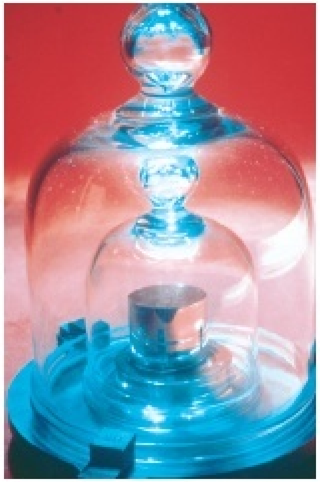
1장. 서론 및 벡터

1.1 길이, 질량 그리고 시간의 표준
Standards of Length, Mass, and Time

국제단위(SI 단위): 미터 단위계로 표시되는 단위

시간: 초(s) 거리: 미터(m) 질량:킬로그램(kg)
전류: 암페어(A) 광도: 칸델라(cd) 온도: 켈빈(K)
물질의 양: 몰(mole)

◆ **표준 단위의 정의**



길이: 진공 중에서 빛이 1/299,792,458 초 동안 이동한 거리를 1 미터로 정의

질량: 프랑스 국제 도량형국에 보관되어 있는 백금-이리듐 합금의 특별한 봉의 질량으로 정의

시간: 세슘(Cs)원자의 에너지 준위가 가장 낮은 두 상태 사이의 마이크로파에 의한 흡수 방출 진동 이 9,192,631,770번 일어나는 시간을 1초로 정의

표 1.1 여러 가지 측정된 길이들의 근사값

	길 이(m)
지구로부터 가장 먼 퀘이사까지의 거리	1.4×10^{26}
지구로부터 가장 먼 은하까지의 거리	9×10^{25}
지구로부터 가장 가까운 큰 은하(M31, 안드로메다은하)까지의 거리	2×10^{22}
태양으로부터 가장 가까운 별(알파 센타우리)까지의 거리	4×10^{16}
1광년	9.46×10^{15}
지구의 평균 공전 궤도 반지름	1.50×10^{11}
지구로부터 달까지의 평균 거리	3.84×10^{8}
적도에서 북극까지의 거리	1.00×10^{7}
지구의 평균 반지름	6.37×10^{6}
지구 주위를 도는 전형적인 인공위성의 고도	2×10^{5}
축구장의 길이	9.1×10^{1}
집파리의 크기	5×10^{-3}
가장 작은 먼지 입자의 크기	$\sim 10^{-4}$
살아있는 유기체의 세포 크기	$\sim 10^{-5}$
수소 원자의 지름	$\sim 10^{-10}$
원자핵의 지름	$\sim 10^{-14}$
양성자의 지름	$\sim 10^{-15}$

표 1.2 여러 가지 물체들의 질량(근사값)

물 체	질 량(kg)
관측 가능한 우주	$\sim 10^{52}$
은하수	$\sim 10^{42}$
태양	1.99×10^{30}
지구	5.98×10^{24}
달	7.36×10^{22}
상어	$\sim 10^{3}$
사람	$\sim 10^{2}$
개구리	$\sim 10^{-1}$
모기	$\sim 10^{-5}$
박테리아	$\sim 1 \times 10^{-15}$
수소 원자	1.67×10^{-27}
전자	9.11×10^{-31}

표 1.3 여러 가지 시간 간격들의 근사값

	시간 간격(s)
우주의 나이	5×10^{17}
지구의 나이	1.3×10^{17}
대학생의 평균 나이	6.3×10^{8}
1년	3.2×10^{7}
1일(지구의 1회 자전 시간)	8.6×10^{4}
수업 1시간	3.0×10^{3}
정상적인 심장 박동 간의 시간	8×10^{-1}
가청 음파의 주기	$\sim 10^{-3}$
전형적인 라디오파의 주기	$\sim 10^{-6}$
고체 내 원자의 진동 주기	$\sim 10^{-13}$
가시광선의 주기	$\sim 10^{-15}$
핵 충돌 시간	$\sim 10^{-22}$
빛이 양성자를 가로지르는데 걸리는 시간	$\sim 10^{-24}$

표 1.4 10의 지수를 나타내는 접두어

지수	접두어	약호	지수	접두어	약호
10^{-24}	yocto	y	10^{-1}	deci	d
10^{-21}	zepto	z	10^{3}	kilo	k
10^{-18}	atto	a	10^{6}	mega	M
10^{-15}	femto	f	10^{9}	giga	G
10^{-12}	pico	p	10^{12}	tera	T
10^{-9}	nano	n	10^{15}	peta	P
10^{-6}	micro	μ	10^{18}	exa	E
10^{-3}	milli	m	10^{21}	zetta	Z
10^{-2}	centi	c	10^{24}	yotta	Y

1.2 차원 분석 Dimensional Analysis

차원: 어떤 양의 물리적 성질을 나타냄

대수적인 양으로 취급할 수 있다.
물리적인 양은 같은 차원일 때만 더하거나 뺄 수 있다.
방정식에서 양변의 양은 같은 차원을 가져야 한다.

물리량	단위	차원
질량 m	kg	M
길이 l	m	L
시간 t	s	T
속도 v	m/s	LT^{-1}

표 1.5 | 넓이, 부피, 속력 및 가속도의 차원과 단위

물리량	넓이 (A)	부피 (V)	속력 (v)	가속도 (a)
차 원	L^2	L^3	L/T	L/T^2
SI 단위계	m^2	m^3	m/s	m/s^2

예제 1.1 | 식의 분석

식 $v = at$가 차원적으로 올바른지 보여라. 여기서 v, a, t는 각각 속력, 가속도, 시간을 나타낸다.

풀이

표 1.5로부터 v의 차원을 나타낸다.

$$[v] = \frac{L}{T}$$

표 1.5로부터 a의 차원을 나타내고 t의 차원을 곱한다.

$$[at] = \frac{L}{T^{\cancel{2}}}\cancel{T} = \frac{L}{T}$$

따라서 $v = at$는 차원적으로 올바른 식이다. 왜냐하면 양쪽 모두 같은 차원을 가지기 때문이다. (만약 여기서 사용한 식이 $v = at^2$라면 차원적으로 **올바른 표현이 아니다**.)

1.3 단위의 환산 Conversion of Units

한 단위계에서 다른 단위계로 환산하는 것은 물론이거니와 킬로미터를 미터로 바꾸는 것과 같이 한 단위계 내에서도 환산이 필요하다.

$$1\text{ mi} = 1\,609\text{ m} = 1.609\text{ km} \qquad 1\text{ ft} = 0.3048\text{ m} = 30.48\text{ cm}$$

$$1\text{ m} = 39.37\text{ in.} = 3.281\text{ ft} \qquad 1\text{ in.} = 0.0254\text{ m} = 2.54\text{ cm}$$

환산을 하기 위해 어떤 양에 바꿈 인수(conversion factor)를 **곱할 수 있다.**

바꿈 인수(conversion factor) : 분자와 분모가 다른 단위로 된 크기가 1인 분수

$$1\text{ in.} = 2.54\text{ cm} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2.54\text{ cm}}{1\text{ in.}} = 1$$

in.로 표현된 길이를 cm로 환산하는 데 쓰이는 바꿈 인수

$$15\text{ in.} = (15\ \cancel{\text{in.}})\left(\frac{2.54\text{ cm}}{1\ \cancel{\text{in.}}}\right) = (15)(2,25\text{cm}) = 38.1\text{cm}$$

1.4 크기의 정도 계산 Order-of-Magnitude Calculations

크기의 정도를 구하는 방법

I 수량(물리 량) $\boldsymbol{Q}$의 과학적 표기

$$Q = a \times 10^m \quad (1 \le a < 10,\ m\text{은 정수})$$

$$12.7 = 1.27 \times 10^1,\ 0.0907 = 9.07 \times 10^{-2}$$

II 수량(물리 량) $\boldsymbol{Q}$의 추정

$$Q = a \times 10^m$$

$$Q = 10^{\log a} \times 10^m = 10^{m + \log a}$$

반올림

$$\log a_c = \frac{1}{2}$$

$$a_c = \sqrt{10}$$

$$a < \sqrt{10} \cong 3.162 \Rightarrow Q \sim 10^m$$

$$a \ge \sqrt{10} \cong 3.162 \Rightarrow Q \sim 10^{m+1}$$

예: 0.0086m ～ 10^{-2}m, 0.0021m ～ 10^{-3}m, 720m ～ 10^3m

1.5 유효숫자 Significant Figure

측정값은 실험적 오차 범위 내에서만 의미를 갖는 값이다. 측정에서 유효숫자(significant figure)의 개수는 불확실한 정도를 표현하는 데 사용된다.

예: 0이 아닌 숫자는 모두 유효숫자이다.

1.23 ⟹ 유효숫자 3개: 1, 2, 3

0이 아닌 숫자 사이의 0은 유효숫자 이다.

3.002 ⟹ 유효숫자 4개: 3, 0, 0, 2

소수점 아래 0이 아닌 숫자 뒤의 0은 유효숫자이다.

2.40 ⟹ 유효숫자 3개: 2, 4, 0

자연수에서 끝의 0은 유효숫자인지 알수 없다.

500 ⟹ 0,0 두 개는 유효숫자인지 알 수 없다

1.01 ⟹ 유효숫자 3개; 1,0,1

0.007 ⟹ 유효숫자 1개; 7

0.0070 ⟹ 유효숫자 2개; 7,0

측정값 : 5400의 과학적 표기

유효숫자 2개면 5.4×10^3

유효숫자 3개면 5.40×10^3

측정값 : 0.0085의 과학적 표기

유효숫자 2개면 8.5×10^{-3}

유효숫자 3개면 8.50×10^{-3}

유효숫자의 연산

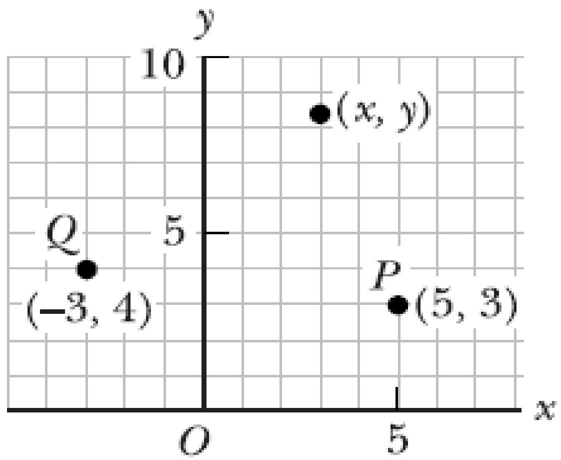
덧셈과 뺄셈에서는 계산과정에서 서로의 자릿수에 영향을 주지 않으므로 **소수점 이하에서 적은 쪽 자릿수를 따른다.**

$123 + 5.35 = 128.35 \longrightarrow 128$

곱셈과 나눗셈에서는 불확실성이 큰 수가 전체의 불확실성을 결정하므로 **유효숫자가 적은 쪽으로 계산 값을 맞춘다.**

$12.71 \times 3.46 = 43.9766 \longrightarrow 44.0$

1.6 좌표계 Coordinate Systems



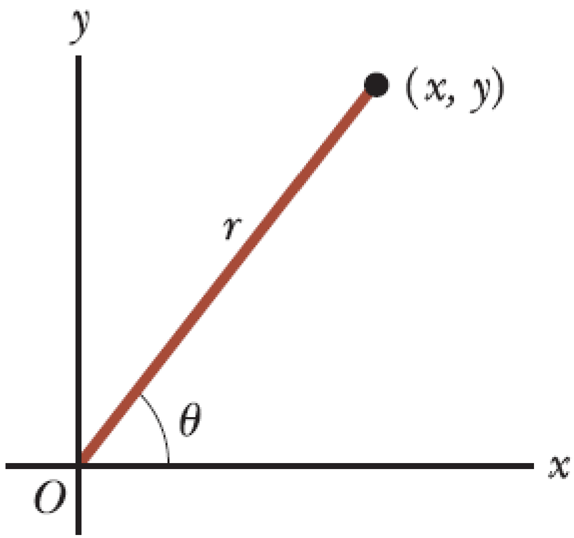
직각 좌표계에서 점들의 위치 표현법. *xy* 평면의 각 사각형은 한 변이 1 m이다. 각 점은 좌표 (*x*, *y*)로 표시한다.

직각 좌표계: 평면의 한 점을 (***x*****,** ***y***)로 표시

평면 극좌표계: 평면의 한 점을 (***r*****,** ***θ***)로 표시

$$x = r\cos\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

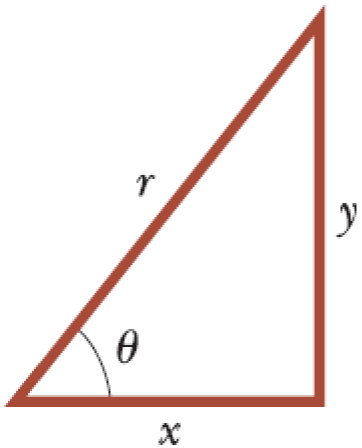
$$y = r\sin\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



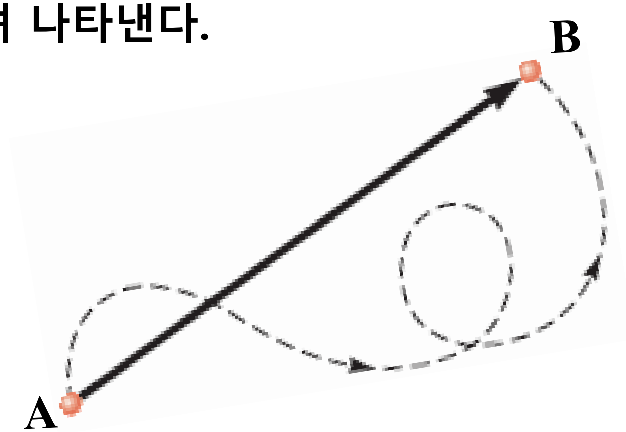
1.7 벡터와 스칼라 Vector and Scalar

스칼라 : 크기만 갖는 물리 량으로 일반대수학 법칙 이용 연산 가능
예) 길이,시간,질량

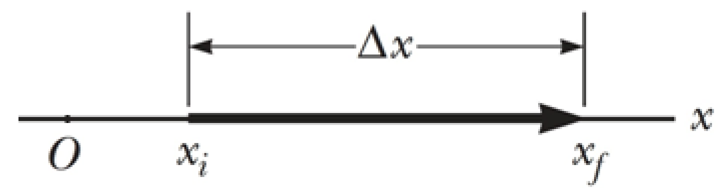
벡터 : 크기와 함께 방향을 갖는 물리 량
예) 힘,변위,속도,가속도

변위(displacement) : 위치의 변화

입자가 A에서 B로 점선으로 표시된 임의의 경로를 따라 이동할 때, 이 변위는 벡터양이고 A에서 B로 화살로 그려 나타낸다.



입자가 직선 위를 움직일 때 변위



$$\boxed{\Delta x \equiv x_f - x_i}$$

$\Rightarrow$ 크기와 방향을 갖고 있는 벡터 량

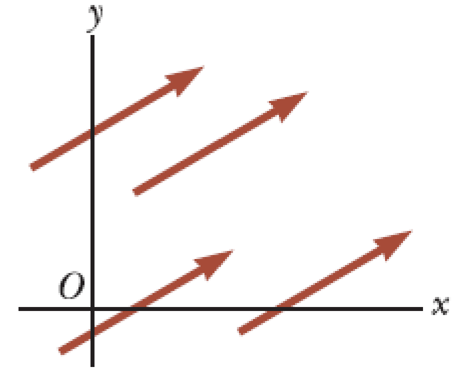
벡터의 표시 : $\mathbf{A}$, $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{A}$

벡터의 크기 표시: A 또는 $|\mathbf{A}|$

1.8 벡터의 성질 Some Properties of Vectors

▶ 벡터의 동등성(Equality of Two Vectors)

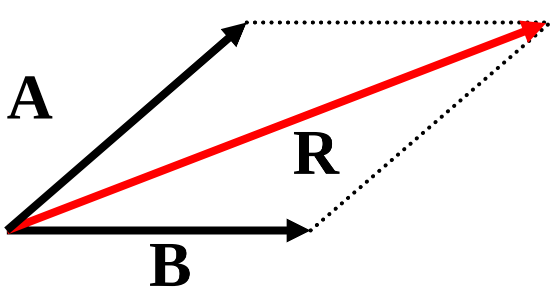
두 벡터 **A**와 **B**가 동등하다는 것은 크기가 같고 방향이 같음을 의미한다

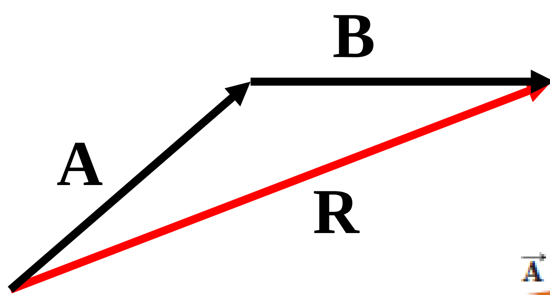


이들 네 개의 벡터 표현은 같다.
모두 크기가 같고 방향이 같기 때문이다.

▶ 벡터의 덧셈(Adding Vectors)

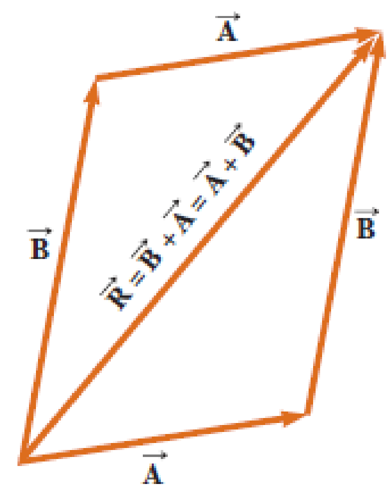
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{R}$$



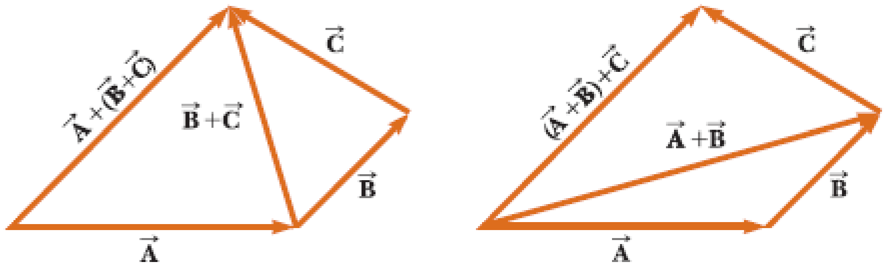


$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

(교환법칙)



$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$ (결합법칙)



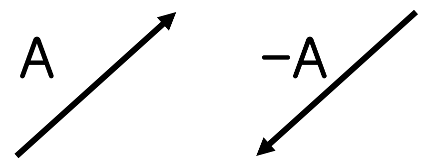
- **영벡터** – 크기가 영인 벡터

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=0$$

▶ 음의 덧셈(Negative of a Vector)

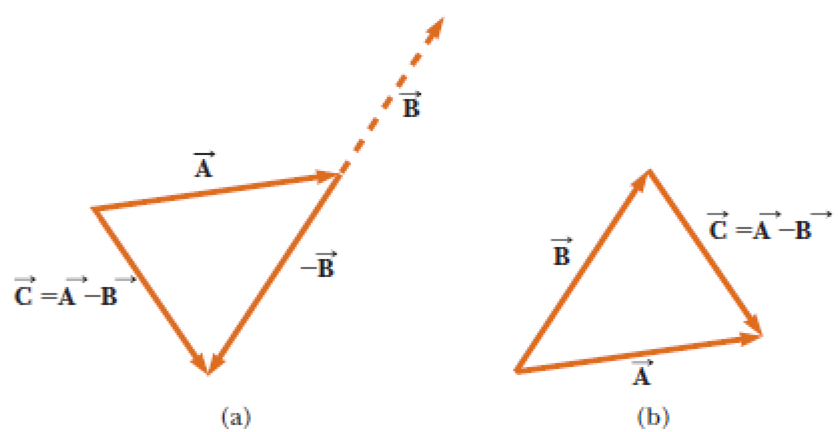
벡터 A에 더했을 때 그 합이 영이 되는 벡터
벡터 A와 −A는 크기는 같지만 서로 반대방향을 가리킨다

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$$



▶ 벡터의 뺄셈(Subtracting Vectors)

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$



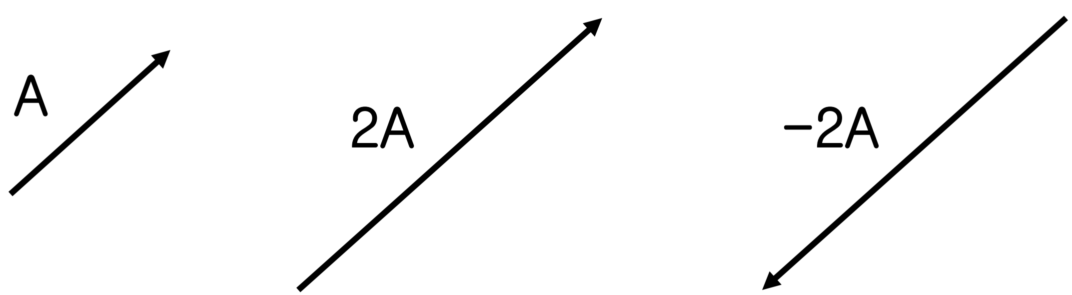
▶ 벡터와 스칼라의 곱(Multiplying a Vector by a Scalar)

$$m\mathbf{A} = \mathbf{B}$$ (예: $\mathbf{A} + \mathbf{A} = 2\mathbf{A}$)

▷**B**의 크기: $B = |m| \cdot |\mathbf{A}|$

▷**B**의 방향: $\boldsymbol{m}$>0이면 **A**의 방향과 같다.

$\boldsymbol{m}$<0이면 **A**의 반대 방향

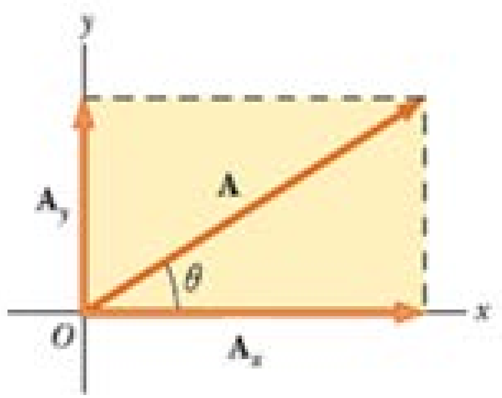


1.9 벡터의 성분과 단위 벡터
Components of a Vector and Unit Vectors

벡터 덧셈의 그래프에 의한 방법은 정밀도가 요구되거나 3차원 문제를 다루는 경우에 있어서는 부적합

⇩

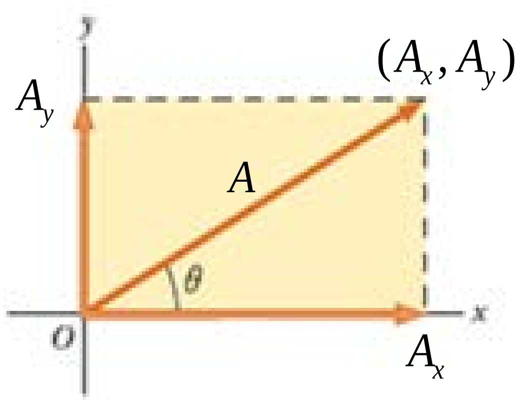
좌표계와 연관된 성분의 개념을 도입하여 대수적인 방법으로 해결 가능.



$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

$\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y$: 성분 벡터

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}}$$



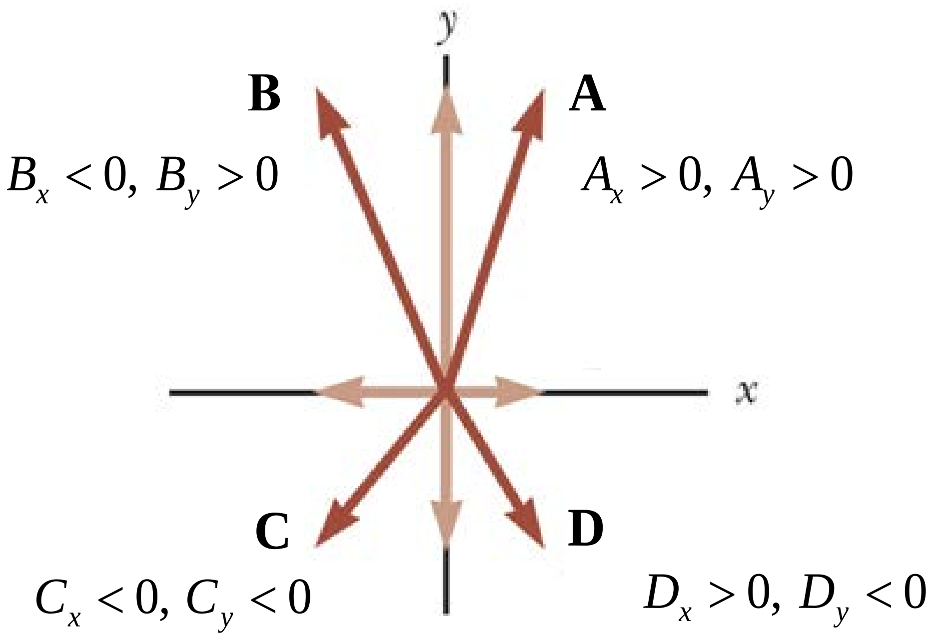
A_x, A_y : 성분

$$\tan\theta = A_y / A_x$$

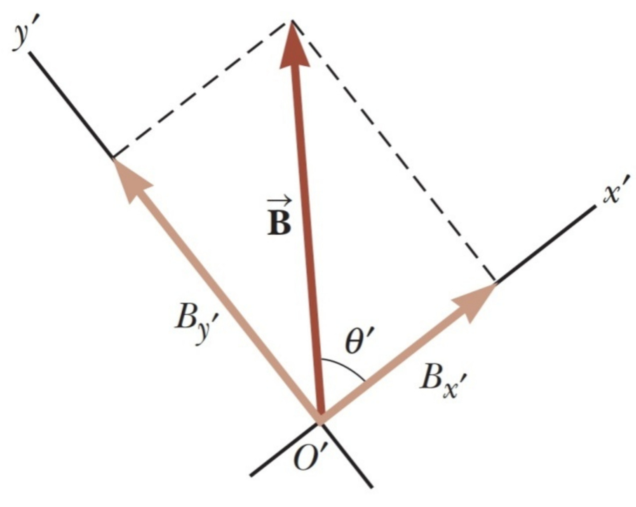
$$A_x = A\cos\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}(A_y / A_x)$$

$$A_y = A\sin\theta$$



벡터의 성분은 특별한 상황에 따라서 편리한 어떤 좌표계에서든 표현할 수 있다.

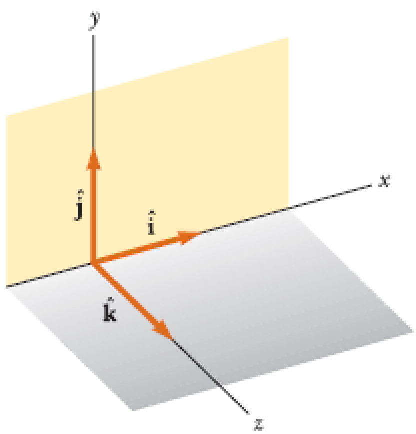


$$B'_x = B' \cos\theta'$$

$$B'_y = A' \sin\theta'$$

▶ 단위벡터 (Unit Vectors)

단위 벡터: 차원이 없고 크기가 1인 벡터
주어진 방향을 표시하기 위해 사용



(a)

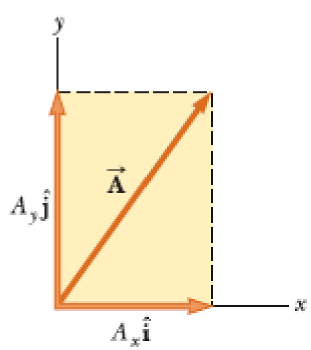
$$|\hat{\mathbf{i}}|=|\hat{\mathbf{j}}|=|\hat{\mathbf{k}}|=1$$

벡터를 좌표 성분 벡터의 합으로 표현 가능!

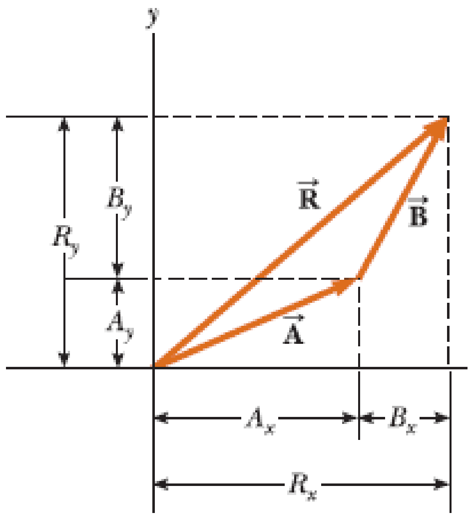
$$\mathbf{A}_x = A_x\hat{\mathbf{i}} \quad (A_x = A\cos\theta)$$

$$\mathbf{A}_y = A_y\hat{\mathbf{j}} \quad (A_y = A\sin\theta)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$



(b)



$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$
$$= (\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y) + (\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y)$$ ⇐ 성분으로 분해
$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$ ⇐ 성분으로 표시
$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + B_x\hat{\mathbf{i}}) + (A_y\hat{\mathbf{j}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$ ⇐ 교환, 결합법칙
$$= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}}$$ ⇐ 덧셈의 정의

3차원으로 표현하는 경우,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z) + (\mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y + \mathbf{B}_z)$$
$$= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z - B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

예제 1.7 합 변위

어떤 입자가 연속적으로 세 번 변위 $\Delta\mathbf{r}_1 = \left(15\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}\right)\text{cm}$, $\Delta\mathbf{r}_2 = \left(23\hat{\mathbf{i}} - 14\hat{\mathbf{j}} - 5.0\hat{\mathbf{k}}\right)\text{cm}$, $\Delta\mathbf{r}_3 = \left(-13\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}}\right)\text{cm}$ **를 한다.**

합 변위를 단위 벡터로 나타내고 그 크기를 구하라.

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}_3 \\ &= \left(15\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}\right)\text{cm} + \left(23\hat{\mathbf{i}} - 14\hat{\mathbf{j}} - 5.0\hat{\mathbf{k}}\right)\text{cm} + \left(-13\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}}\right)\text{cm} \\ &= \left(25\hat{\mathbf{i}} + 31\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}\right)\text{cm}\end{aligned}$$

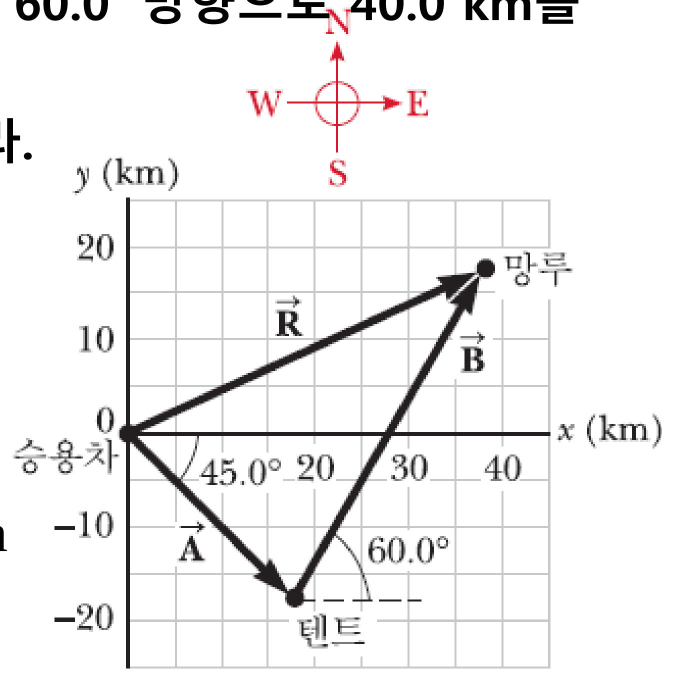
$$\begin{aligned}\left|\Delta\mathbf{r}\right| &= \sqrt{(25\text{cm})^2 + (31\text{cm})^2 + (7\text{cm})^2} \\ &= 40\text{cm}\end{aligned}$$

예제 1.8 도보 여행

한 도보 여행가가 첫째 날에 그의 승용차로부터 남동쪽으로 25.0 km를 간 후, 그곳에서 텐트를 치고 하룻밤을 잤다. 다음 날 동북쪽 60.0° 방향으로 40.0 km를 걷고, 그곳에서 산림 감시원의 망루를 발견했다.

(A) 첫째 날과 둘째 날의 도보 여행가의 변위를 구하라.

(B) 도보 여행가의 합 변위 벡터 R의 성분을 구하라. 단위 벡터로 R을 나타내라.



첫째 날과 둘째 날의 변위 벡터를 각각 **A**와 **B**라 하자

(A) $A_x = A\cos(-45^\circ) = (25.0\text{km})(0.707) = 17.7\,\text{km}$

$A_y = A\sin(-45^\circ) = (25.0\text{km})(-0.707) = -17.7\,\text{km}$

$B_x = B\cos(60^\circ) = (40.0\text{km})(0.500) = 20.0\,\text{km}$

$B_y = B\sin(60^\circ) = (40.0\text{km})(0.866) = 34.6\,\text{km}$

(B) $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$R_x = A_x + B_x = 17.7\text{km} + 20.0\,\text{km} = 37.7\,\text{km}$

$R_y = A_y + B_y = -17.7\text{km} + 34.6\,\text{km} = 16.9\,\text{km}$

$$\mathbf{R} = \left(37.7\hat{\mathbf{i}} + 16.9\hat{\mathbf{j}}\right)\text{km}$$