

6장. 계의 에너지

6.1 계와 환경

6.2 일정한 힘이 한 일

6.3 두 벡터의 스칼라곱

6.4 변하는 힘이 한 일

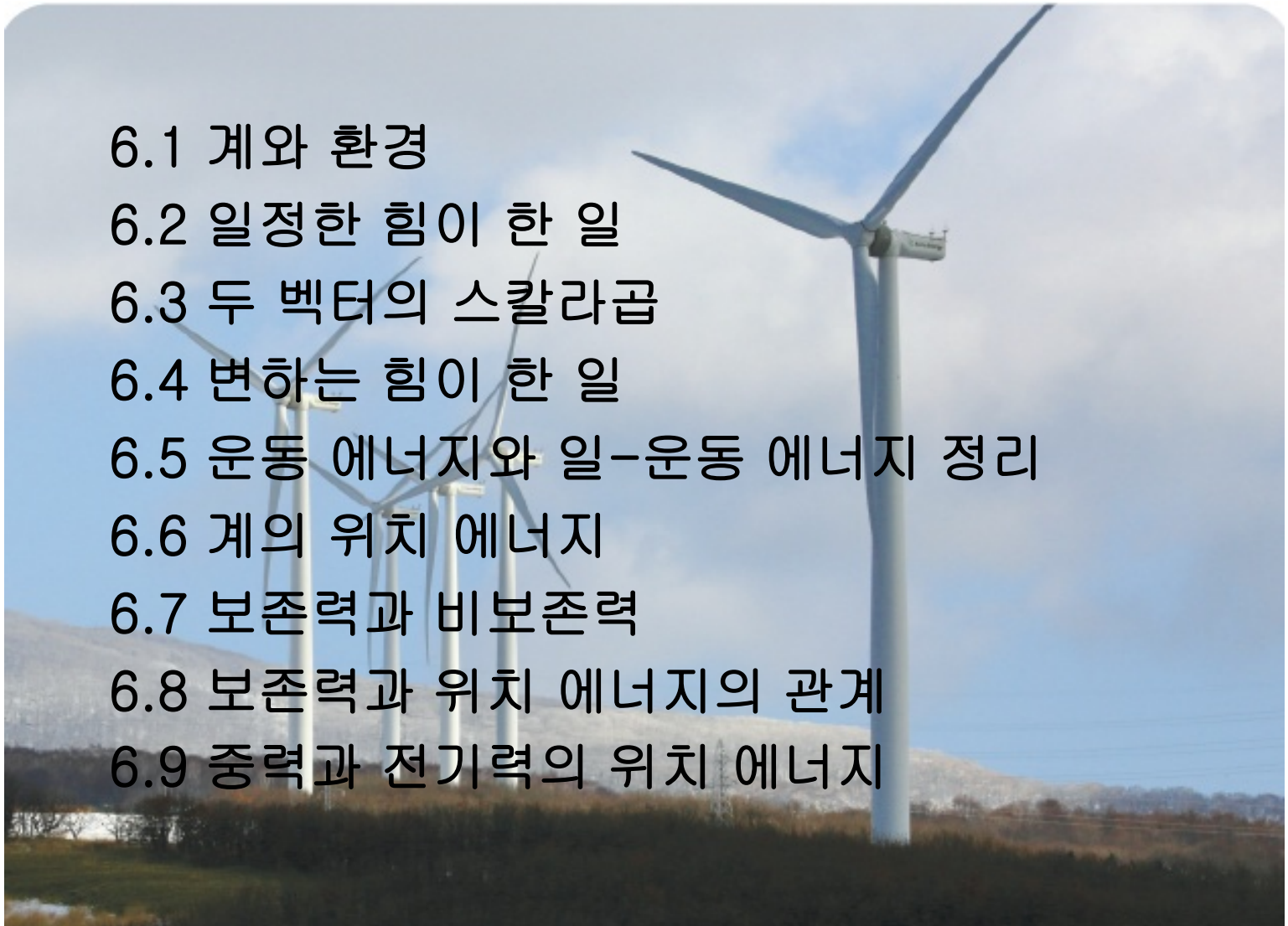
6.5 운동 에너지와 일-운동 에너지 정리

6.6 계의 위치 에너지

6.7 보존력과 비보존력

6.8 보존력과 위치 에너지의 관계

6.9 중력과 전기력의 위치 에너지

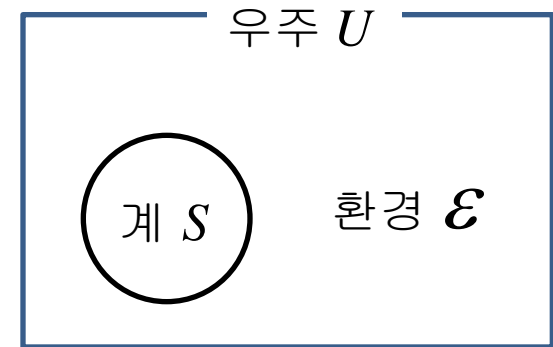


6.1 계와 환경 Systems and Environments

계 모형에서, 우주의 (작은) 한 부분, 즉 **계(system)**에 대해 관심을 집중하고 그 계를 제외한 우주의 나머지 부분에 대한 구체적인 사항은 무시한다.

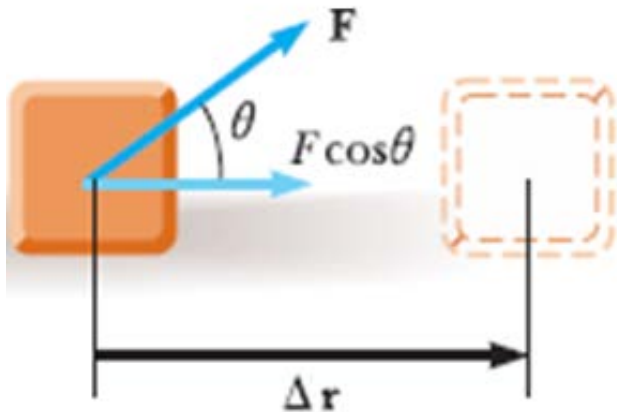
유효한 계

- 하나의 물체 또는 입자
- 물체나 입자들의 집합
- 공간의 일부 영역 (예: 자동차 엔진의 실린더 내부).
- 크기와 모양이 변할 수 있는 것(예: 고무공처럼 벽에 부딪치면 변형되는 것).



주어진 문제에서 특정한 계가 무엇이든 간에, 계의 **경계(system boundary)**라는 가상의 면(꼭 물리적인 면과 동일할 필요는 없다)이 있는데, 이 면은 우주를 계와 그 계를 둘러싼 **환경(environment)**으로 분리한다.

6.2 일정한 힘이 한 일 Work Done by a Constant Force



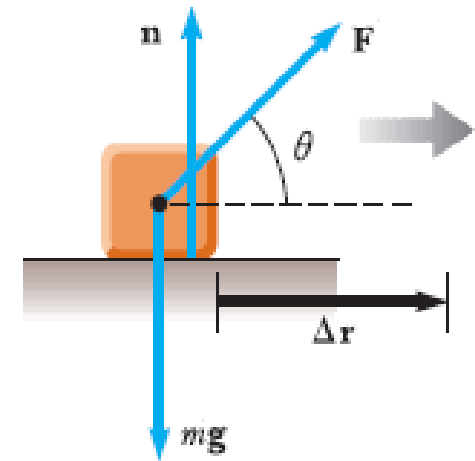
어떤 계에 일정한 크기의 힘 \mathbf{F} 가하는 주체가 계에 한 일(work) W :

$$W \equiv F \Delta r \cos \theta$$

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

(스칼라량)

힘이 작용하더라도 변위가 없으면 일은 없다.
물체가 움직이더라도 힘과 변위가 수직이라면 그 힘이 한 일은 영이다.



단위: $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$

일은 **에너지의 전달**이다. W 는 계에 더해진 일

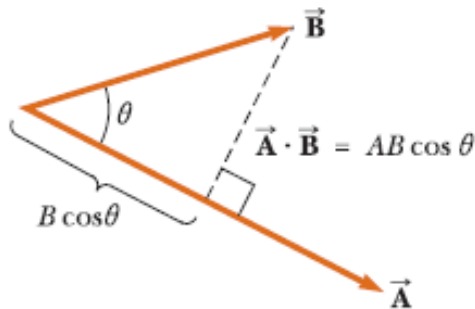
$W > 0 \Rightarrow$ 에너지가 계로 전달됨

$W < 0 \Rightarrow$ 에너지가 계로부터 환경으로 전달됨

계가 환경과 상호 작용한다면 이 상호 작용은 계의 경계를 통한 에너지의 전달로 묘사할 수 있다. 이 결과로 계에 저장된 에너지가 변한다.

6.3 두 벡터의 스칼라곱 The Scalar Product of Two Vectors

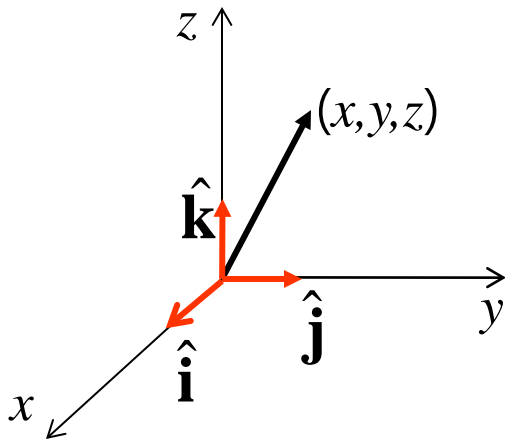
임의의 두 벡터 A 와 B 의 스칼라곱



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{교환법칙})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{분배법칙})$$



단위벡터 사이의 스칼라곱

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

두 벡터를 성분으로 표시하면

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \text{인 경우 } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

$$\text{일의 표현은 } W = F \Delta r \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

예제 6.2 스칼라곱

두 벡터 $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ 와 $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ 에 대해 (A) 스칼라곱 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 를 구하라.
(B) \mathbf{A} 와 \mathbf{B} 사이의 각 θ 를 구하라.

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -2\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}} \\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1) \\ &= -2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} \\ B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) = 60.3^\circ$$

예제 6.3 일정한 힘이 한 일

xy 평면 상에서 한 입자가 $\Delta \mathbf{r} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\text{m}$ 의 변위만큼 움직이는 동안 $\mathbf{F} = (5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\text{N}$ 의 일정한 힘이 작용한다.

(A) 힘과 변위의 크기를 각각 구하라.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = 5.4\text{N}$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = 3.6\text{m}$$

(B) F 가 입자에 한 일을 계산하라.

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

$$= \left[(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\text{N} \right] \cdot \left[(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\text{m} \right]$$

$$= (5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}})\text{N} \cdot \text{m}$$

$$= (10 + 0 + 0 + 6)\text{N} \cdot \text{m} = 16\text{J}$$

6.4 변하는 힘이 한 일 Work Done by a Varying Force

힘이 변위와 나란하고,
힘이 일을 하는 동안 힘이 변하는 경우

$$\mathbf{F} \parallel \Delta \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} \quad \Delta \mathbf{r} = \Delta x \hat{\mathbf{i}}$$

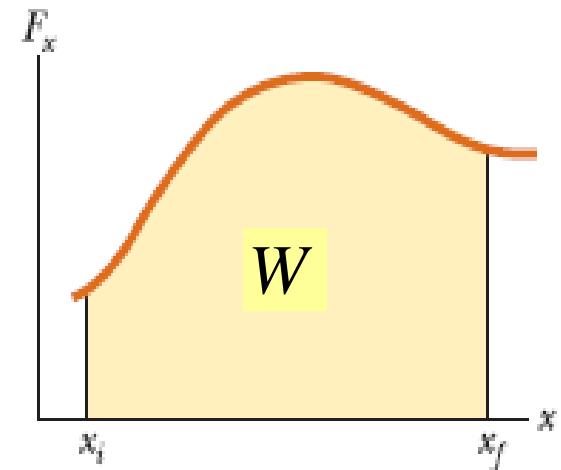
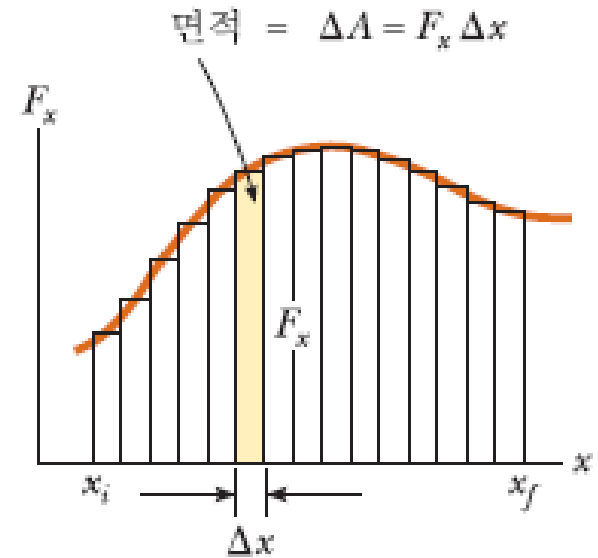
변위 Δx 에 대해 한 일: $\Delta W \approx F_x \Delta x$

전체 변위에 대하여 더하면 $W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$

구간의 크기를 0으로 접근시키면

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$



어떤 계에 하나 이상의 힘이 작용할 때, 이 계에 대해 한 **전체 일은 알짜힘이 한 일과 같다.**

$$\sum_k W_k = \sum_k \left(\int_{x_i}^{x_f} F_x^{(k)} dx \right) = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum_k F_x^{(k)} \right) dx$$

일반적인 경우 $\sum \left(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right) = \int \left(\sum \mathbf{F} \right) \cdot d\mathbf{r}$

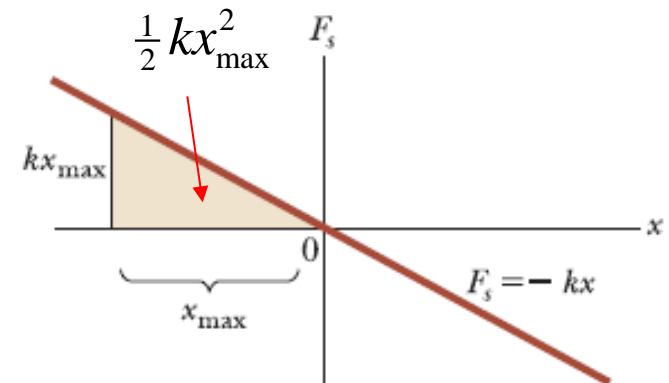
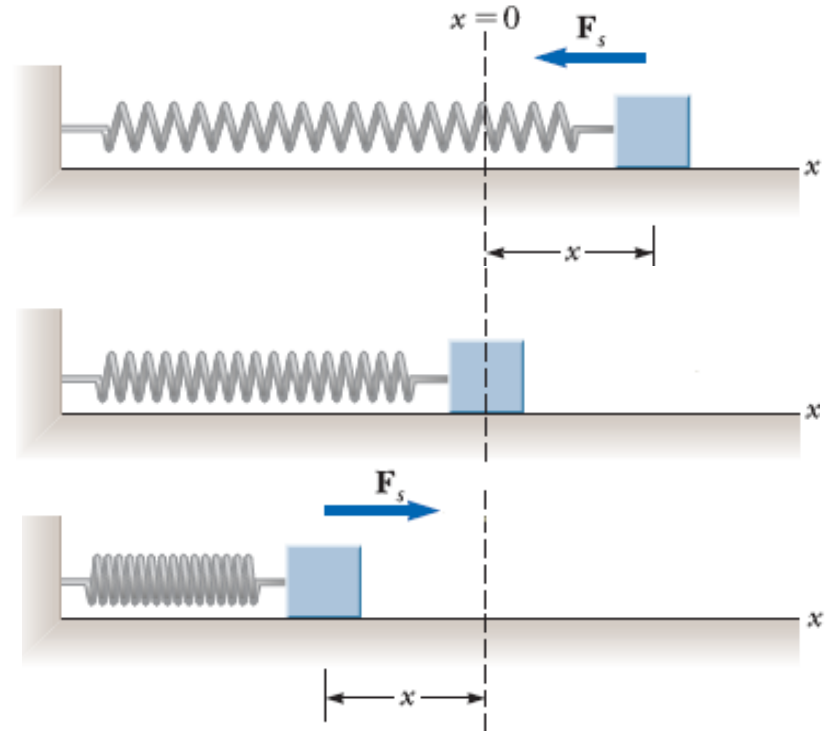
◆ 용수철이 한 일

Hooke's Law

$$F_s = -kx$$

복원력(restoring force)

x : 평형 위치로부터의 변위
 k : 용수철 상수(N/m)



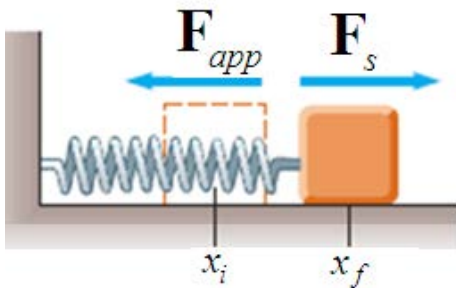
$\mathbf{F}_s = F_s \hat{\mathbf{i}} = -kx \hat{\mathbf{i}}, d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{i}}$ 로 표현하면

x_i 에서 x_f 까지 물체가 움직일 때 용수철이 한 일 W_s

$$W_s = \int \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx \hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}}) = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

외부 주체가 힘 \mathbf{F}_{app} (작용력)을 가하여 물체를 x_i 에서 x_f 까지 가속도 없이 매우 천천히 움직이도록 한 경우



$$\mathbf{F}_{app} = -\mathbf{F}_s$$

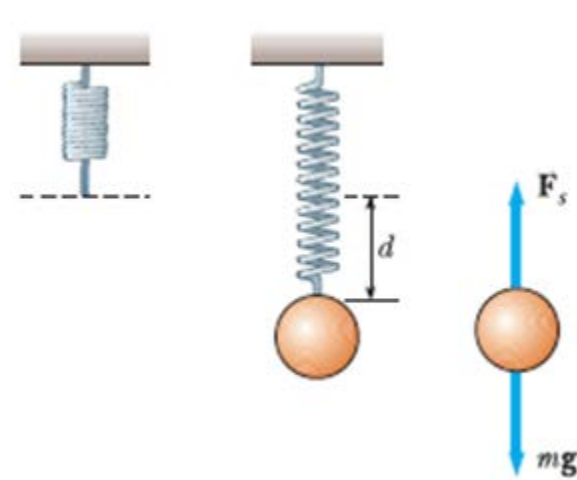
$$W_{app} = \int \mathbf{F}_{app} \cdot d\mathbf{r}$$

물체의 변위에 대해 작용력 \mathbf{F}_{app} 이 한 일 W_{app}

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} (kx \hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}}) = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

예제 6.5 용수철의 k 측정하기

용수철은 수직으로 매달려 있고, 질량 m 인 물체를 그 아래쪽 끝에 매단다. 용수철은 mg 의 부하에 의해 평형 위치로부터 d 의 거리만큼 늘어난다.



(A) 0.55 kg의 질량을 가진 물체가 매달려 2.0 cm만큼 늘어났다면 용수철의 힘 상수는 얼마인가?

(B) 이 길이만큼 늘어나는 동안 용수철이 한 일을 구하라.

풀이

$$(A) \quad kd = mg$$

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\text{kg})(9.80\text{m/s}^2)}{2.0 \times 10^{-2}\text{m}} = 2.7 \times 10^2 \text{ N/m}$$

$$(B) \quad W_s = 0 - \frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}(2.7 \times 10^2 \text{ N/m})(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = -5.4 \times 10^{-2} \text{ J}$$

물체에 중력이 한 일은

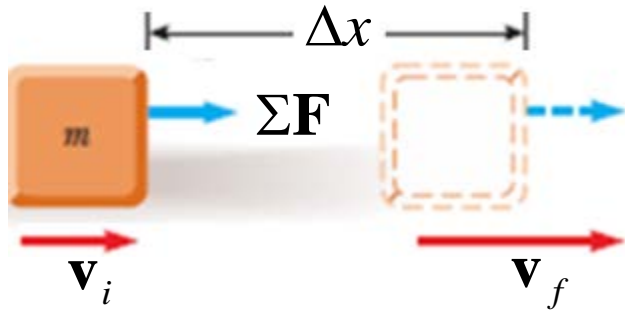
$$\begin{aligned} W_g &= \mathbf{F}_g \cdot \Delta \mathbf{r} = (mg)(d) \cos 0 = mgd \\ &= (0.55\text{kg})(9.80\text{m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.1 \times 10^{-1} \text{ J} \end{aligned}$$

$$|W_s| \neq |W_g| \quad ! \quad \text{Why?} \quad 0 \leq x \leq d \rightarrow |F_s| \leq mg, \Sigma F \neq 0$$

6.5 운동 에너지와 일-운동 에너지 정리

Kinetic Energy and the Work-Kinetic Energy Theorem

물체에 알짜힘이 작용하여 가속도를 갖고 움직이는 경우



$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} \Sigma F dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_f} m a dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx$$

$$W_{net} = \int_{v_i}^{v_f} m v dv$$

$$\Sigma F = ma$$

$$\frac{dv}{dt} dx = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx = v dv$$

$$W_{net} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

:운동에너지(kinetic energy)
스칼라량, 단위: J

$$W_{net} = K_f - K_i$$

◀ 일-운동 에너지 정리

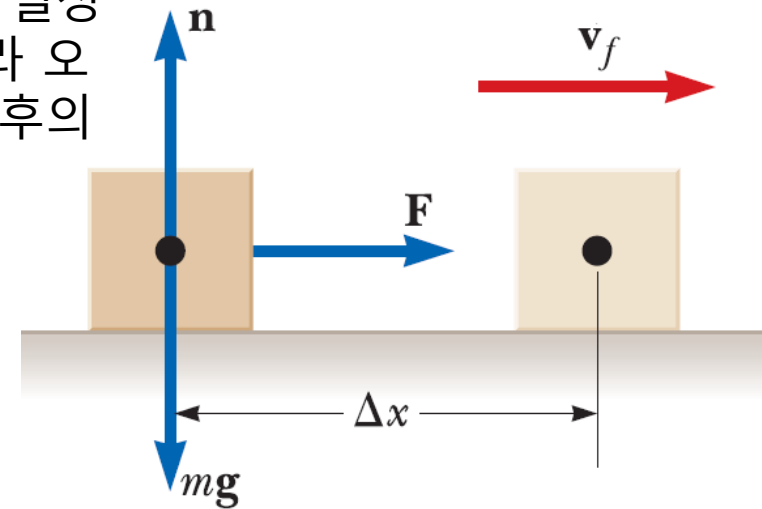
알짜힘이 한 일은 그 계의 운동 에너지의 변화와 같다

일-운동 에너지 정리의 ΔK 는 두 점 사이의 경로에 무관하고
처음과 나중의 속력에만 의존한다.

예제 6.6 마찰이 없는 평면에서 물체를 밀기

6.0 kg의 물체가 처음에 정지해 있다가 12N의 일정한 수평힘을 받아서 마찰이 없는 수평면을 따라 오른쪽으로 움직이고 있다. 물체가 3.0m 움직인 후의 속력은 얼마인가?

$$W = F\Delta x = (12\text{N})(3.0\text{m}) = 36\text{J}$$



일-운동 에너지 정리를 사용하면

$$W = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(36\text{J})}{6.0\text{kg}}} = 3.5\text{m/s}$$

6.6 계의 위치 에너지 Potential Energy of a System

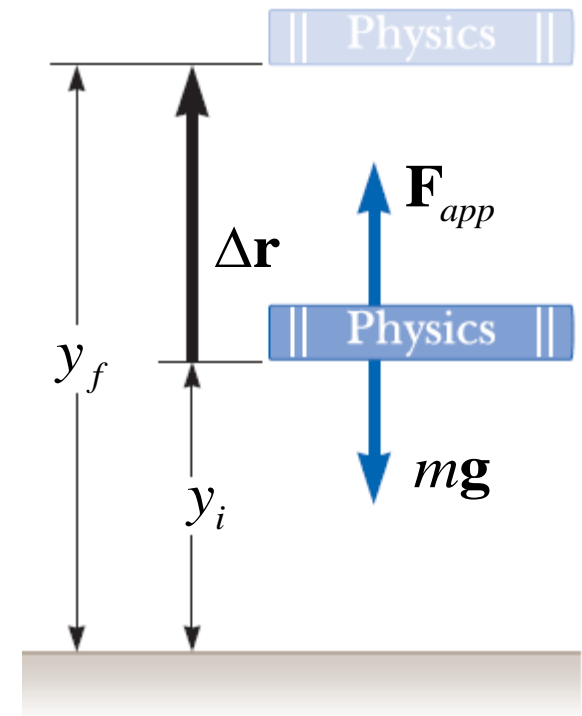
책과 지구로 구성된 계를 고려하면

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_{app} + m\mathbf{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$W_{app} = -\int_{y_i}^{y_f} m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = mg(y_f - y_i) = -W_g$$

$$\Rightarrow W_{net} = \int_{y_i}^{y_f} \sum \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W_{app} + W_g = 0$$

$$\Rightarrow \Delta K = 0$$



\mathbf{F}_{app} 가 한 일은 계의 에너지 변화가 운동 에너지 변화가 아니기 때문에, 다른 형태의 에너지로 저장되어야 한다.

책을 들어올린 후 놓으면 낙하할 때 운동 에너지를 가지며, 그 에너지는 책을 들어올릴 때 해 준 일에서 온 것이다.

책이 높은 위치에 있을 때, 계에는 운동 에너지로 바뀔 수 있는 잠재적인 에너지가 있다. 이러한 에너지 저장 형태를 **위치 에너지(potential energy)**라 한다.

위치 에너지의 크기는 계를 구성하는 요소들의 **배열 상태**에 따라 결정된다

$$W_{app} = mgy_f - mgy_i$$

중력 위치 에너지(gravitational potential energy):

$$U_g \equiv mgy$$

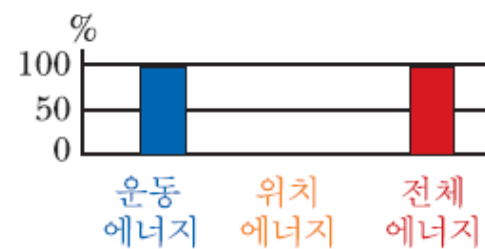
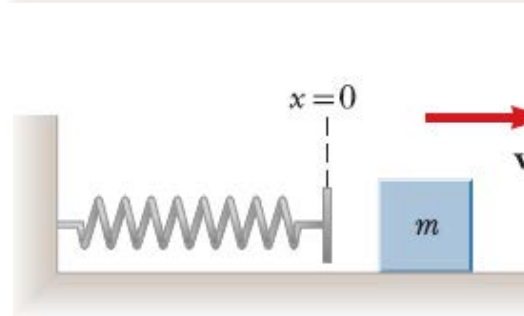
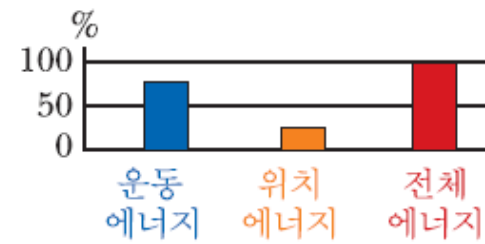
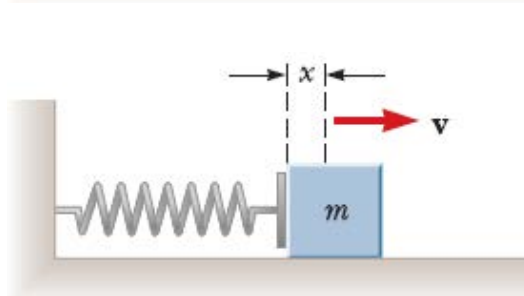
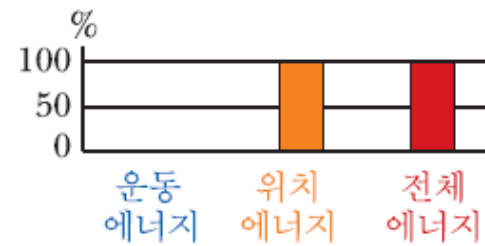
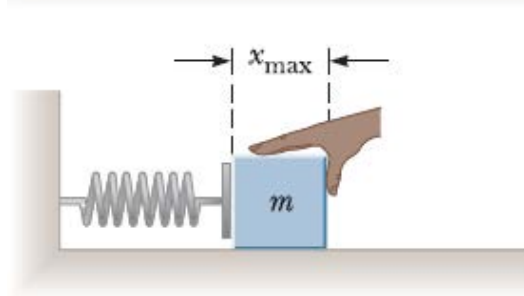
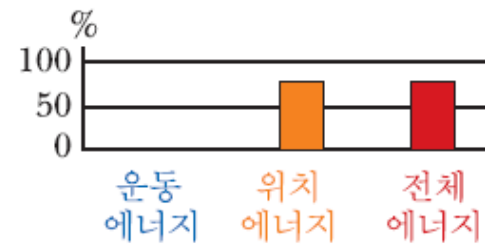
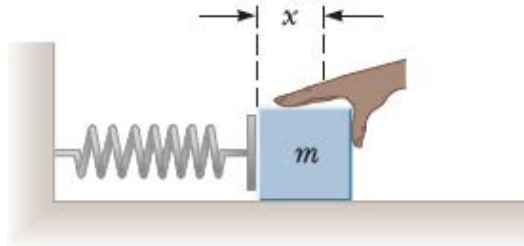
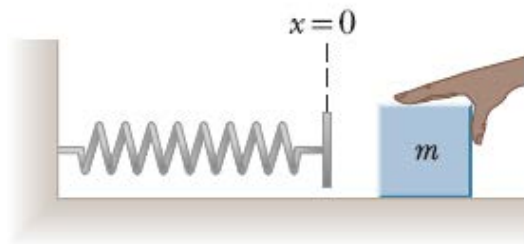
중력 위치 에너지는 단지 지표면 위 **물체의 연직 높이**에만 의존한다.

용수철과 물체로 구성된 계를 고려하면

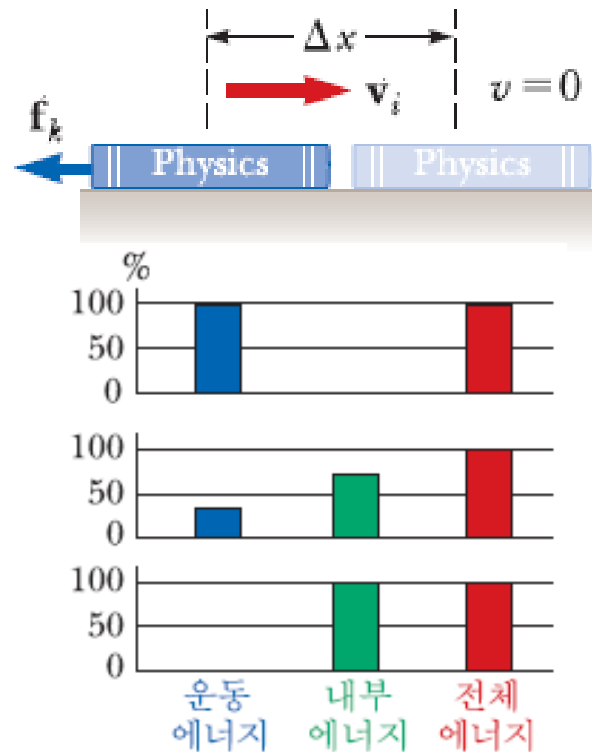
$$W_{app} = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

탄성 위치 에너지(elastic potential energy):

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$



6.7 보존력과 비보존력 Conservative and Nonconservative Forces



책이 탁자에 작용하는 마찰력이 한 일을 생각하면, 힘의 방향은 오른쪽이고, 변위도 오른쪽이다. 책이 탁자 표면에 한 일은 양(+)이다.

책이 멈춘 후에도 표면은 움직이지 않는다. 표면에 양(+)의 일이 행해졌는데도 표면의 운동 에너지나 위치 에너지에는 변화가 없다.

이 경우 표면이 다소 따뜻해졌으며, 계의 온도와 연관된 에너지를 내부 에너지(internal energy)라고 하고, E_{int} 로 나타낸다.

중력이 물체에 한 일은 연직으로 떨어지거나 경사면을 미끄러지거나 하는 중간 과정에 의존하지 않는다. 중요한 것은 물체의 고도 변화이다. 그러나 경사면에서의 마찰에 의한 내부 에너지로의 변환은 물체가 미끄러지는 거리에 의존한다.

이러한 경로 의존성에 따라 힘을 보존력과 비보존력으로 구분한다.
중력: 보존력 / 마찰력: 비보존력

◆ 보존력(Conservative Forces)

1. 두 점 사이를 이동하는 입자에 보존력이 한 일은 이동 경로와 무관하다.
2. 폐경로를 따라 이동하는 입자에 보존력이 한 일은 영이다.
(폐경로는 출발점과 도착점이 같은 경로를 말한다).

일반적으로 계의 구성 요소 중 한 물체가 한 점에서 다른 점으로 이동할 때, 보존력이 한 일 W_c 는 계의 위치 에너지의 처음 값에서 나중 값을 뺀 것과 같다.

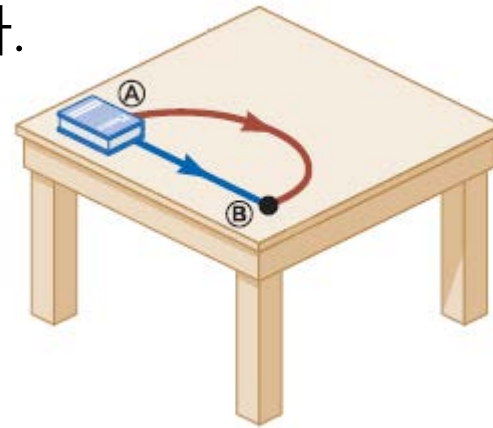
$$W_c = U_i - U_f = -\Delta U$$

보존력이 한일은 위치에너지 감소와 같다.

◆ 비보존력(Nonconservative Forces)

보존력에 대한 성질 1과 2를 만족하지 못하는 힘을 비보존력이라고 한다.

마찰력이 대표적인 비보존력이다.



역학적 에너지(mechanical energy): 계의 운동 에너지와 위치 에너지의 합을 라고 정의한다.

$$E_{mech} \equiv K + U$$

계 내부에서 작용하는 비보존력은 역학적 에너지의 변화를 초래한다.

6.8 보존력과 위치 에너지의 관계

Relationship Between Conservative Forces and Potential Energy

보존력 F 가 한 일은 위치 에너지 U 의 감소와 같다.

1차원에서

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

보존력 방향으로 움직일 때 위치에너지는 감소한다.

$$x_f \rightarrow x, U_f \rightarrow U(x). \quad x_i \rightarrow x_s : \text{기준점}, U_i \rightarrow U_0 = U(x_s)$$

\Rightarrow

$$U(x) = -\int_{x_i}^x F_x dx + U_0$$

기준점에서 U_0 의 값을 종종 영으로 잡는다. 실제로 U_0 를 어떤 값으로 잡든지 관계가 없다. 왜냐하면 영이 아닌 값은 U 를 상수 만큼만 이동시킬 뿐이고, 물리적으로 의미를 갖는 것은 위치 에너지 변화이기 때문이다.

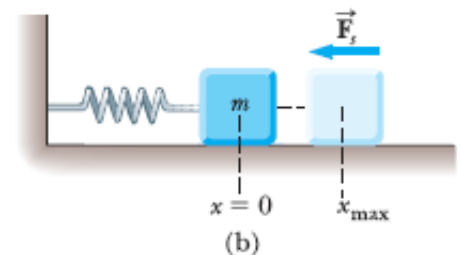
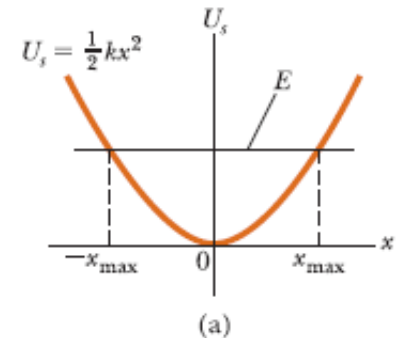
만약 힘의 작용점이 미소 변위 dx 만큼 움직인다면, 계의 미소 위치 에너지 변화 dU 는

$$dU = -F_x dx \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

용수철이 갖는 위치에너지는 $U_s = \frac{1}{2} kx^2$ 이므로

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

위치에너지 곡선의 기울기가 보존력의 크기에 대응한다. 기울기가 0인 점은 힘이 작용하지 않는 평형점에 해당한다.



6.9 중력과 전기력의 위치 에너지

Potential Energy for Gravitational and Electric Forces

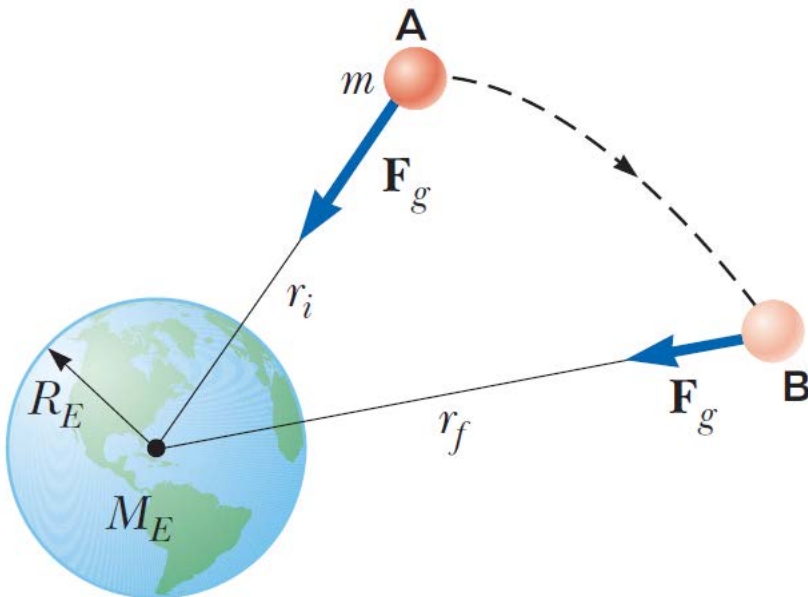
지구가 입자에 작용하는 중력

$$\mathbf{F}_g(r) = F(r)\hat{\mathbf{r}}; \quad F(r) = -\frac{GM_E m}{r^2}$$

$\hat{\mathbf{r}}$: 지구로부터 입자를 향하는 단위 벡터

중력이 하는 일

$$\int_{r_i}^{r_f} \mathbf{F}_g(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_i}^{r_f} F(r)dr$$



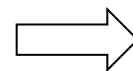
보존력이 하는 일은 위치에너지 감소와 같다.

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_f - U_i \\ &= -\int_{r_i}^{r_f} F(r)dr \\ &= GM_E m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} \\ &= GM_E m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} \end{aligned}$$

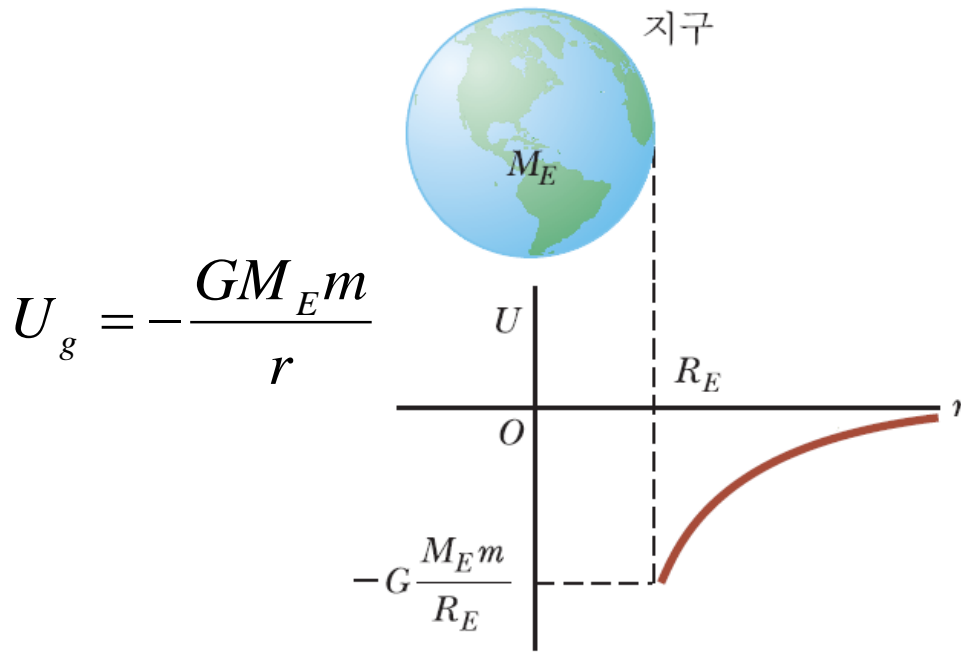
$$U_f - U_i = -GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

$$r_i \rightarrow \infty, U_i \rightarrow 0$$

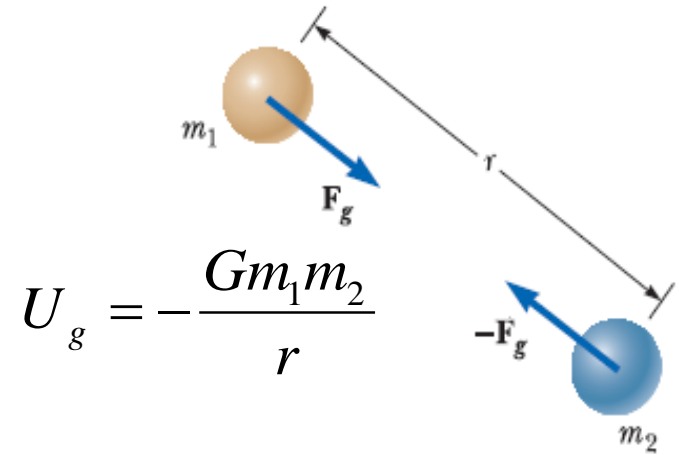
$$r_f \rightarrow r, U_f \rightarrow U(r)$$



$$U_g = U(r) = -\frac{GM_E m}{r}$$



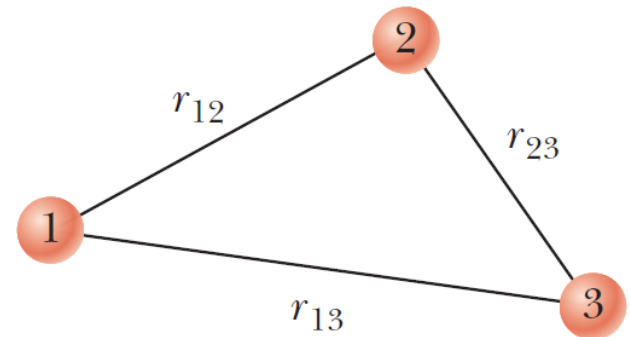
두 입자계의 중력 위치 에너지



세 입자계의 중력 위치 에너지

$$U_{tot} = U_{12} + U_{23} + U_{13}$$

$$= -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \right)$$



예제 6.8

위치 에너지의 변화

질량 m 인 입자가 지표면 위에서 수직으로 작은 거리 Δy 만큼 이동한다. 이 경우 식 (6.30)로 주어지는 중력 위치 에너지의 변화는 우리에게 친숙한 $\Delta U_g = mg \Delta y$ 임을 보여라.

지표면에서 중력

$$mg = \frac{GM_E m}{R_E^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

물체의 중력 위치 에너지

$$U_g = -\frac{GM_E m}{r}$$

위치 에너지의 변화

$$\Delta U_g = -GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) = GM_E m \left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f} \right)$$

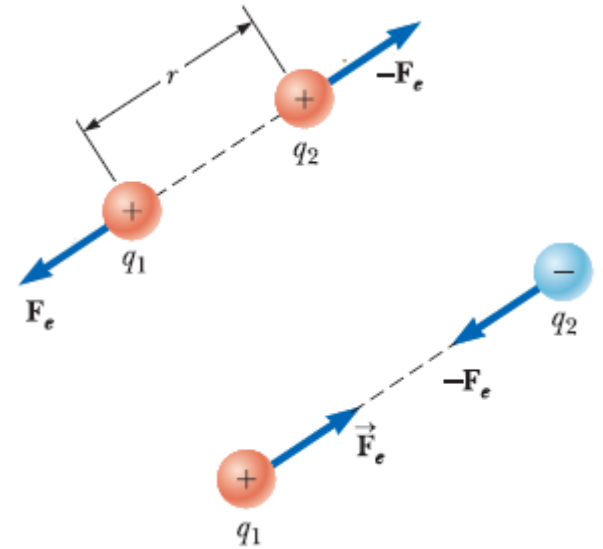
$$r_f - r_i = \Delta y \quad r_i r_f \approx R_E^2$$

$$\Delta U_g \approx \frac{GM_E m}{R_E^2} \Delta y = mg \Delta y$$

쿨롱의 법칙

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- 같은 부호의 전하 $q_1 q_2 > 0$, $F_e > 0$ (척력)
- 반대 부호의 전하 $q_1 q_2 < 0$, $F_e < 0$ (인력)



전기 위치 에너지(electric potential energy)

$$U_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r}$$

- 같은 부호의 전하 $U_e > 0$, $r \uparrow \Rightarrow U_e \downarrow$
- 반대 부호의 전하 $U_e < 0$, $r \uparrow \Rightarrow U_e \uparrow$