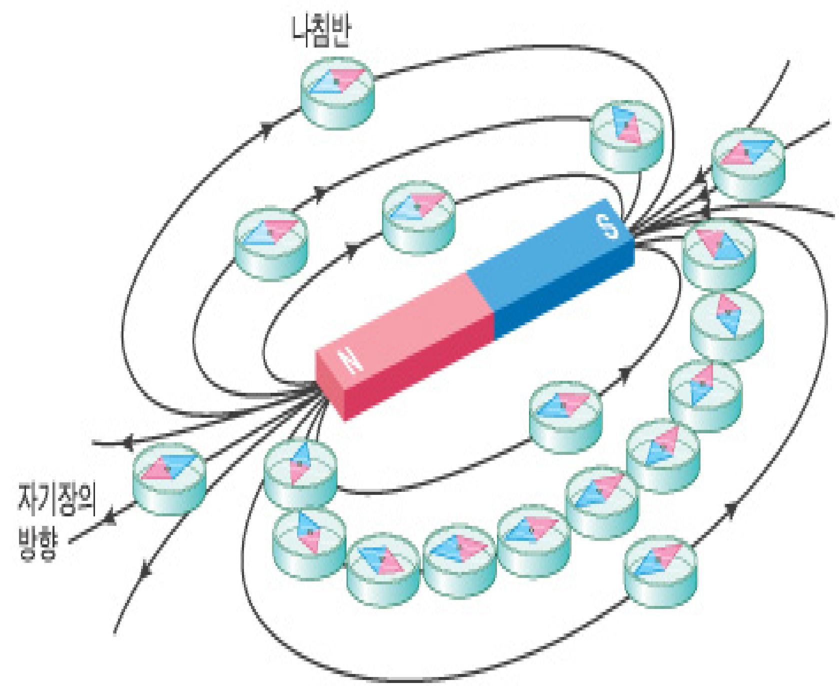
제22장 자기력과 자기장

22. 1 역사적 고찰(SKIP)
22. 2 자기장
22. 3 균일한 자기장 내에서 대전 입자의 운동
22. 4 자기장 내에서 운동하는 대전 입자 운동의 응용
22. 5 전류가 흐르는 도체에 작용하는 자기력
22. 6 균일한 자기장 내에서 전류 고리가 받는 토크(전동기-인강)
22. 7 비오-사바르 법칙(인강)
22. 8 두 평행 도체 사이의 자기력
22. 9 앙페르의 법칙
22.10 솔레노이드의 자기장

22.2 자기장 Magnetic Field

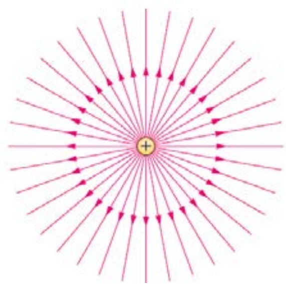
움직이는 전하의 주위에는 전기장과 더불어 자기장이 생성된다.

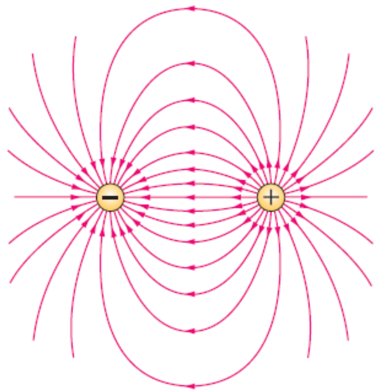
어떤 점에서 자기장 **B**의 방향은 그 지점에 놓인 나침반의 N극이 가리키는 방향이다.

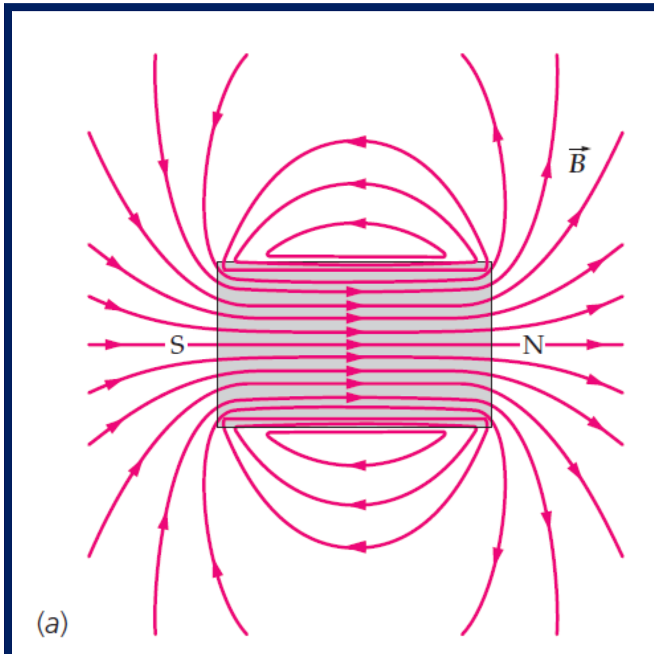


자기장선

» 자기장 선은 끊이지 않으며 시작하거나 끝나지 않는다. -> 자하가 없다.







(a)

» 자기장선의 밀도는 자기장의 세기에 비례한다.

» 자기장 선의 방향은 자기장의 방향

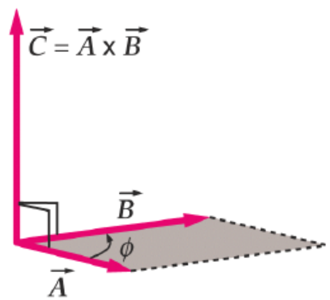
» 전기장 안에서 양전하가 받는 힘의 방향은 전기장선의 방향이지만 자기장 내에서 움직이는 전하가 받는 힘의 방향은 전하가 움직이는 방향과 자기장의 방향에 동시에 수직인 방향이다(로렌츠 힘).

외적

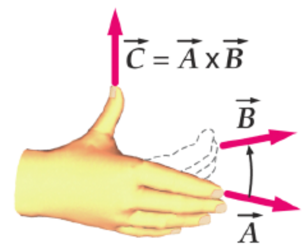
- 정의

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\phi\hat{n}$$

(단위벡터 $\hat{n}$은 $\vec{A}$와 $\vec{B}$에 모두 수직)



- 오른손 법칙



- 크로스 곱의 성질

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \quad (\phi = 0^\circ) \implies \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin 0^\circ \hat{n} = 0$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad \text{(반대교환법칙)}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \text{(순환적, cyclic)}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

자기장에 의한 힘

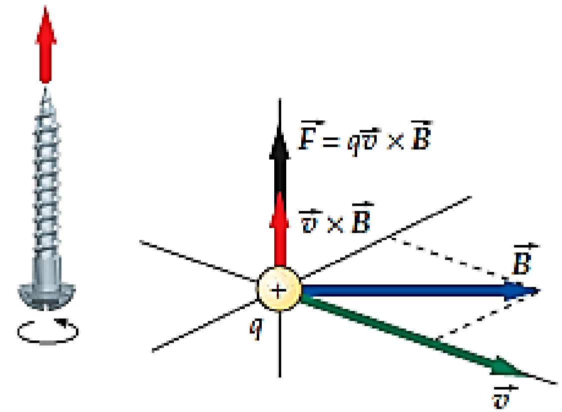
» **로렌츠 힘**: 자기장(B) 안에서 움직이는 전하 (속도v, 전하량 q)에 미치는 힘

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

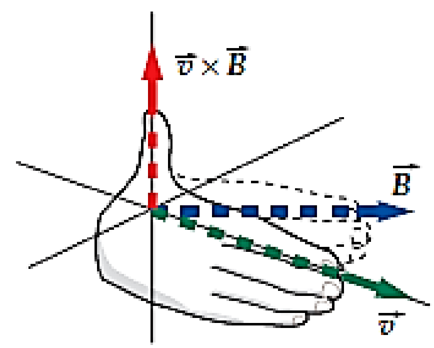
» 자기장B의 SI 단위

$$1\,\mathrm{T} = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C \cdot m/s}} = 1\,\mathrm{N/(A \cdot m)}$$

$$1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\,\mathrm{T}$$



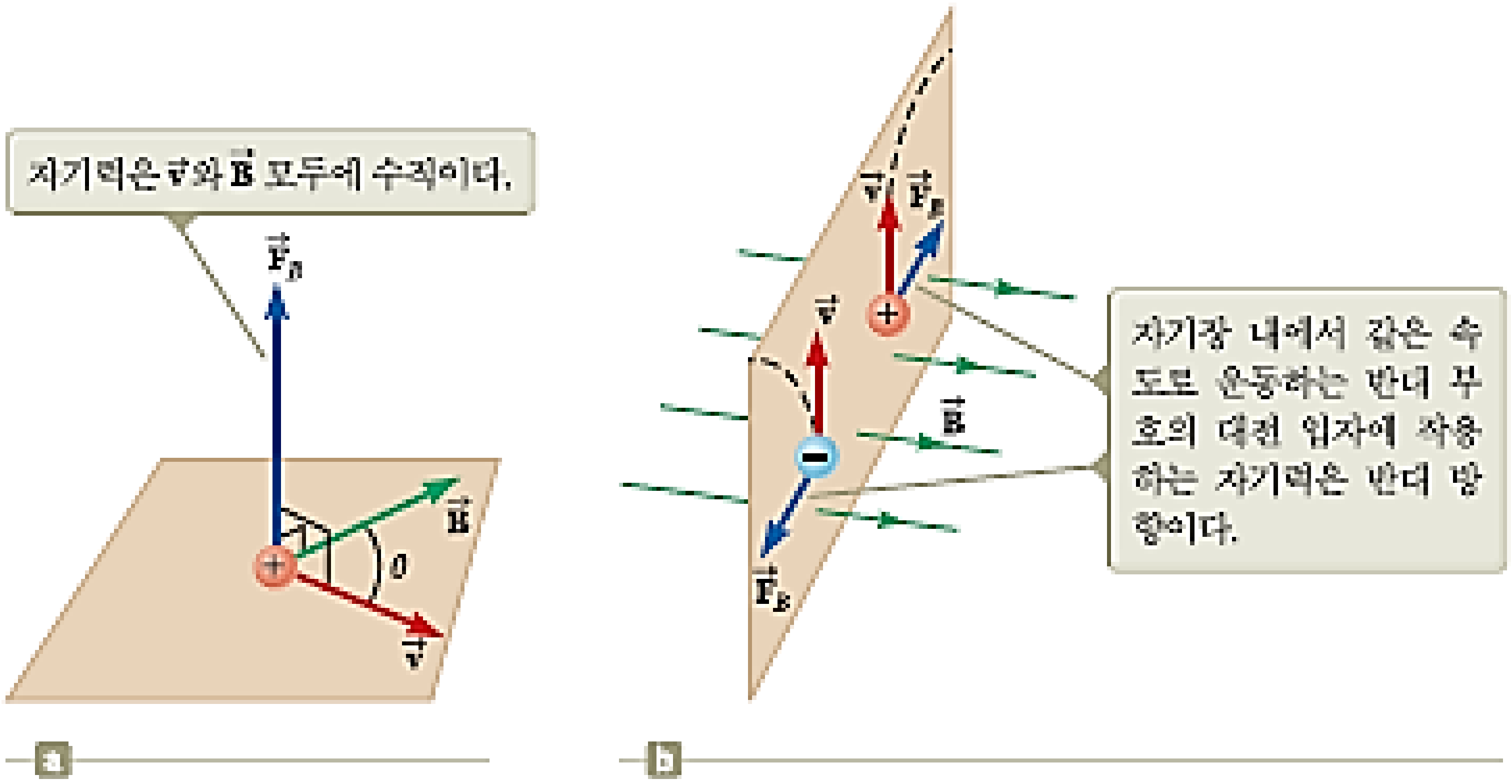
(a)



(b)

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$F_B = |q| vB \sin\theta$$



전하에 대한 전기력과 자기력 사이의 중요한 차이점:

- 전기력의 방향은 항상 전기장의 방향과 같은 반면에, **자기력은 자기장의 방향과 수직**이다.

- 대전 입자에 작용하는 전기력은 입자의 속도와 무관하지만, 자기력은 입자가 운동할 때만 작용한다.

- 전기력은 대전 입자의 변위에 대하여 일을 하는 반면에, 일정한 자기장으로부터의 자기력은 입자가 변위될 때 일을 하지 않는다. 왜냐하면 힘이 변위에 수직이기 때문이다.

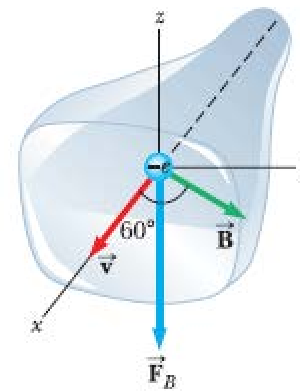
$$\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}})dt = 0$$

예제 22.1 자기장 내에서의 전자 운동

한 전자가 x축을 따라서 8.0×10^6m/s의 속력으로 운동한다. 이 전자가 xy 평면에서 x축과 60°를 이루는 0.025T의 자기장으로 들어간다. 전자에 작용하는 자기력을 구하라.

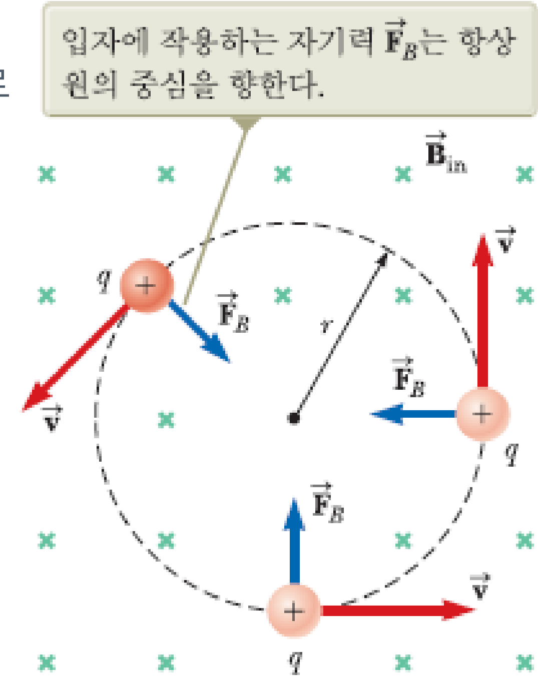
풀이

$$\begin{aligned} F_B &= |q|vB\sin\theta \\ &= (1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C})(8.0\times10^{6}\,\mathrm{m/s})(0.025\mathrm{T})(\sin 60°) \\ &= 2.8\times10^{-14}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$



22.3 균일한 자기장 내에서 대전 입자의 운동

균일한 자기장 내에서 **자기장에 수직인 방향의** 처음 속도로 움직이는 양전하의 경우를 생각해보자.



자기력은 운동방향에 수직하게 작용하므로, 양전하의 운동 방향을 편향시켜서 원운동을 하게 한다.

$$\boxed{F_B = qvB = \frac{mv^2}{r}}$$

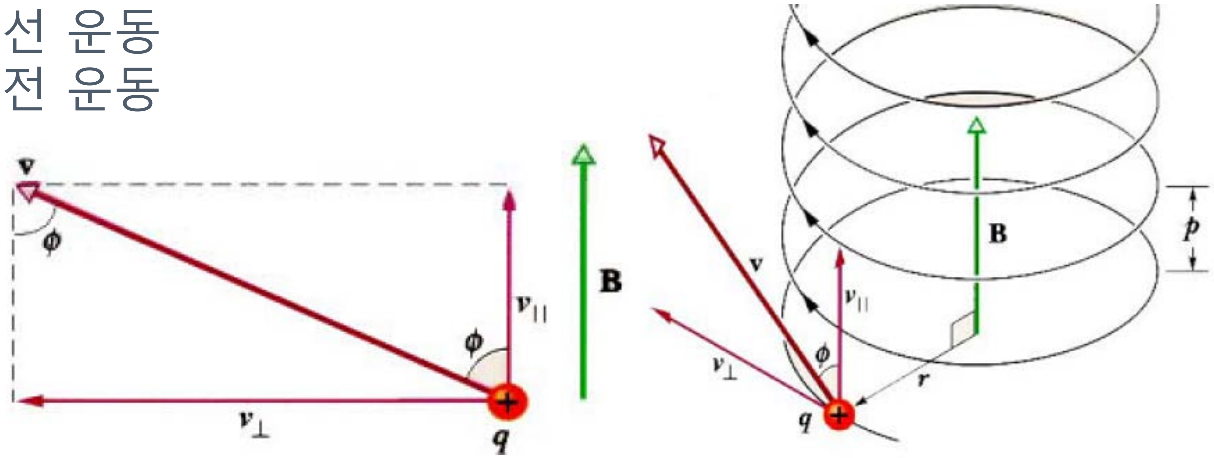
원궤도의 반지름: $r = \dfrac{mv}{qB}$

싸이클로트론 진동수: $\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{qB}{m}$

주기: $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

대전 입자가 자기장 내에서 **자기장과 임의의 각도를 갖고서 운동한다면** 그 **경로는 나선형이** 된다

- 속도의 수평성분-직선 운동
- 속도의 수직성분-회전 운동



예제 22.2 균일한 자기장에 수직으로 운동하는 양성자

반지름이 14 cm이고 속도에 수직인 0.35 T의 균일한 자기장 내에서 양성자가 원운동을 한다. 양성자의 속력을 구하라.

풀이

$$v = \frac{qBr}{m_p} = \frac{(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})(0.35\mathrm{T})(0.14\mathrm{m})}{1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}}$$

$$= 4.7\times10^{6}\,\mathrm{m/s}$$

예제 22.3 전자빔의 휘어짐

그림에서와 같이, **코일 다발에 의해서 발생**하는 **균일한 자기장의 크기를** 측정하는 실험이 있다. 전자는 **정지 상태에서 전위차 350V**에 의해서 **가속된 후**, 자기장 내에서 **원운동**을 하며, 전자들이 이루는 전자 빔의 반지름은 7.5cm가 된다. 자기장이 빔과 수직하다고 가정할 때, (A) 자기장의 크기를 구하라.

풀이

(A) $K_i = 0, \quad K_f = mv^2/2$

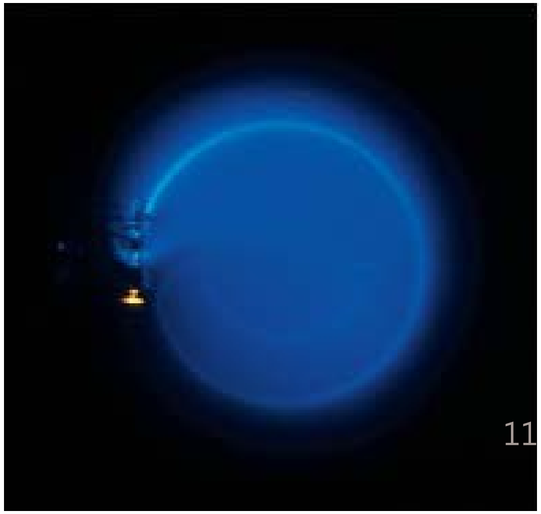
$$\tfrac{1}{2} m_e v^2 = |e|V$$

$$v = \sqrt{\frac{2|e|V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})(3.50\mathrm{V})}{9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}}$$

$$= 1.11\times10^{7}\,\mathrm{m/s}$$

$$B = \frac{m_e v}{|e|r} = \frac{(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})(1.11\times10^{7}\,\mathrm{m/s})}{(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})(0.075\mathrm{m})}$$

$$= 8.4\times10^{-4}\,\mathrm{T}$$



(B) 전자의 각속력을 구하라.

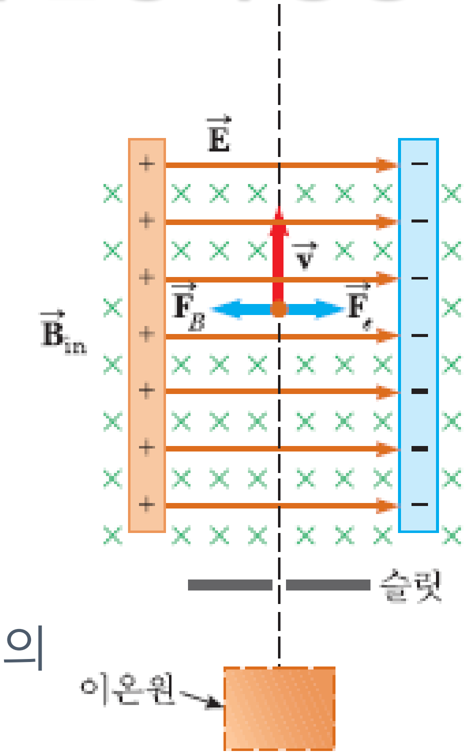
(B) $$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.11\times10^{7}\,\mathrm{m/s}}{0.075\mathrm{m}} = 1.5\times10^{8}\,\mathrm{rad/s}$$

22.4자기장 내에서 운동하는 대전 입자 운동의 응용

로렌츠 힘(Lorentz force)

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

▦ 속도 선택기(Velocity Selector)



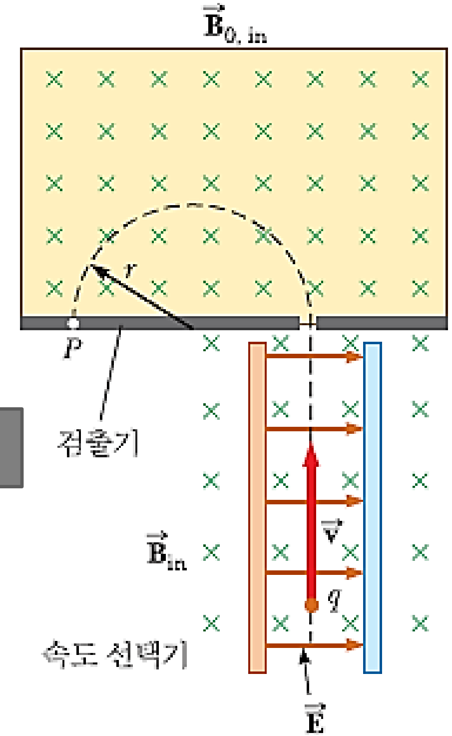
오른쪽 그림과 같은 장치에서, 전기력의 크기와 자기력의 크기가 같은 전하만이 직선으로 움직이게 된다.

$$qvB = qE \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

이보다 큰 속력을 갖는 입자들은 왼쪽 방향으로 편향되고, 이보다 작은 속력을 갖는 입자들은 오른쪽 방향으로 편향된다.

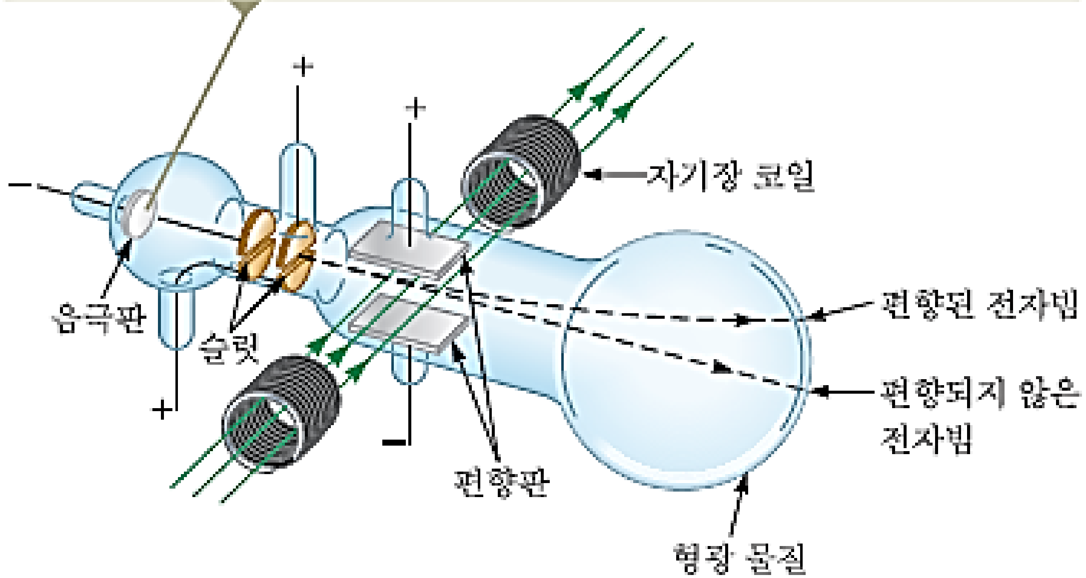
질량 분석기(The Mass Spectrometer)

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v} \longrightarrow \frac{m}{q} = \frac{rB_0 B}{E}$$



톰슨(J. J. Thomson; 1856~1940)의 전자의 e/m 측정:

음극판에서 가속된 전자들은 두 슬릿을 통과하는데 전기장과 자기장(전기장과 수직 방향)에 의해 옆으로 편향된다. 편향된 빔은 형광 물질을 바른 스크린에 도달한다.



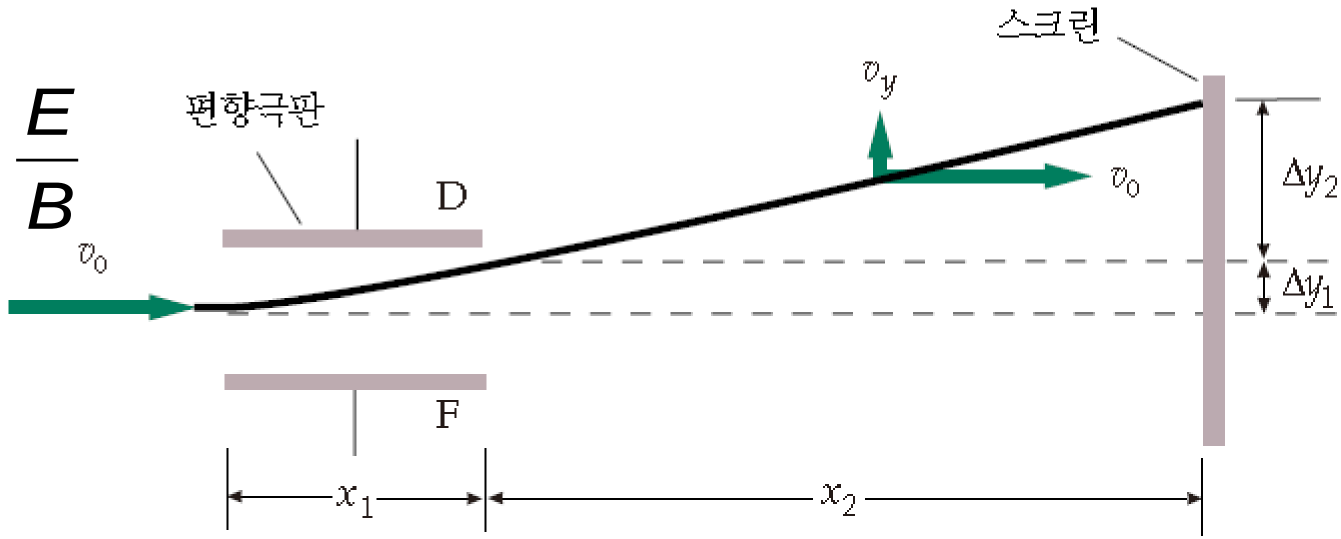
a

Reprinted with the permission of Alcatel-Lucent USA Inc.

b

보충

$$v_0 = \frac{E}{B}$$



$$v_y = a_y t_1 = \frac{qE_y}{m} t_1 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0}$$

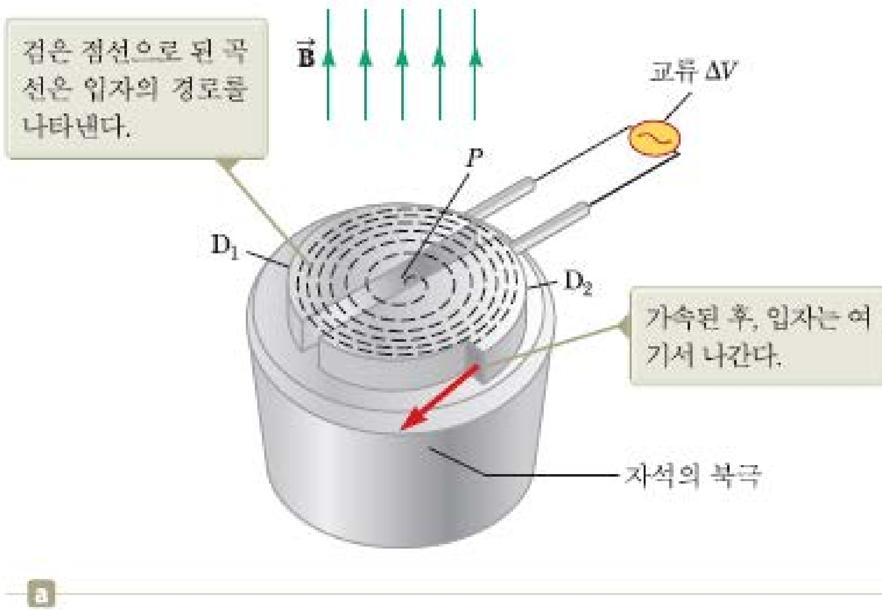
$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2$$

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m v_0^2} x_1^2 + \frac{qE_y}{m v_0^2} x_1 x_2$$

사이클로트론(The Cyclotron)

사이클로트론(cyclotron): 대전 입자를 매우 빠른 속력으로 가속시킬 수 있는 장치. 핵 반응의 연구와 진료와 치료 목적으로 방사능 물질을 만들기 위하여 사용(1929년에 만들어짐)-> 싱크로트론(synchrotron)



$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$$

단원 마무리 과제

다음 문제는 풀어서 제출 (다음 시간까지 제출)

» 2006년 2학기 기말 기출시험 문제: 3번

» 2007년 2학기 기말 기출시험 문제: 2번

» 2009년 2학기 기말 기출시험 문제: 3번

» 2010년 2학기 기말 기출시험 문제: 4번

» 2014년 2학기 기말 기출시험 문제: 4번

2006

3. 동서남북은 지표평면 위에 있다. 20 cm의 도선이 동서방향으로 놓여 있고, 3 A의 전류가 동쪽 방향으로 흐른다. 이 도선이 자기장에 의해 지표면에 수직한 윗 방향으로 0.18 N의 힘을 받는다. 자기장이 도선과 수직하다고 가정할 때, 자기장의 크기와 방향을 구하라. [15점, 난이도 중]

2007

2. 전자가 $B=9.1\times10^{-4}$ Tesla 인 균일한 자기장에 직각인 평면 내에서 $v=1.6\times10^{6}$ m/s 의 속력으로 원운동을 한다.

(전자의 질량은 9.1×10^{-31}kg,

전하량은 -1.6×10^{-19}C이다.)

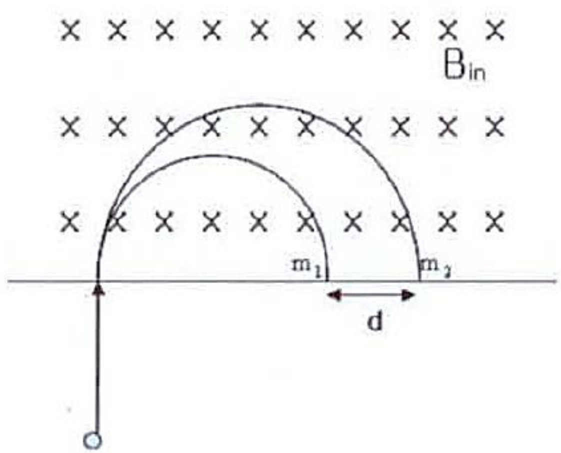
(20점, 난이도: 중)

(가) 원운동 하는 전자의 궤도반경을 구하라.(10점)

(나) 사이클로트론 진동수를 구하라.(10점)

2009

3. 다음 그림처럼 크기는 B이고 방향은 종이 안으로 들어가는 균일한 자기장 속에 질량이 다른 두 전하를 같은 속력 v로 입사시켰더니 반원 궤도를 따라 움직이다 벽에 부딪힌다. 두 전하의 전하량은 똑같이 q이고 질량은 각각 m_1, m_2이다. [15점, 난이도 중]



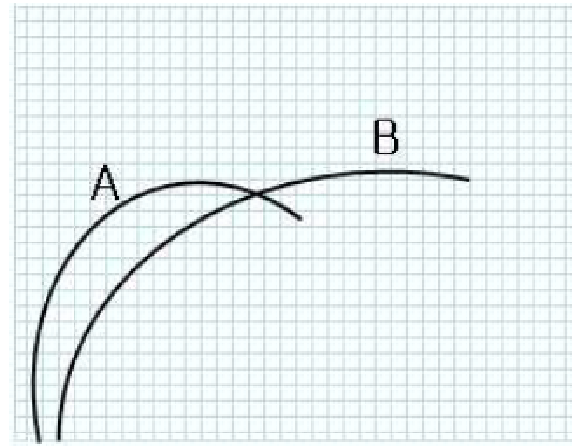
(가) 두 전하의 부호는 양인가 음인가?

(나) 두 전하가 벽에 부딪힌 지점간의 거리 d는 얼마인가?

(다) 두 전하가 동시에 자기장 안으로 입사되었다면 어느 전하가 먼저 벽에 부딪히겠는가? 그 이유를 간단히 설명하라.

2010

4. 다음 그림은 안개 상자에서 양전하를 갖는 양성자와 알파입자의 궤적을 보여준다. 알파입자는 양전하보다 질량이 4배가 크고 전하는 2배가 크다. [10점, 난이도 중]



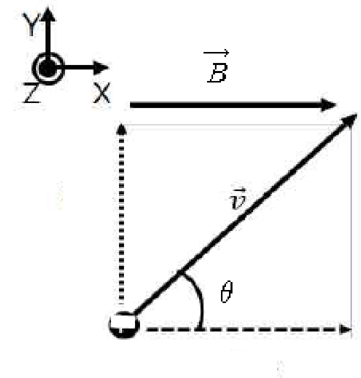
(가) 자기장의 방향은 어디인가?(5점)

지면에서 나오는 방향

(나) 입사되는 양성자와 알파입자의 속력이 같다고 할 때, 양성자는 궤적 A와 궤적 B중 어느 궤적을 따라 운동하는가?(5점)A궤적

2014-2-final

4. x-방향으로 일정한 자기장 $\vec{B}=B\hat{x}$ 가 형성되어 있는 영역에서 질량이 m이고, 전하량 (-e)를 갖는 전자가 자기장과 θ의 각도를 이루고 v의 속력으로 운동을 시작했다고 하자. (난이도 하 15점)



(가) 전자가 힘을 받는 방향은?(5점)

$\vec{F}=(-e)\vec{v}\times\vec{B},$
$\hat{F}=\hat{z}$

(나) 전자의 나선형 궤도의 주기를 구하여라. (5점)

(다) 한번 주기 운동할 때 전자가 x축 방향으로 나아간 거리는 얼마인가?(5점)

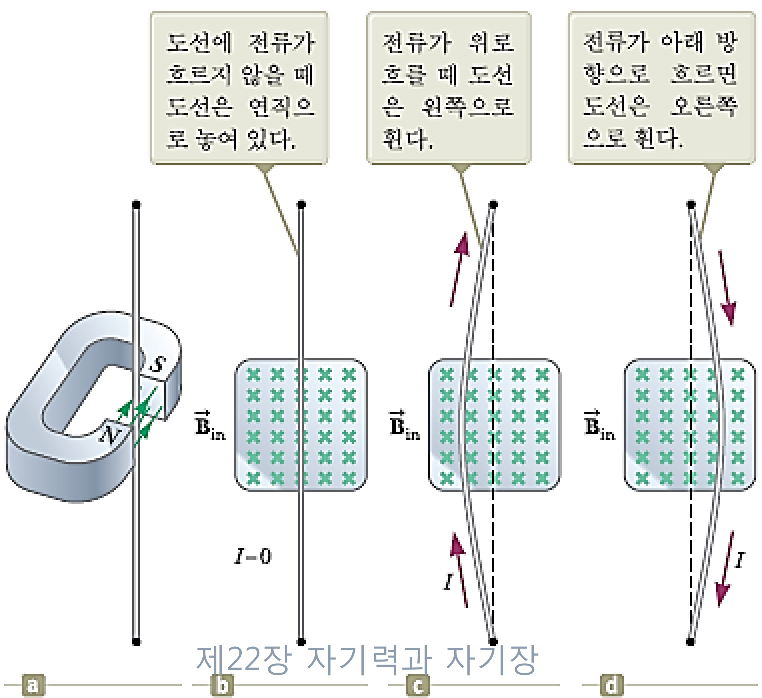
22.5 전류가 흐르는 도체에 작용하는 자기력

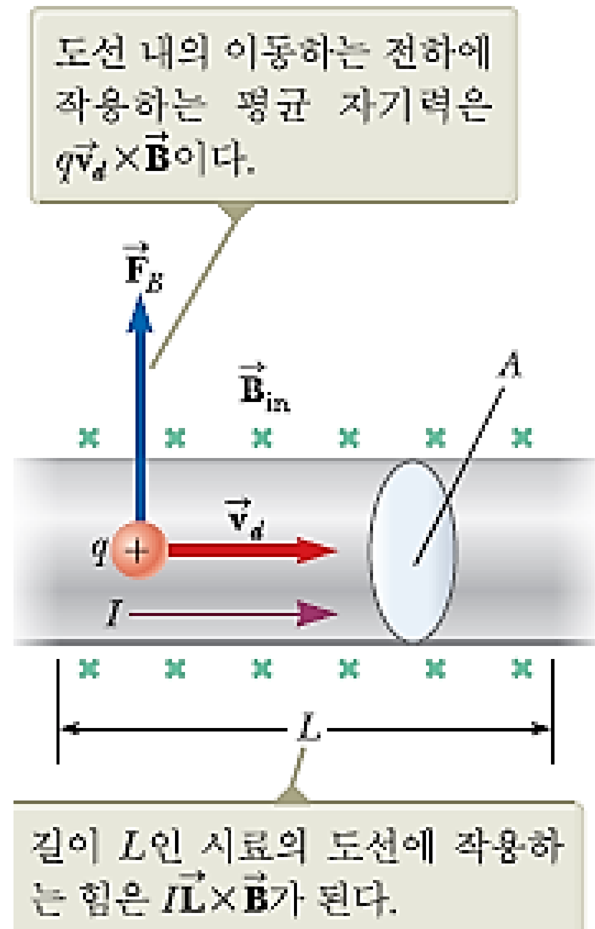
전류는 운동하는 많은 대전 입자들의 집합이므로, 전류가 흐르는 도선이 자기장 내에 놓여 있다면, 자기력이 도선에 작용하게 된다. 자기장이 도선에 작용하는 전체 힘은 전류를 구성하는 모든 대전 입자에 작용하는 각각의 힘을 벡터적으로 합한 것이다.

$$\vec{\mathbf{F}}_B = (q\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}})nAL$$

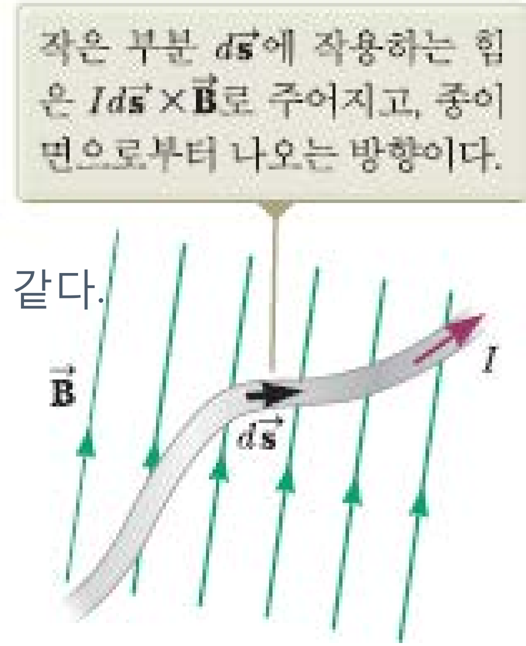
n : 단위 부피당 전하의 수

AL : 시료의 부피





$I = nqv_d A$이므로 $\qquad \vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$



$\mathbf{L}$ 은 전류 I 방향으로의 길이 벡터이며, 크기는 시료의 길이 L과 같다.

자기장 내에 놓인 임의의 모양의 도선을 생각해 보자.
도선의 매우 작은 길이에 작용하는 자기력은

$$d\vec{\mathbf{F}}_B = I d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{F}}_B = I \int_a^b d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

예제 22.4 반원형 도선에 작용하는 힘

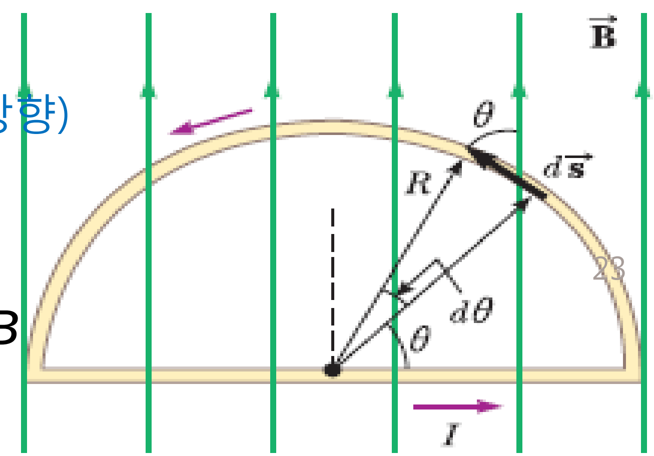
반지름 R 인 반원의 폐회로를 구성하고 있는 도선에 전류 I 가 흐른다. 회로는 xy 평면에 놓여 있고, 균일한 자기장이 $+y$ 방향을 따라 작용한다. 도선의 직선 부분과 곡선 부분에 작용하는 자기력을 구하라.

풀이

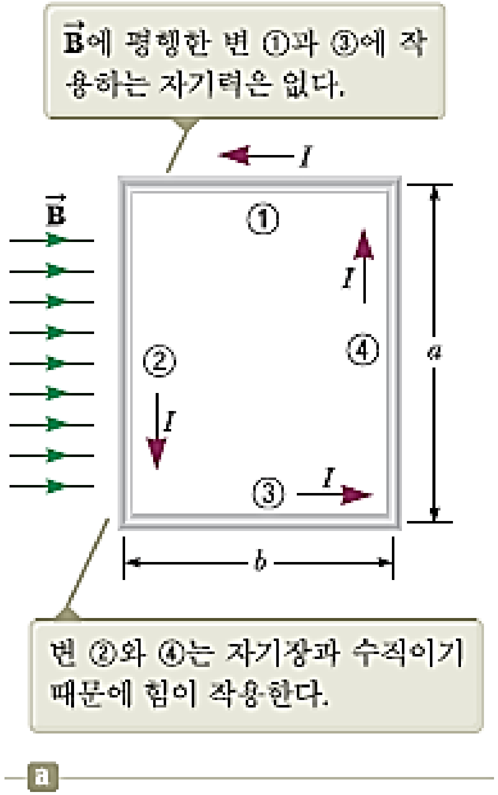
직선 부분에 작용하는 힘 $\quad F_1 = ILB = 2IRB$ (+z방향)

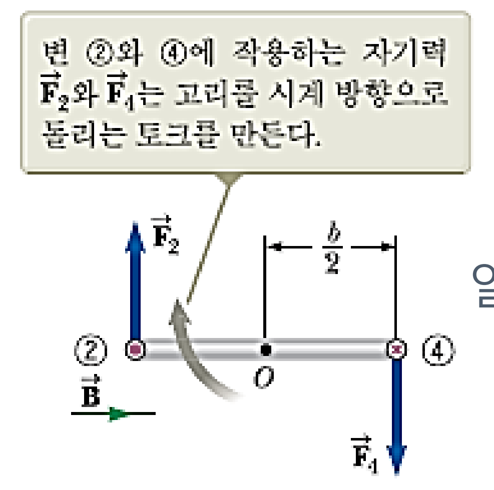
곡선 부분에 작용하는 힘 $\quad \vec{\mathbf{F}}_B = I \int_a^b d\vec{\mathbf{s}} \times \vec{\mathbf{B}}$

$$F_2 = -I\int_0^{\pi} (R d\theta) B \sin\theta = -IRB \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -2IRB$$



22.6 전동기(모터)





전류가 흐르는 도체 고리가 균일한 자기장 내에 놓일 때 전류 고리가 받는 **알짜 자기력은 0**이다. 이때 **자기력은 전류가 흐르는 고리에 토크를 작용**하게 된다.

길이 b 인 변 ①과 ③은 자기장에 평행하기 때문에, 이 변에 작용하는 힘은 영이다.

길이 a인 변 ②와 ④는 자기장에 수직이기 때문에 자기력이 작용한다.

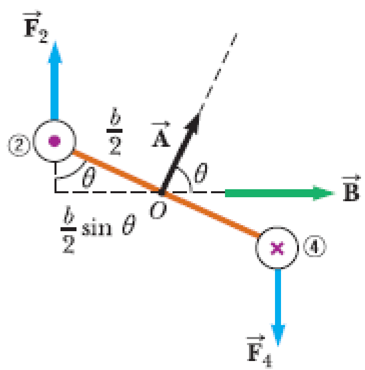
$$F_2 = IaB \qquad F_4 = -IaB$$

$$\therefore \sum F = 0$$

알짜토크, $\tau_{\max} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = (IaB)\frac{b}{2} + (IaB)\frac{b}{2} = IabB$

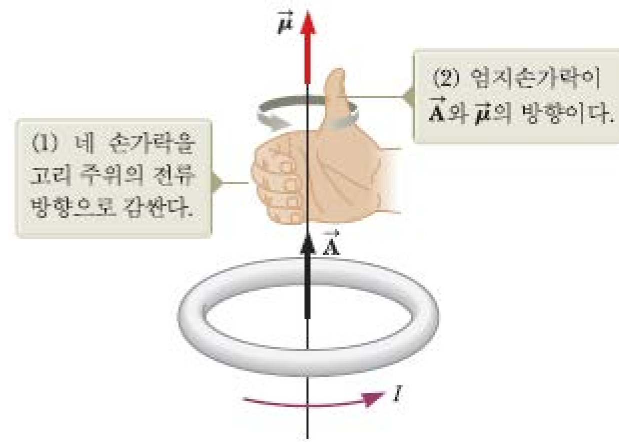
$$\tau_{\max} = IAB$$

균일한 자기장 내에서 전류 I가 흐르는 사각형 고리에서, 자기장이 고리 평면에 수직인 방향과 각 θ를 이룬다고 가정하자.



$$\begin{aligned}\tau &= F_2\frac{b}{2}\sin\theta + F_4\frac{b}{2}\sin\theta \\ &= IaB\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) + IaB\left(\frac{b}{2}\sin\theta\right) = IabB\sin\theta \\ &= IAB\sin\theta\end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B}$$



자기 (쌍극자) 모멘트(magnetic dipole moment) **μ**

$$\vec{\mu} = I\vec{A} \qquad \text{(단위: A·m}^2\text{)}$$

같은 면적에 코일이 N번 감겨 있는 경우 $\vec{\mu}_{coil} = NI\vec{A}$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}} \qquad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

예제 22.5 코일의 자기 쌍극자 모멘트

도선이 25번 감긴 5.40 cm x 8.50 cm 크기의 직사각형 코일이 있다. 이 코일에 15.0 mA의 전류가 흐르고 있고, 0.350 T의 자기장이 코일면에 평행하게 걸린다.

(A) 코일의 자기 쌍극자 모멘트 크기를 계산하라.

풀이

$$\mu = NIA$$
$$= (25)(15.0\times10^{-3}\text{A})(0.0540\text{m})(0.0850\text{m})$$
$$= 1.72\times10^{3}\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

(B) 고리에 작용하는 토크의 크기는 얼마인가?

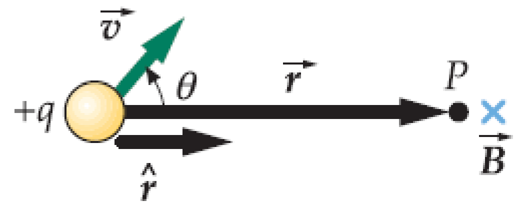
풀이

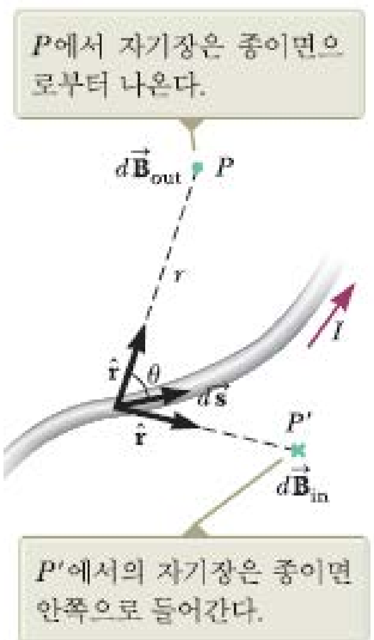
$$\tau = \mu_{\text{coil}}\ B = (1.72\ 10^{-3}\text{A}\cdot\text{m}^2)(0.350\ \text{T})$$
$$= 6.02\ 10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

22.7 비오-사바르 법칙

전하 q인 점전하가 속도 $\vec{v}$ 로 움직일 때, 공간에 생성되는 자기장 $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$





도선에 **정상 전류 I** 가 흐르는 도선의 길이 요소 ds에 의한 점 P에서의 자기장 dB에 대한 실험적 측정 결과는 다음과 같다.

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

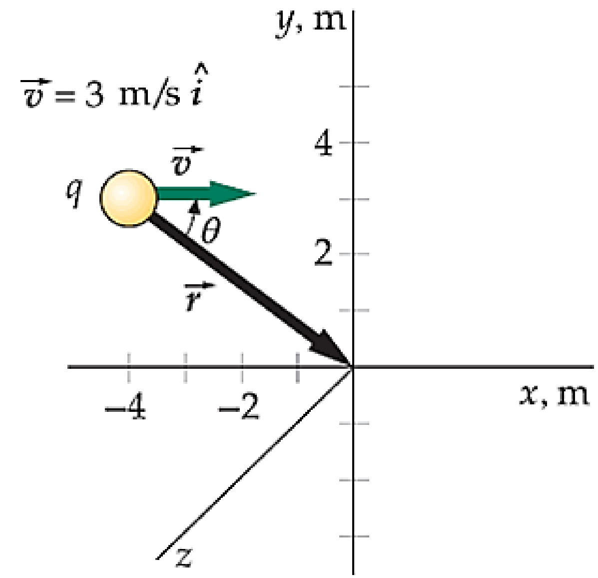
$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}$

자유 공간의 투자율 (permeability of free space)

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A} = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$$

보충예제)

전하 $q = 4.5\ \mu C$의 점입자가 $z = 0$인 평면에서 $y = 3.0$ m를 따라 속도 $\vec{v} = 3.0$ m/s $\hat{i}$로 움직이고 있다. 그림 27-2에서처럼 전하가 $x = -4.0$ m, $y = 3.0$ m의 위치에 있을 때 이 전하에 의해 생성된 원점에서의 자기장을 구하라.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \quad \text{여기서} \quad \vec{v} = v\hat{i}$$

$$\vec{r} = 4.0\text{ m }\hat{i} - 3.0\text{ m }\hat{j}$$

$$r = \sqrt{4.0^2 + 3.0^2}\text{ m} = 5.0\text{ m}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{4.0\text{ m }\hat{i} - 3.0\text{ m }\hat{j}}{5.0\text{ m}} = 0.80\,\hat{i} - 0.60\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\hat{i})\times(0.80\hat{i} - 0.60\hat{j})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(-0.60v\hat{k})}{r^2}$$

$$= -(10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A})\frac{(4.5\times10^{-6}\text{ C})(0.60)(3.0\text{ m/s})}{(5.0\text{ m})^2}\hat{k}$$

$$= \boxed{-3.2\times10^{-14}\text{ T }\hat{k}}$$

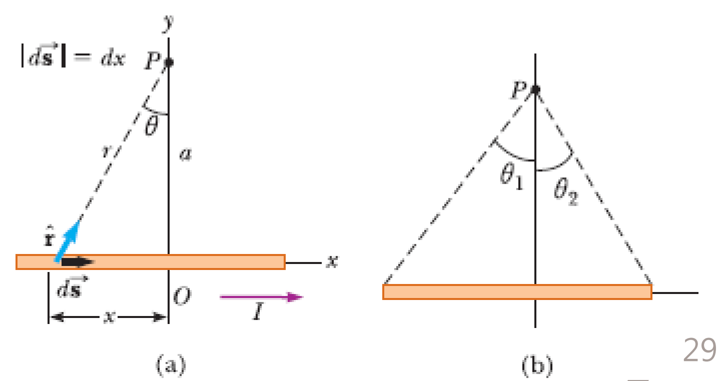
전류가 흐르는 무한히 **긴 직선 도선이 만드는 자기장은** 비오-사바르 법칙을 이용해서 계산할 수 있지만, 22.9절에서 다른 방법을 이용해서 도선으로부터 거리 r 인 지점에서의 자기장의 크기는 다음과 같음을 보일 것이다.

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

참고예제 22.S1 곡선 부분 도선에 의한 자기장

x 축을 따라 놓여 있고 일정한 전류 I가 흐르는 가는 직선 도선을 생각하자. 점 P에서의 자기장의 크기와 방향을 구하라.

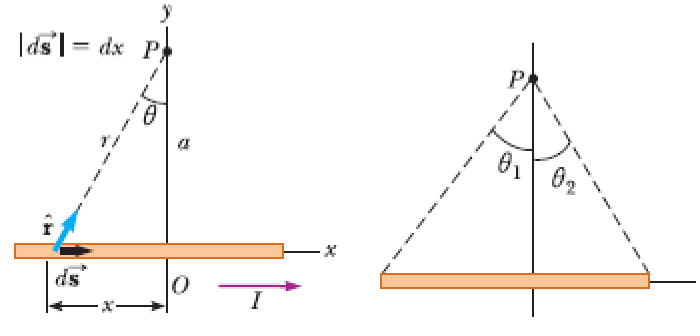
풀이 점 P로부터 거리 r에 있는 길이 요소 $d\vec{s}$로 인한 점 P에서의 자기장은 $d\vec{s} \times \vec{r}$의 방향이므로 그림 면에서 나오는 방향이다.



사실상 모든 전류 요소가 그림 면에 있으므로 점 P에서 그림 면 밖으로 향하는 자기장이 발생한다.

$$d\vec{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{r}} = \left|d\vec{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{r}}\right|\hat{\mathbf{k}} = \left[dx\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\hat{\mathbf{k}}$$

$$= (dx\cos\theta)\hat{\mathbf{k}}$$



(a) (b)

(1) $$d\vec{\mathbf{B}} = (dB)\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\cos\theta}{r^2}\hat{\mathbf{k}}$$

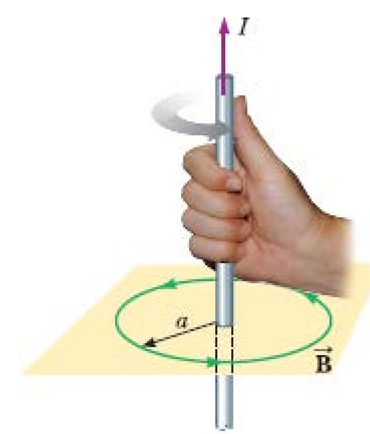
$$\begin{cases} (2)\quad r = \dfrac{a}{\cos\theta} \\[2ex] x = a\tan\theta \end{cases}$$

(3) $$dx = a\sec^2\theta d\theta$$

(4) $$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{(ad\theta)\cos\theta\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta d\theta$$

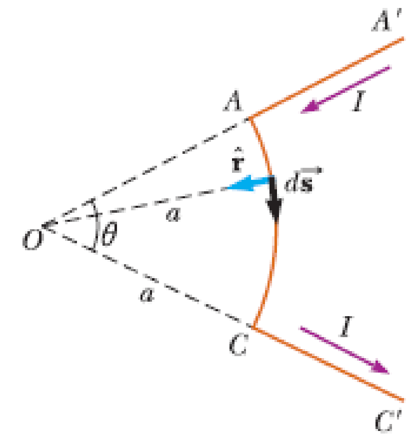
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

무한히 긴 직선 도선의 경우 $$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$



참고예제 22.S2 곡선 부분 도선에 의한 자기장

전류가 흐르는 부분 도선에 의한 점 O 에서의 자기장을 구하라. 도선은 두 개의 직선 부분과 반지름이 a 이고 중심각이 θ 인 원호로 이루어져 있다. 도선의 화살표는 전류의 방향을 표시한다.



풀이

선분 AA' 과 CC' 은 무시할 수 있으므로, 곡선 부분 도선 AC 에 비오-사바르 법칙을 적용한다.

경로 AC에 의한 O점에서의 자기장은 그림 면으로 들어가는 자기장만을 만든다.

$$\left|d\vec{\mathbf{s}}\times\hat{\mathbf{r}}\right| = ds \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids}{a^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}s$$

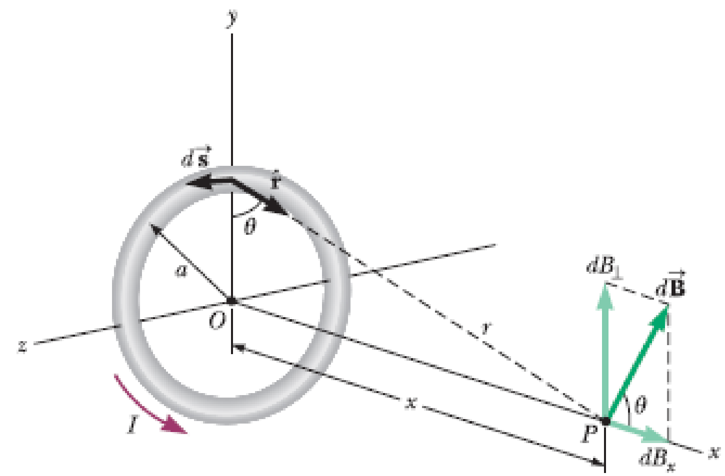
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\theta$$

원형 고리 중심에서의 자기장은 $\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}2\pi = \frac{\mu_0 I}{2a}}$

예제 22.6 원형 전류 도선의 축상에서의 자기장

yz 평면에 위치한 반지름 a 의 원형 도선에 전류 I가 흐르는 경우를 생각하자.
중심으로부터 x 만큼 떨어진 축상의 점 P 에서의 자기장을 계산하라.

풀이 P 점에서의 자기장은 x 축 성분과 그에 수직한 성분으로 분해할 수 있는데, 수직한 성분은 대칭성 때문에 상쇄된다.



전류 길이 요소 ds와 벡터 r 은 수직인 관계에 있다.

$$\left|d\vec{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{r}}\right| = ds$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\left|d\mathbf{s}\times\hat{\mathbf{r}}\right|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{(a^2+x^2)}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{(a^2+x^2)}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad B_x = \oint dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{ds\cos\theta}{a^2+x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$ 이므로

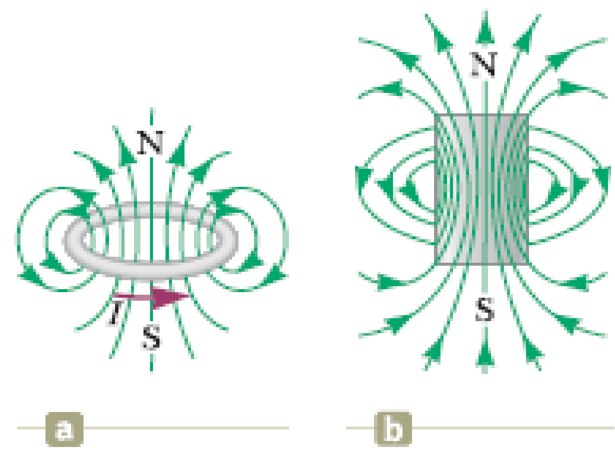
$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds}{a^2 + x^2} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \oint ds$$

$$\therefore B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi a) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

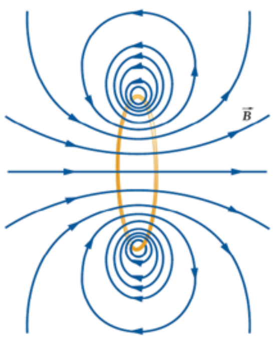
원형 중심에서의 자기장: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2a}$

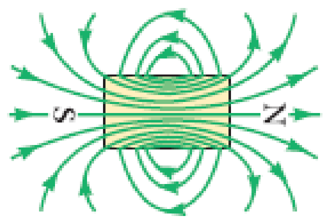
$$B \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3}$$ $(x \gg a)$

$$B \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$$ (μ: 자기 모멘트)



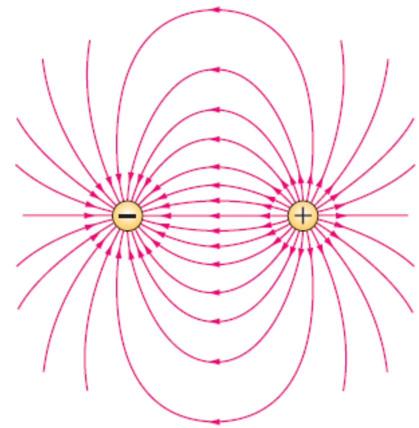
자기 쌍극자





$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{|z|^3}$$

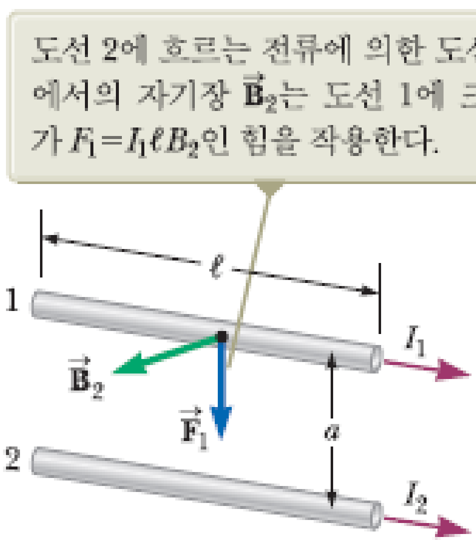
전기 쌍극자



$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{|z|^3}$$

22.8 두 평행 도체 사이의 자기력

도체에 흐르는 전류는 주위에 자기장을 만들기 때문에, 전류가 흐르는 두 도체는 서로 자기력을 작용하게 된다. 이러한 힘은 암페어와 쿨롬을 정의하는 근거로서 이용될 수 있다.



$$\vec{F}_1 = I_1 \vec{l} \times \vec{B}_2$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$$

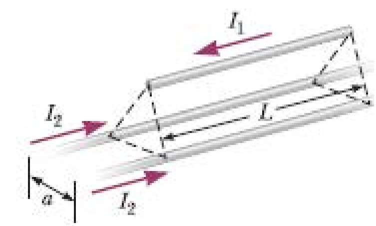
$$F_1 = I_1 \ell B_2 = I_1 \ell \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ell$$

$$\boxed{\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A} = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ **;자유 공간의 투자율**

예제 22.7 공중에 떠있는 도선

두 개의 무한히 긴 평행한 도선이 그림에서 보는 것처럼 **a=1.00 cm 떨어져서 바닥 위에 놓여 있다**. 길이가 **L=10.0m이고 질량이 400 g이며 전류 I_1=100A가 흐르는 세 번째 도선이 두 도선 사이의 중앙에 위로 수평으로 떠있다. 무한히 긴 두 도선에는 같은 전류 I_2 가 떠있는 도선과는 반대 방향으로 흐른다.** 세 도선이 정삼각형을 이루려면 무한히 긴 두 도선에 흐르는 전류는 얼마이어야 하는가?



풀이 짧은 도선의 전류는 긴 도선의 전류와 반대 방향으로 흐르므로 짧은 도선은 다른 두 도선과 서로 민다.

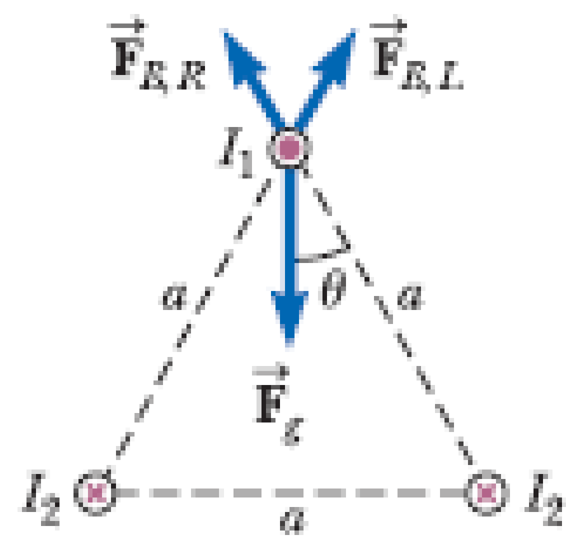
$$\vec{\mathbf{F}}_B = 2\left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\ell\right)\cos 30.0°\hat{\mathbf{k}} = 0.866\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a}\ell\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_g = -mg\hat{\mathbf{k}}$$

$$\sum\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_B + \vec{\mathbf{F}}_g = 0.866\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a}\ell\hat{\mathbf{k}} - mg\hat{\mathbf{k}} = 0$$

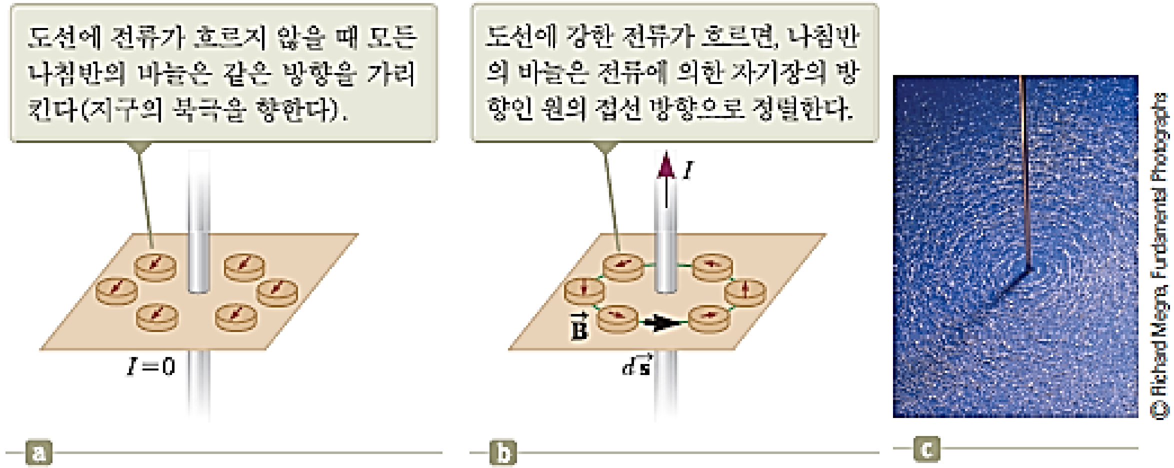
$$I_2 = \frac{mg\pi a}{0.866\mu_0 I_1\ell}$$

$$I_2 = \frac{(0.400kg)(9.80m/s^2)\pi(0.0100m)}{0.866(4\pi\times10^{-7}T\cdot m/A)(100A)(10.0m}$$
$$= 113A$$



22.9 앙페르의 법칙

앙페르
Andre-Marie Ampere ; 1775~1836



$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B\oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

폐경로에서 **B·*ds*** 의 선적분은 $\mu_0 I$ 와 같다. 여기서 I 는 닫힌 경로에 의해서 둘러싸인 임의의 면을 통과하는 **전체 정상 전류**이다.

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I \qquad (22.29)$$

앙페르의 법칙{ $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \mu_0 I$ (22.29) }은 정상 전류에 대해서만 성립한다

모든 전류 분포 형태에 대해 성립하긴 하지만, 매우 대칭적인 전류 분포 형태에 의한 자기장을 계산하는 데만 유용하다.

자기장을 계산하기 위해 앙페르의 법칙을 적용하려면, 경로의 각 부분이 다음 조건중 하나 이상을 만족하는 적분 경로(앙페르 고리라 부름)를 설정해야 한다.

1. 대칭에 의해 자기장의 값이 경로의 일부에서 일정하다

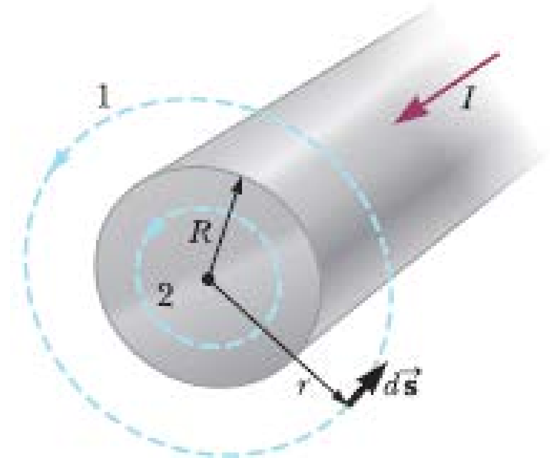
2. $\vec{B}$와 $d\vec{s}$ 가 평행해서 식 22.29에서의 스칼라곱이 간단한 대수곱 $B\,ds$ 로 표현될 수 있다.

3. $\vec{B}$와 $d\vec{s}$ 가 수직이어서 식 22.29에서의 스칼라곱이 영이 된다.

4. 경로 일부의 모든 점에서 자기장이 영이 된다.

예제 22.8 전류가 흐르는 긴 도선이 만드는 자기장

» 반지름 R 인 긴 직선 도선에 그림과 같이 도선의 단면에 균일하게 분포된 정상 전류 I 가 흐른다. 도선의 중심으로부터의 거리 r 이 $r \geq R$ 그리고 $r < R$ 인 영역에서의 자기장을 구하라.

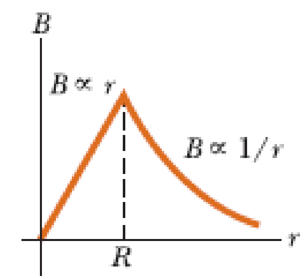


» 원 1을 적분 경로로 선택하면

» $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B\,ds = B(2\pi r) = \mu_0 I$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R\text{의 경우})$$

도선 내부의 경우 원 2를 적분 경로로 선택하면



$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow I' = \frac{r^2}{R^2} I$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B(2\pi r) = \mu_0 I' = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2} I \right) \qquad B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r \quad (r < R\text{의 경우})$$

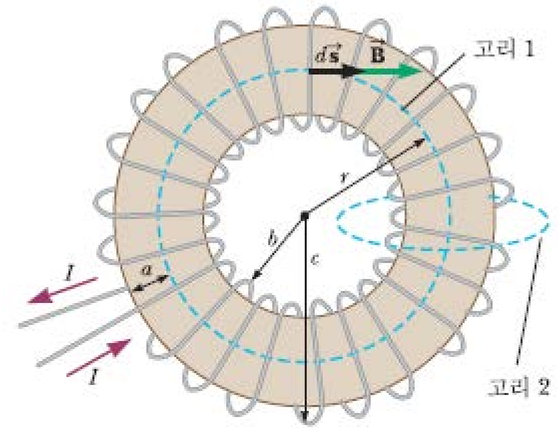
예제 22.9 토로이드가 만드는 자기장

토로이드는 보통 어떤 닫혀 있는 영역에 거의 균일한 자기장을 만드는 데 사용된다. 이 장치는 비전도성 물질로 이루어진 고리(토러스)에 감긴 도선으로 구성되어 있다. 도선이 N번 촘촘히 감겨 있는 토로이드에서 중심으로부터 거리 r만큼 떨어진 토러스 내부 영역의 자기장을 구하라.

풀이 원형고리에 앙페르의 법칙을 적용하면

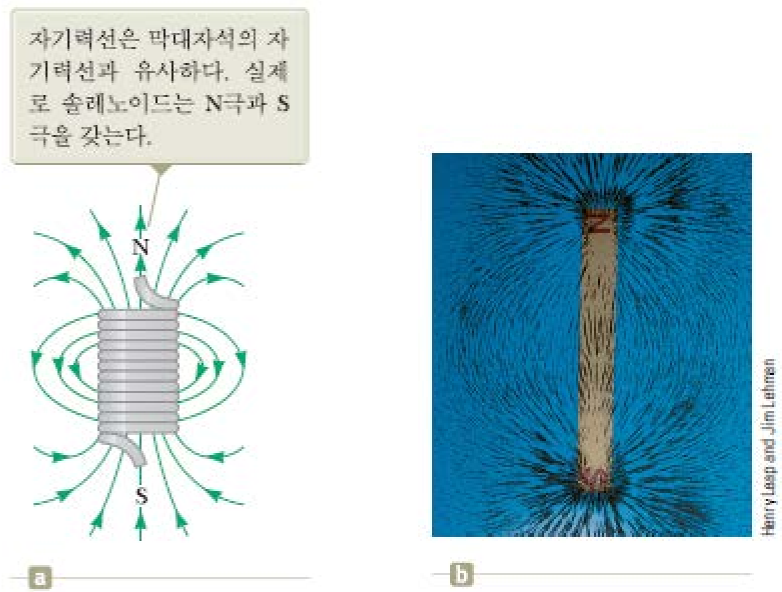
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds = B(2\pi r) = \mu_0 IN$$

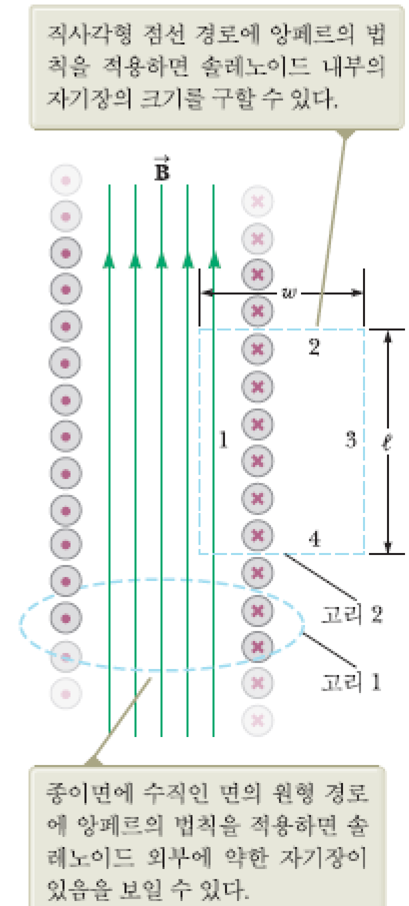
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



22.9 솔레노이드의 자기장

솔레노이드(solenoid)는 나선형으로 감은 긴 도선이다. 내부 영역에 비교적 일정한 자기장을 만들 수 있다. 솔레노이드의 길이가 증가함에 따라 내부의 자기장은 점점 균일해지고 외부의 자기장은 더욱더 약해진다.





$$\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{loop2} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

$$= \int_{path1} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} + \cancel{\int_{path2} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}} + \cancel{\int_{path3} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}} + \cancel{\int_{path4} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}}}$$

$$\because \vec{\mathbf{B}} \perp d\vec{\mathbf{s}} \qquad \because \vec{\mathbf{B}} = 0 \qquad \because \vec{\mathbf{B}} \perp d\vec{\mathbf{s}}$$

$$= \int_{path1} \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{path1} B\,ds = B\int_{path1} ds = B\ell$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = B\ell = \mu_0 NI$$

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 nI}$$ (솔레노이드 내부 자기장)

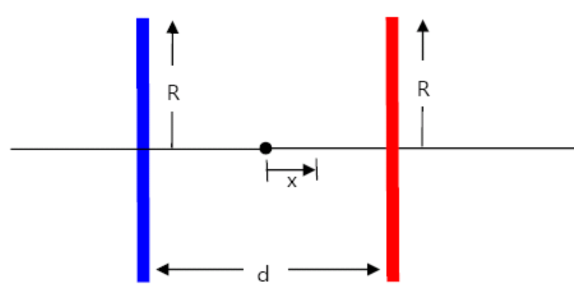
단원 마무리 과제

다음 문제는 풀어서 제출 (다음 시간까지 제출)

- 2011년 2학기 기말 기출시험 문제: 5번
- 2013년 2학기 기말 기출시험 문제: 4번
- 2014년 2학기 기말 기출시험 문제: 3번
- 2015년 2학기 기말 기출시험 문제: 1번, 2번

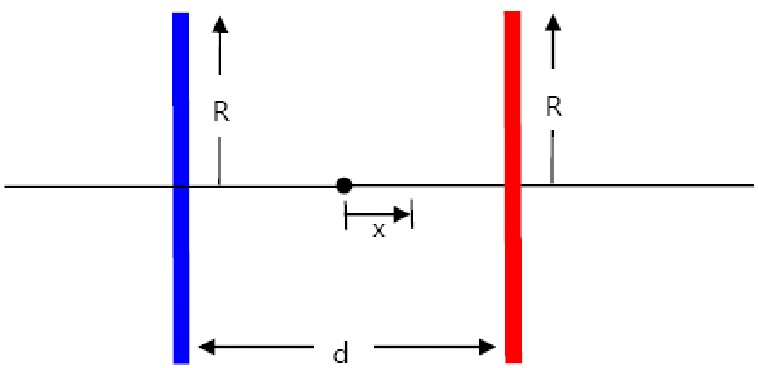
- 도선이 N번 감겨 있는 반지름이 R인 동일한 두 개의 나란한 코일에 정상전류 I가 흐를 때, 코일 중심을 관통하는 축 상에서의 자기장의 세기가 다음임을 보여라.

$$B = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[(x-d/2)^2+R^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[(x+d/2)^2+R^2\right]^{3/2}}$$



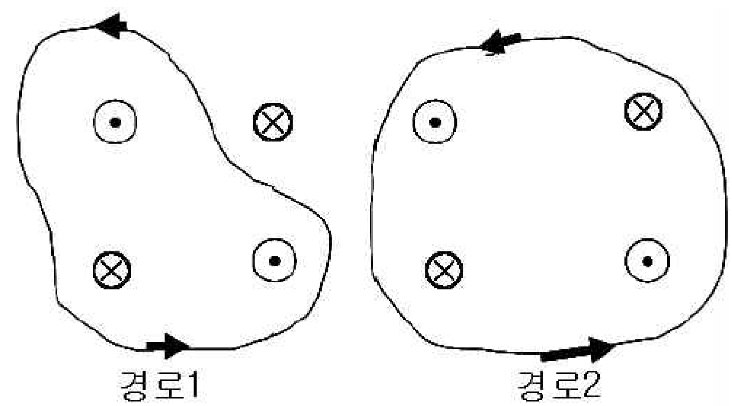
» 도선이 N번 감겨 있는 반지름이 R인 동일한 두 개의 나란한 코일에 정상전류 I가 흐를 때, 코일 중심을 관통하는 축 상에서의 자기장의 세기가 다음임을 보여라.

$$B = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[(x-d/2)^2 + R^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[(x+d/2)^2 + R^2\right]^{3/2}}$$



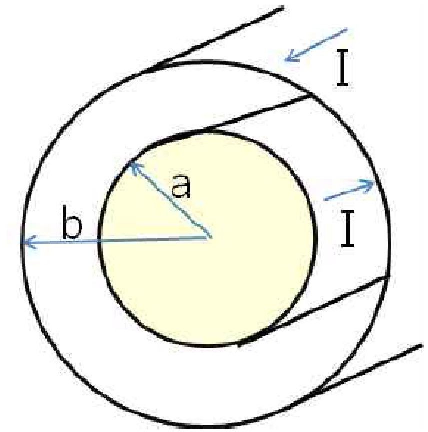
2011-2-final

5. 그림의 여덟 개의 도선에 각각 I_0 의 전류가 지면에 수직한 방향으로 흐르고 있다. 경로 1과 2 에 대한 자기장의 선적분 $\oint_c \vec{B} \cdot \vec{dl}$ 를 구하라. [10점, 난이도 하]



2013-2-final

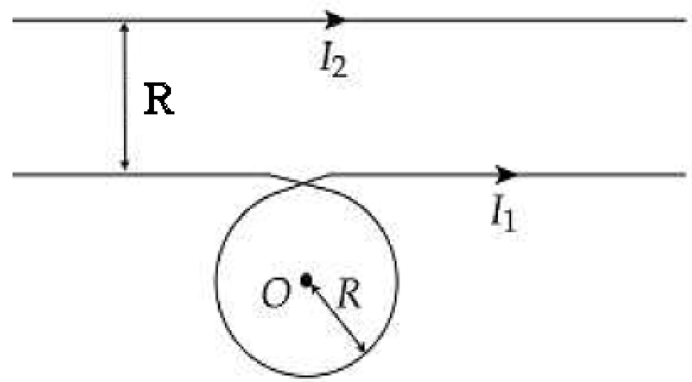
4. 반지름이 b인 무한히 길고 얇은, 금속 파이프를 따라 그림과 같은 방향으로 일정한 전류 I가 흐른다. 그 내부에는 반경이 a인 굵은 도선을 따라 전류 I가 도선의 단면에 골고루 분포되어 반대방향으로 흐른다. 다음에 답하라.
(난이도 중, 10점)



(가) 내부의 굵은 도선 안에서의 $(r<a)$ 자기장의 크기와 방향을 구하라.

(나) 전체 도선 외부의 $(r>b)$ 자기장의 크기와 방향을 구하라.

3. 다음의 그림과 같이 두께를 무시할 수 있는 두 개의 무한도선(직선, 직선+원형 고리)에 전류 I_2 과 I_1가 흐르고 있다.(난이도 중15점)



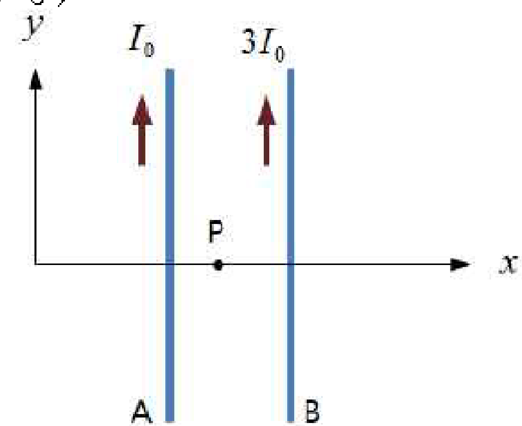
(가) 앙페르의 법칙을 이용하여 전류 I_2가 도선에서 r 떨어진 곳에 만드는 자기장의 세기를 구하라.(5점)

(나) 전류 I_1 & I_2가 반지름 R의 원형 고리 중심에 만드는 자기장의 크기 및 방향을 하시오. 참고로 원형고리전류가 중심에 만드는 자기장의 세기는 $B = \mu_0 I / 2r$ 이다. (5점)

(다) 이제 I_2 전류의 방향이 바뀌었다고 가정하자. 원형고리의 중심에서의 자기장이 0(zero)이 되도록 하는 전류 I_2의 값을 구하라.(5점)

2015-2-final

1. 다음 그림은 무한히 긴 두 직선 도선 A와 B가 x축에 수직으로 xy평면상에서 서로 평행하게 놓여있는 것을 나타낸다. 두 직선 도선 A와 B에는 각각 I_0와 $3I_0$의 전류가 흐르며 x축 위의 P점에서 자기장의 세기는 영이다. 다음의 질문들에 각각 답하시오. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} Tm/A$) (20점)(난이도 중)



(가) 도선 A와 B의 위치가 각각 $x_A = 4cm$와 $x_B = 8cm$라면 P점의 위치 x_P는 얼마인가? (5점)

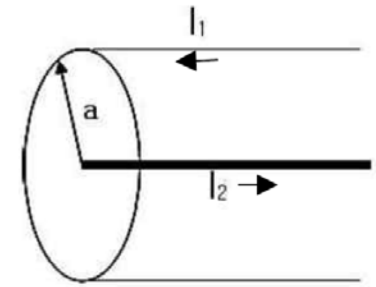
(나) $I_0 = 1A$라면, 두 도선 중간 지점에서의 자기장의 크기와 방향을 구하시오. (5점)

(다) 두 도선 사이 작용하는 단위길이 당 힘의 크기는 얼마인가? (10점)

2015-2-final

2. 그림과 같이 반지름이 a 인 원통형 파이프 껍질을 따라 전류 I_1이 흐르고 중심의 철심을 따라 전류 I_2가 반대방향으로 흐르고 있다. 앙페르법칙을 이용하여 도선 중심축으로부터의 거리가 r 인 점에서의 자기장의 세기를 다음의 경우에 대해 각각 구하시오. (10점)(난이도 하)

(가) 파이프의 안쪽 공간, (r<a) (5점)



(나) 파이프 밖의 빈 공간, (r>a) (5점)