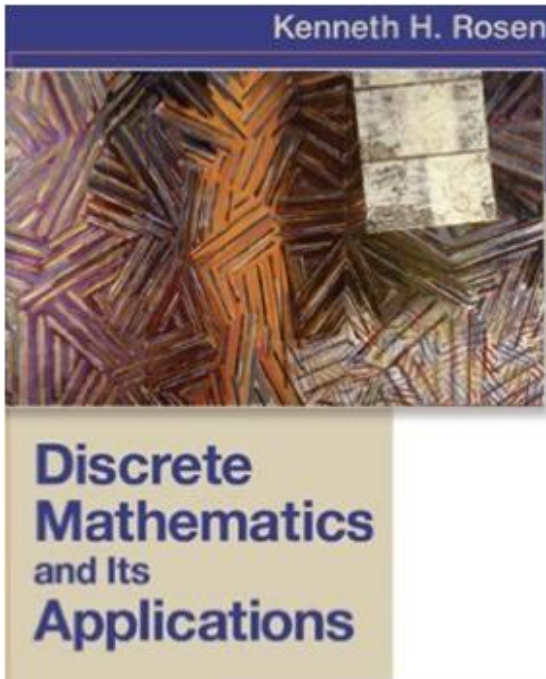


이산수학

Discrete Mathematics



Chapter 01: 명제와 논리

Soongsil University : Kim Chang Wook

명제 논리

- ❖ 디지털 컴퓨터를 동작시키는 하드웨어나 소프트웨어는 작은 단위의 수학적 논리로 구성된다.
프로그램을 수행하여 올바른 결과를 얻으려면 수학적 논리가 정확하게 정의되어야 한다.
- ❖ 논리는 컴퓨터가 연산하는데 중요한 부분을 차지하며, 컴퓨터 회로 설계, 인공지능, 컴퓨터 프로그램 작성, 프로그램의 정당성 검증과 같은 모든 전산학 관련분야는 물론 다른 전문분야에서도 실용적으로 응용된다.
- ❖ 논리 규칙은 수학적 표현의 의미를 구체화하여 정확히 기술할 수 있게 하고, 수학적 논법이 정당한지, 정당하지 않은지 구분한다.
올바른 수학적 논법을 이해하고 작성하기 위해 논리규칙을 학습한다.

명제의 정의

❖ 명제(Proposition)

- 논리의 기본적인 구성 요소
- 참(True)이나 거짓(False)으로 구분할 수 있는 문장이나 수식.
어떤 사실을 선언하는 문장

예제 1-1

다음 문장이 명제인지 명제가 아닌지 구분하고, 그 이유를 설명하라.

- (1) 서울은 대한민국의 수도다.
- (2) 컴퓨터 가격은 비싸다.
- (3) 몇 시입니까?
- (4) 이것을 주의 깊게 읽어라.
- (5) $x + 1 = 2$
- (6) $1 + 1 = 3$

풀이

- (1) 명확하게 참이라 판별할 수 있으므로, 명제다.
- (2) 개인의 기준에 따라 참, 거짓이 달라질 수 있으므로, 명제가 아니다.
- (3) 의문문으로서 참 또는 거짓으로 판별할 수 있는 선언적 문장이 아니므로, 명제가 아니다.
- (4) 명령문으로서 참 또는 거짓으로 판별할 수 있는 선언적 문장이 아니므로, 명제가 아니다.
- (5) x 값에 따라 식의 참, 거짓이 달라질 수 있으므로 명제가 아니다.
어떤 값이 주어지면 명제가 된다.
- (6) 정확하게 거짓이라 판별할 수 있으므로 명제다.

명제의 정의

❖ 진리값(Truth Value)

- 명제변수(Propositional Variables) : 명제를 표현하는 변수, 전통적인 문자 영어 소문자 p, q, r, s, \dots
- 명제의 진리값이 참일 때는 T(True) 또는 1, 거짓 일 때는 F(False) 또는 0 사용
- 명제는 단지 T와 F 두 진리값만을 가지므로 이진논리라고 한다.

예제 1-2

다음 문장이나 수식에서 명제인지 구별하고, 명제인 경우 진리값을 구하라.

- (1) 바나나는 맛있다.
- (2) 미국의 수도는 뉴욕이다.
- (3) $5+3 = 8$
- (4) 4는 홀수다.
- (5) 유채꽃은 노란색이다.

풀이

- (1) 참이나 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 될 수 없다.
- (2) 명제이며, 거짓이므로 진리값은 F 또는 0
- (3) 명제이며, 참이므로 진리값은 T 또는 1
- (4) 명제이며, 거짓이므로 진리값은 F 또는 0
- (5) 명제이며, 참이므로 진리값은 T 또는 1

논리연산자

❖ 단순명제(Simple Proposition) : 하나의 문장이나 식으로 구성된 명제

❖ 복합(or 합성)명제(Compound Propositions) :

- 하나 또는 여러 명제를 논리 연산자(부정, 논리곱, 논리합, 배타적 논리합)로 결합하여 새로 만들어진 명제.
복합명제의 진리값은 복합명제를 구성하고 있는 명제 각각의 진리값과 각 명제를 결합하는 논리연산자에 의해 결정된다.

❖ 부정(Negation) : NOT

- p 가 명제일 때 p 의 부정(negation) : $\neg p$ (또는 $\sim p$)로 표기
 p 가 명제일 때 " p 가 아니다"도 명제
- $\neg p$ 는 not p 로 읽으며, $\neg p$ 의 진리값은 p 의 진리값의 반대.

부정 진리표

p	$\neg p$
T	F
F	T

예제 1-4

부정 연산 NOT을 이용해 "4는 양수다"라는 명제 p 의 부정을 작성하고, 진리값을 구하라.
풀이

$\neg p$: 4는 양수가 아니다.

"4는 양수가 아니다"라는 말은 4가 0이거나 음수임을 의미한다.

그러나 4는 0이 아니고 음수도 아니기 때문에

"4는 양수가 아니다"라는 명제 $\neg p$ 의 진리값은 거짓(F)이 된다.

명제 p 가 참(T)이기 때문에 $\neg p$ 는 거짓(F)이 되는 것이다.

p	$\neg p$
T	F
F	T

논리연산자

❖ 논리곱(Conjunction) : AND

- 문장 p, q 가 명제 일 때 p, q 의 진리값이 모두 참(T)일 때만 참(T)이 되고, 그렇지 않을 때는 거짓(F)이 되는 명제
- $p \wedge q$ 표시하고 ' p and q ' 라고 읽는다.

논리곱 $p \wedge q$ 진리표

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

예제 1-5

다음은 두 명제의 논리곱을 작성하고 진리값을 구하라.
 p : 4는 양수다. q : $2+6=0$

풀이

$p \wedge q$: 논리곱으로 표현하면 "4는 양수고, $2+6=0$ 이다"
4는 양수기 때문에 명제 p 는 참(T)이지만,
 $2+6$ 은 0이 아닌 8이므로 명제 q 는 거짓(F)이다.
따라서 두 명제가 모두 참인 것은 아니기 때문에
 $p \wedge q$ 의 진리값은 거짓(F)이다.

$\therefore p \wedge q$ "4는 양수고, $2+6=0$ 이다"고, 진리값은 거짓(F)이다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

논리연산자

❖ 논리합(Disjunction) : OR

- p, q 가 명제 일 때 p, q 의 진리값이 모두 거짓(F)일 때만 거짓(F)이 되고, 그렇지 않으면 참(T)이 되는 명제
- $p \vee q$ 표시하고 ' p or q ' 라고 읽는다.

논리합 $p \vee q$ 의 진리표

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

예제 1-6

다음은 두 명제의 논리합을 작성하고 진리값을 구하라.

p : 4는 양수다.

q : $2+6=0$


풀이

$p \vee q$: "4는 양수다. 그리고 $2+6=0$ 이다" 또는 "4는 양수거나, $2+6=0$ 이다"

4는 양수기 때문에 명제 p 는 참(T)이지만,

$2+6$ 은 0이 아닌 8이므로 명제 q 는 거짓(F)이다.

두 명제 중 하나만 참(T)이어도 참이 되는데,

명제 p 가 참(T)이므로 $p \vee q$ 의 진리값은 참이다. 

\therefore 논리합 $p \vee q$ 는 "4는 양수거나, $2+6=0$ 이다"고, 진리값은 참(T)이다.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

논리연산자

❖ 배타적 논리합(Exclusive OR) : XOR

- p, q 가 명제일 때 p, q 의 두 진리값 중 하나만 참(T)일 때 참(T)이 되고, 그렇지 않으면 거짓(F)이 되는 명제
- $p \oplus q$ 표시하고 ' p exclusive-or q ' 라고 읽는다.
- p : 하늘이 흐리다. q : 해가 보인다

배타적 논리합 $p \oplus q$ 진리표

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

예제 1-7

합성명제 $\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$ 에 대한 진리표를 작성하시오.

풀이

합성명제 $\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$ 의 연산 순서와 진리표는 다음과 같다.

$$\begin{array}{cc}
 \neg(p \wedge q) & \oplus & (\neg p \vee q) \\
 \text{①} & & \text{②} \\
 \hline
 \text{③} & & \text{④} \\
 \hline
 & & \text{⑤}
 \end{array}$$

		①	②	③	④	⑤
p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge q) \oplus (\neg p \vee q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F

복합 명제

❖ 복합명제(Compound Proposition)

- 하나 또는 여러 명제들을 AND, OR, NOT 등의 논리 연산자 (Logical Operators)를 이용해 결합하여 만들어진 명제
- 논리 연산자의 우선 순위

논리 연산자 우선 순위

<i>Operator</i>	<i>Precedence</i>
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5

❖ 항진명제(Tautology) T

- 복합명제를 구성하는 명제의 진리값에 상관없이 복합명제의 진리값이 항상 참(T)인 명제

❖ 모순명제(Contradiction) F

- 복합명제를 구성하는 명제들의 진리값에 상관없이 복합명제의 진리값이 항상 거짓(F)인 명제

❖ 사건(or 불확정)명제(Contingency)

- 항진명제, 모순명제 아닌 명제, 경우에 따라 참 또는 거짓 값을 가질 경우

예제 1-8

다음 복합명제의 종류를 구분하라.

(1) $\neg p$

(2) $p \vee \neg p$

(3) $p \wedge \neg p$

<풀이> (1) 사건명제

(2) 항진명제 (항상 참 : T)

(3) 모순명제 (항상 거짓 : F)

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

논리연산자

예제 1-9

명제 p 와 항진명제 T , 모순명제 F 와의 다음연산들의 진리값을 구하라.

- (1) $p \vee T$ (2) $p \vee F$ (3) $p \wedge T$ (4) $p \wedge F$

풀이

(1) $p \vee T$

p	T	$p \vee T$
T	T	T
F	T	T

(2) $p \vee F$

p	F	$p \vee F$
T	F	T
F	F	F

(3) $p \wedge T$

p	T	$p \wedge T$
T	T	T
F	T	F

(4) $p \wedge F$

p	F	$p \wedge F$
T	F	F
F	F	F

함축/조건명제

❖ 함축(Implication) / 조건명제(Conditional Proposition) $p \rightarrow q$

- 명제 p 가 조건 또는 원인으로 제시되고, 명제 q 가 결론 또는 결과로 제시되는 명제
- 문장 p, q 가 명제일 때, 조건문 “ $p \rightarrow q$ ”는 명제 “if p then q ”이다. (p 이면 q 이다)
 $p \rightarrow q$: 조건 p 가 성립할 때 q 가 참(T)이라는 것을 의미하므로
 조건문(conditional statement) 또는 함축(implication) 이라 한다.

• $p \rightarrow q$ 진리표에서

- 명제 p 가 참(T)일 때

✓ 명제 p 가 참(T)일 때는

결론이 되는 명제 q 가 참(T)인 경우에는 참(T)

결론이 되는 명제 q 가 거짓(F)인 경우에는 거짓(F),

- 명제 p 가 거짓(F)일 때

✓ 명제 p 가 거짓(F)일 때는

결론이 되는 명제 q 와 무관하게 모두 참.

명제 q 가 참(T)이거나 거짓(F)인 경우 모두 참(T)

- 명제 p : 겨울이다. 명제 q : 날씨가 춥다. $p \rightarrow q$

✓ 겨울이면 날씨가 춥다. (T)

✓ 겨울이면 날씨가 춥지 않다. (F)

✓ 겨울이 아니면 날씨가 춥다. (T)

겨울이 아닌 경우 춥지 않은 경우도 있지만, 추울 경우도 있기 때문에 참(T)

✓ 겨울이 아니면 날씨가 춥지 않다. (T)

$p \rightarrow q$ 에 대한 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

함축/조건명제

예제 1-11

명제 p, q 가 주어졌을 때, 복합명제 $\neg(p \oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ 의 진리표를 구하라.

$$\text{풀이 } \neg(p \oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & & \textcircled{2} & & \\ \hline \textcircled{3} & & \textcircled{4} & & \\ \hline & \textcircled{5} & & & \end{array}$$

$p \rightarrow q$ 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

	①	②	③	④	⑤
p q	$p \oplus q$	$\neg p$	$\neg(p \oplus q)$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg(p \oplus q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
T T	F	F	T	T	T
T F	T	F	F	T	T
F T	T	T	F	T	T
F F	F	T	T	F	F

함축/조건명제

예제 1-12

명제 p, q 가 주어졌을 때 합성명제 $(\neg p \vee r) \rightarrow \neg q$ 의 진리표를 구하라.

풀이 $(\neg p \vee r) \rightarrow \neg q$

$$\frac{\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}}}{\textcircled{4}} \quad \textcircled{3}$$

$p \rightarrow q$ 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

			①	②	③	④
p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee r$	$\neg q$	$\neg(p \vee r) \rightarrow \neg q$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

쌍방 조건 명제

❖ 쌍방조건명제(Biconditional) $p \leftrightarrow q$

- p, q 가 명제일 때, 명제 p 와 q 가 모두 조건이면서 결론인 명제
- p if and only if q (줄여서 iff): p 이면 q 고, q 이면 p 다.

[표 1-7] 쌍방조건명제 $p \leftrightarrow q$ 에 대한 진리표

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

- $p \leftrightarrow q$ 는 명제 p, q 의 진리값이 같을 때는 참(T), 그렇지 않을 때는 거짓(F)
- $p \leftrightarrow q$ 는 $(p \rightarrow q)(q \rightarrow p)$ 와 동일한 의미이며, 동일한 진리표를 갖는다.

예제 1-13

명제 p, q 가 주어졌을 때, 복합명제 $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$ 의 진리표를 구하라.

풀이 $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$

①	①
②	③
④	

		①		②	③	④
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F

쌍방 조건 명제

예제 1-15

다음 명제의 진리값을 구하라.

(1) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

(2) $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$

(3) $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$

풀이

1) p, q 가 어떤 진리값을 갖든지 $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ 는 항상 참(T)이 되므로 이 명제는 항진명제다.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

2) $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$ 의 진리값은 p 의 진리값이 참일 때 거짓, p 의 진리값이 거짓일 때 참
 $\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$ 의 진리값은 p 의 진리값에 반대가 되므로 이 명제는 사건명제다.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$\neg p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$
T	F	T	F
F	T	T	T

3) p, q 의 진리값에 상관없이 $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$ 는 항상 거짓(F)이 되므로 이 명제는 모순명제다.

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F

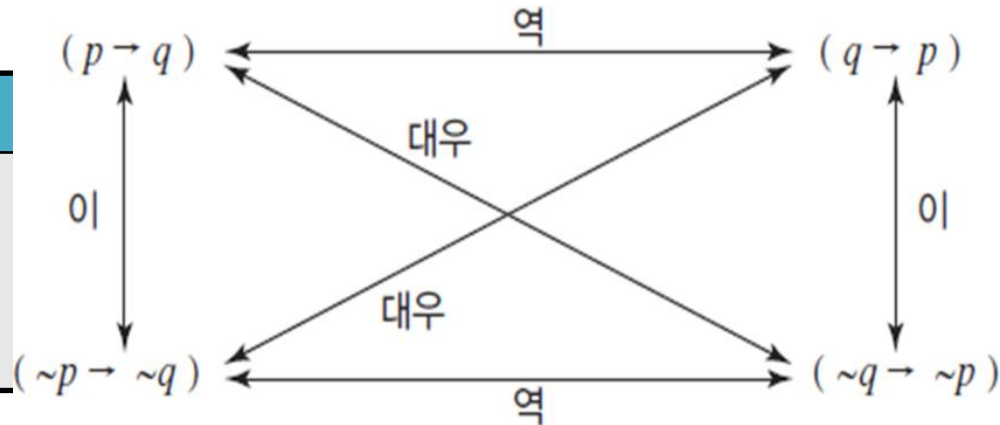
역/ 이/ 대우

- 역(Converse), 이(Inverse), 대우(Contrapositive)

명제 $p \rightarrow q$ 의 역은 $q \rightarrow p$, 이는 $\neg p \rightarrow \neg q$, 대우는 $\neg q \rightarrow \neg p$

[표 1-8] 함축 $p \rightarrow q$ 의 역, 이, 대우 진리표

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T



- 대우 $\neg q \rightarrow \neg p$ 는 $p \rightarrow q$ 와 같은 진리값. 두 개의 복합명제가 항상 같은 진리값을 가질 경우 동치
- 주어진 명제만으로 논리를 전개하거나 증명하기가 어려울 경우, 역(Converse), 이(Inverse), 대우(Contrapositive) 중 하나를 이용하면 쉽게 해결 가능.

예제 1-16

명제 "오늘 비가 오면, 나는 영화를 본다"의
역($q \rightarrow p$), 이($\neg p \rightarrow \neg q$), 대우($\neg q \rightarrow \neg p$)를 구하라.

풀이

p : 오늘 비가 온다.

q : 나는 영화를 본다.

역 ($q \rightarrow p$) : 내가 영화를 본다면, 오늘 비가 온다.

이($\neg p \rightarrow \neg q$) : 오늘 비가 오지 않으면, 나는 영화를 보지 않는다.

대우 ($\neg q \rightarrow \neg p$) : 내가 영화를 보지 않으면, 오늘 비가 오지 않는다.

논리적 동치

- 논리적 동치(Logical Equivalence) $p \equiv q$
두 문장이나 수식이 논리적으로 같은 경우, 복합명제 p 와 q 의 진리값이 서로 같은 경우
- 두 명제가 논리적 동치일 때 두 명제 중 간단한 명제를 활용하여 논리를 단순화 가능
→ 단순해지면 설계와 검증과정에서 시간과 비용을 줄일 수 있다.
- 두 개의 명제가 논리적으로 동치인가를 판정하는 방법으로 진리표 이용

예제 1-19

명제 $p \rightarrow q$ 와 $\neg p \vee q$ 는 어떤 관계에 있는지 진리표를 작성하여 판별하라.

풀이

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

진리표를 보면 $p \rightarrow q$ 와 $\neg p \vee q$ 의 진리값이 같다. 논리적 동치
 $\therefore p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

논리적 동치

예제

명제 $\neg(p \vee q)$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 가 논리적 동치임을 보여라.

풀이 진리표를 보면 $\neg(p \vee q)$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 의 진리값이 같다. 드모르간의 법칙. 논리적 동치

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

예제

$p \vee (q \wedge r)$ 과 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 이 논리적 동치임을 보여라

풀이 진리표에서 $p \vee (q \wedge r)$ 과 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 진리값이 같다. 논리적 동치 : 분배법칙

A Demonstration That $p \vee (q \wedge r)$ and $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Are Logically Equivalent.							
p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

논리적 동치

• 논리적 동치법칙

논리적 동치법칙에 의해 정의된 복합명제들은 진리값이 서로 같기 때문에 두 명제가 논리적 동치임을 증명하거나 복잡한 복합명제를 간단히 하는데 활용 가능

표
논리적
동치법칙

논리적 동치	법칙
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	항등법칙(Identity Law)
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee T \equiv T$	지배법칙(Domination Law)
$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv T$	부정법칙(Negation Law)
$\neg(\neg p) \equiv p$	이중 부정법칙(Double Negation Law)
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	멱등법칙(Idempotent Law)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	교환법칙(Commutative Law)
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	결합법칙(Associative Law) 괄호안 기호와 괄호밖 기호가 같다
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	분배법칙(Distributive Law) 괄호안 기호와 괄호밖 기호가 다르다
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	드모르간의 법칙(De Morgan's Law)
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	흡수법칙(Absorption Law)
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	함축법칙(Implication Law)
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$	대우법칙(Contraposition Law)

∨는 ∧로,
∧는 ∨로,
T는 F로,
F는 T로,
이러한
형태로
변형시킨
논리식을
쌍대
(Duality)



논리적 동치

예제

명제 $\neg(p \rightarrow q)$ 와 $(p \wedge \neg q)$ 가 논리적으로 동치임을 보여라.

풀이 : 함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge (\neg q) \\ &\equiv p \wedge \neg q\end{aligned}$$

드모르간의 법칙 : $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

함축법칙
드모르간의 법칙
이중부정법칙

예제

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 가 항진식임을 보여라.

풀이

이 논리식이 항진임을 보이기 위해 이 식이 T와 동치임을 보인다.

함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

부정법칙 : $p \vee \neg p \equiv T$

교환법칙 : $p \vee q \equiv q \vee p$

지배법칙 : $p \vee T \equiv T$

멱등법칙 : $p \vee p \equiv p$

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) \\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) \\ &\equiv T \vee T \\ &\equiv T\end{aligned}$$

함축법칙
드모르간의 법칙
교환법칙
부정법칙
지배법칙, 멱등법칙

논리적 동치

예제 1-20

논리적 동치법칙을 이용해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 가 논리적 동치임을 증명하고, 진리표를 이용해 확인하라.

풀이

$$\begin{aligned}
 \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{드모르간의 법칙} \\
 &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{드모르간의 법칙} \\
 &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{이중 부정법칙} \\
 &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{분배법칙} \\
 &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{부정법칙} \\
 &\equiv (\neg p \wedge \neg q) && \text{항등법칙}
 \end{aligned}$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \vee (\neg p \wedge q)$	$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T

진리표를 통해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 진리값이 같음을 알 수 있다.

\therefore 논리적 동치법칙을 통해 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 와 $\neg p \wedge \neg q$ 가 논리적 동치임을 알 수 있다.

논리적 동치

예제 1-21

명제 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ 를 논리적 동치 법칙을 이용하여 간략히 하라.

풀이

함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ 분배법칙 : $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 항등법칙 : $p \vee F \equiv p$

$$\begin{aligned}
 (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) && \text{함축법칙} \\
 &\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg q) && \text{분배법칙} \\
 &\equiv \neg p \vee F && \text{부정법칙} \\
 &\equiv \neg p && \text{항등법칙}
 \end{aligned}$$

예제 1-22

명제 $\neg p \vee [(p \wedge q) \rightarrow q]$ 가 항진명제임을 논리적 동치 법칙을 이용하여 증명하라.

풀이

결합법칙 : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ 멍등법칙 : $p \vee p \equiv p$ 부정법칙 : $p \vee \neg p \equiv T$ 지배법칙 : $p \vee T \equiv T$
 함축법칙 : $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ 드모르간의 법칙 : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$$\begin{aligned}
 \neg p \vee [(p \wedge q) \rightarrow q] &\equiv \neg p \vee [\neg(p \wedge q) \vee q] && \text{함축법칙} \\
 &\equiv \neg p \vee [(\neg p \vee \neg q) \vee q] && \text{드모르간의 법칙} \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee q) && \text{결합법칙} \\
 &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q) && \text{멍등법칙} \\
 &\equiv \neg p \vee T && \text{부정법칙} \\
 &\equiv T && \text{지배법칙}
 \end{aligned}$$

명제 함수

❖ 명제는 참과 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 수식. 변수 포함된 문장은?
변수가 포함된 문장도 그 변수의 값이나 범위가 주어지면 참과 거짓을 판별할 수 있으므로 명제.

변수의 논의 영역 지정 위해 한정자 사용하여 변수의 입력 범위 표시.

❖ 명제함수(Propositional Function) $P(x)$

- 논의영역 D 에 속하는 변수 x 를 포함하여 진리값을 판별할 수 있는 문장
- $P(x)$ 는 명제함수 P 의 x 에서의 값,
변수 x 에 특정값이 할당되면 $P(x)$ 는 명제가 되고 진리값을 판정할 수 있게 된다.

❖ 논의영역(Universe of Discourse)

- 명제에 포함된 변수 x 가 속하게 될 범위

예제 1-23

명제함수 $P(x) = x^2 - 3x = 0$ 일 때, $P(1)$ 과 $P(3)$ 의 진리값을 구하라.

풀이 $P(1) = 1^2 - 3 \times 1 = -2 \neq 0 \quad \therefore$ 거짓

$P(3) = 3^2 - 3 \times 3 = 0 = 0 \quad \therefore$ 참

예제 1-24

명제 $Q(x, y) : x = 2y$ 일 때, $Q(1, 2)$ 과 $Q(2, 1)$ 의 진리값을 구하라.

풀이 $Q(1, 2) : 1 \neq 2 \times 2 = 4 \quad \therefore$ 거짓

$Q(2, 1) : 2 = 2 \times 1 = 2 \quad \therefore$ 참

한정 기호

❖ 변수 포함 명제함수의 논의영역범위를 정의하기 위해 사용하는 것이 한정자(Quantifier)

❖ 전칭한정기호 / 전체한정자(Universal Quantifier) \forall

- 논의영역(Universe of discourse)에 속하는 모든 값을 의미
- 논의영역에 속하는 모든 x 모든 값에 대해 명제 $P(x)$ 는 참 : $\forall x P(x) : \text{for all } x P(x)$
- 전체 한정자를 갖는 명제함수 경우,
논의영역 모든 원소가 그 명제를 참으로 만족할 경우에만 명제함수가 참.
논의영역 원소 중 하나라도 그 명제를 거짓으로 하면 거짓.
- $P(x)$ 가 거짓이 되는 원소를 $\forall x P(x)$ 의 반례(counterexample)라고 한다.

❖ 존재기호 / 존재한정자(Existential Quantifier) \exists

- 논의영역에 속하는 어떤 값을 의미
- 논의영역에 속하는 어떤 x 에 대해 명제 $P(x)$ 는 참 : $\exists x P(x) : \text{For some } x P(x)$
- 존재한정자를 갖는 명제함수 경우, 논의영역 원소 중 하나라도 명제를 참으로 하면 명제함수는 참. 논의영역 모든 원소가 명제를 거짓으로 하면 명제함수는 거짓.

TABLE 1 Quantifiers.

Statement	When True?	When False?
$\forall x P(x)$	$P(x)$ is true for every x .	There is an x for which $P(x)$ is false.
$\exists x P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is true.	$P(x)$ is false for every x .

한정 기호

예제 1-25

다음 표현을 문장으로 서술하라.

- (1) $\neg(\forall x P(x))$ (2) $\exists x(\neg P(x))$ (3) $\exists x(\forall y P(x,y))$ (4) $\forall x \forall y P(x,y)$

N : 자연수 1,2,3,...

Z : 정수 ..., -1, 0, 1, ...

Q : 유리수 정수 분수 $1/2, \dots$

R : 실수 1.2534...

C : 복소수 실수+허수 $1+5i$

풀이

- (1) $\neg(\forall x P(x))$: 모든 x 에 대해 $P(x)$ 를 만족하지 않는다.
 (2) $\exists x(\neg P(x))$: $P(x)$ 가 성립하지 않는 어떤 x 가 존재한다.
 (3) $\exists x(\forall y P(x,y))$: 모든 y 에 대해 $P(x,y)$ 를 만족하는 어떤 x 가 존재한다.
 (4) $\forall x \forall y P(x,y)$: 모든 x 에 대해 모든 y 가 $P(x,y)$ 를 만족한다.

예제

$P(x)$ 가 $x+1 > x$ 라는 명제함수라 하자. 논의영역이 모든 실수라 할 때 $\forall x P(x)$ 진리값은 ?

풀이 $P(x)$ 는 모든 실수 x 에 대해 참이므로 $\forall x P(x)$ 는 참이다.

예제

$P(x)$ 가 $x^2 > 0$. 논의영역이 모든 정수일 때 $\forall x P(x)$ 가 거짓임을 보이라. 정수 ...-1, 0, 1...

풀이 거짓임을 보이기 위하여 반례를 제시하면,

$x=0$ 일 때 $x^2=0 \not> 0$, x^2 은 0보다 크지 않으므로 $x=0$ 이 반례이다.

예제 1-25

논의 영역이 모든 실수일 때, 논의영역이 모든 정수일 때, 각각 $\forall x (x^2 \geq x)$ 진리값은?

풀이

- (1) 논의 영역이 모든 실수일 때 전칭 한정 $\forall x (x^2 \geq x)$ 는 거짓이다.

$x^2 \geq x$ 는 $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ 과 같고 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$ 일 때만 $x^2 \geq x$ 성립한다.

논의영역이 모든 실수라고 하면 $0 < x < 1$ 구간에서 $x^2 \geq x$ 는 거짓이 된다. $(1/2)^2 \not\geq 1/2$

따라서 $\forall x (x^2 \geq x)$ 는 거짓이 된다.

- (2) 논의영역이 모든 정수라고 하면 $0 < x < 1$ 구간에서 정수가 존재하지 않으므로

$\forall x (x^2 \geq x)$ 는 참이 된다.

한정 기호

예제

$P(x)$ 가 $x > 3$ 이라 하자. 논역영역이 모든 실수일 때, $\exists x P(x)$ 의 진리값은 ?

풀이

$x=4$ 일 때, $x > 3$ 을 만족하므로, 적어도 하나의 값이 $P(x)$ 를 만족하므로 $\exists x P(x)$ 는 참이다.

예제

$Q(x)$ 가 $x = x + 1$ 이고 논역영역이 모든 실수라고 하면 $\exists x Q(x)$ 진리값은?

풀이 모든 실수에 대하여 $Q(x)$ 를 만족시키는 x 값이 하나도 존재하지 않으므로 $\exists x Q(x)$ 는 거짓이다.

예제 1-26

논역영역 D 가 $D = \{x \mid 0 < x \leq 4, x \text{ 는 양의 정수}\}$ 고, 명제 $P(x)$ 가 $x^2 < 10$ 일 때 다음 진리값은?

- (1) $\forall x P(x)$ (2) $\exists x P(x)$

풀이

논역영역 $D = \{1, 2, 3, 4\}$

(1) $\forall x P(x)$ 가 참이 되려면 논역영역 D 에 포함된 모든 원소에 대해

$P(1), P(2), P(3), P(4)$ 가 참이어야 한다.

$P(1) = 1, P(2) = 2^2, P(3) = 3^2$ 참이지만, $P(4) = 4^2 = 16 < 10$ 으로 거짓.

그러므로 $\forall x P(x)$ 는 거짓이다.

(2) $\exists x P(x)$ 가 참이 되려면 논역영역 D 에 포함된 모든 원소들 중 하나라도 참이 되면 된다.

$P(1) = 1, P(2) = 2^2, P(3) = 3^2$ 세 원소가 참.

그러므로 비록 $P(4) = 4^2 < 10$ 으로 거짓이어도 $\exists x P(x)$ 는 참이다.

예제 1-27

실수 x, y 에 대하여 명제함수 $P(x, y)$ 가 $x^2 < y^2$ 일 때 다음 명제의 진리값을 구하라.

- (1) $\forall x \forall y P(x, y)$ (2) $\exists x \exists y P(x, y)$ (3) $\forall x \exists y P(x, y)$ (4) $\exists x \forall y P(x, y)$

풀이

(1) 모든 x 에 대해 모든 y 가 $P(x, y)$ 를 만족해야 $\forall x \forall y P(x, y)$ 가 참이 된다.

그러나 $|x| \geq |y|$ 인 경우, $x = 4, y = 1$ 과 같은 경우는 성립하지 않으므로 $\forall x \forall y P(x, y)$ 는 거짓이다.

(2) 어떤 x 에 대해 $P(x, y)$ 를 만족하는 어떤 y 가 있으면 $\exists x \exists y P(x, y)$ 는 참이 된다.

$|x| < |y|$ 인 경우라면, 언제나 $P(x, y)$ 가 성립하므로 $\exists x \exists y P(x, y)$ 는 참이다.

(3) 모든 x 가 $P(x, y)$ 를 만족하는 y 가 한 개라도 있으면, $\forall x \exists y P(x, y)$ 는 참이 된다.

모든 x 는 $|x| < |y|$ 인 y 가 최소 한 개는 있기 때문에 $\forall x \exists y P(x, y)$ 는 참이다.

(4) 모든 y 에 대해 $P(x, y)$ 를 만족하는 x 가 하나라도 존재하면 $\exists x \forall y P(x, y)$ 는 참이 된다.

그러나 $|x| < |y|$ 인 경우에만 $P(x, y)$ 를 만족하므로 모든 y 에 대해 만족하는 x 가 존재할 수 없다. 그러므로 $\exists x \forall y P(x, y)$ 는 거짓이다.

한정기호

❖ 한정기호 우선 순위

- 한정기호 \forall 과 \exists 는 명제논리의 모든 논리연산자보다 상위의 우선순위이다.
예) $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 는 $\forall x P(x)$ 와 $Q(x)$ 의 논리합을 의미한다.
 $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 는 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 아니다.

❖ 한정표현의 부정

- 전칭 한정 부정 : $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
- 존재한정 부정 : $\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$

TABLE 2 De Morgan's Laws for Quantifiers.

<i>Negation</i>	<i>Equivalent Statement</i>	<i>When Is Negation True?</i>	<i>When False?</i>
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	For every x , $P(x)$ is false.	There is an x for which $P(x)$ is true.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false.	$P(x)$ is true for every x .

예제

$\forall x (x^2 > x)$ 와 $\exists x (x^2 = 2)$ 의 부정은 무엇인가 ?

풀이 $\forall x (x^2 > x)$ 의 부정은 $\neg \forall x (x^2 > x)$, 이것은 $\exists x \neg (x^2 > x)$ 로 나타낼 수 있고,
다시 $\exists x (x^2 \leq x)$ 로 표현 가능.

$\exists x (x^2 = 2)$ 의 부정은 $\neg \exists x (x^2 = 2)$, 이것은 $\forall x \neg (x^2 = 2)$ 로 나타낼 수 있고,
다시 $\forall x (x^2 \neq 2)$ 로 표현 가능.

중첩된 한정기호

❖ 중첩된 한정기호 : 한 한정기호의 연산범위 안에 다른 한정기호가 나타나는 것

❖ 중첩된 한정화를 중첩된 루프처럼 수행

- $\forall x \forall y P(x,y)$ 진리값을 알기 위해 우선 변수 x 의 루프 안에 변수 y 에 대한 루프가 중첩되어 있다. x 의 값이 변화되면서 루프가 수행될 때 각각의 x 에 대하여 y 의 값을 변화시키는 y 의 루프를 수행. x, y 에 대한 루프가 모두 수행될 때까지, 즉 모든 x, y 값들에 대하여 참이라면 $\forall x \forall y P(x,y)$ 는 참이다.
- $\forall x \exists y P(x,y)$: 변수 x 의 모든 각각의 값에 대하여 $P(x,y)$ 가 참이 되는 y 값을 만날 때까지 y 값을 변화시키면서 루프를 수행한다. $P(x,y)$ 가 참이 되는 y 값을 만나면 해당 x 값에 대해서는 $\forall x \exists y P(x,y)$ 가 참이므로 더 이상 y 의 루프를 수행할 필요가 없다. 모든 x 값에 대하여 이러한 y 가 존재한다면 $\forall x \exists y P(x,y)$ 는 참이다. 어떤 x 값에 대하여 그러한 y 가 존재하지 않는다면 $\forall x \exists y P(x,y)$ 는 거짓이다.
- $\exists x \forall y P(x,y)$: 어떤 x 값이 주어졌을 때 y 의 모든값에 대하여 루프를 수행하여 $P(x,y)$ 가 참이 되는 x 값이 하나라도 있으면 참이다. 그러한 x 값이 없다면 거짓이다.
- $\exists x \exists y P(x,y)$: x, y 값을 변화시켜 루프를 수행하다가 $P(x,y)$ 를 참으로 만드는 x, y 값을 만나는 순간 참이 된다.
 x, y 루프를 다 수행하여도 $P(x,y)$ 를 참으로 만드는 x, y 값을 만나지 못하면 거짓이 된다.

한정기호의 순서

예제

$Q(x,y)$ 가 $x+y=0$ 일 때 $\exists y \forall x Q(x,y)$ 와 $\forall x \exists y Q(x,y)$ 진리값은?
단, 모든 변수의 논의영역은 모든 실수이다.

풀이

$\exists y \forall x P(x,y)$: 어떤 실수 y 가 존재하여 모든 실수 x 에 대하여 $Q(x,y)$ 이다. 즉 하나의 고정된 y 값에 대하여 모든 실수를 x 값으로 취하여도 $x+y=0$ 이 성립한다는 것이나 성립하지 않으므로 거짓값을 갖는다. (예 $y=1$ 이라면 $x=-1$ 일 때만 성립)

$\forall x \exists y Q(x,y)$: 모든 실수 x 에 대하여 $Q(x,y)$ 이 되는 실수 y 가 존재한다.
임의의 x 값에 대하여 $y=-x$ 을 취하면 $Q(x,y)$ 가 성립하므로 참의 값을 갖는다.

한정기호는 순서에 따라 의미가 달라진다.

TABLE 1 Quantifications of Two Variables.

Statement	When True?	When False?
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ is true for every pair x, y .	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is false.
$\forall x \exists y P(x, y)$	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is true.	There is an x such that $P(x, y)$ is false for every y .
$\exists x \forall y P(x, y)$	There is an x for which $P(x, y)$ is true for every y .	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is false.
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is true.	$P(x, y)$ is false for every pair x, y .

논리와 추론

❖ 어떤 증명을 하거나 주장을 하면서 논리를 전개할 때,
참(T)이라고 인정되는 명제들을 나열하여 자신이 주장하는 결론을
유도하는 과정을 추론이라고 한다.

❖ 추론(Inference)

- 어떤 명제가 참인 것을 근거로 하여 다른 명제가 참임을 유도하는 방식

❖ 가정 또는 전제(Hypothesis)

- 근거가 되는 명제가 가정 또는 전제(Hypothesis)가 되고,
유도되는 명제가 결론이 됨

❖ 추론은 하나 이상의 전제와 하나의 결론으로 구성
전제는 항상 참(T)이라고 가정한다.

정당한 논리(유효추론)

- ❖ 전제가 모두 참이면 결론을 유도할 수 있고, 유도된 결론이 참(T)이라면 추론은 정확. 주어진 전제에 의해 유도된 결론이 참이면 정당한 추론 또는 유효추론, 거짓이면 부당한 추론 또는 허위추론.
정당한 추론과 부당한 추론을 판별하기 위해서는 모든 전제는 참(T)이어야 한다.

❖ 긍정논법 추론규칙 예

태양이 뜨거우면 달의 그늘진 곳은 차갑다.

태양이 뜨겁다.

∴ 달의 그늘진 곳은 차갑다. (∴ 그러므로)

추론규칙

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

전제들

∴ 결과

위 추론에서 명제 p : "태양이 뜨겁다" 명제 q : "달의 그늘진 곳은 차갑다"

위 우측에 추론을 기호로 표기, 추론에 사용된 명제의 진리값을 진리표에 표시.

전제는 항상 참이므로, 진리표에서 전제 $p \rightarrow q$ 와 p 모두 참인 경우인

사각형 부분만 추론에 사용 가능.

다른 경우 사용 불가.

사각형부분의 결론 q 의

진리값이 참이므로,

이 추론은 정당한 추론,

유효추론이 된다.

유효추론 예

전제	결론	전제
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T



정당한 논리(유효추론)

❖추론 예

태양이 뜨거우면 달의 그늘진 곳은 차갑다.

달의 그늘진 곳은 차갑다.

\therefore 태양이 뜨겁다.

위 추론에서 명제 p : "태양이 뜨겁다" 명제 q : "달의 그늘진 곳은 차갑다"

아래에 추론을 기호로 표기, 추론에 사용된 명제의 진리값을 진리표에 표시

허위추론 예

결론	전제	전제
p	q	$p \rightarrow q$
$p \rightarrow q$	T	T
q	F	F
$\therefore p$	T	T
	F	T

전제는 항상 참이므로, 진리표에서 전제 $p \rightarrow q$ 와 q 모두 참인 경우인 사각형 ①②만 추론에 사용 가능. 그외 $p \rightarrow q$ 와 q 하나만 참인 다른 경우 사용 될 수 없다.

①의 경우 p 의 진리값은 참이다. ②의 경우 p 의 진리값은 거짓이다.

결론: 전제($p \rightarrow q$ 와 q)가 모두 참(T)일 때

결론(p)이 거짓(F)인 경우가 하나라도 있으면, 이 추론은 부당한 추론, 허위 추론이다.

논리적 동치

예제 1-28

다음 논증식이 정당한지 판별하라.

$$(1) p \vee (q \vee r)$$

$$\neg r$$

$$\therefore p \vee q$$

풀이

p	q	r	$q \vee r$	전제		결론
				$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

전제에 해당되는 명제가 모두 참일 때 결론에 해당되는 명제 역시 모두 참이므로, 이 추론은 정당하다.

논리적 동치

예제 1-28

다음 논증식이 정당한지 판별하라.

$$(2) p \rightarrow q \vee \neg r$$

$$q \rightarrow p \wedge r$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

$p \rightarrow q$ 에 대한 진리표

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

풀이

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	전제		결론
						$p \rightarrow q \vee \neg r$	$q \rightarrow p \wedge r$	$p \rightarrow r$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T



전제에 해당되는 명제가 모두 참일 때

결론에 해당되는 명제의 진리값이 거짓인 경우가 있으므로 이 추론은 정당하지 않다.

TABLE 1 Rules of Inference.

Rule of Inference	Tautology	Name
$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	Modus ponens (긍정논법)
$\begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	Modus tollens (부정논법)
$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	Hypothetical syllogism (가설적 삼단논법)
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	Disjunctive syllogism (논리합 삼단논법)
$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	Addition (가산논법)
$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Simplification (단순화논법)
$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Conjunction (논리곱 논법)
$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	Resolution (융해법)

논리적 추론 법칙

예제 1-29

추론법칙을 이용해 정당한 추론이 되도록 빈칸을 채워라.

(1) 긍정논법

영수가 수학을 공부하면, 희영이는 영어를 공부한다.
영수가 수학을 공부한다.

∴ _____

풀이

(1) p : 영수는 수학을 공부한다.
 q : 희영이는 영어를 공부한다.
전제는 $p \rightarrow q$ 와 q 로 표현될 수 있다.
긍정논법이므로 결론은 q 다.
∴ "희영이는 영어를 공부한다"

p	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	Modus ponens
$p \rightarrow q$		(긍정논법)
∴ q		

(2) 부정논법

고양이가 강아지를 이기면, 강아지는 개구리를 이킨다.
강아지는 개구리를 이기지 못한다.

∴ _____

풀이

(1) p : 고양이가 강아지를 이킨다.
 q : 강아지는 개구리를 이킨다.
전제는 $p \rightarrow q$ 와 $\neg q$ 로 표현될 수 있다.
부정논법이므로 결론은 $\neg p$ 다.
∴ "고양이가 강아지를 이기지 못한다"

$\neg q$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	Modus tollens
$p \rightarrow q$		(부정논법)
∴ $\neg p$		

논리적 추론 법칙

예제

1-29

- (3) 가설적 삼단논법 또는 추이
 톰이 야구를 하면, 존은 축구를 한다.

\therefore 톰이 야구를 하면, 그렉은 수영을 한다.

$p \rightarrow q$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	Hypothetical syllogism
$q \rightarrow r$		(가설적 삼단논법)
$\therefore p \rightarrow r$		

풀이

- (3) p : 톰이 야구를 한다. q : 존은 축구를 한다. R : 그렉은 수영을 한다.
 전제는 $p \rightarrow q$ 로 표현될 수 있고, 가설적 삼단논법에 의해 나온 결론은 $p \rightarrow r$ 로 표현. 전제 $p \rightarrow q$ 와 가설적 삼단논법에 의해 $p \rightarrow r$ 가 나오려면 $q \rightarrow r$ 가 필요함을 알 수 있다.

p : 톰이 야구를 하면 \Rightarrow q : 존은 축구를 한다.
 q : 존이 축구를 하면 \Rightarrow r : 그렉은 수영을 한다.
 p : 톰이 야구를 하면 \Rightarrow r : 그렉은 수영을 한다.

그러므로 "존이 축구를 하면, 그렉은 수영을 한다"가 답이 된다.

- (4) 선언적 삼단논법 또는 소거

데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측하지 못한다.
 \therefore 수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측한다.

$p \vee q$	$((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$	Disjunctive syllogism
$\neg q$		(논리합 삼단논법)
$\therefore p$		

풀이

- (4) p : 수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측한다. q : 데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측한다.
 선언적 삼단논법을 위해 주어진 전제 중 하나가 "데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측하지 못한다"이므로 $\neg q$ 다.
 전제 $\neg q$ 와 선언적 삼단논법에 의해 결론이 p 가 나오기 위해서는 $p \vee q$ 가 필요하다.
 그러므로 전제 $p \vee q$ 는 "수퍼 컴퓨터는 날씨를 예측하거나 데스크톱 컴퓨터는 날씨를 예측한다"가 된다.

논리적 추론 법칙

예제 1-30

논리적 추론법칙을 이용해 다음 추론의 결론이 참인지 판별하라.

$$A : (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$$

$$B : \neg r \rightarrow \neg s$$

$$C : s$$

$$\therefore q$$

풀이

- 전제 A와 B에 대해 가설적 삼단논법에 의해 $D : (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg s$
 - 전제 D와 C에 대해 부정논법에 의해 $E : \neg (\neg p \vee \neg q)$
 - 전제 E에 대해 드모르간의 법칙에 의해 $F : p \wedge q$
 - 전제 F에 대해 단순화 법칙에 의해 q 가 유도된다.
- \therefore 이 추론은 전제가 참이면 결론도 항상 참이 된다.

Homework : 1장 연습문제

3. (1) (2)

5. (1) (2)

6. (2)

7. (2) (3)

10. (1) (2)

11. (1)

3월 15일 강의 시작 전 제출. 이후에는 받지 않음.

1장 Homework

3 다음 합성명제의 진리표를 구하고, 이들 중 항진명제와 모순명제를 찾아라.

$$(1) \neg(\neg p \wedge q)$$

$$(2) (p \oplus q) \rightarrow (p \vee \neg q)$$

5 진리표를 이용해 다음 합성명제가 동치임을 보여라.

$$(1) \neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$$

$$(2) (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

6 논리적 동치법칙을 이용해 다음 합성명제가 동치임을 보여라.

$$(2) \{p \wedge [\neg(\neg p \vee q)]\} \vee (p \wedge q) \equiv p$$

7 $X = \{x | x \in Z\}$, $Y = \{y | y \in N\}$ 일 때, $P(x, y) = x^2 - y^2 > 0$ 에 대해 다음 명제의 진리값을 구하라.

$$(2) \forall x \exists y P(x, y)$$

$$(3) \exists x \forall y P(x, y)$$

10 다음 논증식이 정당한지 판별하라.

$$(1) p \rightarrow q$$

$$(2) p \wedge q \rightarrow \neg r$$

$$q \rightarrow p$$

$$p \vee q$$

$$\therefore p \vee q$$

$$\neg q \rightarrow p$$

$$\therefore p$$

11 다음 전제를 보고 결론을 유도하라.

$$(1) \neg p \vee q \rightarrow r$$

$$s \vee \neg q$$

$$\neg t$$

$$p \rightarrow t$$

$$\neg p \wedge r \rightarrow \neg s$$