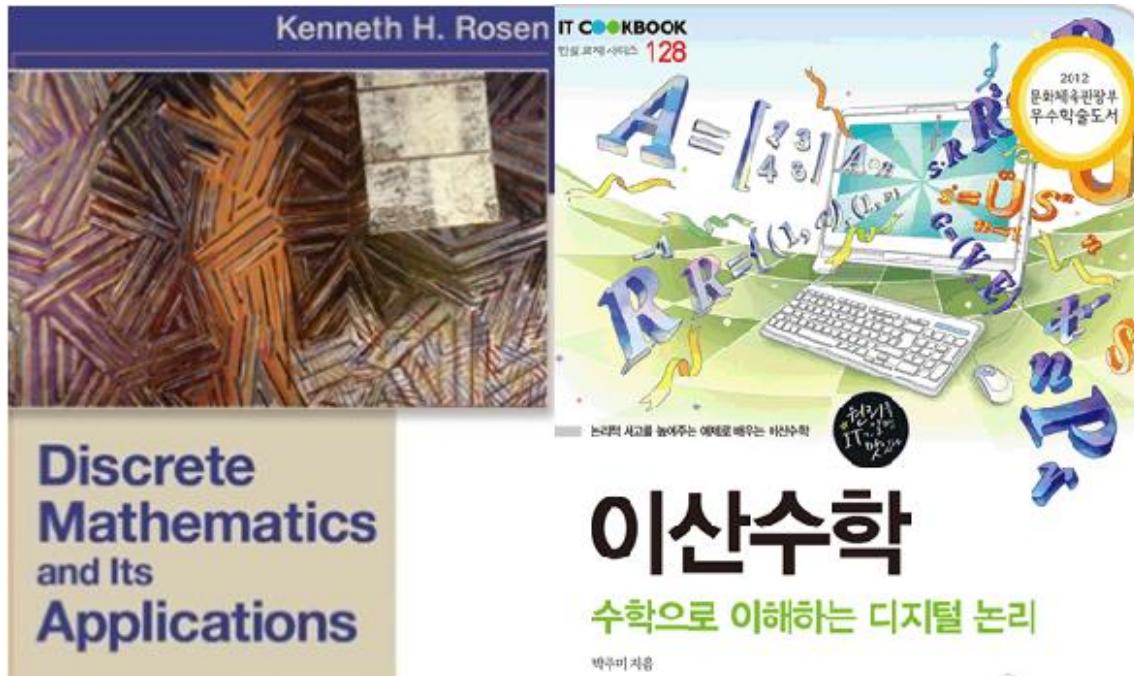


이산수학

Discrete Mathematics



Chapter 01:

명제와 논리

Soongsil University : Kim Chang Wook

Some material adapted from
lecture notes provided by

이산 수학 수학으로 이해하는 디지털논리, 한빛 아카데미, 박주미
Discrete Mathematics and Its Applications, 7E By Kenneth H. Rosen

명제 논리

- ❖ 디지털 컴퓨터를 동작시키는 하드웨어나 소프트웨어는 작은 단위의 수학적 논리로 구성된다.
프로그램을 수행하여 올바른 결과를 얻으려면 수학적 논리가 정확하게 정의되어야 한다.
- ❖ 논리는 컴퓨터가 연산하는데 중요한 부분을 차지하며, 컴퓨터 회로 설계, 인공지능, 컴퓨터 프로그램 작성, 프로그램의 정당성 검증과 같은 모든 전산학 관련분야는 물론 다른 전문분야에서도 실용적으로 응용된다.
- ❖ 논리 규칙은 수학적 표현의 의미를 구체화하여 정확히 기술할 수 있게 하고, 수학적 논법이 정당한지, 정당하지 않은지 구분한다.
올바른 수학적 논법을 이해하고 작성하기 위해 논리규칙을 학습한다.

명제의 정의

❖ 명제(Proposition)

- 논리의 기본적인 구성 요소
- 참(True)이나 거짓(False)으로 구분할 수 있는 문장이나 수식.
어떤 사실을 선언하는 문장

예제

1-1

다음 문장이 명제인지 명제가 아닌지 구분하고, 그 이유를 설명하라.

- (1) 서울은 대한민국의 수도다.
- (2) 컴퓨터 가격은 비싸다.
- (3) 몇 시입니까?
- (4) 이것을 주의 깊게 읽어라.
- (5) $x + 1 = 2$
- (6) $1 + 1 = 3$

풀이

- (1) 명확하게 참이라 판별할 수 있으므로, 명제다.
- (2) 개인의 기준에 따라 참, 거짓이 달라질 수 있으므로, 명제가 아니다.
- (3) 의문문으로서 참 또는 거짓으로 판별할 수 있는 선언적 문장이 아니므로, 명제가 아니다.
- (4) 명령문으로서 참 또는 거짓으로 판별할 수 있는 선언적 문장이 아니므로, 명제가 아니다.
- (5) x 값에 따라 식의 참, 거짓이 달라질 수 있으므로 명제가 아니나.
어떤 값이 주어지면 명제가 된다.
- (6) 정확하게 거짓이라 판별할 수 있으므로 명제다.

명제의 정의

❖ 진리값(Truth Value)

- 명제변수(Propositional Variables) : 명제를 표현하는 변수, 전통적인 문자 영어 소문자 p, q, r, s, \dots
- 명제의 진리값이 참일 때는 T(True) 또는 1, 거짓 일 때는 F(False) 또는 0 사용
- 명제는 단지 T와 F 두 진리값만을 가지므로 이진논리라고 한다.

예제

1-2

다음 문장이나 수식에서 명제인지 구별하고, 명제인 경우 진리값을 구하라.

- (1) 바나나는 맛있다.
- (2) 미국의 수도는 뉴욕이다.
- (3) $5+3 = 8$
- (4) 4는 홀수다.
- (5) 유채꽃은 노란색이다.

풀이

- (1) 참이나 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 될 수 없다.
- (2) 명제이며, 거짓이므로 진리값은 F 또는 0
- (3) 명제이며, 참이므로 진리값은 T 또는 1
- (4) 명제이며, 거짓이므로 진리값은 F 또는 0
- (5) 명제이며, 참이므로 진리값은 T 또는 1

논리연산자

- ❖ 단순명제(Simple Proposition) : 하나의 문장이나 식으로 구성된 명제
- ❖ 복합(or 합성)명제(Compound Propositions) :
 - 하나 또는 여러 명제를 논리 연산자(부정, 논리곱, 논리합, 배타적 논리합)로 결합하여 새로 만들어진 명제.
복합명제의 진리값은 복합명제를 구성하고 있는 명제 각각의 진리값과 각 명제를 결합하는 논리연산자에 의해 결정된다.
- ❖ 부정(Negation) : NOT
 - p 가 명제일 때 p 의 부정(negation) : $\neg p$ (또는 $\sim p$)로 표기
 p 가 명제일 때 “ p 가 아니다”도 명제
 - $\neg p$ 는 not p 로 읽으며, $\neg p$ 의 진리값은 p 의 진리값의 반대.

부정 진리표

p	$\neg p$
T	F
F	T

예제 1-4

부정 연산 NOT을 이용해 “4는 양수다”라는 명제 p 의 부정을 작성하고, 진리값을 구하라.
풀이

$\neg p$: 4는 양수가 아니다.

“4는 양수가 아니다”라는 말은 4가 0이거나 음수임을 의미한다.

그러나 4는 0이 아니고 음수도 아니기 때문에

“4는 양수가 아니다”라는 명제 $\neg p$ 의 진리값은 거짓(F)이 된다.

명제 p 가 참(T)이기 때문에 $\neg p$ 는 거짓(F)이 되는 것이다.

p	$\neg p$
T	F
F	T

논리연산자

❖ 논리곱(Conjunction) : AND

- 문장 p, q 가 명제 일 때 p, q 의 진리값이 모두 참(T)일 때만 참(T)이 되고, 그렇지 않을 때는 거짓(F)이 되는 명제
- $p \wedge q$ 표시하고 ‘ p and q ’ 라고 읽는다.

논리곱 $p \wedge q$ 진리표

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

예제

1-5

다음은 두 명제의 논리곱을 작성하고 진리값을 구하라.

p : 4는 양수다. q : $2+6=0$

풀이

$p \wedge q$: 논리곱으로 표현하면 “4는 양수고, $2+6=0$ 이다”
4는 양수기 때문에 명제 p 는 참(T)이지만,
 $2+6$ 은 0이 아닌 8이므로 명제 q 는 거짓(F)이다.
따라서 두 명제가 모두 참인 것은 아니기 때문에
 $p \wedge q$ 의 진리값은 거짓(F)이다.



$\therefore p \wedge q$ “4는 양수고, $2+6=0$ 이다”고, 진리값은 거짓(F)이다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

논리연산자

❖ 논리합(Disjunction) : OR

- p, q 가 명제 일 때 p, q 의 진리값이 모두 거짓(F)일 때만 거짓(F)이 되고, 그렇지 않으면 참(T)이 되는 명제
- $p \vee q$ 표시하고 ‘ p or q ’ 라고 읽는다.

예제 1-6

다음은 두 명제의 논리합을 작성하고 진리값을 구하라.

p : 4는 양수다. q : $2+6=0$

풀이

$p \vee q$: “4는 양수다. 그리고 $2+6=0$ 이다” 또는 “4는 양수거나, $2+6=0$ 이다”
4는 양수기 때문에 명제 p 는 참(T)이지만,
 $2+6$ 은 0이 아닌 8이므로 명제 q 는 거짓(F)이다.
두 명제 중 하나만 참(T)이어도 참이 되는데,
명제 p 가 참(T)이므로 $p \vee q$ 의 진리값은 참이다.

∴ 논리합 $p \vee q$ 는 “4는 양수거나, $2+6=0$ 이다”고,
진리값은 참(T)이다.

논리합 $p \vee q$ 의 진리표		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

논리연산자

❖ 배타적 논리합(Exclusive OR) : XOR

- p, q 가 명제일 때 p, q 의 두 진리값 중 하나만 참(T)일 때 참(T)이 되고, 그렇지 않으면 거짓(F)이 되는 명제
- $p \oplus q$ 표시하고 ‘ p exclusive-or q ’ 라고 읽는다.
- p : 하늘이 흐린다. q : 해가 보인다

예제

1-7

| 합성명제 $\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$ 에 대한 진리표를 작성하시오.

풀이

합성명제 $\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$ 의 연산 순서와 진리표는 다음과 같다.

$$\begin{array}{c} \neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q) \\ \hline \begin{array}{c} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \hline \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \hline \textcircled{5} \end{array} \end{array}$$

배타적 논리합 $p \oplus q$ 진리표

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

	①	②	③	④	⑤
p	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F
F	F	T	T	T	F

복합 명제

❖ 복합명제(Compound Proposition)

- 하나 또는 여러 명제들을 AND, OR, NOT 등의 논리 연산자 (Logical Operators)를 이용해 결합하여 만들어진 명제
- 논리 연산자의 우선 순위

❖ 항진명제(Tautology) T

- 복합명제를 구성하는 명제의 진리값에 상관없이 복합명제의 진리값이 항상 참(T)인 명제

❖ 모순명제(Contradiction) F

- 복합명제를 구성하는 명제들의 진리값에 상관없이 복합명제의 진리값이 항상 거짓(F)인 명제

❖ 사건(or 불확정)명제(Contingency)

- 항진명제, 모순명제 아닌 명제, 경우에 따라 참 또는 거짓 값을 가질 경우

예제 1-8

다음 복합명제의 종류를 구분하라.

$$(1) \neg p$$

<풀이> (1) 사건명제

$$(2) p \vee \neg p$$

(2) 항진명제 (항상 참 : T)

논리 연산자 우선 순위

<i>Operator</i>	<i>Precedence</i>
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\Leftrightarrow	5

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

논리연산자

예제

1-9

명제 p 와 항진명제 T, 모순명제 F와의 다음연산들의 진리값을 구하라.

- (1) $p \vee T$ (2) $p \vee F$ (3) $p \wedge T$ (4) $p \wedge F$

풀이

(1) $p \vee T$

p	T	$p \vee T$
T	T	T
F	T	T

(2) $p \vee F$

p	F	$p \vee F$
T	F	T
F	F	F

(3) $p \wedge T$

p	T	$p \wedge T$
T	T	T
F	T	F

(4) $p \wedge F$

p	F	$p \wedge F$
T	F	F
F	F	F

함축/조건명제

❖ 함축(Implication) / 조건명제(Conditional Proposition) $p \rightarrow q$

- 명제 p 가 조건 또는 원인으로 제시되고, 명제 q 가 결론 또는 결과로 제시되는 명제
- 문장 p, q 가 명제일 때, 조건문 “ $p \rightarrow q$ ”는 명제 “if p then q ”이다. (p 이면 q 이다)
 $p \rightarrow q$: 조건 p 가 성립할 때 q 가 참(T)이라는 것을 의미하므로
조건문(conditional statement) 또는 함축(implication) 이라 한다.
- $p \rightarrow q$ 진리표에서
 - 명제 p 가 참(T)일 때

✓ 명제 p 가 참(T)일 때는

결론이 되는 명제 q 가 참(T)인 경우에는 참(T)

결론이 되는 명제 q 가 거짓(F)인 경우에는 거짓(F),

- 명제 p 가 거짓(F)일 때

✓ 명제 p 가 거짓(F)일 때는

결론이 되는 명제 q 와 무관하게 모두 참.

명제 q 가 참(T) 이거나 거짓(F) 인 경우 모두 참(T)

- 명제 p : 겨울이다. 명제 q : 날씨가 춥다. $p \rightarrow q$

✓ 겨울이면 날씨가 춥다. (T)

✓ 겨울이면 날씨가 춥지 않다. (F)

✓ 겨울이 아니면 날씨가 춥다. (T)

겨울이 아닌 경우 춥지 않은 경우도 있지만, 추울 경우도 있기 때문에 참(T)

✓ 겨울이 아니면 날씨가 춥지 않다. (T)

$p \rightarrow q$ 에 대한 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

함축/조건명제

예제

1-11

명제 p, q 가 주어졌을 때, 복합명제 $\neg(p \oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ 의 진리표를 구하라.

풀이 $\neg(p \oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

$$\begin{array}{c} \underline{\textcircled{1}} \qquad \underline{\textcircled{2}} \\ \underline{\textcircled{3}} \qquad \underline{\textcircled{4}} \\ \hline \textcircled{5} \end{array}$$

$p \rightarrow q$ 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

	①	②	③	④	⑤
p	$p \oplus q$	$\neg p$	$\neg(p \oplus q)$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg(p \oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F

함축/조건명제

예제 1-12

명제 p, q 가 주어졌을 때 합성명제 $(\neg p \vee r) \rightarrow \neg q$ 의 진리표를 구하라.

풀이 $(\neg p \vee r) \rightarrow \neg q$

$$\frac{\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array}}{\begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array}}$$

$p \rightarrow q$ 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

			①	②	③	④
p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee r$	$\neg q$	$\neg(p \vee r) \rightarrow \neg q$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

쌍방 조건 명제

❖ 쌍방조건명제(Biconditional) $p \leftrightarrow q$

- p, q 가 명제일 때, 명제 p 와 q 가 모두 조건이면서 결론인 명제
- p if and only if q (줄여서 iff) : p 이면 q 고, q 이면 p 다.

[표 1-7] 쌍방조건명제 $p \leftrightarrow q$ 에 대한 진리표

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

- $p \leftrightarrow q$ 는 명제 p, q 의 진리값이 같을 때는 참(T), 그렇지 않을 때는 거짓(F)
- $p \leftrightarrow q$ 는 $(p \rightarrow q)(q \rightarrow p)$ 와 동일한 의미이며, 동일한 진리표를 갖는다.

예제

1-13

명제 p, q 가 주어졌을 때, 복합명제 $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$ 의 진리표를 구하라.

풀이 $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$

$$\begin{array}{c} \frac{\textcircled{1}}{(p \rightarrow \neg q)} \quad \frac{\textcircled{1}}{(\neg p \leftrightarrow q)} \\ \hline \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \\ \hline \textcircled{4} \end{array}$$

	①		②		③		④	
	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$	
T	T	F	F	F	F	F	T	
T	F	F	T	T	T	T	T	
F	T	T	F	F	T	T	T	
F	F	T	T	T	T	F	F	

쌍방 조건 명제

예제

1-15

다음 명제의 진리값을 구하라.

$$(1) [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

$$(2) \neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$$

$$(3) (p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$$

풀이

1) p, q 가 어떤 진리값을 갖든지 $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ 는 항상 참(T)이 되므로 이 명제는 항진명제다.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

2) $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$ 의 진리값은 p 의 진리값이 참일 때 거짓, p 의 진리값이 거짓일 때 참
 $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$ 의 진리값은 p 의 진리값에 반대가 되므로 이 명제는 사건명제다.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$
T	F	T	F
F	T	T	T

3) p, q 의 진리값에 상관없이 $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$ 는 항상 거짓(F)이 되므로 이 명제는 모순명제다.

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F

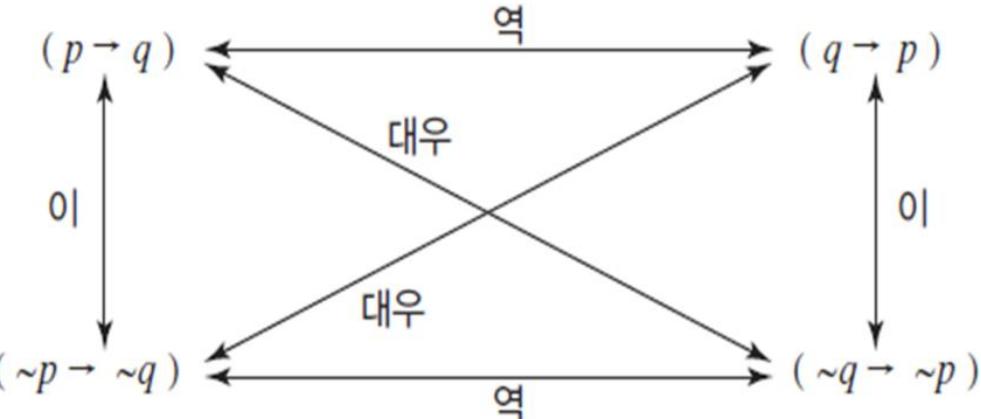
역/ 이/ 대우

- 역(Converse), 이(Inverse), 대우(Contrapositive)

명제 $p \rightarrow q$ 의 역은 $q \rightarrow p$, 이는 $\neg p \rightarrow \neg q$, 대우는 $\neg q \rightarrow \neg p$

[표 1-8] 함축 $p \rightarrow q$ 의 역, 이, 대우 진리표

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T



- 대우 $\neg q \rightarrow \neg p$ 는 $p \rightarrow q$ 와 같은 진리값. 두 개의 복합명제가 항상 같은 진리값을 가질 경우 동치
- 주어진 명제만으로 논리를 전개하거나 증명하기가 어려울 경우,
역(Converse), 이(Inverse), 대우(Contrapositive) 중 하나를 이용하면 쉽게 해결 가능.

예제 1-16

명제 “오늘 비가 오면, 나는 영화를 본다”의
역($q \rightarrow p$), 이($\neg p \rightarrow \neg q$), 대우($\neg q \rightarrow \neg p$)를 구하라.

풀이

p : 오늘 비가 온다.

q : 나는 영화를 본다.

역 ($q \rightarrow p$) : 내가 영화를 본다면, 오늘 비가 온다.

이 ($\neg p \rightarrow \neg q$) : 오늘 비가 오지 않으면, 나는 영화를 보지 않는다.

대우 ($\neg q \rightarrow \neg p$) : 내가 영화를 보지 않으면, 오늘 비가 오지 않는다.

논리적 동치

- 논리적 동치(Logical Equivalence) $p \equiv q$
두 문장이나 수식이 논리적으로 같은 경우, 복합명제 p 와 q 의 진리값이 서로 같은 경우
 - 두 명제가 논리적 동치일 때 두 명제 중 간단한 명제를 활용하여
논리를 단순화 가능
→ 단순해지면 설계와 검증과정에서 시간과 비용을 줄일 수 있다.
 - 두 개의 명제가 논리적으로 동치인가를 판정하는 방법으로 진리표 이용
- 예제 1-19
- | 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\neg p \vee q$ 는 어떤 관계에 있는지 진리표를 작성하여 판별하라.

풀이

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

진리표를 보면 $p \rightarrow q$ 와 $\neg p \vee q$ 의 진리값이 같다. 논리적 동치
 $\therefore p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

논리적 동치

예제

명제 $\neg(p \vee q)$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 가 논리적 동치임을 보여라.

풀이 진리표를 보면 $\neg(p \vee q)$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 의 진리값이 같다. 드모르간의 법칙. 논리적 동치

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

예제

$p \vee(q \wedge r)$ 과 $(p \vee q) \wedge(p \vee r)$ 이 논리적 동치임을 보여라

풀이 진리표에서 $p \vee(q \wedge r)$ 과 $(p \vee q) \wedge(p \vee r)$ 진리값이 같다. 논리적 동치 : 분배법칙

A Demonstration That $p \vee(q \wedge r)$ and $(p \vee q) \wedge(p \vee r)$ Are Logically Equivalent.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee(q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge(p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

논리적 동치

• 논리적 동치법칙

논리적 동치법칙에 의해 정의된 복합명제들은 진리값이 서로 같기 때문에 두 명제가 논리적 동치임을 증명하거나 복잡한 복합명제를 간단히 하는데 활용 가능

표

논리적
동치법칙

논리적 동치	법칙
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	항등법칙(Identity Law)
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee T \equiv T$	지배법칙(Domination Law)
$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv T$	부정법칙(Negation Law)
$\neg(\neg p) \equiv p$	이중 부정법칙(Double Negation Law)
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	멱등법칙(Idempotent Law)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	교환법칙(Commutative Law)
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	결합법칙(Associative Law) 괄호안 기호와 괄호밖 기호가 같다
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	분배법칙(Distributive Law) 괄호안 기호와 괄호밖 기호가 다르다
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	드모르간의 법칙(De Morgan's Law)
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	흡수법칙(Absorption Law)
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	함축법칙(Implication Law)
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$	대우법칙(Contraposition Law)

\vee 는 \wedge 로,
 \wedge 는 \vee 로,
 T 는 F 로,
 F 는 T 로,
이러한
형태로
변형시킨
논리식을
쌍대
(Duality)

논리적 동치

예제

명제 $\neg(p \rightarrow q)$ 와 $(p \wedge \neg q)$ 가 논리적으로 동치임을 보여라.

풀이 : 함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$$

$$\equiv \neg(\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\equiv p \wedge \neg q$$

드모르간의 법칙 : $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

함축법칙

드모르간의 법칙

이중부정법칙

예제

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 가 항진식임을 보여라.

풀이

이 논리식이 항진임을 보이기 위해 이 식이 T와 동치임을 보인다.

함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

부정법칙 : $p \vee \neg p \equiv T$

교환법칙 : $p \vee q \equiv q \vee p$

지배법칙 : $p \vee T \equiv T$

멱등법칙 : $p \vee p \equiv p$

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$

$$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$$

$$\equiv T \vee T$$

$$\equiv T$$

함축법칙

드모르간의 법칙

교환법칙

부정법칙

지배법칙, 멱등법칙

논리적 동치

예제 1-20

논리적 동치법칙을 이용해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 가 논리적 동치임을 증명하고, 진리표를 이용해 확인하라.

풀이

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{드모르간의 법칙} \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{드모르간의 법칙} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{이중 부정법칙} \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{분배법칙} \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{부정법칙} \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) && \text{항등법칙}\end{aligned}$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \vee (\neg p \wedge q)$	$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T

진리표를 통해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 진리값이 같음을 알 수 있다.

∴ 논리적 동치법칙을 통해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 가 논리적 동치임을 알 수 있다.

논리적 동치

예제

1-21

| 명제 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ 를 논리적 동치 법칙을 이용하여 간략히 하라.

풀이

함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ 분배법칙 : $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 항등법칙 : $p \vee F \equiv p$

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\&\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg q) \\&\equiv \neg p \vee F \\&\equiv \neg p\end{aligned}$$

함축법칙
분배법칙
부정법칙
항등법칙

예제

1-22

| 명제 $\neg p \vee [(p \wedge q) \rightarrow q]$ 가 항진명제임을 논리적 동치 법칙을 이용하여 증명하라.

풀이

결합법칙 : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ 역등법칙 : $p \vee p \equiv p$ 부정법칙 : $p \vee \neg p \equiv T$ 지배법칙 : $p \vee T \equiv T$
함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ 드모르간의 법칙 : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$$\begin{aligned}\neg p \vee [(p \wedge q) \rightarrow q] &\equiv \neg p \vee [\neg(p \wedge q) \vee q] \\&\equiv \neg p \vee [(\neg p \vee \neg q) \vee q] \\&\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee q) \\&\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q) \\&\equiv \neg p \vee T \\&\equiv T\end{aligned}$$

함축법칙
드모르간의 법칙
결합법칙
역등법칙
부정법칙
지배법칙

명제 함수

- ❖ 명제는 참과 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 수식. 변수 포함된 문장은?
변수가 포함된 문장도 그 변수의 값이나 범위가 주어지면 참과 거짓을 판별할 수 있으므로 명제.
변수의 논의 영역 지정 위해 한정자 사용하여 변수의 입력 범위 표시 .

❖ 명제함수(Propositional Function) $P(x)$

- 논의영역 D 에 속하는 변수 x 를 포함하여 진리값을 판별할 수 있는 문장
- $P(x)$ 는 명제함수 P 의 x 에서의 값,
변수 x 에 특정값이 할당되면 $P(x)$ 는 명제가 되고 진리값을 판정할 수 있게 된다.

❖ 논의영역(Universe of Discourse)

- 명제에 포함된 변수 x 가 속하게 될 범위

예제 1-23

명제함수 $P(x) = x^2 - 3x = 0$ 일 때, $P(1)$ 과 $P(3)$ 의 진리값을 구하라.

풀이] $P(1) = 1^2 - 3 \times 1 = -2 \neq 0 \quad \therefore$ 거짓

$P(3) = 3^2 - 3 \times 3 = 0 = 0 \quad \therefore$ 참

예제 1-24

명제 $Q(x,y) : x = 2y$ 일 때, $Q(1,2)$ 과 $Q(2,1)$ 의 진리값을 구하라.

풀이] $Q(1,2) : 1 \neq 2 \times 2 = 4 \quad \therefore$ 거짓

$Q(2,1) : 2 = 2 \times 1 = 2 \quad \therefore$ 참

한정 기호

❖ 변수 포함 명제함수의 논의영역범위를 정의하기 위해 사용하는 것이 한정자(Quantifier)

❖ 전칭한정기호 / 전체한정자(Universal Quantifier) \forall

- 논의영역(Universe of discourse)에 속하는 모든 값을 의미
- 논의영역에 속하는 모든 x 모든 값에 대해 명제 $P(x)$ 는 참 : $\forall x P(x)$: for all $x P(x)$
- 전체 한정자를 갖는 명제함수 경우,
논의영역 모든 원소가 그 명제를 참으로 만족할 경우에만 명제함수가 참.
논의영역 원소 중 하나라도 그 명제를 거짓으로 하면 거짓.
- $P(x)$ 가 거짓이 되는 원소를 $\forall x P(x)$ 의 반례(counterexample)라고 한다.

❖ 존재기호 / 존재한정자(Existential Quantifier) \exists

- 논의영역에 속하는 어떤 값을 의미
- 논의영역에 속하는 어떤 x 에 대해 명제 $P(x)$ 는 참 : $\exists x P(x)$: For some $x P(x)$
- 존재한정자를 갖는 명제함수 경우, 논의영역 원소 중 하나라도 명제를 참으로 하면 명제함수는 참. 논의영역 모든 원소가 명제를 거짓으로 하면 명제함수는 거짓.

TABLE 1 Quantifiers.

<i>Statement</i>	<i>When True?</i>	<i>When False?</i>
$\forall x P(x)$	$P(x)$ is true for every x .	There is an x for which $P(x)$ is false.
$\exists x P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is true.	$P(x)$ is false for every x .

한정 기호

예제 1-25

다음 표현을 문장으로 서술하라.

- (1) $\neg(\forall x P(x))$ (2) $\exists x(\neg P(x))$ (3) $\exists x(\forall y P(x,y))$ (4) $\forall x \forall y P(x,y)$

풀이

(1) $\neg(\forall x P(x))$: 모든 x 에 대해 $P(x)$ 를 만족하지 않는다.

(2) $\exists x(\neg P(x))$: $P(x)$ 가 성립하지 않는 어떤 x 가 존재한다.

(3) $\exists x(\forall y P(x,y))$: 모든 y 에 대해 $P(x,y)$ 를 만족하는 어떤 x 가 존재한다.

(4) $\forall x \forall y P(x,y)$: 모든 x 에 대해 모든 y 가 $P(x,y)$ 를 만족한다.

N : 자연수 1,2,3,...

Z : 정수 ...,-1,0,1,...

Q : 유리수 정수 분수 1/2,...

R : 실수 1.2534...

C: 복소수 실수+허수 1+5i

예제

$P(x)$ 가 $x+1 > x$ 라는 명제함수라 하자. 논의영역이 모든 실수라 할 때 $\forall x P(x)$ 진리값은?

풀이 $P(x)$ 는 모든 실수 x 에 대해 참이므로 $\forall x P(x)$ 는 참이다.

예제

$P(x)$ 가 $x^2 > 0$. 논의영역이 모든 정수일 때 $\forall x P(x)$ 가 거짓임을 보이라. 정수 ...,-1,0,1...

풀이 거짓임을 보이기 위하여 반례를 제시하면,

$x=0$ 일 때 $x^2 = 0 \not> 0$, x^2 은 0보다 크지 않으므로 $x=0$ 이 반례이다.

예제 1-25

논의 영역이 모든 실수일 때, 논의영역이 모든 정수일 때, 각각 $\forall x (x^2 \geq x)$ 진리값은?

풀이

(1) 논의 영역이 모든 실수일 때 전칭 한정 $\forall x (x^2 \geq x)$ 는 거짓이다.

$x^2 \geq x$ 는 $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ 과 같고 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$ 일 때만 $x^2 \geq x$ 성립한다.

논의영역이 모든 실수라고 하면 $0 < x < 1$ 구간에서 $x^2 \geq x$ 는 거짓이 된다. $(1/2)^2 \not\geq 1/2$ 따라서 $\forall x (x^2 \geq x)$ 는 거짓이 된다.

(2) 논의영역이 모든 정수라고 하면 $0 < x < 1$ 구간에서 정수가 존재하지 않으므로 $\forall x (x^2 \geq x)$ 는 참이 된다.



한정 기호

예제

$P(x)$ 가 $x > 3$ 이라 하자. 논의영역이 모든 실수일 때, $\exists x P(x)$ 의 진리값은?

풀이

$x=4$ 일 때, $x > 3$ 을 만족하므로, 적어도 하나의 값이 $P(x)$ 를 만족하므로 $\exists x P(x)$ 는 참이다.

예제

$Q(x)$ 가 $x = x+1$ 이고 논의영역이 모든 실수라고 하면 $\exists x Q(x)$ 진리값은?

풀이 모든 실수에 대하여 $Q(x)$ 를 만족시키는 x 값이 하나도 존재하지 않으므로 $\exists x Q(x)$ 는 거짓이다.

예제

1-26

논의영역 D 가 $D = \{x \mid 0 < x \leq 4, x \text{는 양의 정수}\}$ 고, 명제 $P(x)$ 가 $x^2 < 10$ 일 때 다음 진리값은?

- (1) $\forall x P(x)$ (2) $\exists x P(x)$

풀이

논의영역 $D = \{1, 2, 3, 4\}$

(1) $\forall x P(x)$ 가 참이 되려면 논의영역 D 에 포함된 모든 원소에 대해

$P(1), P(2), P(3), P(4)$ 가 참이어야 한다.

$P(1) = 1, P(2) = 2^2, P(3) = 3^2$ 참이지만, $P(4) = 4^2 = 16 < 10$ 으로 거짓.

그러므로 $\forall x P(x)$ 는 거짓이다.

(2) $\exists x P(x)$ 가 참이 되려면 논의영역 D 에 포함된 모든 원소들 중 하나라도 참이 되면 된다.

$P(1) = 1, P(2) = 2^2, P(3) = 3^2$ 세 원소가 참.

그러므로 비록 $P(4) = 4^2 < 10$ 으로 거짓이어도 $\exists x P(x)$ 는 참이다.

한정기호

예제

1-27

실수 x, y 에 대하여 명제함수 $P(x,y)$ 가 $x^2 < y^2$ 일 때 다음 명제의 진리값을 구하라.

- (1) $\forall x \forall y P(x,y)$ (2) $\exists x \exists y P(x,y)$ (3) $\forall x \exists y P(x,y)$ (4) $\exists x \forall y P(x,y)$

풀이

(1) 모든 x 에 대해 모든 y 가 $P(x,y)$ 를 만족해야 $\forall x \forall y P(x,y)$ 가 참이 된다.

그러나 $|x| \geq |y|$ 인 경우, $x = 4, y = 1$ 과 같은 경우는 성립하지 않으므로

$\forall x \forall y P(x,y)$ 는 거짓이다.

(2) 어떤 x 에 대해 $P(x,y)$ 를 만족하는 어떤 y 가 있으면 $\exists x \exists y P(x,y)$ 는 참이 된다.

$|x| < |y|$ 인 경우라면, 언제든 $P(x,y)$ 가 성립하므로

$\exists x \exists y P(x,y)$ 는 참이다.

(3) 모든 x 가 $P(x,y)$ 를 만족하는 y 가 한 개라도 있으면, $\forall x \exists y P(x,y)$ 는 참이 된다.

모든 x 는 $|x| < |y|$ 인 y 가 최소 한 개는 있기 때문에

$\forall x \exists y P(x,y)$ 는 참이다.

(4) 모든 y 에 대해 $P(x,y)$ 를 만족하는 x 가 하나라도 존재하면 $\exists x \forall y P(x,y)$ 는 참이 된다.

그러나 $|x| < |y|$ 인 경우에만 $P(x,y)$ 를 만족하므로 모든 y 에 대해 만족하는 x 가 존재할 수 없다.

그러므로 $\exists x \forall y P(x,y)$ 는 거짓이다.

한정기호

❖ 한정기호 우선 순위

- 한정기호 \forall 과 \exists 는 명제논리의 모든 논리연산자보다 상위의 우선순위이다.
예) $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 는 $\forall x P(x)$ 와 $Q(x)$ 의 논리합을 의미한다.
 $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 는 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 아니다.

❖ 한정표현의 부정

- 전칭 한정의 부정 : $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- 존재한정의 부정 : $\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$

TABLE 2 De Morgan's Laws for Quantifiers.

Negation	Equivalent Statement	When Is Negation True?	When False?
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	For every x , $P(x)$ is false.	There is an x for which $P(x)$ is true.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false.	$P(x)$ is true for every x .

예제

$\forall x (x^2 > x)$ 와 $\exists x (x^2 = 2)$ 의 부정은 무엇인가 ?

풀이 $\forall x (x^2 > x)$ 의 부정은 $\neg \forall x (x^2 > x)$, 이것은 $\exists x \neg (x^2 > x)$ 로 나타낼 수 있고,
다시 $\exists x (x^2 \leq x)$ 로 표현 가능.

$\exists x (x^2 = 2)$ 의 부정은 $\neg \exists x (x^2 = 2)$, 이것은 $\forall x \neg (x^2 = 2)$ 로 나타낼 수 있고,
다시 $\forall x (x^2 \neq 2)$ 로 표현 가능.

중첩된 한정기호

❖ 중첩된 한정기호 : 한 한정기호의 연산범위 안에 다른 한정기호가 나타나는 것

❖ 중첩된 한정화를 중첩된 루프처럼 수행

- $\forall x \forall y P(x,y)$ 진리값을 알기 위해 우선 변수 x 의 루프 안에 변수 y 에 대한 루프가 중첩되어 있다. x 의 값이 변화되면서 루프가 수행될 때 각각의 x 에 대하여 y 의 값을 변화시키는 y 의 루프를 수행. x, y 에 대한 루프가 모두 수행될 때까지, 즉 모든 x, y 값들에 대하여 참이라면 $\forall x \forall y P(x,y)$ 는 참이다.
- $\forall x \exists y P(x,y)$: 변수 x 의 모든 각각의 값에 대하여 $P(x,y)$ 가 참이 되는 y 값을 만날 때까지 y 값을 변화시키면서 루프를 수행한다. $P(x,y)$ 가 참이 되는 y 값을 만나면 해당 x 값에 대해서는 $\forall x \exists y P(x,y)$ 가 참이므로 더 이상 y 의 루프를 수행할 필요가 없다. 모든 x 값에 대하여 이러한 y 가 존재한다면 $\forall x \exists y P(x,y)$ 는 참이다. 어떤 x 값에 대하여 그러한 y 가 존재하지 않는다면 $\forall x \exists y P(x,y)$ 는 거짓이다.
- $\exists x \forall y P(x,y)$: 어떤 x 값이 주어졌을 때 y 의 모든값에 대하여 루프를 수행하여 $P(x,y)$ 가 참이 되는 x 값이 하나라도 있으면 참이다. 그러한 x 값이 없다면 거짓이다.
- $\exists x \exists y P(x,y)$: x, y 값을 변화시켜 루프를 수행하다가 $P(x,y)$ 를 참으로 만드는 x, y 값을 만나는 순간 참이 된다.
 x, y 루프를 다 수행하여도 $P(x,y)$ 를 참으로 만드는 x, y 값을 만나지 못하면 거짓이 된다.

예제

한정기호의 순서

$Q(x,y)$ 가 $x+y=0$ 일 때 $\exists y \forall x Q(x,y)$ 와 $\forall x \exists y Q(x,y)$ 진리값은?
단, 모든 변수의 논의영역은 모든 실수이다.

풀이

$\exists y \forall x P(x,y)$: 어떤 실수 y 가 존재하여 모든 실수 x 에 대하여 $P(x,y)$ 이다. 즉 하나의 고정된 y 값에 대하여 모든 실수를 x 값으로 취하여도 $x+y=0$ 이 성립한다는 것이나 성립하지 않으므로 거짓값을 갖는다. (예 $y=1$ 이라면 $x=-1$ 일 때만 성립)

$\forall x \exists y Q(x,y)$: 모든 실수 x 에 대하여 $Q(x,y)$ 이 되는 실수 y 가 존재한다.
임의의 x 값에 대하여 $y=-x$ 을 취하면 $Q(x,y)$ 가 성립하므로 참의 값을 갖는다.

한정기호는 순서에 따라 의미가 달라진다.

TABLE 1 Quantifications of Two Variables.

<i>Statement</i>	<i>When True?</i>	<i>When False?</i>
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ is true for every pair x, y .	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is false.
$\forall x \exists y P(x, y)$	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is true.	There is an x such that $P(x, y)$ is false for every y .
$\exists x \forall y P(x, y)$	There is an x for which $P(x, y)$ is true for every y .	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is false.
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is true.	$P(x, y)$ is false for every pair x, y .

논리와 추론

❖ 어떤 증명을 하거나 주장을 하면서 논리를 전개할 때,
참(T)이라고 인정되는 명제들을 나열하여 자신이 주장하는 결론을
유도하는 과정을 추론이라고 한다.

❖ 추론(Inference)

- 어떤 명제가 참인 것을 근거로 하여 다른 명제가 참임을 유도하는 방식

❖ 가정 또는 전제(Hypothesis)

- 근거가 되는 명제가 가정 또는 전제(Hypothesis)가 되고,
유도되는 명제가 결론이 됨

❖ 추론은 하나 이상의 전제와 하나의 결론으로 구성
전제는 항상 참(T)이라고 가정한다.

정당한 논리(유효추론)

- ❖ 전제가 모두 참이면 결론을 유도할 수 있고, 유도된 결론이 참(T)이라면 추론은 정확.
주어진 전제에 의해 유도된 결론이 참이면 정당한 추론 또는 유효추론,
거짓이면 부당한 추론 또는 허위추론.
정당한 추론과 부당한 추론을 판별하기 위해서는 모든 전제는 참(T)이어야 한다.

❖ 긍정논법 추론규칙 예

태양이 뜨거우면 달의 그늘진 곳은 차갑다.

태양이 뜨겁다.

∴ 달의 그늘진 곳은 차갑다. (\therefore 그러므로)

추론규칙

$$p \rightarrow q$$

전제들

$$\frac{p}{\therefore q}$$

결과

위 추론에서 명제 p : “태양이 뜨겁다” 명제 q : “달의 그늘진 곳은 차갑다”

위 우측에 추론을 기호로 표기, 추론에 사용된 명제의 진리값을 진리표에 표시.

전제는 항상 참이므로, 진리표에서 전제 $p \rightarrow q$ 와 p 모두 참인 경우인

사각형 부분만 추론에 사용 가능.

유효추론 예

다른 경우 사용 불가.

사각형부분의 결론 q 의
진리값이 참이므로,

이 추론은 정당한 추론,
유효추론이 된다.

전제	결론	전제
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

정당한 논리(유효추론)

❖ 추론 예

태양이 뜨거우면 달의 그늘진 곳은 차갑다.

달의 그늘진 곳은 차갑다.

∴ 태양이 뜨겁다.

위 추론에서 명제 p : “태양이 뜨겁다” 명제 q : “달의 그늘진 곳은 차갑다”

아래에 추론을 기호로 표기, 추론에 사용된 명제의 진리값을 진리표에 표시

허위추론 예

	결론	전제	전제
	p	q	$p \rightarrow q$
$p \rightarrow q$	T	T	T
q	T	F	F
$\therefore p$	F	T	T
	F	F	T

전제는 항상 참이므로, 진리표에서 전제 $p \rightarrow q$ 와 q 모두 참인 경우인 사각형 ①②만 추론에 사용 가능. 그외 $p \rightarrow q$ 와 q 하나만 참인 다른 경우 사용 될 수 없다.

①의 경우 p 의 진리값은 참이다. ②의 경우 p 의 진리값은 거짓이다.

결론 : 전제($p \rightarrow q$ 와 q)가 모두 참(T)일 때

결론(p)이 거짓(F)인 경우가 하나라도 있으면, 이 추론은 부당한 추론, 허위 추론이다.

논리적 동치

예제

I-28

다음 논증식이 정당한지 판별하라.

$$(1) p \vee (q \vee r)$$

$$\neg r$$

$$\therefore p \vee q$$

풀이

p	q	r	$q \vee r$	전제		결론
				$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

전제에 해당되는 명제가 모두 참일 때 결론에 해당되는 명제 역시 모두 참이므로, 이 추론은 정당하다.

논리적 동치

예제 1-28

다음 논증식이 정당한지 판별하라.

$$(2) p \rightarrow q \vee \neg r$$

$$q \rightarrow p \wedge r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

$p \rightarrow q$ 에 대한 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

풀이

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	전제		결론
						$p \rightarrow q \vee \neg r$	$q \rightarrow p \wedge r$	$p \rightarrow r$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F	
T	F	T	F	F	T	F	T	
T	F	F	T	T	F	T	T	
F	T	T	F	T	F	T	F	*
F	T	F	T	T	F	T	T	
F	F	T	F	F	F	T	F	
F	F	F	T	T	F	T	T	
						T	T	T

전제에 해당되는 명제가 모두 참일 때

결론에 해당되는 명제의 진리값이 거짓인 경우가 있으므로 이 추론은 정당하지 않다.

표 논리적추론 법칙

TABLE 1 Rules of Inference.

<i>Rule of Inference</i>	<i>Tautology</i>	<i>Name</i>
$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	Modus ponens (긍정논법)
$\begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	Modus tollens (부정논법)
$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	Hypothetical syllogism (가설적 삼단논법)
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	Disjunctive syllogism (논리합 삼단논법)
$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	Addition (가산논법)
$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Simplification (단순화논법)
$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Conjunction (논리곱 논법)
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	Resolution (융해법)

논리적 추론 법칙

예제

1-29

추론법칙을 이용해 정당한 추론이 되도록 빈칸을 채워라.

(1) 긍정논법

영수가 수학을 공부하면, 희영이는 영어를 공부한다.
영수가 수학을 공부한다.

∴ _____

풀이

- (1) p : 영수는 수학을 공부한다.
 q : 희영이는 영어를 공부한다.
전제는 $p \rightarrow q$ 와 q 로 표현될 수 있다.
긍정논법이므로 결론은 q 다.
∴ “희영이는 영어를 공부한다”

p	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	Modus ponens (긍정논법)
$\therefore q$		

(2) 부정논법

고양이가 강아지를 이기면, 강아지는 개구리를 이긴다.
강아지는 개구리를 이기지 못한다.

∴ _____

풀이

- (1) p : 고양이가 강아지를 이긴다.
 q : 강아지는 개구리를 이긴다.
전제는 $p \rightarrow q$ 와 $\neg q$ 로 표현될 수 있다.
부정논법이므로 결론은 $\neg p$ 다.
∴ “고양이가 강아지를 이기지 못한다”

$\neg q$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	Modus tollens (부정논법)
$\therefore \neg p$		

논리적 추론 법칙

(3) 가설적 삼단논법 또는 추이

톰이 야구를 하면, 존은 축구를 한다.

∴ 톰이 야구를 하면, 그렉은 수영을 한다.

풀이

(3) p : 톰이 야구를 한다. q : 존은 축구를 한다. R : 그렉은 수영을 한다.

전제는 $p \rightarrow q$ 로 표현될 수 있고, 가설적 삼단논법에 의해 나온 결론은 $p \rightarrow r$ 로 표현. 전제 $p \rightarrow q$ 와 가설적 삼단논법에 의해 $p \rightarrow r$ 가 나오려면 $q \rightarrow r$ 가 필요함을 알 수 있다.

p : 톰이 야구를 하면 \Rightarrow q : 존은 축구를 한다.

q : 존이 축구를 하면 \Rightarrow r : 그렉은 수영을 한다.

p : 톰이 야구를 하면 \Rightarrow r : 그렉은 수영을 한다.

그러므로 “존이 축구를 하면, 그렉은 수영을 한다”가 답이 된다.

(4) 선언적 삼단논법 또는 소거

데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측하지 못한다.

∴ 수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측한다.

풀이

(4) p : 수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측한다. q : 데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측한다.

선언적 삼단논법을 위해 주어진 전제 중 하나가 “데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측하지 못한다”이므로 $\neg q$ 다.

전제 $\neg q$ 와 선언적 삼단논법에 의해 결론이 p 가 나오기 위해서는 $p \vee q$ 가 필요하다.

그러므로 전제 $p \vee q$ 는 “수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측하거나 데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측한다”가 된다.

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Hypothetical syllogism

(가설적 삼단논법)

$$p \vee q$$

$$\neg q$$

$$\therefore p$$

$$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$$

Disjunctive syllogism

(논리합 삼단논법)

논리적 추론 법칙

예제

1-30

논리적 추론법칙을 이용해 다음 추론의 결론이 참인지 판별하라.

$$A : (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$$

$$B : \neg r \rightarrow \neg s$$

$$C : s$$

$$\therefore q$$

풀이

- 전제 A와 B에 대해 가설적 삼단논법에 의해 D : $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg s$
 - 전제 D와 C에 대해 부정논법에 의해 E : $\neg(\neg p \vee \neg q)$
 - 전제 E에 대해 드모르간의 법칙에 의해 F : $p \wedge q$
 - 전제 F에 대해 단순화 법칙에 의해 q 가 유도된다.
- \therefore 이 추론은 전제가 참이면 결론도 항상 참이 된다.

Homework : 1장 연습문제

3. (1) (2)

5. (1) (2)

6. (2)

7. (2) (3)

10. (1) (2)

11. (1)

3월 15일 강의 시작 전 제출. 이후에는 받지 않음.



1장 Homework

3 다음 합성명제의 진리표를 구하고, 이들 중 항진명제와 모순명제를 찾아라.

$$(1) \neg(\neg p \wedge q)$$

$$(2) (p \oplus q) \rightarrow (p \vee \neg q)$$

5 진리표를 이용해 다음 합성명제가 동치임을 보여라.

$$(1) \neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$$

$$(2) (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

6 논리적 동치법칙을 이용해 다음 합성명제가 동치임을 보여라.

$$(2) \{p \wedge [\neg(\neg p \vee q)]\} \vee (p \wedge q) \equiv p$$

7 $X = \{x | x \in Z\}$, $Y = \{y | y \in N\}$ 일 때, $P(x, y) = x^2 - y^2 > 0$ 에 대해 다음 명제의 진리값을 구하라.

$$(2) \forall x \exists y P(x, y)$$

$$(3) \exists x \forall y P(x, y)$$

8 다음 논증식이 정당한지 판별하라.

$$(1) p \rightarrow q$$

$$(2) p \wedge q \rightarrow \neg r$$

$$q \rightarrow p$$

$$p \vee q$$

$$\therefore p \vee q$$

$$\neg q \rightarrow p$$

$$\therefore p$$

9 다음 전제를 보고 결론을 유도하라.

$$(1) \neg p \vee q \rightarrow r$$

$$s \vee \neg q$$

$$\neg t$$

$$p \rightarrow t$$

$$\neg p \wedge r \rightarrow \neg s$$