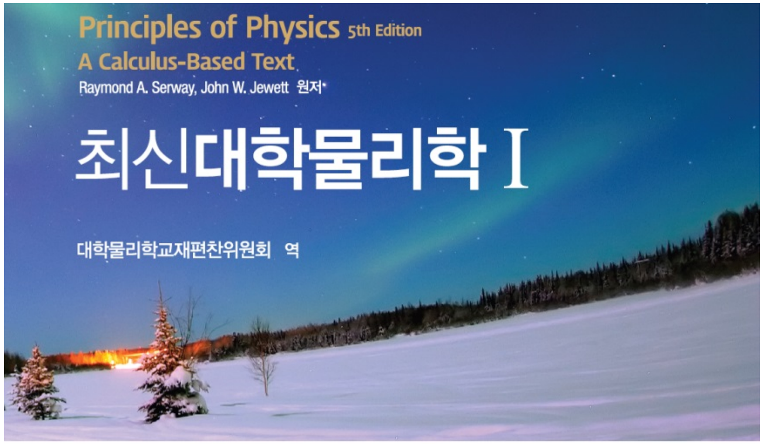
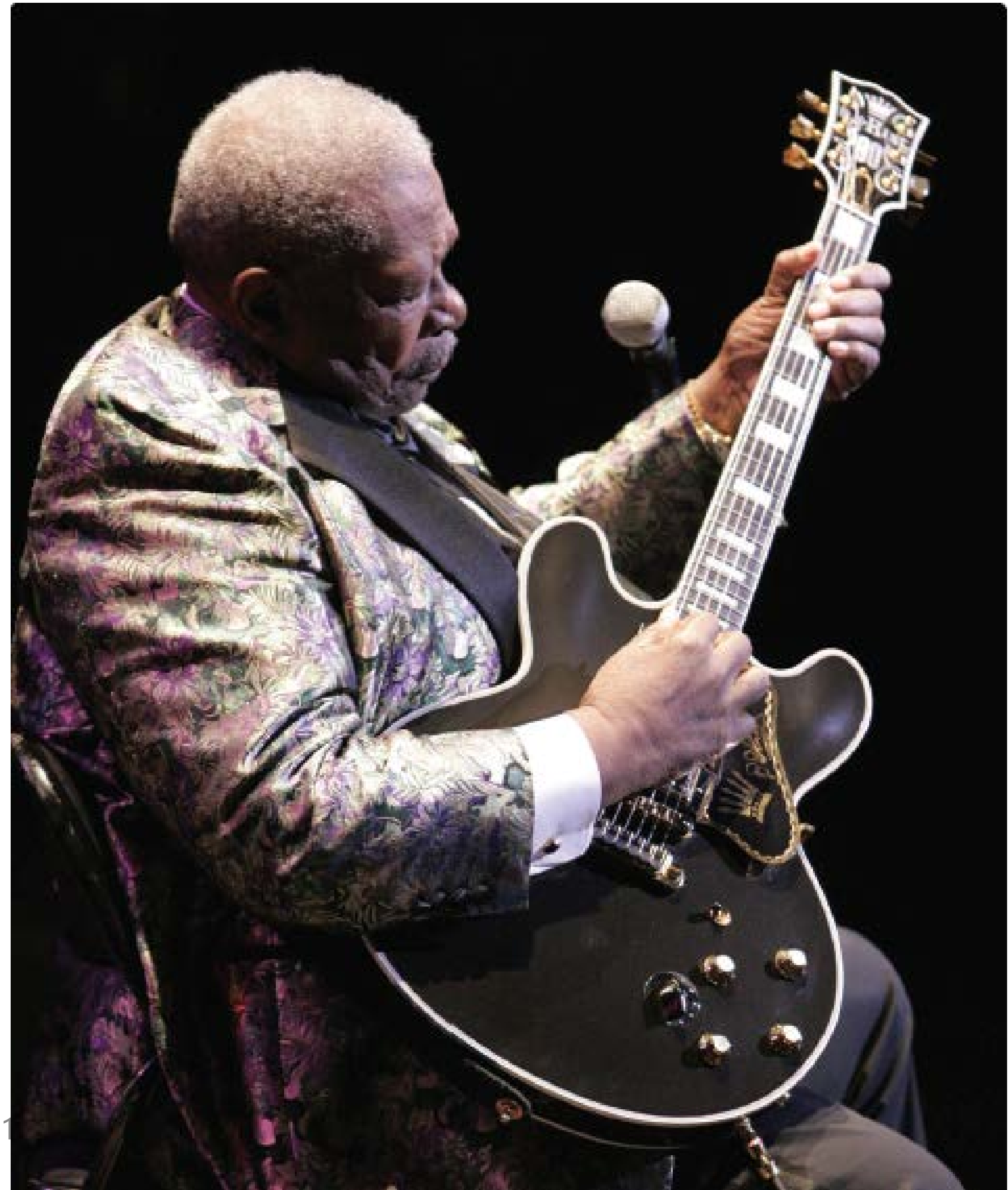


CENGAGE Learning 북스힐
Andover • Melbourne • Mexico City • Stamford, CT • Toronto • Hong Kong • New Delhi • Seoul • Singapore • Tokyo

제14장 중첩과 정상파

제14장 중첩과 정상파



14.1 분석 모형: 파동의 간섭
14.2 정상파
14.3 분석 모형: 경계 조건하의 파동
14.4 공기 관에서의 정상파
14.5 맥놀이: 시간적 간섭
14.6 연결 주제: 배에 위치한 건축물

파동과 입자

파동은 입자와 매우 다르다.

- 이상적인 입자는 크기가 영이다.
- 이상적인 파동은 길이가 무한대이다.
- 둘 또는 그 이상의 파동은 같은 매질 내의 한 점에서 결합될 수 있다.
- 입자를 결합하여 큰 물체를 만들 수 있으나, 그 입자들은 조금이라도 다른 위치에 있게된다.

14.1 분석 모형: 파동의 간섭(Analysis Model: Interference of Waves)

중첩의 원리

한 매질 속을 둘 이상의 진행파가 움직이고 있으면, 임의의 점에서의 합성파는 각 위치에서의 각 파동의 크기의 대수적인 합과 같다.

중첩의 원리를 따르는 파동을 **선형파동**이라 한다.

일반적으로, 선형파동은 파장보다는 훨씬 작은 진폭을 갖는다.

두 진행파는 소멸되거나 모양이 바뀌지 않고 지나쳐 갈 수 있다.

이것은 중첩의 원리의 결과이다.

간섭(interference) :공간의 한 영역에서 두 파가 결합되어 합성파를 만드는 것.

보강간섭(constructive interference): 두 펄스의 변위가 같은 방향일 때 일어난다.

합성파의 진폭은 두 파 중 진폭이 큰 파보다 크다.

상쇄간섭(destructive interference) : 두 펄스의 변위가 반대 방향일 때 일어난다..

합성파의 진폭은 주 파 중 진폭이 작은 파 보다 작다.

보강간섭

두 펄스가 반대 방향에서 마주 보고 진행하는 경우

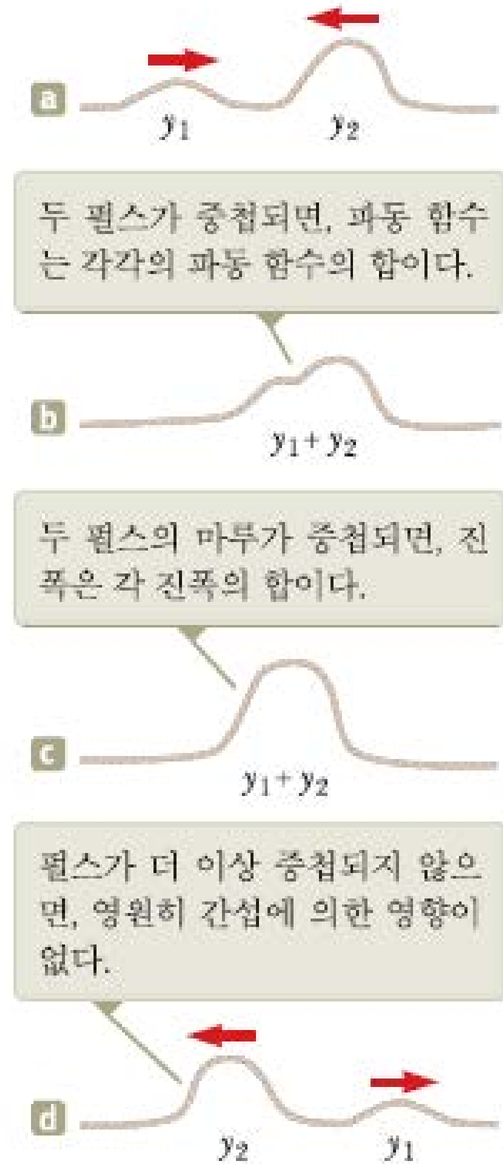
y_1: 오른쪽으로 진행하는 파동함수
y_2 : 왼쪽으로 진행하는 파동함수

(a) 두 파는 속력이 같지만 모양이 다르다.

각 요소의 변위는 모두 양(+)이다.

(b)(c) 두 파가 중첩될 때 중첩된 파동함수는 각 파의 파동함수의 합이다.

(d) 두 파가 분리되면, 각각의 파들은 원래의 진행방향을 계속 나아간다.
그러나, 파의 모양은 변치 않는다.

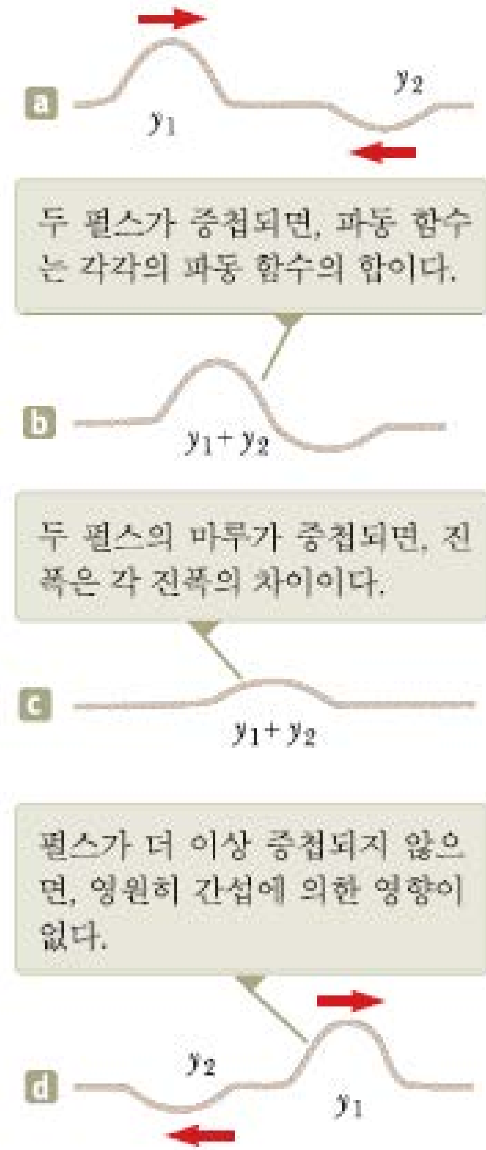


상쇄간섭

두 파가 서로 마주 보고 진행하고 있다.

각 파의 변위는 서로 반대 방향(하나는 위로 다른 하나는 아래로)이다.

겹쳐지면, 변위가 부분적으로 상쇄된다.



사인형 파동의 중첩 Superposition of Sinusoidal Waves

두 파가 같은 진동수, 같은 파장, 같은 진폭으로 같은 방향으로 이동한다고 가정:

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t),\ y_2 = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

합성파는

$$y = y_1 + y_2 = A\,[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

삼각공식을 사용: $\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$

합성파의 식:

$$y = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

합성파동함수 y도 역시 사인형이다.

원래의 파와 같은 진동수 같은 파장을 갖는다.

그러나 진폭은 : $2A\cos(\phi/2)$ 이고,   위상은 : $\phi/2$

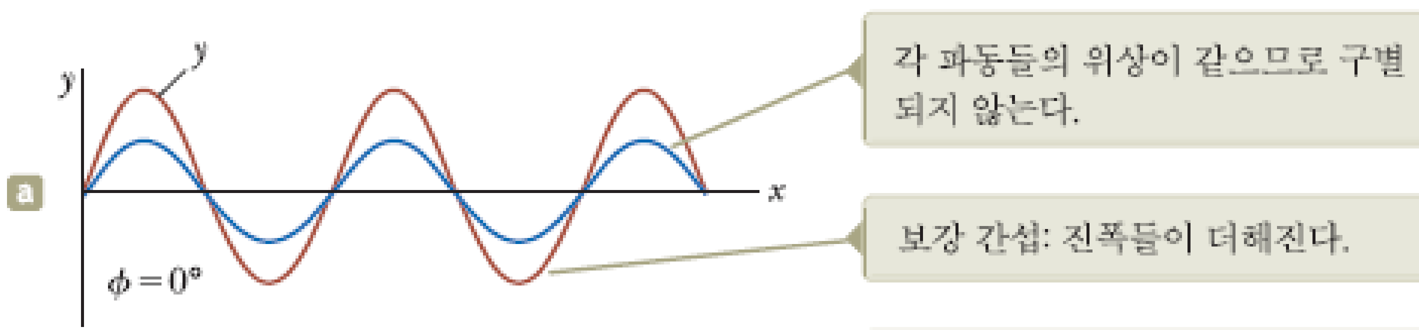
$\phi = 0$이면, $\cos(\phi/2) = 1$

합성파의 진폭은 2A 가 된다.

한 파의 마루가 다른 파의 마루와 같은 곳에서 만난다.

위상이 모든 곳에서 같은 파가 만나면,

서로 보강간섭을 일으킨다.



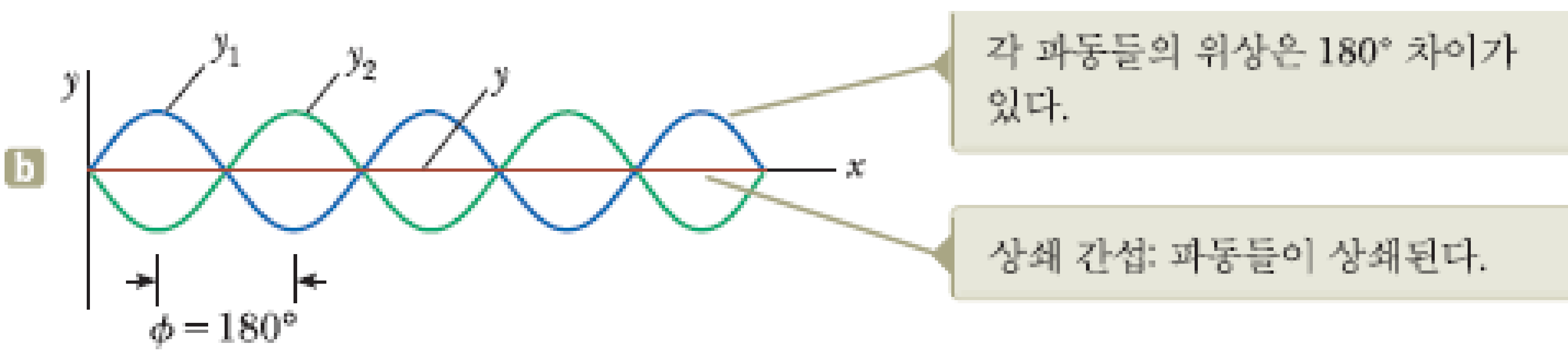
- $\phi = \pi$ 이면, $\cos(\phi/2) = 0$

  Π의 짝수배에 대해서도 마찬가지

- 합성파의 진폭은 0이 된다.

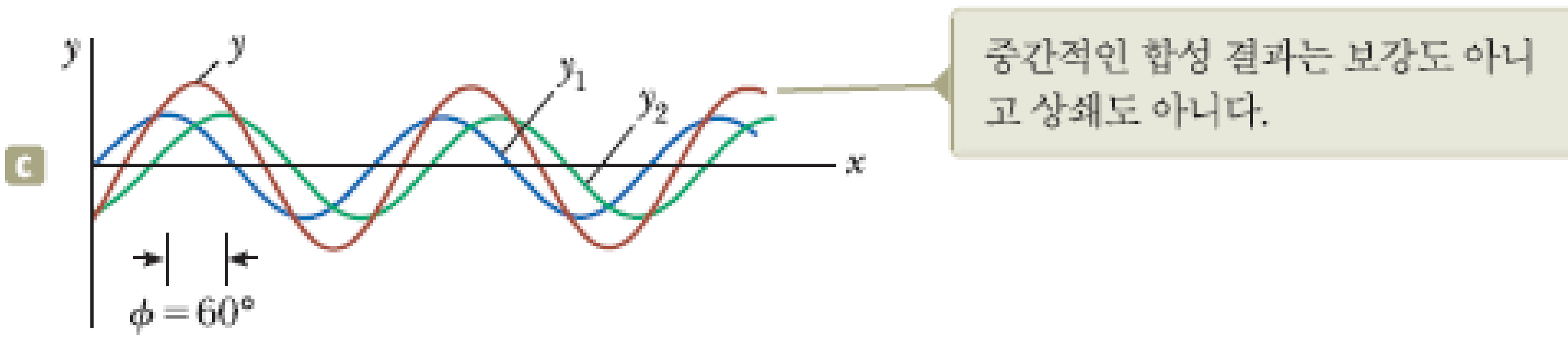
  한 파의 마루가 다른 파의 골과 만난다.

- 서로 상쇄간섭을 일으킨다.



ϕ가 0이 아니거나 π의 짝수배가 아니면, 합성파의 진폭은 0와 2A 사이의 값을 가진다.

파동함수들은 여전히 더해지지만 그 결과는 보강간섭도 아니고 상쇄간섭도 아닌 중간이다.



- 보강간섭의 조건: ϕ =0

  합성파의 진폭은 $2A$

- 상쇄간섭의 조건: $\phi = n\pi$, 여기서 n은 짝수 정수

  합성파의 진폭은 0

- 일반적인 간섭: $0 < \phi < n\pi$

  진폭: $0 < A_{합성파} < 2A$

음파의 간섭 Interference of Sound Waves

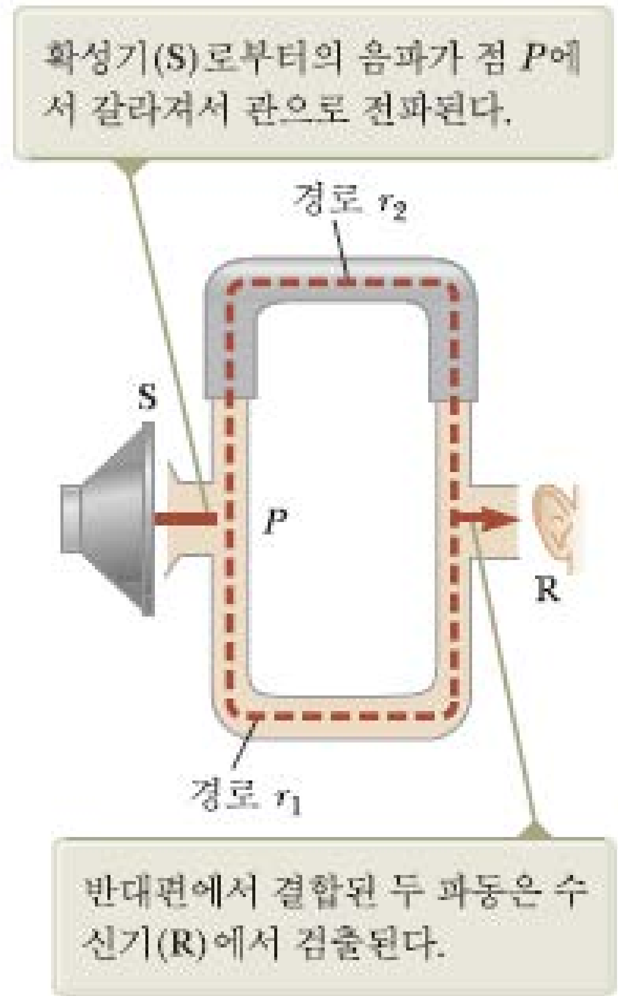
- *S* 에서 나온 소리가 다른 두 경로를 거쳐 *R* 에 도달

- $\Delta r = |r_2 - r_1| = n\lambda$ 의 경우

보강간섭

- $\Delta r = |r_2 - r_1| = (n/2)\lambda$ 의 경우

상쇄간섭



예제 14.1 같은 음원으로 두 스피커를 구동하기

같은 음원으로 구동되는 한 쌍의 스피거가 서로 3.00 m 떨어져 있다. 청취자는 처음에 두 스피커를 잇는 선분의 중심으로부터 8.00 m 떨어진 점 *O* 에 있다. 청취자가 점 *O*로부터 수직 방향으로 0.350 m인 점 *P* 에 도달했을 때 음파 세기의 일차 극소를 들었다면, **음원의 진동수**는 얼마인가?

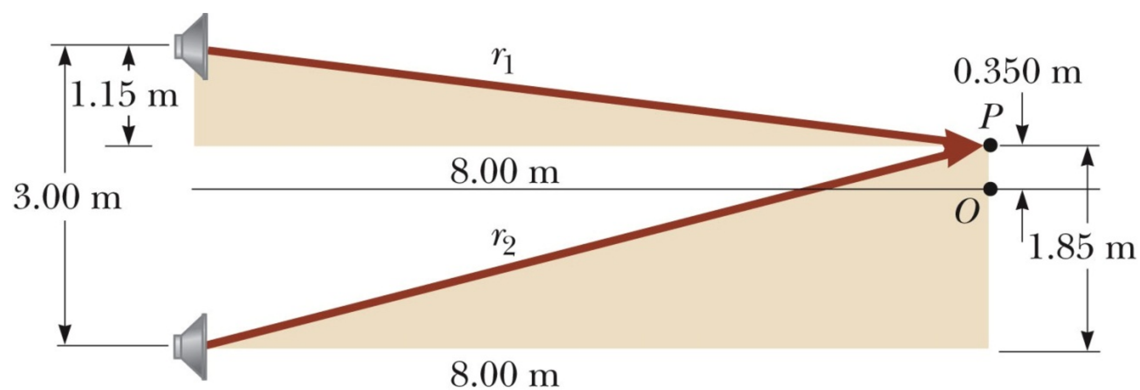
풀이

음원에서 두 스피커까지의 각각의 경로를 구한다:

$$r_1 = \sqrt{(8.00\ \mathrm{m})^2 + (1.15\ \mathrm{m})^2} = 8.08\ \mathrm{m}$$

$$r_2 = \sqrt{(8.00\ \mathrm{m})^2 + (1.85\ \mathrm{m})^2} = 8.21\ \mathrm{m}$$

경로차는 0.13m이고 이에 해당하는 1차 극소의 파장 λ는 0.26m이다.



따라서 음원의 진동수는:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\ \mathrm{m/s}}{0.26\ \mathrm{m}} = \boxed{1.3\ \mathrm{kHz}}$$

14.2 정상파(Standing Waves)

진폭, 진동수, 파장이 같은 두 파가 매질 속에서 마주 보고 진행하는 경우:

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A\sin(kx + \omega t)$$

그 두 파는 중첩의 원리에 따라 간섭한다.

그 결과 합성파는: $y = (2A\sin kx)\cos\omega t$

이것이 **정상파**(standing wave)의 파동함수이다.

이 식 속에 kx-ωt 의 항이 없기 때문에 이 식은 진행파 식이 아니다.

정상파를 관찰해 보면, 파가 진행하지 않고 정지해 있는 모습으로 보인다.

정지파라고도 한다.

진폭이 영인 점이 마디(node)이다:

마디의 위치: $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots = \frac{n\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

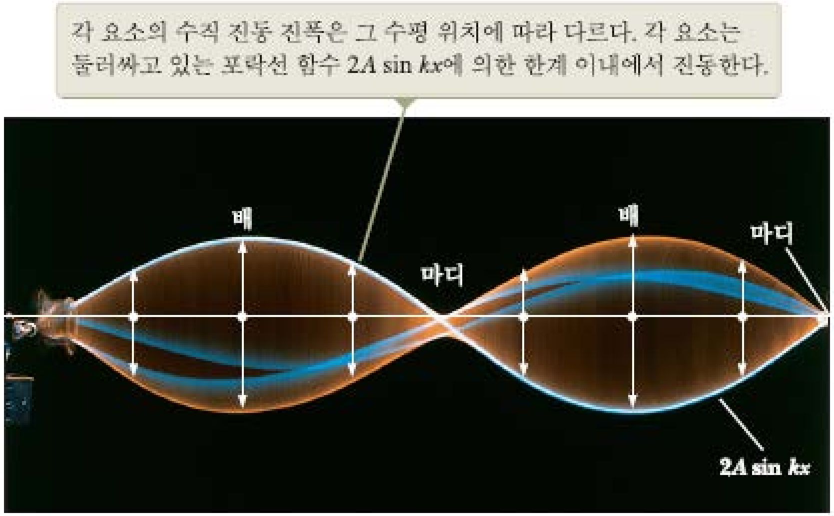
배(antinode)의 위치: 변위가 최대인 점, 즉 2*A*

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots = \frac{n\lambda}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

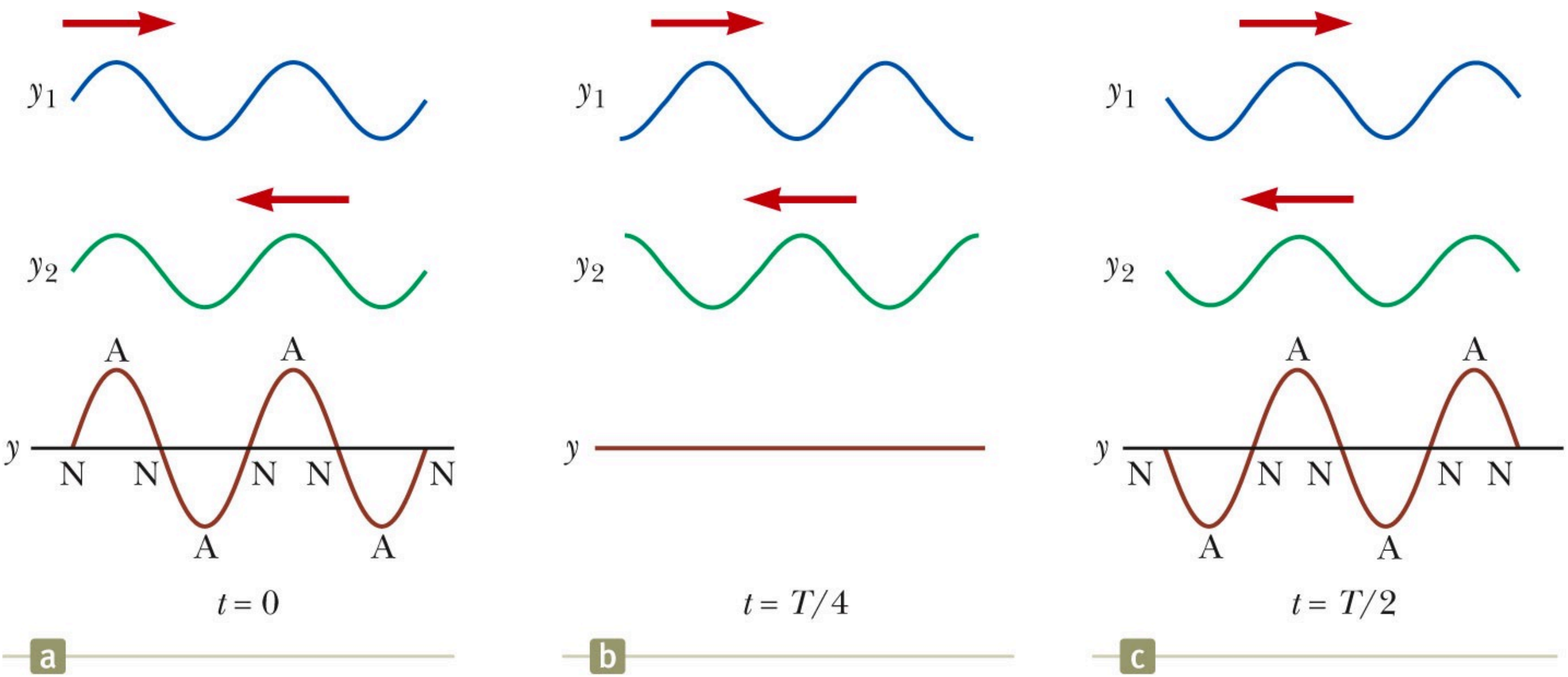
가장 가까운 배 사이의 거리는 $\lambda/2$:

가장 가까운 마디 사이의 거리는 $\lambda/2$:

가장 가까운 배와 마디 사이의 거리는 $\lambda/4$:



마주 보고 진행하는 진폭이 같은 두 파에 의해 여러 시각에서 서로 다른 모양의 정상파가 생긴다:



예제 14.2 정상파의 형성

서로 반대 방향으로 진행하는 두 파동이 정상파를 만든다. 각각의 파동 함수는

$$y_1 = (4.0cm)\sin(3.0x - 2.0t) \qquad y_2 = (4.0cm)\sin(3.0x + 2.0t)$$

(A) 줄의 한쪽 끝이 *x=0*일 때, 마디와 배의 위치를 구하라.
(B) x =2.3cm에 위치한 매질 요소의 단조화 운동의 진폭을 구하라.

풀이

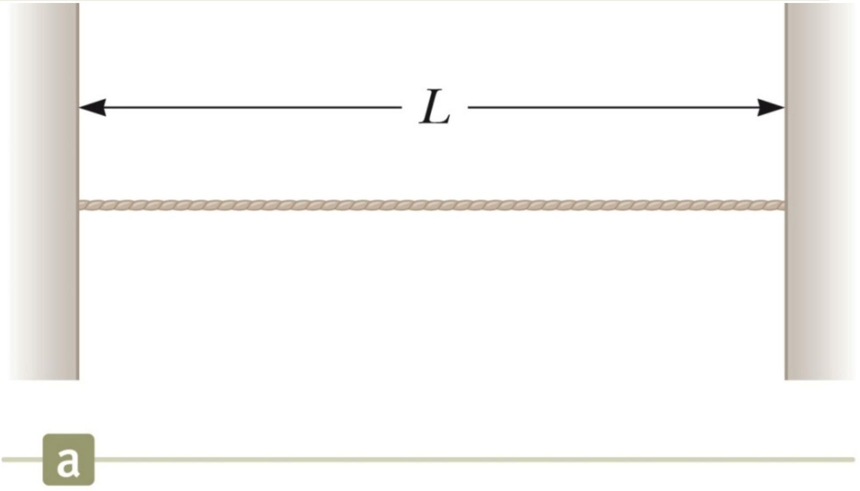
(A) $$y = (2A\sin kx)\cos \omega t = [(8.0cm)\sin 3.0x]\cos 2.0t$$

$$y_{\max} = (8.0cm)\sin 3.0x\,|_{x=2.3}$$
$$= (8.0cm)\sin(6.9rad) = 4.6cm$$

(B) $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.0rad/cm \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{3.0}cm$$

배: $x = n\dfrac{\lambda}{2} = n\left(\dfrac{\pi}{3}\right)cm \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 마디: $x = n\dfrac{\lambda}{4} = n\left(\dfrac{\pi}{6}\right)cm \quad n = 1, 3, 5, 7, \cdots$

14.3 분석 모형: 경계 조건하의 파동
(Analysis Model : Waves Under Boundary Condition)



길이가 L이고 양단이 고정된 줄

양단에 입사하고 반사하는 파의 연속적인 중첩에 의해 정상파가 생긴다.

그런 파에는 경계조건이 있게 된다.

줄의 양 끝은 진동의 마디가 되어야만 한다.

마디에선 변위가 영.

줄은 **정규 모드**(normal mode)라 불리는 고유의 진동 모양을 가진다.

각각의 모드는 **특성진동수**를 갖는다.

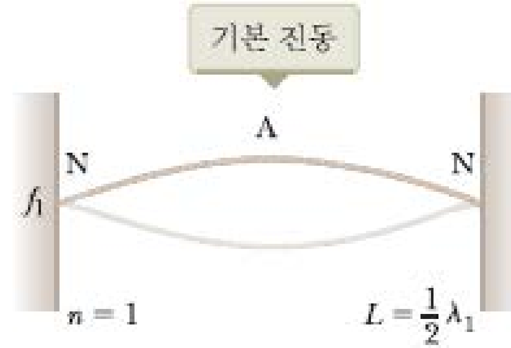
정규모드로 진동하는 줄은 **양 끝이 마디**여야 하고 **마디와 배 사이의 간격**이 $\lambda/4$ 가 된다는 것이다.

첫 번 째 정규모드

양 끝이 마디이고,

가운데 중간 부분이 배이다.

이 경우가 파장이 가장 긴 모드이다.

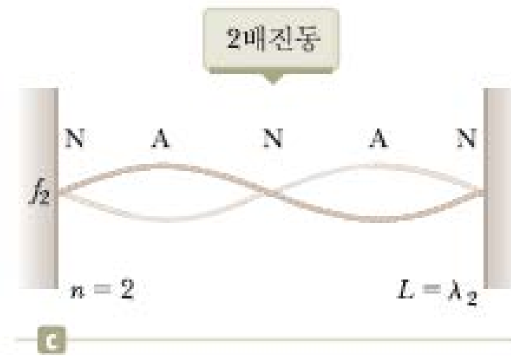


$$L = \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{or} \quad \lambda_1 = 2L$$

그 다음부터 계속되는 모드

배가 하나씩 증가,

두 번째 모드의 파장은 $\lambda=L$



세 번째 모드의 파장은 $\lambda=2L/3$

일반적으로, n 번째 모드의 파장은

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

고유진동수는

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}v \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

다시 쓰면

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

n=1 인 가장 낮은 진동수를 **기본진동수**(fundamental frequency)라 한다.

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

그 이상의 정규진동의 진동수는 기본 진동수의 정수배이다.

정수배 관계를 갖는 정규모드의 진동수는 조화열(harmonic series)을 이룬다.

이러한 정규모드를 조화모드(harmonics)라 한다.

기본 진동수 f_1은 첫 번째 배진동의 진동수이고, 진동수 $f_2 = 2f_1$은 두 번째 배진동의 진동수이며, 진동수 $f_n = nf_1$은 n 번째 배진동의 진동수이다.

예제 14.3 C음을 쳐 보라!

피아노에서 중간 C줄의 기본 진동수는 262Hz이며, 중간 C 위의 첫 번째 A줄의 기본 진동수는 440Hz이다.

(A) C줄의 다음 두 조화 모드의 진동수를 계산하라.

풀이 기본 진동수는 f_1=262Hz로 알려져 있으므로 정수를 곱해 다음 조화 모드의 진동수들을 구한다.

$$f_2 = 2f_1 = \boxed{524\ \text{Hz}}$$

$$f_3 = 3f_1 = \boxed{786\ \text{Hz}}$$

(B) 만약 A줄과 C줄이 같은 길이 L과 선질량 밀도 μ 갖는다면, 두 줄의 장력비는 얼마인가?

풀이 기본진동수에 대한 식을 쓴다: $f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}}$ 및 $f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$

처음 식을 두 번째 식으로 나누어서 그 비를 구한다:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440}{262}\right)^2 = \boxed{2.82}$$

14.4 공기 관에서의 정상파(Standing Waves in Air Columns)

공기관 속을 서로 마주보고 진행하는 종음파의 간섭으로 정상파가 생길 수 있다.

입사파와 반사파 간의 위상 관계는 관의 끝이 막힌 경우와 열린 경우에 따라 다르다.

관이 막힌 끝은 정상파의 변위마디(displacement node)이다.

- 막힌 부분에서 공기 중의 종방향 운동이 불가능하다.
- 반사파는 입사파와 180° 위상차가 있다.

막힌 끝은 압력 배(pressure antinode)에 해당한다.

- 그곳은 압력변화가 최대인 곳이다.

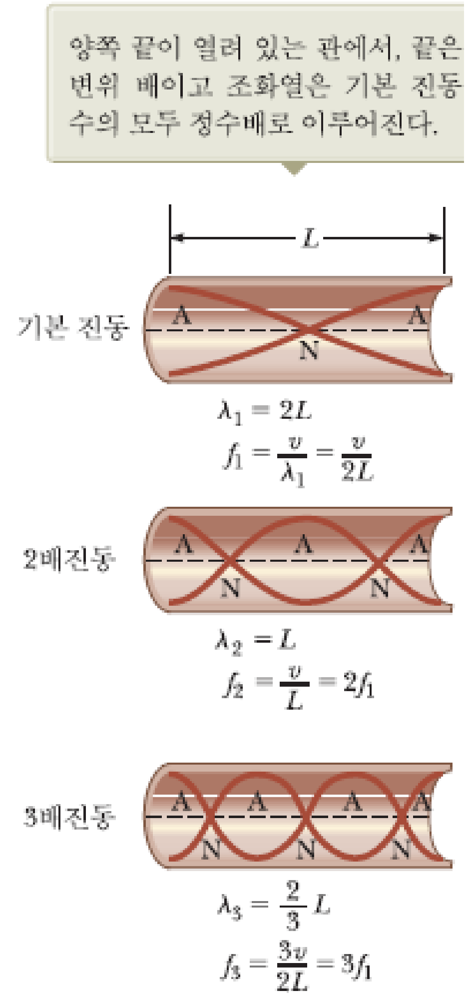
관이 열린 끝은 정상파의 변위배(displacement antinode)이다.

파의 압축영역이 관의 열린 곳을 빠져 나감에 따라, 관의 구속 조건은 없어지고, 압축된 공기는 대기 중으로 자유로이 팽창할 수 있다.

- 막힌 부분에서 공기 중의 종방향 운동이 불가능하다.

막힌 끝은 압력 마디(pressure node)에 해당한다.

- 그곳은 압력변화가 없는 곳



양단이 열리관의 경우

양단은 변위배

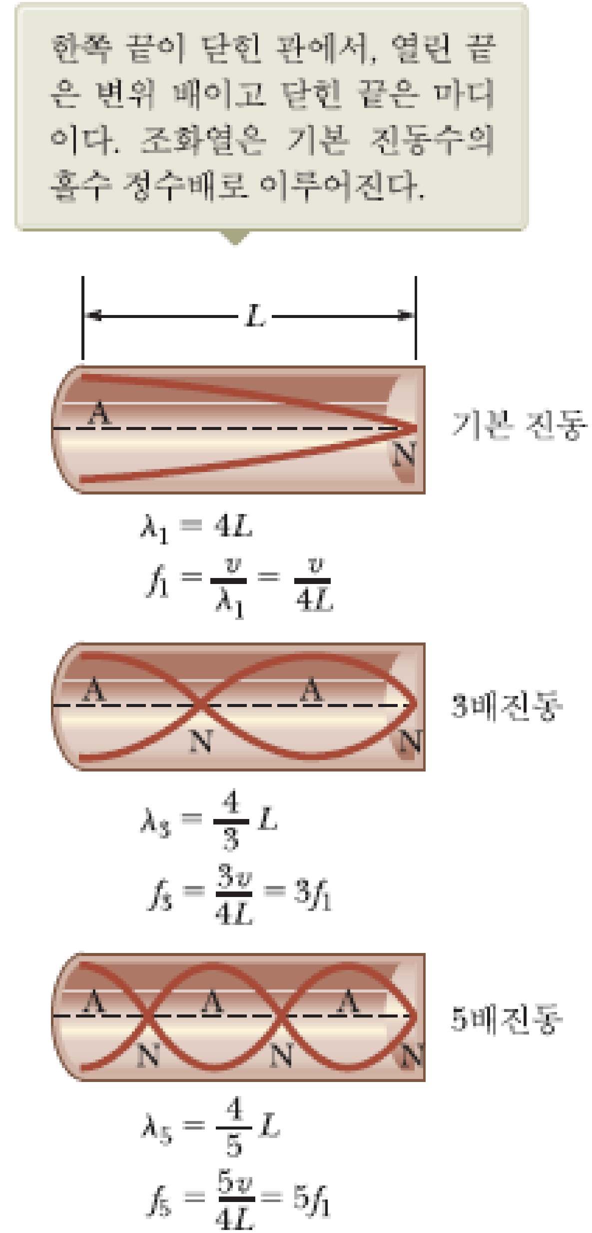
고유진동수: $f_n = n\dfrac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

한쪽 끝만 열린 경우

- 닫힌 끝은 변위 마디
- 열린 끝은 변위 배

고유진동수:

$$f_n = n\frac{v}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$



예제 14.4 큰 하수관에 부는 바람

길이 1.23 m인 배수거 구획에서 바람이 열린 끝 부분을 가로질러 불 때 엄청난 소음이 난다.

(A) 그 하수관은 원통형이며 양쪽이 열려 있는 경우, 하수관의 처음 세 개의 조화 모드의 진동수를 구하라. 공기중의 음속은 v = 343m/s이다.

풀이 양쪽 끝이 열린 공기 관으로 모형화한 다음 하수관의 기본 진동의 진동수를 구한다.

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343\text{ m/s}}{2(1.23\text{ m})} = \boxed{139\text{ Hz}}$$

정수들을 곱해서 다음 조화 모드의 진동수를 구한다.

$$f_2 = 2f_1 = \boxed{279\text{ Hz}}$$

$$f_3 = 3f_1 = \boxed{418\text{ Hz}}$$

(B) 한쪽이 막혀 있는 경우 하수관의 처음 세 개의 자연 진동수를 구하라.

풀이

한쪽 끝이 닫힌 공기 관으로 모형화한 다음 하수관의 기본 진동의 진동수를 구한다.

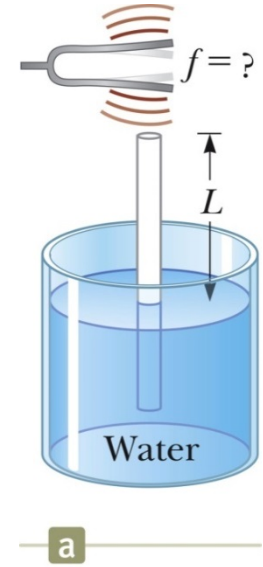
$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(1.23 \text{ m})} = \boxed{69.7 \text{ Hz}}$$

홀수의 정수들을 곱해서 다음의 두 조화 모드를 구한다.

$$f_3 = 3f_1 = \boxed{209 \text{ Hz}}$$

$$f_5 = 5f_1 = \boxed{349 \text{ Hz}}$$

예제 14.5 소리굽쇄의 진동수 측정



공기 관에서의 공명을 설명하는 간단한 장치가 그림에 나타나 있다. 양쪽 끝이 열린 수직 관이 물에 일부 잠겨 있고, 미지의 진동수로 진동하는 소리굽쇠가 관의 위쪽 끝 근처에 있다. 공기 기둥의 길이 *L* 은 관 속의 물을 연직으로 이동시켜 조절할 수 있다. 소리굽쇠에 의해 만들어진 음파는 *L*이 관의 공명 진동수 중 하나에 해당할 때 강해진다. 어떤 관에서 공명이 일어나는 최소 길이 *L*은 9.00 cm이다.

(A) 소리굽쇠의 진동수를 구하라.

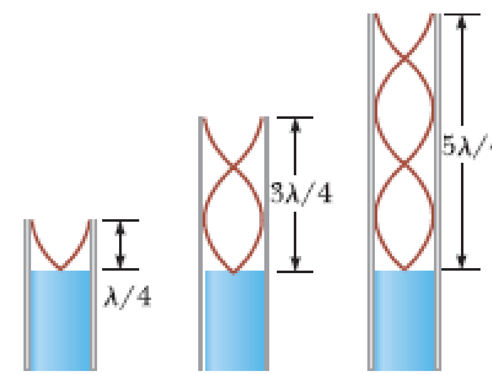
풀이 소리굽쇠의 기본진동수는: $f_1 = \dfrac{v}{4L} = \dfrac{343\ \text{m/s}}{4(0.090\,0\ \text{m})} = 953\ \text{Hz}$

(B) 위의 공명 진동수 다음의 두 공명 조건에 대한 공기 관의 길이 *L*을 구하라.

풀이 음파의 파장을 구한다: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{343\ \text{m/s}}{953\ \text{Hz}} = 0.360\ \text{m}$

2차 공명이 일어날 공기관의 길이: $L = 3\lambda/4 = 0.270\ \text{m}$

3차 공명이 일어날 공기관의 길이: $L = 5\lambda/4 = 0.450\ \text{m}$



14.5 맥놀이: 시간적 간섭(Beats: Interference in Time)

진동수가 약간 다른 파동이 간섭할 때 일시적인 간섭이 일어난다.

맥놀이(beats): 진동수가 약간 다른 두 파가 중첩될 때 두어진 위치에서 합성파의 진폭이 주기적으로 변하는 것

맥놀이 진동수(beat frequency): 매 초당 듣는 진폭의 극대값의 수:

사람의 귀는 약 20beats/s 의 맥놀이 진동수를 들을 수 있다.

진폭은 같으며 진동수가 조금 다른 두 파가 같은 매질 속을 진행하는 경우

- x=0에서의 위치;

$$y_1 = A\cos 2\pi f_1 t \qquad \text{and} \qquad y_2 = A\cos 2\pi f_2 t$$

- 합성파의 위치:

$$y = y_1 + y_2 = A(\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t)$$

- 삼각공식을 사용하여 정리:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$a = 2\pi f_1 t$ and $b = 2\pi f_2 t$ 라 두면,

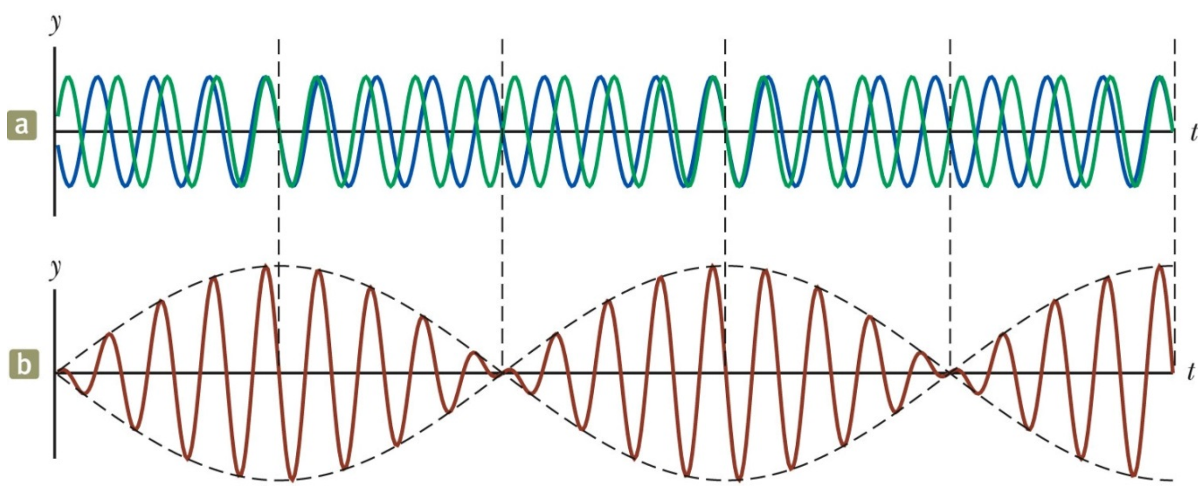
$$y = \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

진폭은:

$$A_{x=0} = 2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$$

$\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = \pm 1$ 일 때 최대진폭이 된다.

따라서 맥놀이 진동수는: $f_b = |f_1 - f_2|$



14.6 연결주제: 배에 위치한 건축물

(Context Connection: Building on Antinodes)

퇴적분지(sedimentary basins)에서 정상파의 효과

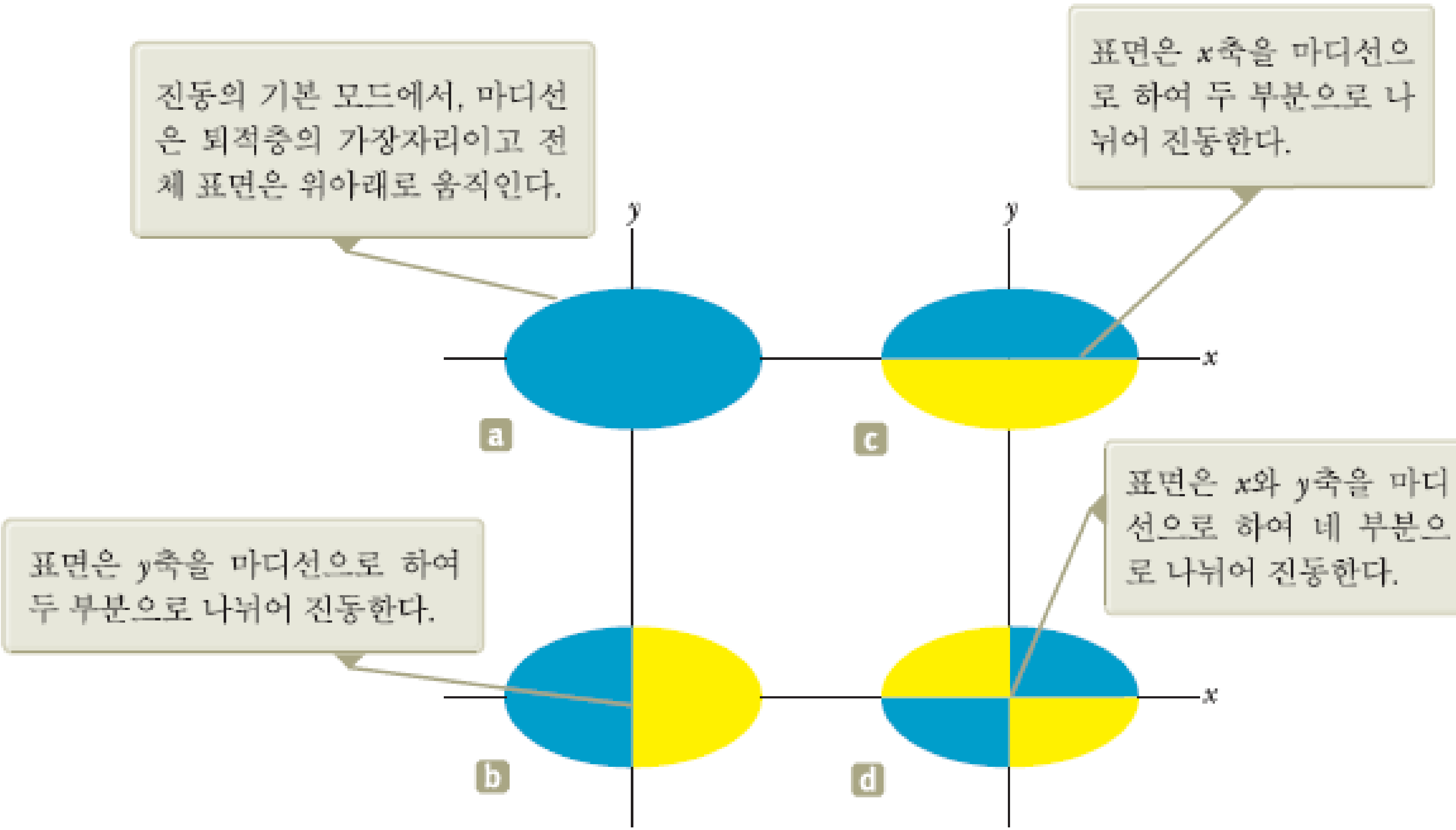
- 퇴적분지: 지형학적으로 오목한 곳에 퇴적층이 채워진 곳

건축물 또는 구조물들의 자연 진동수가 아래쪽에 놓인 퇴적지의 공명 진동수와 같아진다면 지진에 의한 파괴는 극적으로 증가할 수 있다.

이 공명 진동수는 퇴적층의 경계면으로부터 반사된 지진파에 의해 형성된 삼차원 정상파와 관련이 있다.

위에서 본 반타원체 모양의 퇴적층에서의 정상파 모드

각각의 경우, 어떤 순간에 파란 부분이 종이면의 위쪽에 있다면, 노란 부분은 종이면의 아래쪽에 있다.



퇴적층에서 정상파 모양은 퇴적층의 경계 사이에서 수평으로 이동하는 지진파로부터 발생한다.

- 퇴적 분지에 세워진 구조물에 대해, 지진 피해의 정도는 퇴적지에서 이동하는 지진파의 간섭에 의해 생긴 정상파 모드들에 의존한다.
- 지표면 운동의 최대 영역[즉 배(antinode) 위치]에 세워진 구조물들은 흔들림이 심하지만,
- 마디 근처에 존재하는 구조물은 상대적으로 지표면 운동이 경미하게 나타날 것이다.