

23. 패러데이 법칙, 유도

>>> 계수 및 교류회로

- 23.1 패러데이의 유도 법칙
- 23.2 운동 기전력
- 23.3 렌츠의 법칙
- 23.4 유도 기전력과 전기장
- 23.5 유도 계수
- 23.6 RL 회로



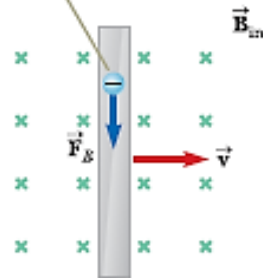
23.1 패러데이의 유도 법칙

변하는 자기장에 의해 회로에 유도기전력이 생기고 그로 인해 유도전류가 흐르게 된다.



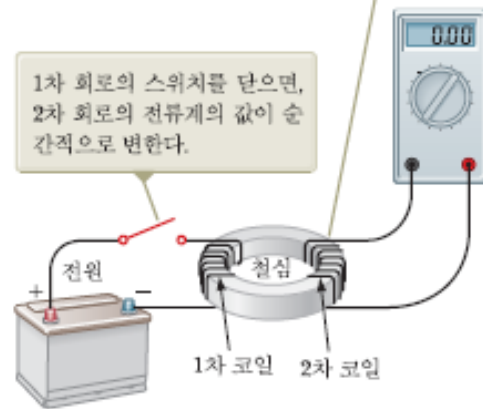
마이클 패러데이
Michael Faraday, 1791 ~ 1867
영국의 물리학자 겸 화학자

도체 내의 대전 입자에 작용하는 자기력 때문에 도체 내에 전류가 유도된다.

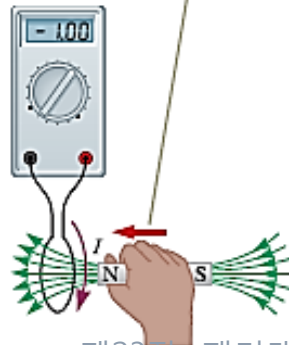


2차 회로에 유도되는 기전력은 2차 코일을 통과하는 자기장의 변화에 기인한 것이다.

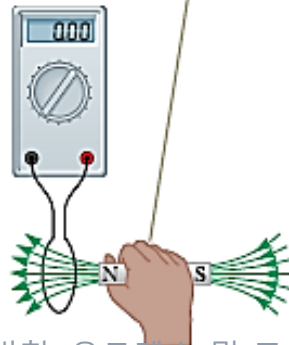
1차 회로의 스위치를 닫으면, 2차 회로의 전류계의 값이 순간적으로 변한다.



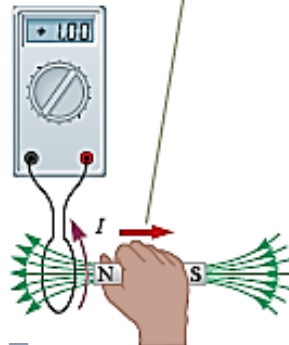
자석이 민감한 전류계에 연결된 도선 고리를 향해 움직일 때, 전류계는 도선 고리에 전류가 유도됨을 보여 준다.



자석을 정지 상태로 유지하면, 고리 안에 자석이 있더라도, 유도 전류는 만들어지지 않는다.

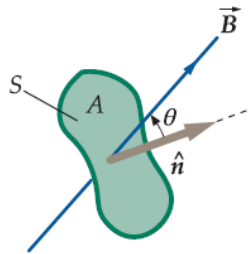


고리로부터 자석이 멀어질 때, 전류계는 유도 전류의 방향을 a에서와 반대로 보여 준다.



패러데이의 유도 법칙

자기선속(magnetic flux)



$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA$$

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n} A = BA \cos \theta = B_n A$$

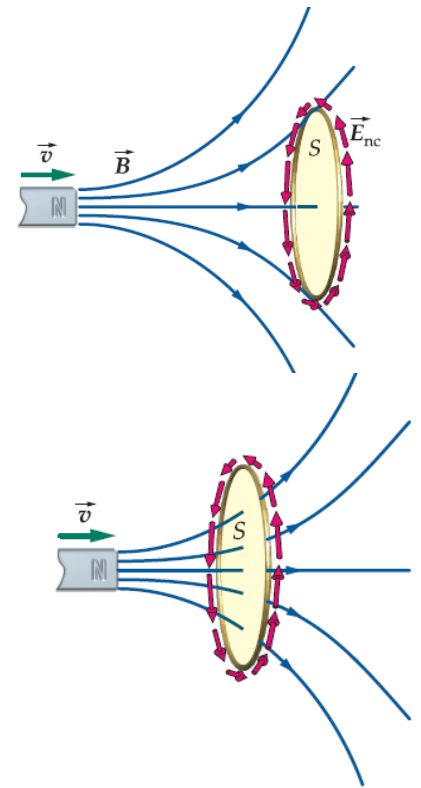
유도기전력

회로에 유도된 기전력은 회로를 통과하는 자기선속의 시간 변화율과 같다.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

변화하는 자기장 내에 있는 회로의 유도기전력



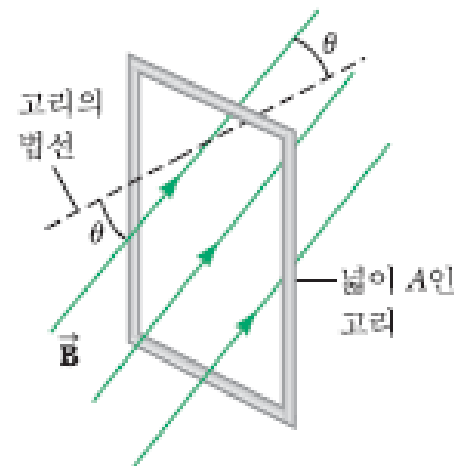
만약 회로가 같은 면적을 가진 N 개의 고리로 묶여진 코일이고, Φ_B 가 고리 하나를 통과하는 자기선속이라면, 기전력은 모든 고리에 의해 유도된다.

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

오른쪽 그림처럼, 면 A 를 둘러싸는 고리 하나가 균일한 자기장 B 안에 놓여 있다고 가정하자.

고리를 통과하는 선속

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA \cos \theta = B \cos \theta \int dA = BA \cos \theta$$



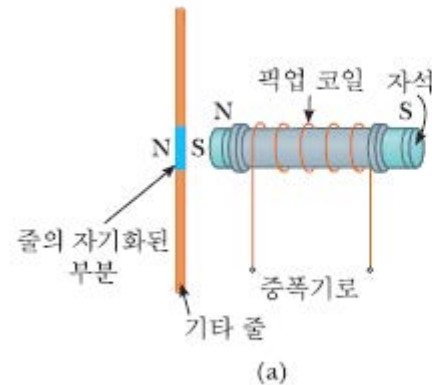
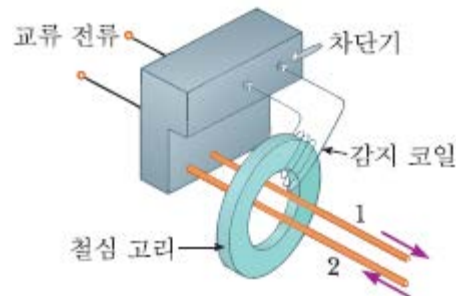
고리에 유도되는 기전력

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BA \cos \theta)$$

자기장의 크기, 고리의 면적 또는/및 자기장과 고리면에 수직인 선이 이루는 각도가 변하면 기전력이 유도될 수 있다.

◎ 패러데이 법칙의 몇 가지 응용(Some Applications of Faraday's Law)

- ▶ 누전 차단기(GFI)
- ▶ 전기 기타의 음을 발생시키는 방법



예제 23.1 코일에 기전력 유도하기

도선으로 200회 감긴 코일이 있다. 코일은 각각 한 변의 길이가 $d=18\text{cm}$ 인 정사각형으로 되어 있고, 코일의 면에 수직으로 균일한 자기장이 가해진다. 0.80초 동안 자기장이 0에서 0.50T로 일정하게 변한다면, 자기장이 변할 때 코일에 유도되는 기전력의 크기를 구하라.

풀이

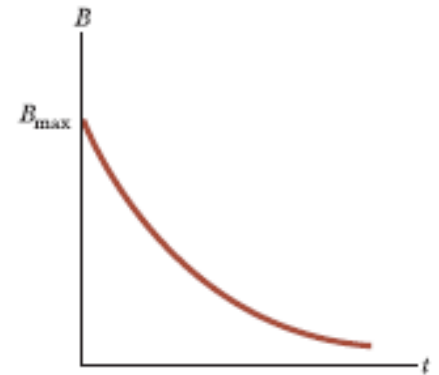
$$|\mathcal{E}| = N \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = N \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = NA \frac{\Delta B}{\Delta t} = Nd^2 \frac{B_f - B_i}{\Delta t} = 4.0V$$

예제 23.2 지수적으로 감소하는 자기장

넓이 A 인 닫힌 회로가 회로면에 대해 수직으로 지나가는 자기장 내에 놓여 있다. 자기장 \mathbf{B} 의 크기는 시간에 따라 $B = B_{\max} e^{-at}$ 로 변한다(a 는 상수). 즉 $t = 0$ 일 때는 자기장이 B_{\max} 이고, $t > 0$ 일 때는 자기장이 지수적으로 감소한다. 닫힌 회로에서 유도기전력을 시간의 함수로 구하라.

풀이

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(AB_{\max}e^{-at}) = -AB_{\max}\frac{d}{dt}e^{-at} \\ &= aAB_{\max}e^{-at}\end{aligned}$$



23.2 운동 기전력

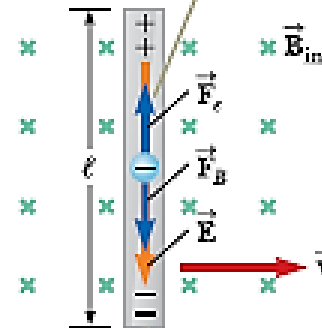
일정한 자기장 내에서 움직이는 도체에 유도되는 기전력(운동 기전력)

$$qE = qvB$$

이 될 때까지 전류는 흐른다. 따라서

$$\Delta V = E\ell = B\ell v$$

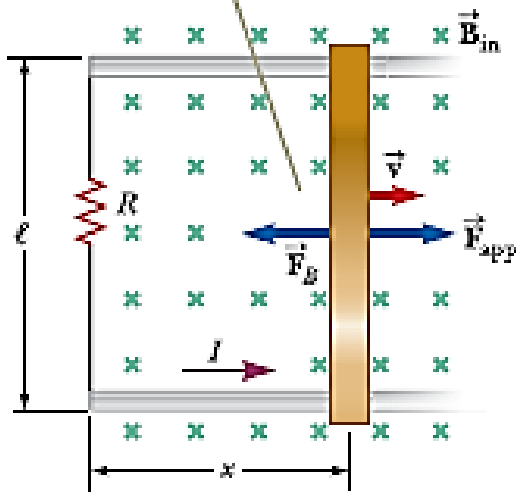
정상 상태에서 도선의 전자에 작용하는 전기력과 자기력은 균형을 이룬다.



전자가 받는 자기력에 의해, 도체 양 끝이 반대 부호로 대전되어 도체에 전기장을 일으킨다.

도체가 균일한 자기장 내를 움직이는 동안, 도체 양끝의 전위차는 계속 유지된다. 만약 운동 방향이 반대로 되면 전위차의 극성도 반대로 된다.

반시계 방향의 전류 I 가 코일에 유도된다. 막대에 작용하는 자기력 \vec{F}_B 는 이 운동을 방해한다.



운동하는 도체가 폐회로의 일부로 구성될 경우,

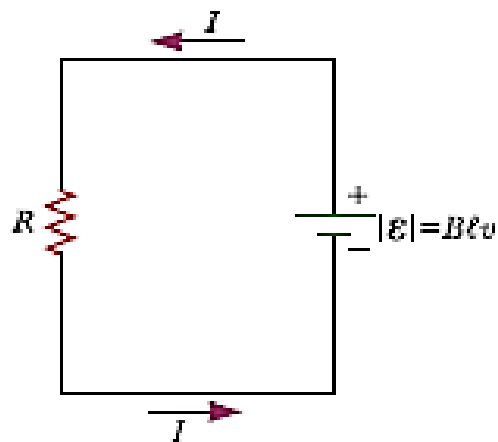
$$\Phi_B = B\ell x$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x)$$

$$= -B\ell \frac{dx}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -B\ell v \qquad I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

막대가 등속 운동한다면 막대에 흐르는 전류에 의한 자기력과 외력이 같아야 하므로 외력이 전달한 일률은?



$$F_{app} = F_B = I\ell B$$

$$P = F_{app} v = (I\ell B)v = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R} = \frac{I^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

예제 23.3 회전하고 있는 막대에 유도되는 운동 기전력

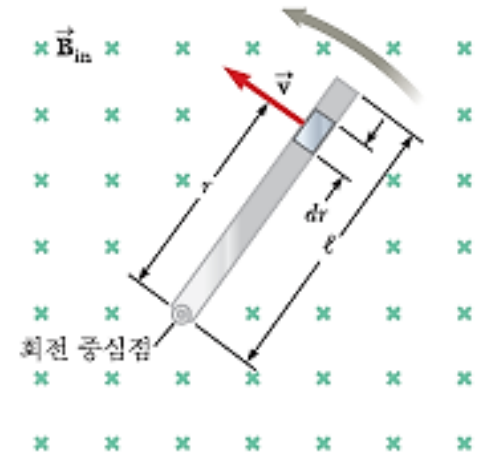
길이 l 인 도체 막대가 막대 끝의 회전축에 대해 일정한 각속력 ω 로 회전하고 있다. 그림과 같이 균일한 자기장 \mathbf{B} 가 회전면에 대해 수직으로 작용하고 있다. 막대 양 끝에 유도되는 운동 기전력을 구하라.

풀이

$$d\mathcal{E} = Bv \, dr$$

$$\mathcal{E} = \int Bv \, dr$$

$$= B \int v \, dr = B\omega \int_0^l r \, dr = \frac{1}{2} B\omega l^2$$



예제 23.4 미끄러지고 있는 막대에 작용하는 자기력

그림과 같이 도체 막대가 마찰이 없는 두 평행 레일 위를 움직이고, 균일한 자기장이 그림의 면 안쪽 방향으로 향하고 있다. 막대의 질량은 m 이고 길이는 ℓ 이다. $t=0$ 일 때, 막대의 처음 속도는 오른쪽 방향으로 \mathbf{v}_i 이다.

(A) 뉴턴의 법칙을 사용하여 시간에 대한 함수로 막대의 속도를 구하라.

풀이

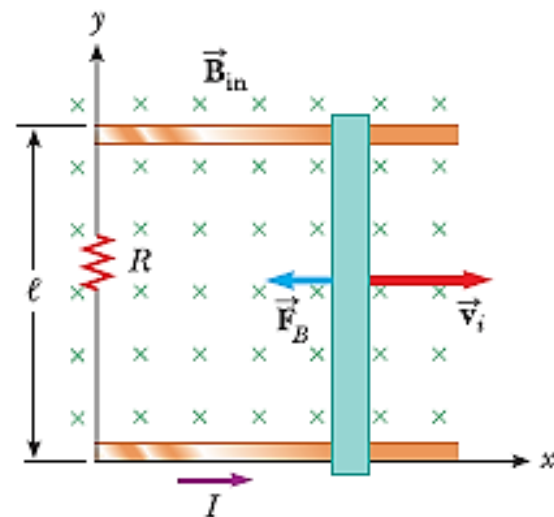
$$F_x = ma = m \frac{dv}{dt} = -I\ell B$$

$$m \frac{dv}{dt} = -I\ell B = -\frac{B^2 \ell^2}{R} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2 \ell^2}{mR}\right) dt$$

$$\int_{v_i}^v \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 \ell^2}{mR} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\left(\frac{B^2 \ell^2}{mR}\right) t$$



$$(1) \quad v = v_i e^{-t/\tau}$$

$$\text{where, } \tau = \frac{mR}{B^2 \ell^2}$$

예제 31.3 미끄러지고 있는 막대에 작용하는 자기력(계속)

(B) 같은 결과를 에너지로 접근하여 얻을 수 있음을 보여라.

풀이 고립계로 모형화하면, 막대가 잃는 운동에너지가 저항기에서의 내부 에너지 변화와 같게 된다.

$$P_{\text{resistor}} = -P_{\text{bar}} \qquad I^2 R = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$I^2 R = \left(\frac{v B \ell}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R} = -m v \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{v} = - \left(\frac{B^2 \ell^2}{m R} \right) dt$$

(A)에서 얻은 결과와 같다.

2016-11-17

2016-11-17

2016-11-17

2016-11-17

2016-11-17



23.3 렌츠의 법칙

폐회로에서 유도 전류는 폐회로로 둘러싸인 부분을 통과하는 자기선속 변화를 방해하는 방향으로 자기장을 발생시킨다.

렌츠의 법칙(Lenz's law) => 에너지 보존 법칙

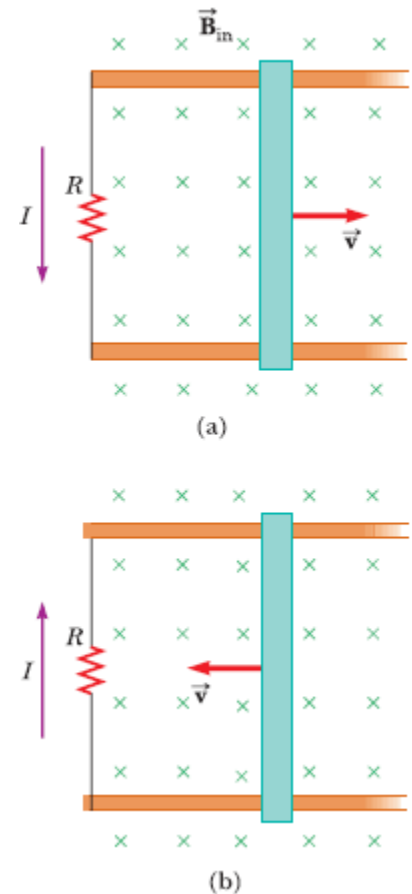
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

막대를 오른쪽으로 살짝 밀면 시계 반대 방향의 유도 전류가 발생한다. 전류의 방향이 반대, 즉 시계 방향이라면?

막대가 받는 자기력은 오른쪽 방향

막대는 가속, 속도 증가, 유도 전류 증가

계의 에너지는 무한대로 증가! → 불가능

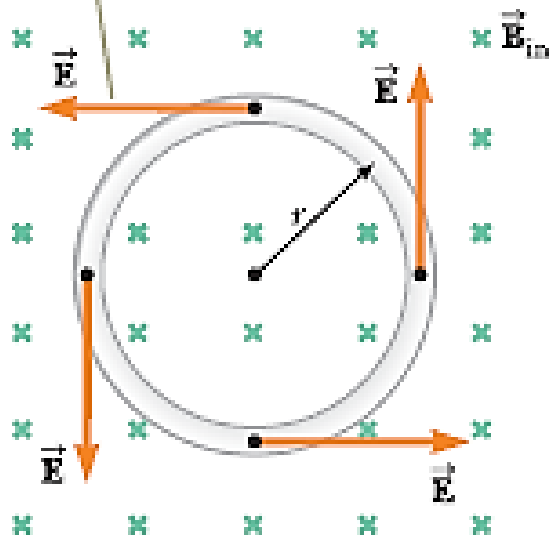


23.4 유도 기전력과 전기장

변하는 자기선속이 도선 고리에 기전력과 전류를 유도한다. 결국, 변하는 자기선속의 결과로서 도체에 전기장이 발생된다.

정전하들이 만드는 정전기장과 달리, 이 유도 전기장은 비보존적이다.

\vec{E} 가 시간에 따라 변하면, 전기장이 고리의 원주에 대해 접선 방향으로 유도된다.



임의의 폐경로에 대한 기전력은 그 경로를 따라 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ 로 선적분하여 구할 수 있다.

$$q\mathcal{E} = qE(2\pi r) \quad E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

$$E = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d(B\pi r^2)}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

예제 23.5 솔레노이드에서 변하는 자기장이 유도하는 전기장

반지름 R 인 긴 솔레노이드가 단위 길이당 n 회씩 도선으로 감겨 있고 사인모양으로 시간에 따라 변하는 전류 $I = I_{\max} \cos \omega t$ 가 흐르고 있다. I_{\max} 는 최대 전류이며 ω 는 교류 전원의 각진동수이다.

(A) 긴 중심축으로 부터 거리 $r > R$ 만큼 떨어진 솔레노이드 바깥 지점에서의 유도 전기장 크기를 구하라.

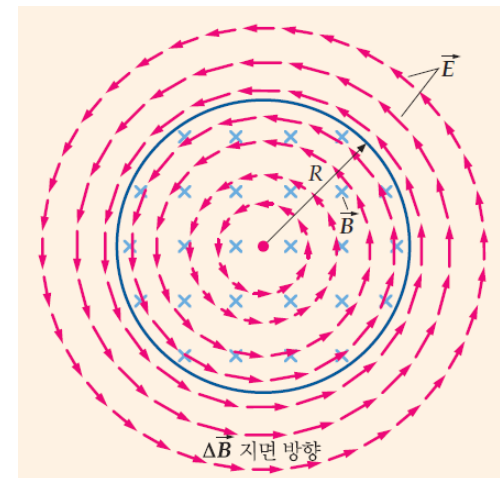
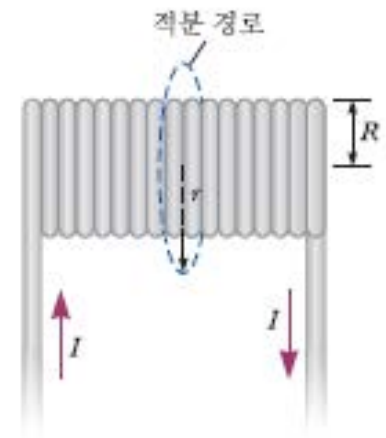
풀이

$$(1) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$(2) \quad B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_{\max} \cos \omega t$$

$$(3) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi R^2 \mu_0 n I_{\max} \frac{d}{dt}(\cos \omega t) \\ = \pi R^2 \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t$$

$$(4) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(2\pi r) \\ E(2\pi r) = \pi R^2 \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t \\ E = \frac{\mu_0 n I_{\max} \omega R^2}{2r} \sin \omega t \quad (r > R)$$



(B) 중심축에서 거리 r 만큼 떨어진 솔레노이드 내부에서 유도 전기장의 크기를 구하라.

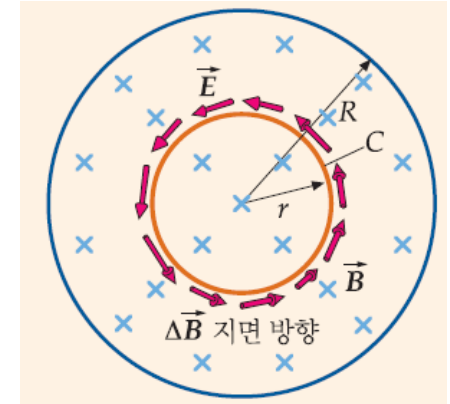
풀이

$$(5) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$(6) \quad -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n I_{\max} \frac{d}{dt}(\cos \omega t) \\ = \pi r^2 \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t$$

$$E = (2\pi r) = \pi r^2 \mu_0 n I_{\max} \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{\mu_0 n I_{\max} \omega}{2} r \sin \omega t \quad (r < R)$$



23.5 유도 계수 Inductance

회로의 전류가 시간에 따라 변하면, 원래 전류 흐름을 일으킨 기전력과 반대 방향의 유도 기전력이 발생하는 현상을 **자체 유도(self induction)**라고 한다.

자기선속의 크기는 자기장의 세기에 비례하고 자기장의 세기는 회로에 흐르는 전류에 비례하므로, 자체 유도 기전력은 항상 전류의 시간 변화율에 비례하게 된다.

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

L (자체 유도 계수 또는 인덕턴스) : 회로의 기하학적인 모양과 물리적인 특성에 따라 정해진다.

L 의 단위 $1 \text{ H} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$

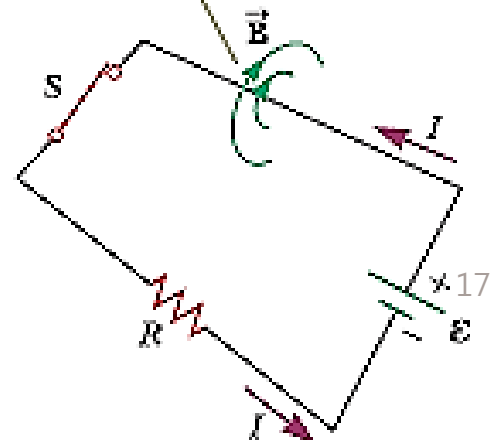
$$\mathcal{E}_L = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad \rightarrow$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}$$



헨리
Joseph Henry, 1797~1878
미국의 물리학자

스위치를 닫으면 전류는 회로를 통과하는 자기선속을 만들고, 전류가 증가함에 따라 변화하는 자기선속은 유도 기전력을 만든다.



예제 23.6 솔레노이드의 자체 유도 계수

길이 ℓ 인 원통에 도선이 균일하게 N 번 감긴 솔레노이드가 있다. 이 솔레노이드의 반지름보다 대단히 크며 솔레노이드 내부가 비어 있다. (A) 솔레노이드의 자체 유도 계수를 구하라. (B) 단면적이 4.00cm^2 이고, 길이가 25.0 cm 인 원통에 300회 코일이 감긴 솔레노이드의 자체 유도 계수를 구하라. (C) 50.0A/s 의 비율로 전류가 감소할 때 솔레노이드의 자체 유도 기전력을 구하라.

풀이

$$\Phi_B = BA = \mu_0 n I A = \mu_0 \frac{N}{\ell} I A$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A$$

$$L = (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{(300)^2 (4.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2)}{25.0 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

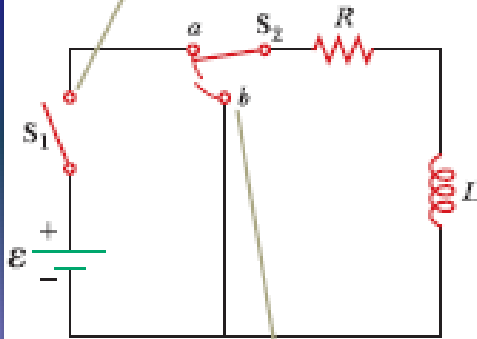
$$= 1.81 \times 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2 / \text{A} = 0.181 \text{ mH}$$

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} = -(1.81 \times 10^{-4} \text{ H})(-50.0 \text{ A/s})$$

$$= 9.05 \text{ mV}$$

23.6 RL 회로

스위치 S_1 을 닫으면 전류가 증가하고 증가하는 전류에 반대하는 기전력이 인덕터에 유도된다.



스위치 S_2 가 b 의 위치로 움직이면 전지는 더 이상 회로의 일부가 아니며 전류는 감소한다.

솔레노이드와 같이 코일을 포함한 회로는 전류의 순간적인 증가나 감소를 방해하는 자체 유도 계수를 갖는다. 자체 유도 계수가 큰 회로 소자를 인덕터(inductor)라 한다.

처음에 회로에는 전류가 흐르지 않으며, S_2 스위치가 a 점에 연결되어 있는 상태에서 S_1 스위치를 닫는 경우, 키르히호프의 법칙을 적용하면

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\text{Let } x = \frac{\mathcal{E}}{R} - I, \quad dx = -dI \quad \rightarrow \quad x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

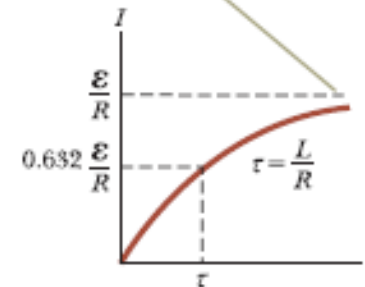
$$\ln \frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L} t$$

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

$t=0$ 에서 스위치 S_1 을 닫으면 전류는 최대값 \mathcal{E}/R 까지 증가한다.



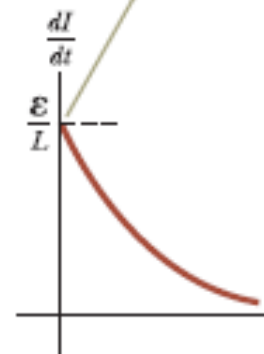
$$\tau = \frac{L}{R}$$

: RL 회로의 **시간상수**(time constant)로서, 0에서부터 최종 값의 약 63.2%가 되는 데까지 걸리는 시간

전류의 시간변화율은

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau}$$

전류의 변화율은 스위치 S_1 을 닫은 $t=0$ 에서 최대가 된다.



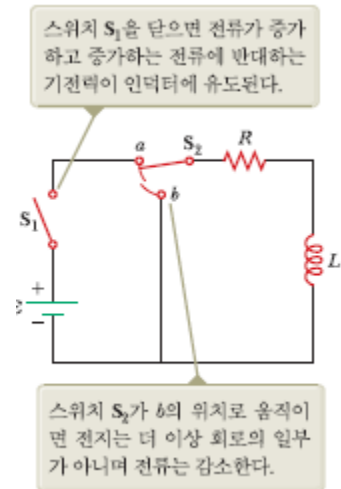
전류가 나중 평형값이 되도록 스위치 S_2 가 충분히 오랜 시간 동안 점 a 에 놓여 있었다고 하자. 그 다음 스위치가 a 에서 b 로 옮겨지면 전지가 연결되지 않은 오른쪽의 닫힌 회로가 된다.

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \text{에서 } \mathcal{E} = 0 \text{을 대입하면}$$

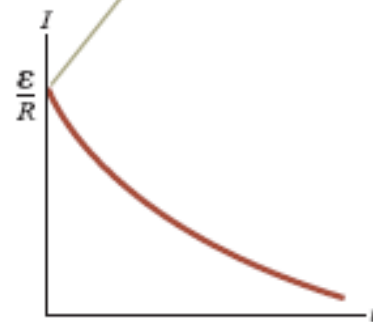
$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

이 미분 방정식의 해는 위의 과정을 참조하여 풀면

$$I = I_i e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$



$t=0$ 에서 스위치가 b 의 위치로 움직이고, 전류는 최대인 \mathcal{E}/R 에서 감소하기 시작한다.

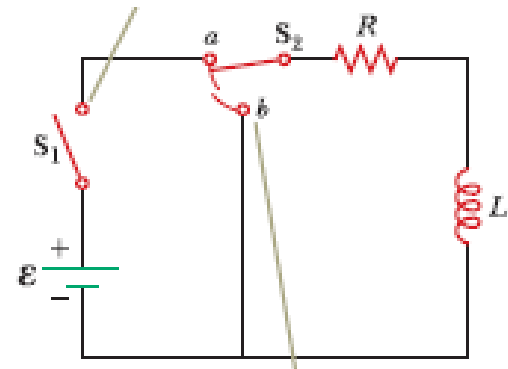


예제 23.7 RL 회로의 시간상수

그림과 같이 $L = 30.0 \text{ mH}$ 의 인덕터와 $R = 6.00 \Omega$ 의 저항기 그리고 $\mathcal{E} = 12.0\text{V}$ 의 전지가 직렬로 연결된 회로가 있다.

(A) 회로의 시간 상수를 구하라.

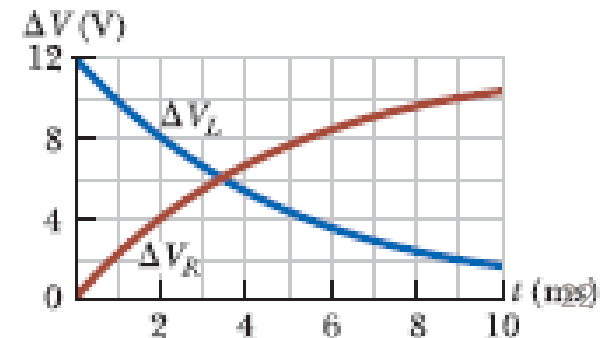
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30.0 \times 10^{-3} \text{ H}}{6.00 \Omega} = 5.00 \text{ ms}$$



(B) 스위치 S_2 는 a 의 위치에 있고 $t=0$ 에서 스위치 S_1 을 닫는다. $t=2\text{ms}$ 에서 회로에 흐르는 전류의 크기를 계산하라.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12.0 \text{ V}}{6.00 \Omega} (1 - e^{-2.00 \text{ ms}/5.00 \text{ ms}})$$

(C) 인덕터 양단의 전위차와 저항기 양단의 전위차를 비교하라.



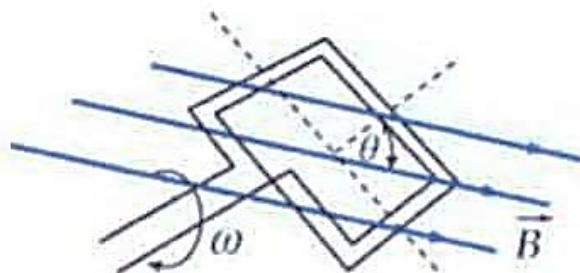


단원 마무리 과제

다음 문제는 풀어서 제출 (다음 시간까지 제출)

- » 2009년 2학기 기말 기출시험 문제: 7번
- » 2010년 2학기 기말 기출시험 문제: 5번
- » 2011년 2학기 기말 기출시험 문제: 4번
- » 2012년 2학기 기말 기출시험 문제: 5번
- » 2014년 2학기 기말 기출시험 문제: 5번
- » 2015년 2학기 기말 기출시험 문제: 3번

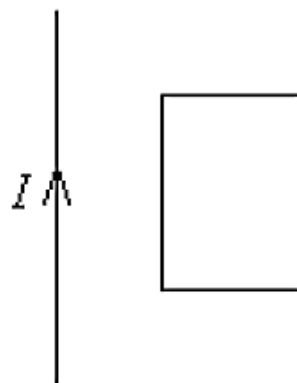
7. 다음 그림과 같이 4 cm^2 면적에 200번 감긴 코일이 0.5 T 의 균일한 자기장 안에서 회전한다. [15점, 난이도 중]



(가) 최대 기전력이 10 V 가 되려면 각속도 ω 는 얼마여야 하는가?

(나) 이 기전력에 $10\text{ }\mu\text{F}$ 의 축전기를 연결했을 때, 이에 흐르는 최대전류 I_{max} 와 제곱평균제곱근 전류 I_{rms} 를 구하라.

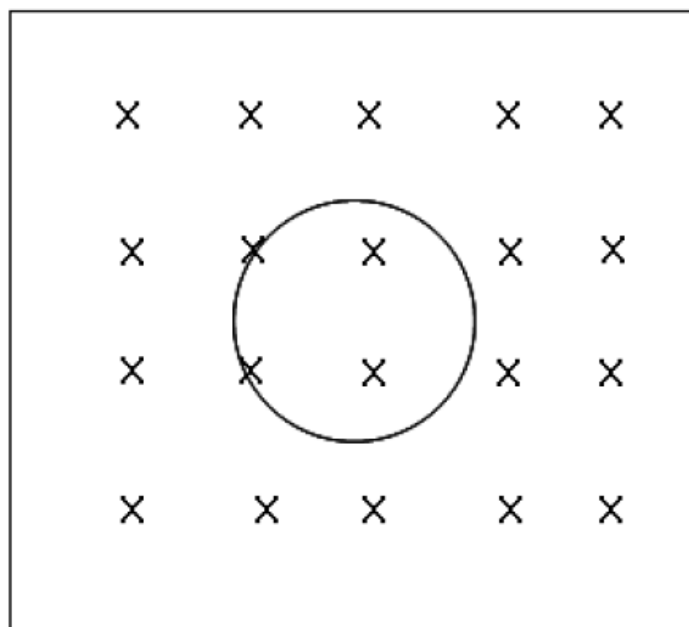
5. 그림에서 전류 I 가 일정하게 증가하고 있다. 다음에 답하시오. [10점, 난이도 중]



(가) 사각형 도선에 유도되는 전류의 방향은?

(나) 사각형 도선은 어느 쪽으로 힘을 받는가?

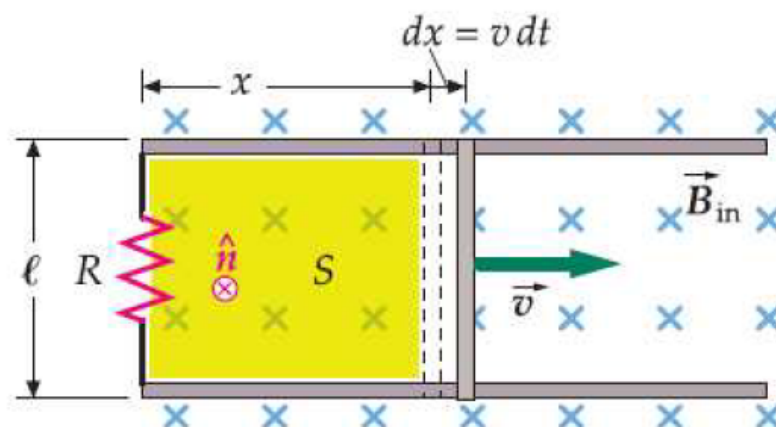
4. 아래 그림과 같이 반경이 10cm 이고 50회 감긴 코일을 통과하여 나오는 외부 자기장의 수직성분이 3.6초 사이에 0에서 1.8T 로 증가한다.(단, π 는 문자로 그냥 두시오)[10점, 난이도 중]



(가) 코일에 유도되는 기전력의 크기를 구하여라. (5점)

(나) 코일의 저항이 5.0Ω 인 경우, 코일에 흐르는 유도전류의 크기와 방향은 얼마인가?(5점)

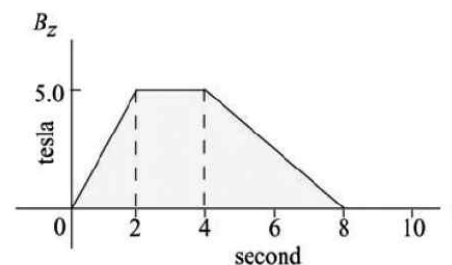
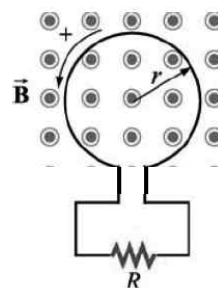
5 그림은 저항으로 연결되어 있는 도체 레일 위에서 오른쪽으로 미끄러져 가는 얇은 도체 막대를 보여준다. 지면을 향하는 균일한 자기장 $B=0.6\text{ T}$, $v=8\text{ m/s}$, $l=20\text{ cm}$, $R=24\text{ }\Omega$ 이다. [15점, 난이도 하]



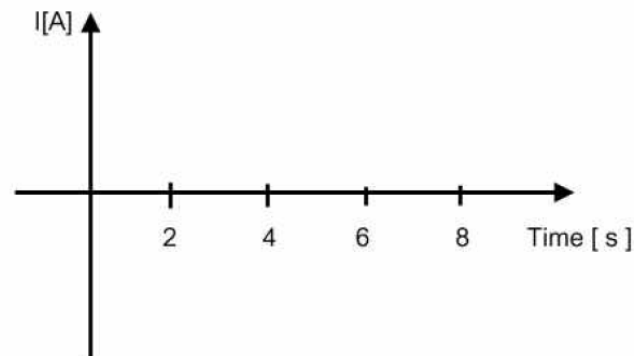
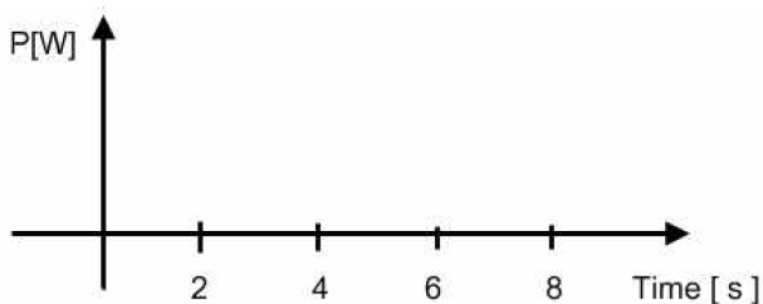
(가) 이 폐회로에 유도되는 기전력의 크기를 구하여라.(5점)

(나) 저항 R 에 흐르는 전류의 세기와 방향(시계방향 또는 반시계방향)을 구하여라.(5점)

5. 일정한 자기장 B 가 수직으로 작용하는(+ Z축 방향) 영역에 그림과 같은 저항을 무시할 수 있는 금속 고리가 놓여 있다. 이때 자기장은 그래프와 같이 시간에 따라 변한다고 하자. 고리 면적은 $\pi r^2 = 0.8 \text{ m}^2$ 이고 저항 $R=2 \text{ } \Omega$ 과 연결되어 있다. (난이도 상 15점)



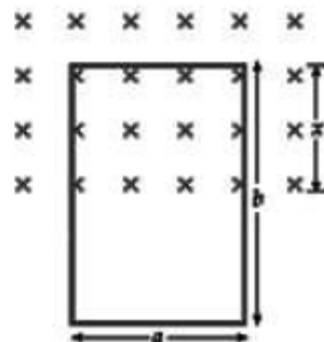
(가) 각 시간 영역에서 회로에 유도되는 전류를 구하고, 그래프로 나타내어라. 이때 전류의 부호는 그림에서 표시된 것처럼 반시계 방향을 '+'로 하자. (5점)



(나) 각 시간 영역에 대하여, 저항에서 소비되는 전력을 구하고, 그래프로 나타내어라. (5점)

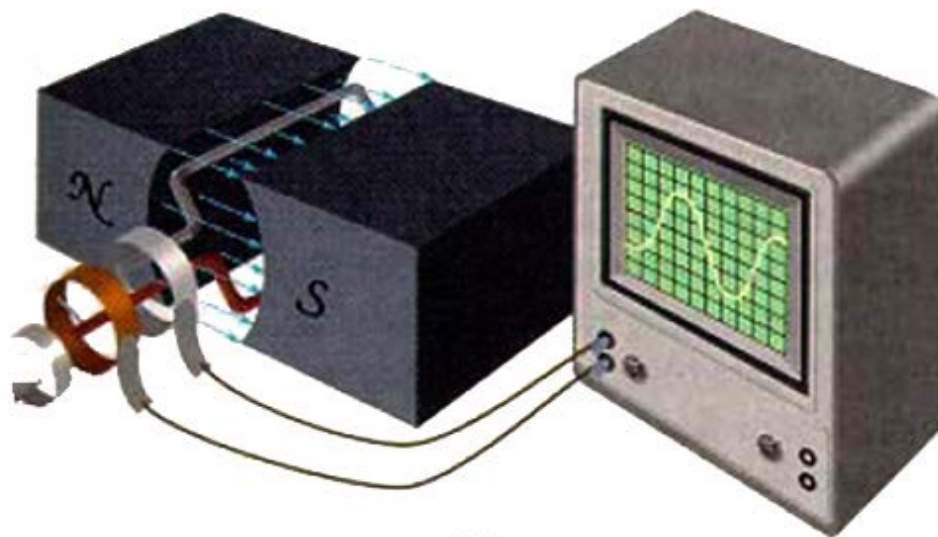
3. 감은 수 $N=80$ 회, 가로 $a=20.0$ cm, 세로 $b=30.0$ cm인 직사각형 코일의 절반이 지면을 향하는 $B=0.5$ T인 자기장 속에 놓여 있다. 코일의 저항 R 은 10.0 Ω 이고 $x=15.0$ cm이다. (25점)(난이도 중)

(가) 자기장이 1초 동안 일정하게 0.5 T에서 1.0 T로 증가하였다. 이때 유도전류의 크기와 방향을 구하시오. (10점)

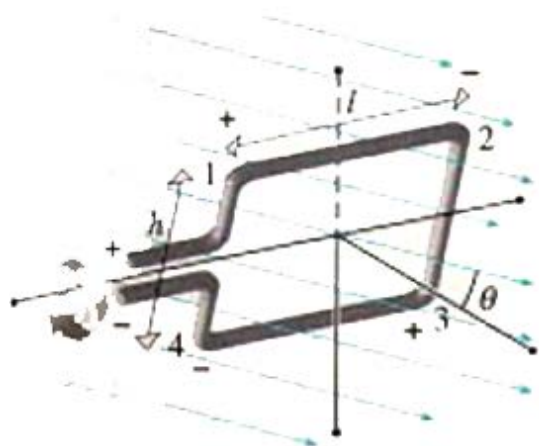


(나) 이후 자기장이 1.0 T인 정자기장 상태에서 코일이 2.0 m/s로 왼쪽으로 움직일 때 유도전류의 크기와 방향을 구하시오. (10점)

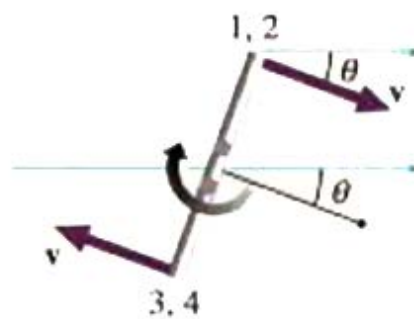
(다) 위의 (나) 경우에 N 번 감긴 직사각형 코일이 받는 힘의 방향을 구하시오. (5점)



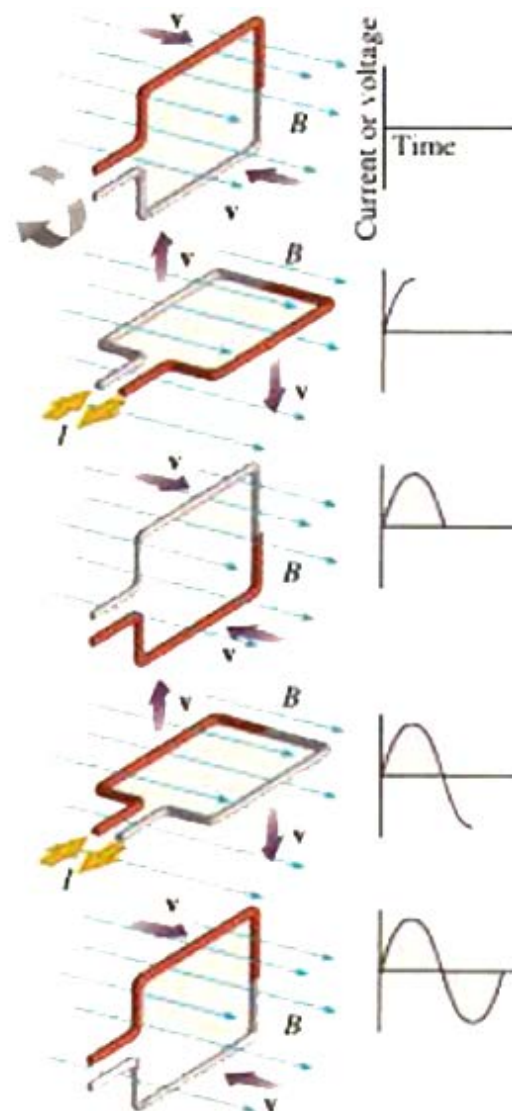
(a)



(c)



(d)



(b)

