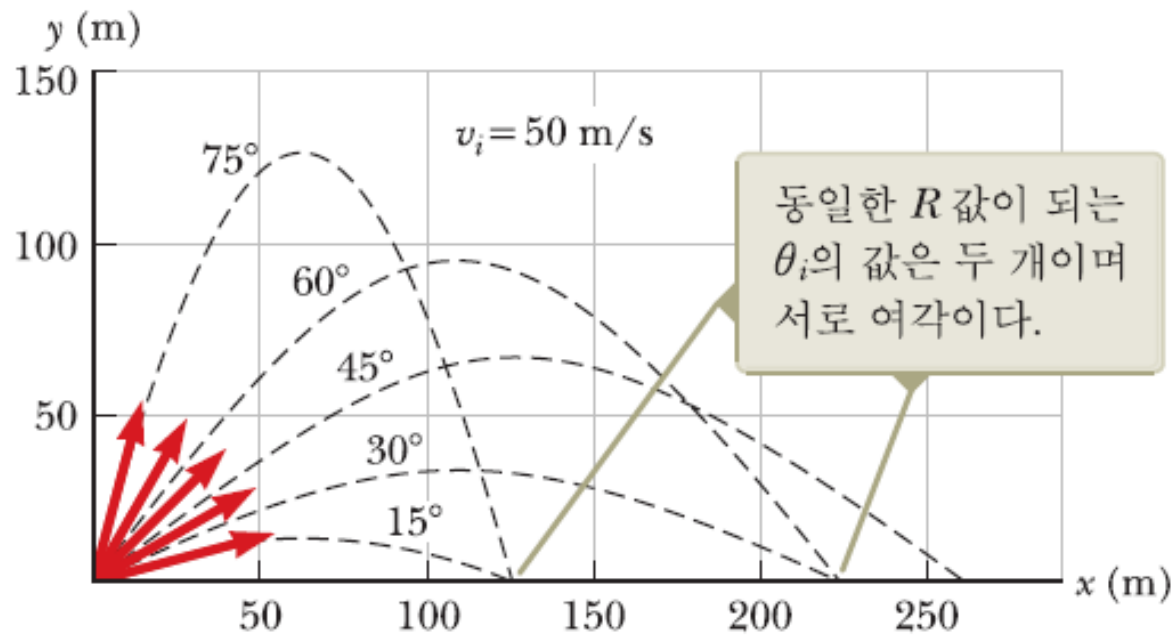
$$\therefore t_B = \frac{2v_i \sin \theta}{g} = 2t_A$$

$$R = v_i \cos \theta \cdot \frac{2v_i \sin \theta}{g}$$

$$\therefore R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta}{g}$$

$\theta_i = 45^\circ$ 일 때 수평도달거리는 최대 값 $R = v_i^2 / g$ 를 갖는다.

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta}{g}$$



예제 3. 2

건물의 옥상에서 수평과 30.0° 의 방향으로 20.0 m/s 의 처음 속력으로 던졌다. 돌을 던진 손의 위치는 지면으로부터 높이 75.0 m 이다. (A) 돌이 지면에 도달하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?

(B) 돌이 지면에 도달하기 직전의 속력은 얼마인가? (단, $g = 10.0 \text{ m/s}^2$.)

$$a_x = 0, a_y = -g = -10.0 \text{ m/s}^2, v_i = 20.0 \text{ m/s}, x_i = y_i = 0, y_f = 75.0 \text{ m}.$$

돌의 속도의 처음 성분은

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \sin \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \sin 30^\circ = 10.0 \text{ m/s}$$

(A) $y_f = y_i + v_i \sin \theta_i \cdot t + a_y t^2$ 에 주어진 값들을 가속도는 m/s^2 , 속도는 m/s , 시간은 s 의 단위로 대입하면 .

$$45 = 10t - 5t^2.$$

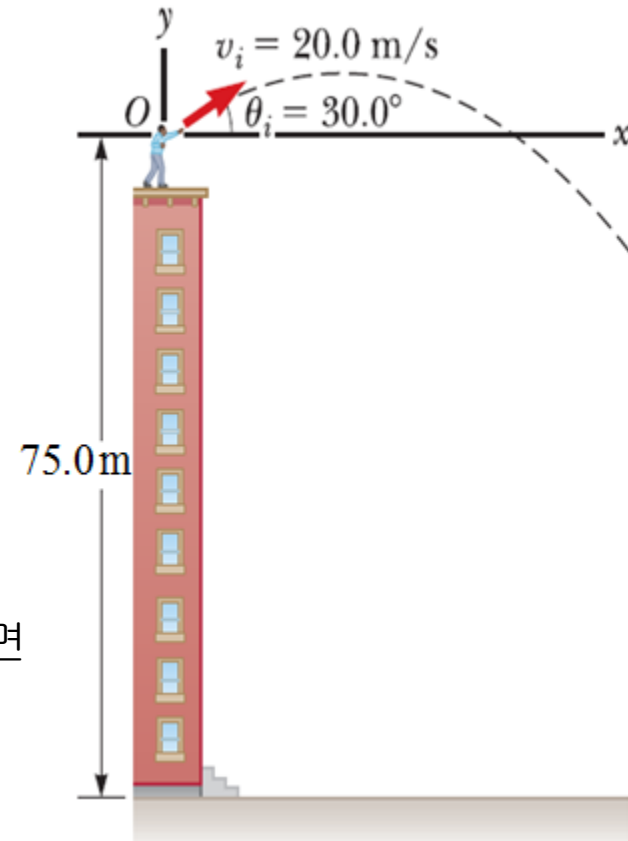
$$t = 5.0 \text{ s}$$

(B) $2a_y(y_f - y_i) = v_{yf}^2 - v_{yi}^2$ 에 주어진 값들을 대입하면

$$2(-10)(-75) = v_{yf}^2 - 10^2, \quad v_{yf}^2 = 1600 (\text{m/s})^2.$$

$$v_{xf} = v_{xi} = 17.3 \text{ m/s}.$$

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{17.3^2 + 1600} \text{ m/s} = 43.6 \text{ m/s}$$

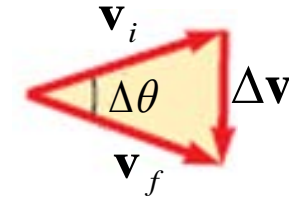
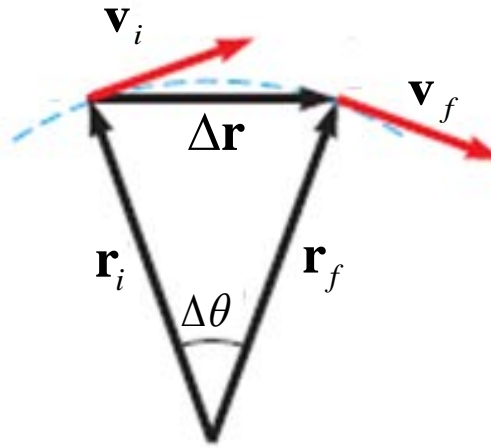
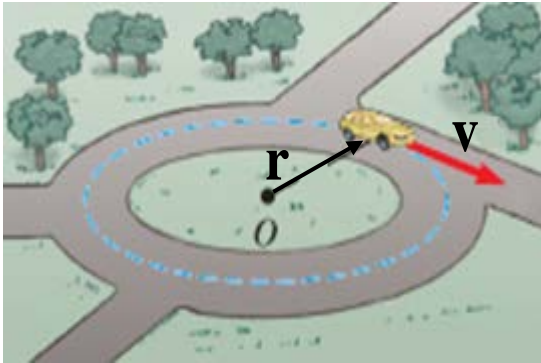


3.4 분석 모형: 등속 원운동하는 입자

Analysis Model: Particle in Uniform Circular Motion

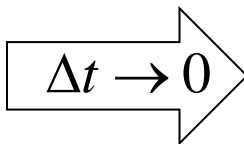
등속 원운동: 일정한 속력으로 원주 위를 움직이는 운동

$$\mathbf{r} \perp \mathbf{v} \quad |\mathbf{v}| = v (\text{일정})$$



$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{r}, \quad |\Delta \mathbf{v}| = \frac{v}{r} |\Delta \mathbf{r}|.$$

$$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad \left| a_{avg} \right| = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$



$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \rightarrow v \quad \Delta \mathbf{v} \rightarrow -|\Delta \mathbf{v}| \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a}_{avg} \rightarrow -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad \mathbf{a}_c = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

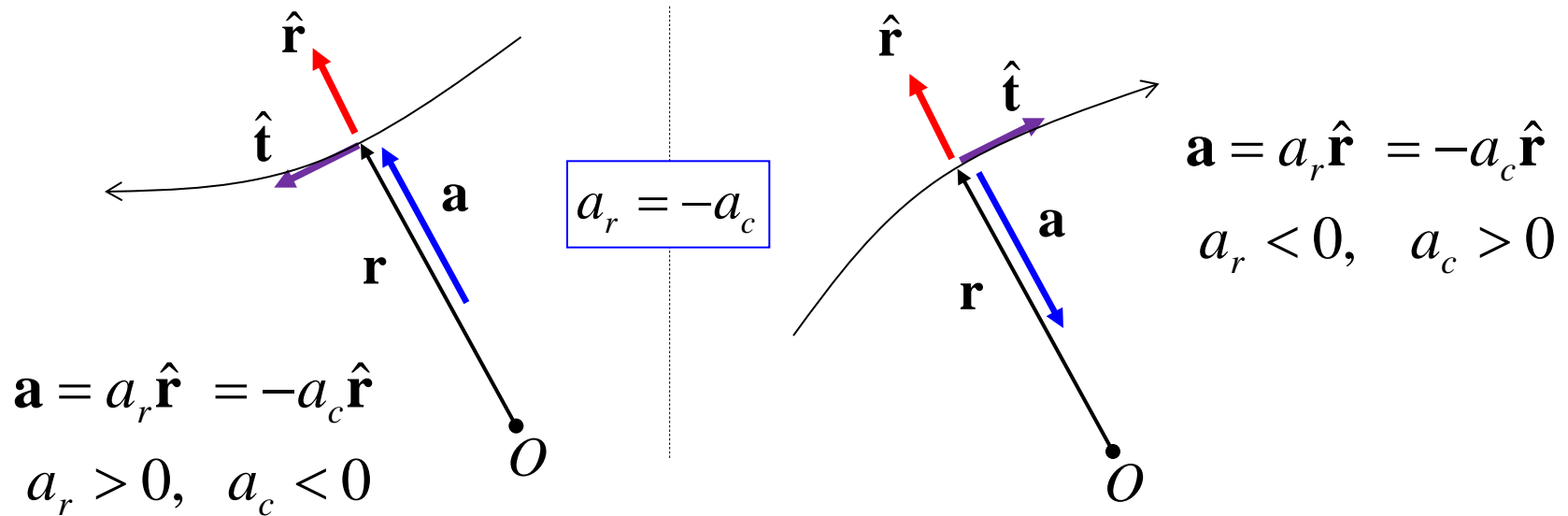
:구심 가속도

등속 원운동에서 입자의 주기 T

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

지름방향, 구심 방향 그리고 접선 방향



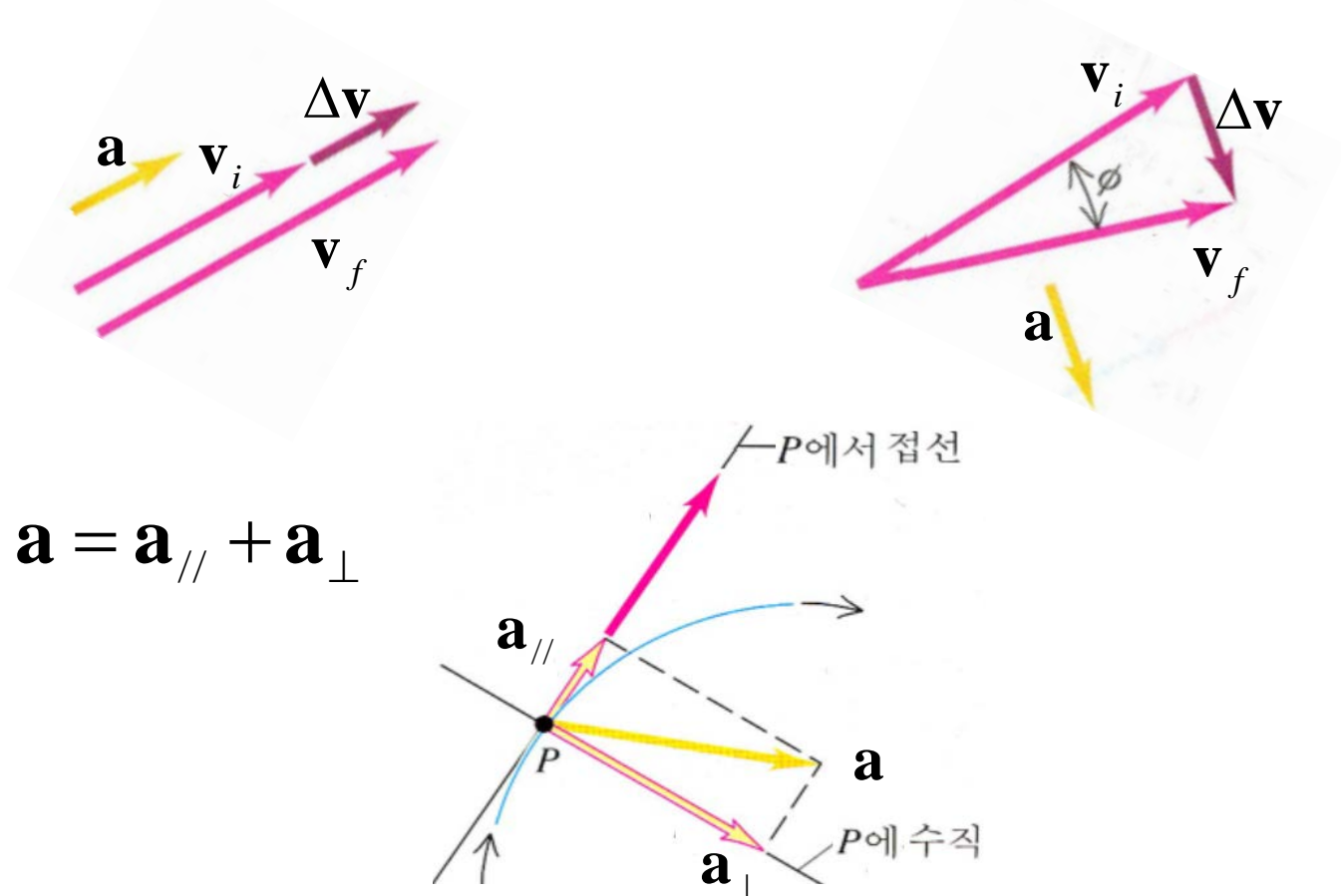
3.5 접선 및 지름 가속도 Tangential and Radial Acceleration

가속도의 속도와 나란한 성분과 수직인 성분

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}$$

속도 \mathbf{v} 가 가속도 \mathbf{a} 와 **평행**하면 \mathbf{v} 의 크기가 **변한다**.

속도 \mathbf{v} 가 가속도 \mathbf{a} 와 **수직**하면 \mathbf{v} 의 크기가 변화 없고 **방향이 변한다**.

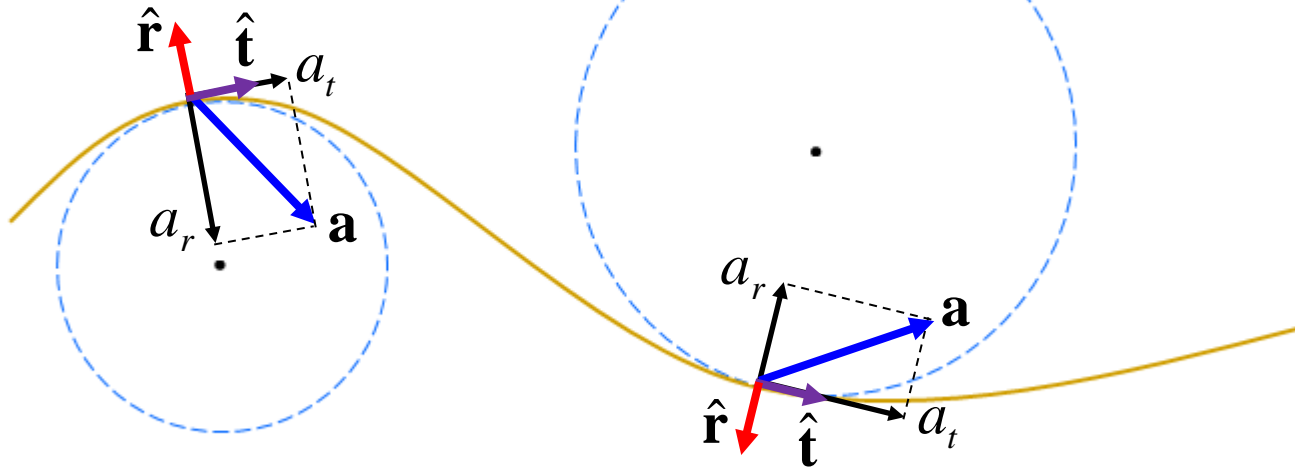


가속도의 접선 성분과 지름 성분

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$\hat{\mathbf{t}}$: 접선방향의 단위 벡터

$\hat{\mathbf{r}}$: 지름방향의 단위 벡터



접선 가속도

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} \Rightarrow \text{속력 변화}$$

지름 가속도

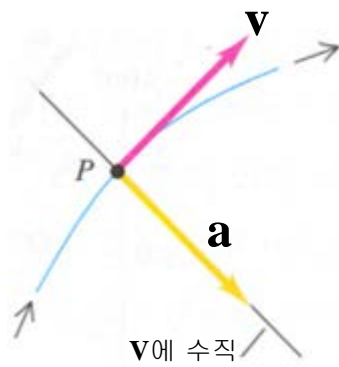
$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \Rightarrow \text{속도의 방향 변화}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

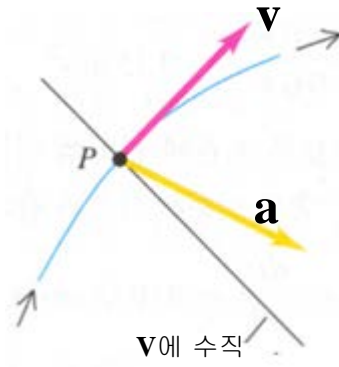
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

$$a_t = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt}, a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$

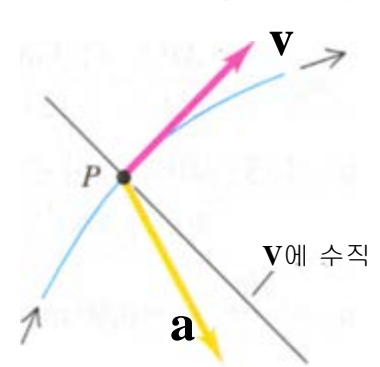
일정한 속력



증가하는 속력



감소하는 속력



3.6 상대 속도와 상대 가속도

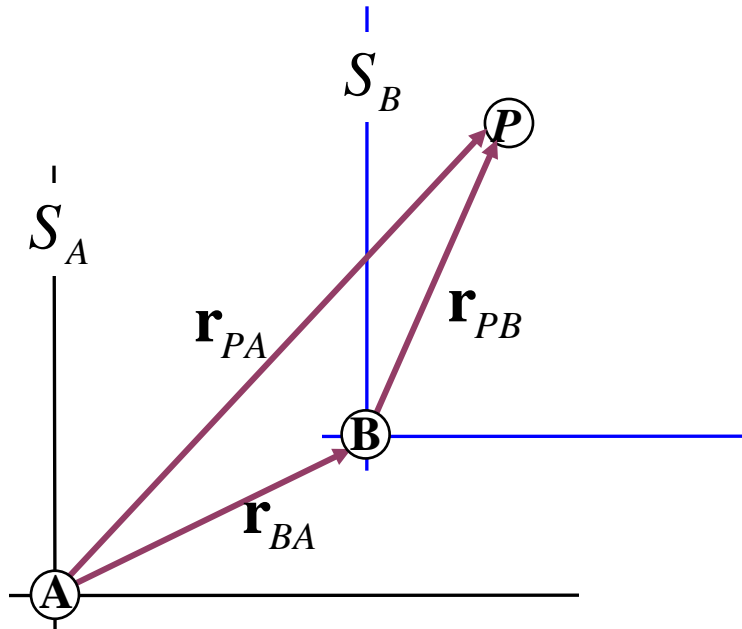
Relative Velocity and Relative Acceleration

관찰자 **A**, **B**가 입자 **P**의 운동을 관측한다.

관찰자 **A**는 기준틀 S_A 에 있고 **B**는 기준틀 S_B 에 있다.

기준틀 S_B 는 S_A 에 대해 속도 \mathbf{v}_{BA} 로 운동 한다.

\Leftrightarrow 관찰자 **B**는 **A**에 대해 속도 \mathbf{v}_{BA} 로 운동 한다.



\mathbf{r}_{PA} : **A**에 대한 **P**의 상대적 위치

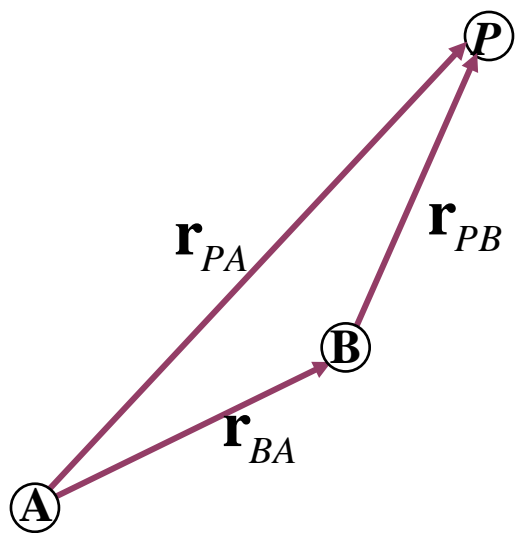
\mathbf{r}_{PB} : **B**에 대한 **P**의 상대적 위치

\mathbf{r}_{BA} : **A**에 대한 **B**의 상대적 위치

$$\mathbf{u}_{PA} = \frac{d\mathbf{r}_{PA}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_{AP}}{dt} \quad \mathbf{u}_{PB} = \frac{d\mathbf{r}_{PB}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_{BP}}{dt}$$

$$\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB} = \frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}$$

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA}$$



$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{r}_{BA}$$

$\frac{d}{dt}$ 양변

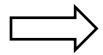
$$\mathbf{u}_{PA} = \mathbf{u}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$$

: 갈릴레이 변환식

$\frac{d}{dt}$ 양변

$$\frac{d\mathbf{u}_{PA}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_{PB}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt}$$

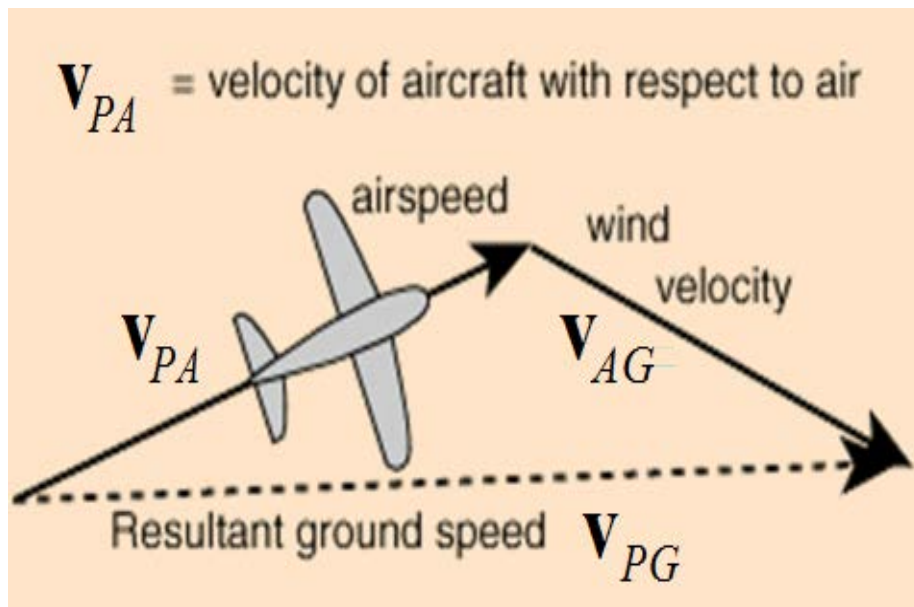
관찰자 A, B가 서로에 대해 일정하게 움직인다고 가정하면 $\Leftrightarrow \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt} = 0$



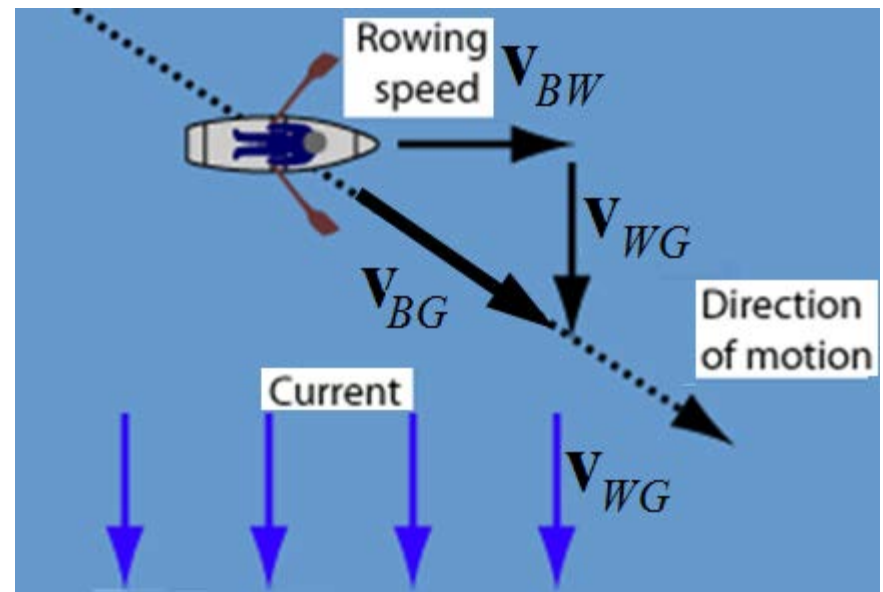
$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}$$

한 기준틀에 있는 관찰자가 측정한 입자의 가속도는 그 기준틀에 대해 등속도로 상대운동하는 다른 관찰자가 측정한 가속도와 같다.

$$\mathbf{u}_{PA} = \mathbf{u}_{PB} + \mathbf{v}_{BA} \implies \mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$$



$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_{PA} + \mathbf{v}_{AG}$$



$$\mathbf{v}_{BG} = \mathbf{v}_{BW} + \mathbf{v}_{WG}$$

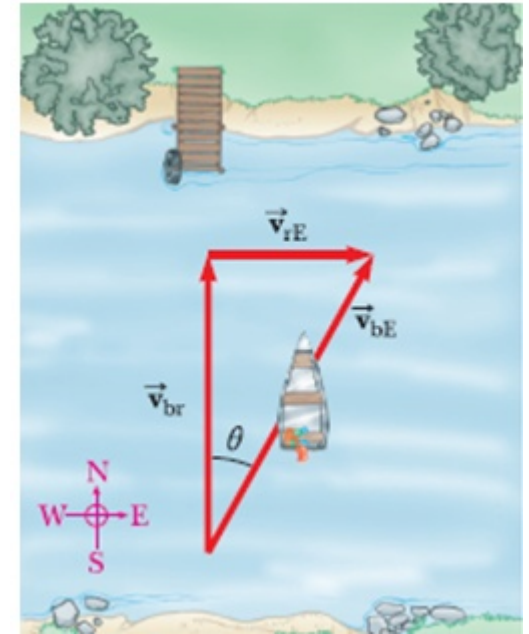
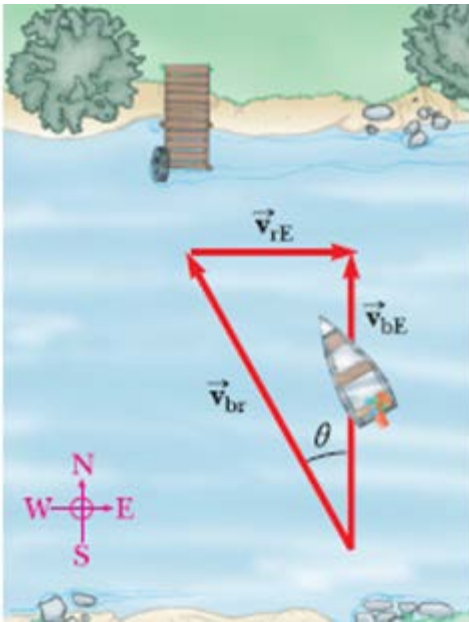
예제 3.6 강을 가로질러 가는 배

넓은 강을 건너는 배가 물에 대해 상대적으로 10.0km/h의 속력으로 움직인다. 강물은 지구에 대해 동쪽으로 5.00km/h의 일정한 속력으로 흐르고 있다. (A) 만약 배가 북쪽을 향하고 있다면, 강둑에 서 있는 관찰자에 대한 배의 상대 속도를 구하라. (B) 만약 최단거리로 북쪽으로 이동하려 한다면, 배가 향해야 하는 방향은?

$$\mathbf{V}_{bE} = \mathbf{V}_{br} + \mathbf{V}_{rE}$$

$$(A) \quad v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0)^2 + (5.00)^2} = 11.2 \text{ km/h}$$

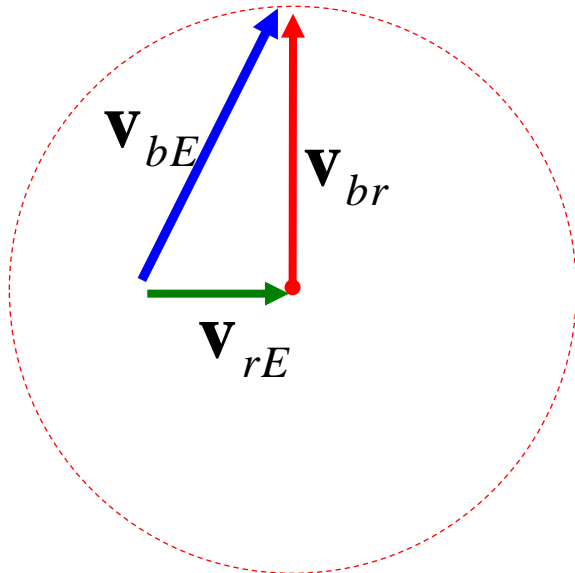
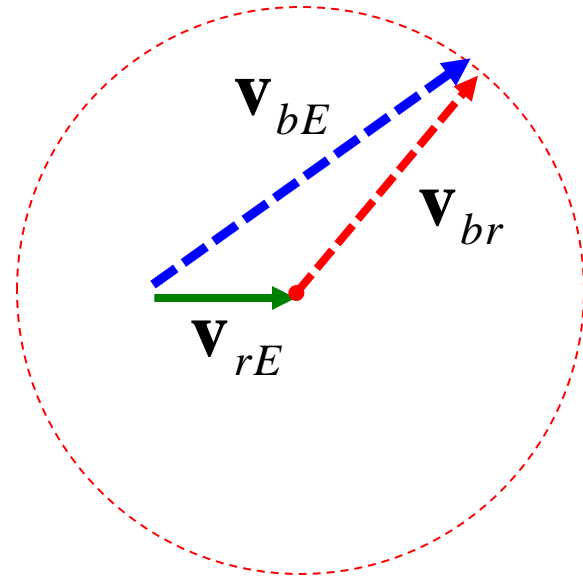
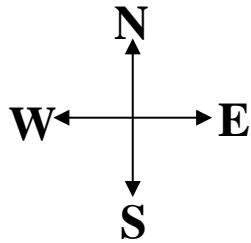
$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_{rE}}{v_{br}} = \tan^{-1} \left(\frac{5.00}{10.00} \right) = 26.6^\circ$$



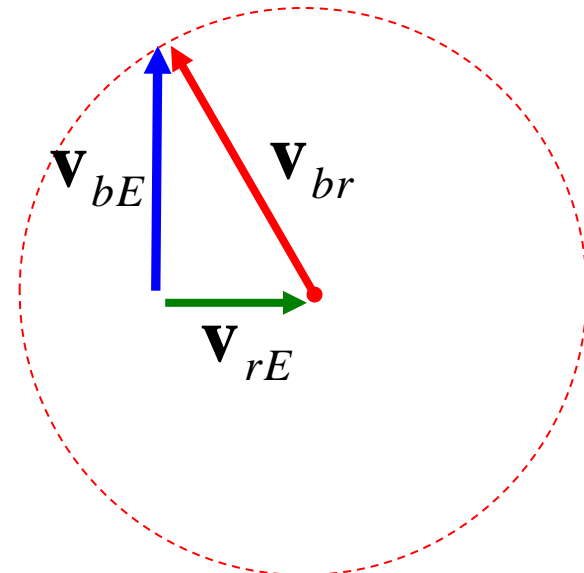
$$(B) \quad v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0)^2 - (5.00)^2} = 8.66 \text{ km/h}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_{rE}}{v_{bE}} = \tan^{-1} \left(\frac{5.00}{8.66} \right) = 30.0^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bE} = \mathbf{V}_{br} + \mathbf{V}_{rE}$$



최단 시간에 건너기



최단 거리로 건너기